Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серiи IV-го семестра № 5—6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 641—642.

При этомъ № всѣмъ подписчикамъ разсылается проспектъ журнала „Математическiй Листокъ“.

Ариѳметическая, геометрическая и гармоническая средины.

П. Флорова.

Предисловiе.

Въ № 630 „Вѣстника“ помѣщена переведенная съ итальянскаго статья Кварры подъ названiемъ: „Объ ариѳметическомъ и геометрическомъ среднемъ“. (Историческiй очеркъ). Въ этомъ историческомъ очеркѣ приводятся имена Бертрана, Коши, Пеано и Катанiа. Авторъ очерка по разнымъ причинамъ не удовлетворяется изложенiемъ поименованными учеными ученiя „Объ ариѳметическомъ и геометрическомъ среднемъ“ и находитъ приводимыя ими доказательства то сложными, то расплывчатыми, то искусственными, то страдающими комбинированными недостатками. На этомъ основанiи Кварра предлагаетъ собственное доказательство теоремы „Объ ариѳметическомъ и геометрическомъ среднемъ“, признавая его „болѣе простымъ“. Однако, свое болѣе простое доказательство Кварра примѣняетъ только къ тремъ перемѣннымъ, оговариваясь, что „такимъ же образомъ ведется доказательство для большаго числа величинъ“.

Таковъ историческій обзоръ вопроса. Онъ оставляетъ мѣсто исчерпывающему изложенію ученія о среднихъ величинахъ.

Этимъ объясняется появленіе „Новаго вывода соотношенія между ариѳметическимъ и геометрическимъ средними“, предложеннаго М. Шульманомъ въ № 633 „Вѣстника“.

Выводъ М. Шульмана свободенъ отъ упрековъ Кварры. Такимъ же свойствомъ обладаютъ и тѣ способы сравненія среднихъ величинъ, которымъ посвящается настоящая статья.

---

§ 1. Опредѣленіе среднихъ величинъ.

Возьмемъ n положительныхъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n.$$

Ихъ ариѳметическая средина есть ихъ сумма, раздѣленная на ихъ число.

Геометрическая средина n перемѣнныхъ есть корень n-ой степени изъ ихъ произведенія.

Гармоническая средина тѣхъ же n чиселъ есть величина обратная ариѳметической срединѣ чиселъ обратныхъ даннымъ.

На основаніи этихъ опредѣленій гармоническая, геометрическая и ариѳметическая средины напишутся такъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\quad \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}.$$

Для случая двухъ перемѣнныхъ легко провѣряются слѣдующія неравенства

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} < \sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}.$$

Дѣйствительно, каждое изъ неравенствъ:

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} < \sqrt{a_1 a_2},\qquad \sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}$$

приводится къ виду:

$$0 < (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2.$$

что справедливо. При $a_1 = a_2$ знакъ неравенства замѣняется знакомъ равенства. Подмѣченное свойство срединъ двухъ перемѣнныхъ обобщается такъ: „гармоническая средина сколькихъ угодно перемѣнныхъ величинъ меньше ихъ геометрической средины, а эта послѣдняя, въ свою очередь, меньше ариѳметической средины тѣхъ же перемѣнныхъ".

Для доказательства этой теоремы намъ потребуется одно вспомогательное тождество и одно вспомогательное неравенство. Къ выводу ихъ сейчасъ и приступимъ.

§ 2. Выводъ вспомогательнаго тождества.

По биному Ньютона имѣемъ:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + C_{n+1}^3 x^3 + \cdots,$$

гдѣ вообще

$$C_{n+1}^i$$

означаетъ число сочетанiй изъ $n+1$ элементовъ по i. Перепишемъ предыдущее равенство такъ:

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x} = C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 x^1 + C_{n+1}^3 x^2 + \cdots.$$

Взявъ производную по x отъ каждой части этого равенства и умноживъ результатъ на x, найдемъ:

$$\frac{(1+x)^n(nx-1)+1}{x} = C_{n+1}^2 x + C_{n+1}^3 2x^2 + C_{n+1}^4 3x^3 + \cdots.$$

Положивъ здѣсь

$$x = \frac{1}{n}$$

получимъ:

$$n = C_{n+1}^2 \cdot \frac{1}{n} + C_{n+1}^3 \cdot \frac{2}{n^2} + C_{n+1}^4 \cdot \frac{3}{n^3} + \cdots.$$

Это и есть искомое тождество.

Элементарное индуктивное доказательство этого тождества дано В. М. Шлыгинымъ въ № 621 „Вѣстника".

§ 3. Выводъ вспомогательнаго неравенства.

Покажемъ, что при цѣломъ положительномъ n и при всякомъ положительномъ x справедливо неравенство:

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}.$$

По биному Ньютона находимъ:

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}=x+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{x}+C_{n+1}^3\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots.$$

Точно также

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=n+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{n}+C_{n+1}^3\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Составивъ разность найдемъ:

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=x-n+C_{n+1}^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right)+ \\ +C_{n+1}^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\cdots.$$

Мы хотимъ показать, что лѣвая часть больше нуля. Значитъ нужно обнаружить, что правая часть есть величина положительная. Поэтому нужно доказать справедливость неравенства:

$$0<x-n+C_{n+1}^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right)+C_{n+1}^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\cdots.$$

Будемъ разсматривать два случая:

1. $x<n$ и 2. $x>n$.

Случай I. Разность $n-x$ есть число положительное. Отъ раздѣленія на положительное число каждой части неравенства знакъ неравенства не перемѣнится. Поэтому будетъ:

$$1<C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{nx}+C_{n+1}^3\cdot\frac{n+x}{n^2x^2}+C_{n+1}^4\cdot\frac{n^2+nx+x^2}{n^3x^3}+\cdots.$$

Остается доказать, что это неравенство удовлетворяется при $x<n$. Но если $x<n$ и если во всѣхъ числителяхъ мы замѣнимъ n черезъ x, то мы уменьшимъ правую часть и получимъ болѣе сильное неравенство:

$$1<C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{nx}+C_{n+1}^3\cdot\frac{2}{n^2x}+C_{n+1}^4\cdot\frac{3}{n^3x}+\cdots.$$

Если это неравенство удовлетворится при $x<n$, то предшествующее ему и подавно удовлетворится. Умноживъ на x, будемъ имѣть:

$$x<C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{n}+C_{n+1}^3\cdot\frac{2}{n^2}+C_{n+1}^4\cdot\frac{3}{n^3}+\cdots.$$

Отсюда по тождеству, доказанному въ предыдущемъ параграфѣ находимъ:

$$x<n,$$

что и нужно было обнаружить.

Случай 2. Разность $n-x$ есть число отрицательное. Отъ раздѣленія на отрицательное число каждой части неравенства знакъ неравенства долженъ перемѣниться на обратный. Поэтому будетъ

$$1>C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{nx}+C_{n+1}^3\cdot\frac{n+x}{n^2x^2}+C_{n+1}^4\cdot\frac{n^2+nx+x^2}{n^3x^3}+\cdots.$$

Остается доказать, что это неравенство удовлетворяется при $x>n$. Но если $x>n$ и если во всѣхъ числителяхъ мы замѣнимъ n черезъ x, то мы увеличимъ правую часть и получимъ болѣе сильное неравенство:

$$1>C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{nx}+C_{n+1}^3\cdot\frac{2}{n^2x}+C_{n+1}^4\cdot\frac{3}{n^3x}+\cdots.$$

Если это неравенство удовлетворится при $x>n$, то предшествующее ему и подавно удовлетворится. Умноживъ на x будемъ имѣть:

$$x>C_{n+1}^2\cdot\frac{1}{n}+C_{n+1}^3\cdot\frac{2}{n^2}+C_{n+1}^4\cdot\frac{3}{n^3}+\cdots.$$

Отсюда по тождеству доказанному въ предыдущемъ параграфѣ находимъ:

$$x>n,$$

что и нужно было обнаружить.

§ 4. Методологическое примѣчаніе.

Неравенство

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}>n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

представляетъ собою рѣдкій случай анализа, на которомъ съ очевидностью выясняется понятіе о минимумѣ. Приведенное къ виду:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}<\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

оно съ такою же очевидностью выясняетъ понятіе о максимумѣ. Такого рода конкретные примѣры, иллюстрирующіе новыя понятія, обезпечиваютъ успѣшность элементарнаго преподаванія.

Но этимъ значеніе неравенства еще не исчерпывается. При

$$x=n-1 \quad \text{и} \quad x=n+1$$

оно соотвѣтственно приводитъ къ классическимъ неравенствамъ:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

при помощи которыхъ устанавливается первоначальное понятіе о числѣ e.

§ 5. Первый способъ сравненія геометрической и ариѳметической срединъ.

Неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

установлено нами при $n = 2$ (§ 2). Допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго числа n количествъ и докажемъ, что при этомъ условіи оно будетъ справедливымъ и для числа перемѣнныхъ $n+1$. Въ этомъ будетъ заключаться полное индуктивное доказательство неравенства.

Введемъ новое количество:

$$a_{n+1} > 0.$$

Умноживъ обѣ части неравенства:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$$

на a_{n+1}, получимъ:

$$a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n a_{n+1}$$

или

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} < \sqrt[n+1]{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n a_{n+1}}.$$

Для доказательства теоремы остается обнаружить справедливость неравенства

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n a_{n+1}} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

По освобожденіи отъ радикала это неравенство легко приводится къ виду:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^n \left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_{n+1}}\right).$$

Если введемъ обозначеніе

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_n} = y,$$

то получимъ:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \left(1+\frac{1}{y}\right)^n (1+y)$$

или что то же

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < y\left(1+\frac{1}{y}\right)^{n+1}.$$

Мы видѣли что это неравенство существуетъ при всякомъ положительномъ y (3). Теорема доказана.

Доказанное неравенство можно переписать такъ:

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a}}.$$

Введемъ обозначенія

$$a_1=\frac{1}{b_1},\quad a_2=\frac{1}{b_2},\ldots,\quad a_n=\frac{1}{b_n}.$$

Получимъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}} < \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

Отсюда видно, что гармоническая средина меньше геометрической. Это слѣдствіе можетъ быть представлено въ качествѣ самостоятельной теоремы.

§ 6. Первый способъ сравненія геометрической и гармонической срединъ.

Неравенство

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

обнаружено нами при $n=2$ (§ 1). Подвергнемъ это неравенство индуктивному анализу. Находимъ:

$$\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\right)^n < a_1 a_2 \ldots a_n$$

или

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\right)^n a_{n+1}} < \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}}.$$

Чтобы доказать теорему о сравненіи гармонической и геометрической срединъ, остается обнаружить справедливость неравенства:

$$\frac{n+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}} < \sqrt[n+1]{\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\right)^n a_{n+1}}$$

По освобожденіи отъ радикала это неравенство представляется въ видѣ:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \left[1+\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_{n+1}}\right]^n \left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_{n+1}\right].$$

Введя обозначеніе

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_{n+1}=z$$

получимъ:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \left(1+\frac{1}{z}\right)^z(1+z)$$

или что то же

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < z\left(1+\frac{1}{z}\right)^{n+1}.$$

Мы видѣли, что это неравенство существуетъ при всякомъ положительномъ z (§ 3). Теорема доказана.

Доказанное неравенство можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} < \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

Если введемъ обозначенія

$$\frac{1}{a_1}=b_1,\quad \frac{1}{a_2}=b_2,\ldots,\ \frac{1}{a_n}=b_n,$$

то получимъ:

$$\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n} < \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

Это слѣдствіе выше (§ 5) было представлено въ качествѣ самостоятельной теоремы.

§ 7. Второй способъ сравненія ариѳметической и геометрической срединъ.

Разсмотримъ неравенство

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+\cdots+(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n})^2>0,$$

гдѣ всѣ нумерованныя a суть положительныя числа. Въ лѣвой части неравенства мы имѣемъ:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

слагаемыхъ. Преобразуемъ неравенство слѣдующимъ образомъ: раціональныя слагаемыя оставимъ въ лѣвой части, а всѣ радикалы перенесемъ въ правую часть. Число раціональныхъ слагаемыхъ равно:

$$n(n-1).$$

Изъ нихъ слагаемое a_1 повторяется n разъ. Столько же разъ повторяется всякое иное изъ слагаемыхъ

$$a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n.$$

Слѣдовательно

$$(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)>2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_1a_3}+\cdots+2\sqrt{a_{n-1}a_n}.$$

Это неравенство переписывается такъ:

$$n(a_1+a_2+\cdots+a_n)>a_1+a_2+\cdots+a_n+2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_1a_3}+\cdots$$
$$\cdots+2\sqrt{a_{n-1}a_n}.$$

Правая часть представляетъ собою точный квадратъ. Поэтому, раздѣливъ неравенство на n^2, представимъ его въ видѣ:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n}\right)^2.$$

Совершенно такимъ же образомъ находимъ:

$$\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n}>\left(\frac{\sqrt[4]{a_1}+\sqrt[4]{a_2}+\cdots+\sqrt[4]{a_n}}{n}\right)^2.$$

Сопоставивъ полученныя нами неравенства, будемъ имѣть:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\left(\frac{\sqrt[4]{a_1}+\sqrt[4]{a_2}+\cdots+\sqrt[4]{a_n}}{n}\right)^4.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\left(\frac{\sqrt[8]{a_1}+\sqrt[8]{a_2}+\cdots+\sqrt[8]{a_n}}{n}\right)^8.$$

Обобщивъ это, получимъ:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\left(\frac{\sqrt[k]{a_1}+\sqrt[k]{a_2}+\cdots+\sqrt[k]{a_n}}{n}\right)^k$$

гдѣ для краткости положено

$$k=2^r.$$

Обратимся теперь къ неравенству:

$$1+\frac{1}{x}<\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}<e,$$

гдѣ x произвольно положительное число, а e основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Положивъ:

$$e^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{k}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{k}\log a$$

приведемъ неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e$$

къ виду:

$$1+\frac{1}{k}\log a<a^{\frac{1}{k}} \quad \text{или} \quad \sqrt[k]{a}>1+\frac{\log a}{k}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто a послѣдовательно:

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$$

и сложивъ результаты, получимъ:

$$\sqrt[k]{a_1}+\sqrt[k]{a_2}+\cdots+\sqrt[k]{a_n}>n+\frac{\log a_1a_2\ldots a_n}{k}.$$

Раздѣливъ каждую часть на n, получимъ:

$$\frac{\sqrt[k]{a_1}+\sqrt[k]{a_2}+\cdots+\sqrt[k]{a_n}}{n}>1+\frac{\log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{k}.$$

По возвышеніи въ степень k найдемъ:

$$\left(\frac{\sqrt[k]{a_1}+\sqrt[k]{a_2}+\cdots+\sqrt[k]{a_n}}{n}\right)^k>\left(1+\frac{\log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{k}\right)^k.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > \left(1+\frac{\log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{k}\right)^k.$$

Будемъ неограниченно увеличивать r и вмѣстѣ съ нимъ k. Получимъ:

$$\lim\left(1+\frac{\log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{k}\right)^k = e^{\log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

На этомъ основанiи будемъ имѣть окончательно:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \text{*)}.$$

§ 8. Второй способъ сравненiя гармонической и геометрической срединъ.

Неравенство (§ 8):

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} > \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{a_n}}}{n}\right)^2.$$

можно переписать такъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} < \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{a_n}}}{n}\right)^{-2}.$$

Помощью соображенiй, подобныхъ изложеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, получимъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} < \left(\frac{\sqrt[k]{\frac{1}{a_1}}+\sqrt[k]{\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt[k]{\frac{1}{a_n}}}{n}\right)^{-k},$$

гдѣ для краткости положено:

$$k = 2^r.$$

Если въ неравенствѣ:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$$

---

*) Переходъ къ предѣлу даетъ лишь возможность утверждать, что лѣвая часть р а в н а или б о л ь ш е правой.

Ред.

положить:

$$e^{\frac{1}{x}} = a^{-\frac{1}{k}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = -\frac{1}{k}\log a,$$

то оно преобразуется такъ:

$$1 - \frac{1}{n}\log a < a^{-\frac{1}{k}} \quad \text{или} \quad \sqrt[k]{\frac{1}{a}} > 1 - \frac{\log a}{k}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто a послѣдовательно

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

и сложивъ результаты, получимъ:

$$\frac{\sqrt[k]{\frac{1}{a_1}} + \sqrt[k]{\frac{1}{a_2}} + \cdots + \sqrt[k]{\frac{1}{a_n}}}{n} > n - \frac{\log a_1 a_2 \ldots a_n}{k}.$$

Раздѣливъ это на n, найдемъ:

$$\frac{\sqrt[k]{\frac{1}{a_1}} + \sqrt[k]{\frac{1}{a_2}} + \cdots + \sqrt[k]{\frac{1}{a_n}}}{n} > 1 - \frac{\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{k}$$

Если обѣ части этого неравенства возвысить въ степень $-k$, то знакъ его перемѣнится на обратный и мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\sqrt[k]{\frac{1}{a_1}} + \sqrt[k]{\frac{1}{a_2}} + \cdots + \sqrt[k]{\frac{1}{a_n}}}{n}\right)^{-k} < \left(1 - \frac{\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{k}\right)^{-k}.$$

Перейдя къ предѣлу получимъ:

$$\lim\left(1 - \frac{\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{k}\right)^{-k} = e^{\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

§ 9. Первый способъ сравненія гармонической и ариѳметической срединъ.

Предыдущіе параграфы содержатъ въ себѣ сравненіе гармонической и ариѳметической срединъ черезъ сравненіе ихъ съ геометрической срединой. Но это сравненіе можно произвести и безъ помощи геометрической средины. Провѣримъ неравенство:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

при $n=2$ и подвергнемъ его индуктивному анализу. Находимъ:

$$\frac{\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}.$$

Остается оправдать неравенство:

$$\frac{n+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}<\frac{\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+a_{n+1}}{n+1}.$$

Раздѣливъ обѣ его части на a_{n+1} и введя обозначенiе

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_{n+1}=z,$$

получимъ:

$$\frac{(n+1)^2}{z+1}<\frac{n^2}{z}+1,$$

что приводится къ виду:

$$(n-z)^2>0.$$

Теорема доказана.

§ 10. Второй способъ сравненiя гармонической и геометрической召 срединъ.

Въ статьѣ подъ названiемъ: „Обобщенiе опыта Якова Бернулли“ я поставилъ такой опытъ. Дано n многогранныхъ костей, имѣющихъ только бѣлыя и черныя грани и при томъ въ такомъ числѣ, что вѣроятности паденiя костей соотвѣтственно на бѣлыя грани равны

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n,$$

а на черныя равны:

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2, \ldots,\ q_n=1-p_n.$$

Предполагается, что для каждой кости случаи паденiя на любую грань равновозможны. Паденiе кости на какую нибудь грань называется вскрытiемъ этой грани.

Какую нибудь кость бросимъ на плоскость столько разъ, сколько нужно, чтобы вскрылась черная грань однажды. Какъ только вскроется черная грань, кость мѣняютъ на кость непосредственно старшую по нумеру и съ новою костью производятъ такой же опытъ. Кость за нумеромъ n замѣняютъ первою костью. Такая послѣдовательная замѣна костей продолжается неограниченно. Оказывается, что при неограниченномъ числѣ опытовъ съ вѣроятностью сколь-угодно близкой къ достовѣрности можно утверждать, что отношеніе числа вскрытій бѣлой грани къ числу всѣхъ бросаній, по абсолютнымъ размѣрамъ, будетъ отличаться отъ разности:

$$1-\frac{n}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}}$$

на величину сколь-угодно малую.

Перемѣнимъ требованія относительно цвѣта вскрывшихся граней, но сохранимъ всѣ прочія условія производства опытовъ. Тогда при неограниченномъ числѣ этихъ опытовъ второго рода съ вѣроятностью сколь-угодно близкой къ достовѣрности можно утверждать, что отношеніе числа вскрытій бѣлой грани къ числу всѣхъ бросаній, по абсолютнымъ размѣрамъ, будетъ отличаться отъ дроби:

$$\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}$$

на величину сколь-угодно малую.

При всякомъ употребленіи какой нибудь кости въ первомъ опытѣ бѣлая грань вскрывается, вообще говоря, нѣсколько разъ, а черная только однажды. Напротивъ при всякомъ употребленіи кости во второмъ опытѣ бѣлая грань вскрывается только однажды, а черная вообще говоря, нѣсколько разъ. Отсюда слѣдуетъ, что условіями производства опытовъ обезпечено болѣе частое вскрытіе бѣлой грани при опытахъ перваго рода, нежели при опытахъ второго рода. Поэтому съ очевидностью въ такой мѣрѣ, какая свойственна закону большихъ чиселъ, можно утверждать, что неравенство:

$$\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}<1-\frac{n}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}}$$

имѣетъ мѣсто. Это неравенство можно переписать такъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}}<1-\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}.$$

Полученныя неравенства могутъ быть преобразованы слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}<\frac{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_n}{q_n}}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}},\qquad \frac{n}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}}<\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_n}{p_n}}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}.$$

Перемноживъ эти неравенства, получимъ:

$$n^2 < \left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_n}{q_n}\right)\left(\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_n}{p_n}\right).$$

Отсюда, введя обозначенія

$$\frac{p_1}{q_1}=a_1,\ \frac{p_2}{q_2}=a_2,\ldots,\ \frac{p_n}{q_n}=a_n,$$

найдемъ:

$$\frac{n}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_n}} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Такъ оправдывается это неравенство при помощи теоріи вѣроятностей.

§ 11. Третій способъ сравненія гармонической и геометрической срединъ.

Разсмотримъ тождество

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)=T_0+T_1x+T_2x^2+\cdots+T_{n-1}x^{n-1}+T_nx^n.$$

Пусть всѣ нумерованныя a и b будутъ положительныя числа. Тогда коэффиціенты правой части будутъ обладать слѣдующимъ свойствомъ:

$$\frac{nT_0}{T_1}<\frac{(n-1)T_1}{2T_2}<\cdots<\frac{2}{n-1}\cdot\frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}<\frac{T_{n-1}}{nT_n}.$$

(Дневникъ X Съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ. 1898 годъ. Стр. 431).

Выпишемъ значенія двухъ первыхъ и двухъ послѣднихъ коэффиціентовъ. Будемъ имѣть:

$$T_0 = b_1b_2\cdots b_n,$$

$$T_1 = b_1b_2\cdots b_n\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right),$$

$$T_{n-1} = a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right),$$

$$T_n = a_1a_2\cdots a_n.$$

Поставивъ эти значенія въ неравенство:

$$\frac{nT_0}{T_1}<\frac{T_{n-1}}{nT_n}$$

получимъ:

$$\frac{n}{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}} < \frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}}{n}.$$

Что и требовалось доказать.

§ 12. Низшій предѣлъ произведенія.

Коэффиціентъ T_i при x^i есть сумма такихъ произведеній чиселъ

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \quad \text{и} \quad b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$$

въ каждомъ изъ которыхъ число нумерованныхъ a равно i, а число нумерованныхъ b равно $n-i$. При этомъ указатели буквъ a и b всѣ различны между собою и такъ какъ число ихъ n, то указатели эти въ каждомъ слагаемомъ суть числа ряда

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1,\ n$$

всѣ безъ исключенія. Отсюда слѣдуетъ, что число слагаемыхъ, входящихъ въ составъ коэффиціента T_i равно числу всѣхъ различныхъ между собою произведеній, какія можно составить изъ множителей

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

перемножая ихъ по i или изъ множителей

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$$

перемножая ихъ по $n-i$.

Слѣдовательно, оно равно числу сочетаній изъ n элементовъ по i и выражается формулой:

$$C_n^i = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}.$$

Не трудно сосчитать, что среди упомянутыхъ слагаемыхъ число тѣхъ, которые содержатъ опредѣленный элементъ a, равно

$$C_{n-1}^{i-1} = \frac{(n-1)\,(n-2)\cdots(n-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i-1)} = \frac{i}{n}\,C_n^i.$$

Это вытекаетъ изъ того, что число различныхъ между собою произведеній, какія можно получить изъ $n-1$ элементовъ

$$a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

перемножая ихъ по $i-1$, равно числу сочетаній изъ $n-1$ элементовъ по $i-1$.

Присоединяя къ каждому изъ этихъ произведеній множитель a_1, получимъ всевозможныя произведенія, содержащія этотъ множитель. Такимъ же образомъ убѣждаемся, что число слагаемыхъ, содержащихъ любой изъ остальныхъ множителей:

$$a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

также равно числу сочетаній изъ $n-1$ элементовъ по $i-1$. Подобно этому найдемъ, что число слагаемыхъ, содержащихъ какой-либо изъ множителей:

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$$

равно

$$C_{n-1}^{n-i-1} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-i)}{1.2.3\ldots i} = \frac{n-i}{n} C_n^i.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если перемножимъ всѣ слагаемыя, входящія въ составъ коэффиціента T_i, то получимъ:

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{i}{n} C_n^i} (b_1 b_2 \ldots b_n)^{\frac{n-i}{n} C_n^i}.$$

Извлекая отсюда корень степени C_n^i, находимъ:

$$\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^i \left(\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}\right)^{n-i}.$$

Этою формулою выражается среднее геометрическое между слагаемыми, входящими въ составъ коэффиціента T_i. Ариѳметическая средина тѣхъ же слагаемыхъ равна ихъ суммѣ T_i, раздѣленной на ихъ число, равное числу сочетаній изъ n элементовъ по i.

Слѣдовательно,

$$C_n^i \left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^i \left(\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}\right)^{n-i} < T_i.$$

Умножимъ обѣ части неравенства на положительную величину x^i и затѣмъ проведемъ i черезъ значенія:

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,\ n.$$

Сложивъ полученныя неравенства найдемъ:

$$\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\, x + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}\right)^n < (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_n x + b_n).$$

§ 13. Высшій предѣлъ произведенія биномовъ.

Поставимъ въ неравенство

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n < \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{n}\right)^n$$

на мѣсто нумерованныхъ ω слѣдующія величины:

$$\omega_1 = a_1x + b_1, \quad \omega_2 = a_2x + b_2, \ldots, \; \omega_n = a_nx + b_n$$

считая ихъ за положительныя. Получимъ:

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n) < \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}x + \frac{b_1+b_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n.$$

§ 14. Второй способъ вычисленія низшаго предѣла произведенія биномовъ.

Три отношенія:

$$\frac{nT_0}{T_1}, \quad \frac{\sqrt[n]{T_0}}{\sqrt[n]{T_n}}, \quad \frac{T_{n-1}}{nT_n}$$

представляютъ собою соотвѣтственно гармоническую, геометрическую и ариѳметическую средины чиселъ:

$$\frac{b_1}{a_1}, \; \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \; \frac{b_n}{a_n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{nT_0}{T_1} < \frac{\sqrt[n]{T_0}}{\sqrt[n]{T_n}} < \frac{T_{n-1}}{nT_n}.$$

Отсюда вытекаетъ, что существуетъ такой нумеръ r, при которомъ имѣютъ мѣсто неравенства:

$$\frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{T_{r-1}}{T_r} < \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}} < \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{T_r}{T_{r+1}}$$

при чемъ неравенства, показанныя въ § 11, перепишутся такъ:

$$\frac{nT_0}{T_1} < \frac{n-1}{2} \cdot \frac{T_1}{T_2} < \cdots < \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{T_{r-1}}{T_r} < \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}},$$

$$\sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}} < \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{T_r}{T_{r+1}} < \frac{n-r-1}{r+2} \cdot \frac{T_{r+1}}{T_{r+2}} < \cdots < \frac{T_{n-1}}{nT_n}.$$

На основаніи сказаннаго для всякаго нумера i не большаго r находимъ:

$$\frac{nT_0}{T_1} < \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}}, \quad \frac{n-1}{2}\cdot\frac{T_1}{T_2} < \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}},$$

. . . .

$$\frac{n-i+1}{i}\cdot\frac{T_{i-1}}{T_i} < \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}}.$$

Перемноживъ это получимъ:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}\cdot\frac{T_0}{T_i} < \sqrt[n]{\frac{T_0{}^i}{T_n{}^i}}.$$

Отсюда будемъ имѣть:

$$C_n^i\sqrt[n]{T_n{}^i T_0{}^{n-i}} < T_i.$$

При i большемъ r справедливы такія неравенства:

$$\sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}} < \frac{n-i}{i+1}\cdot\frac{T_i}{T_{i+1}}, \quad \sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}} < \frac{n-i+1}{i+2},$$

. . . .

$$\sqrt[n]{\frac{T_0}{T_n}} < \frac{1}{n}\cdot\frac{T_{n-1}}{T_n}.$$

Перемноживъ это получимъ:

$$\sqrt[n]{\frac{T_0{}^{n-i}}{T_n{}^{n-i}}} < \frac{1\,.\,2\,.\,3\cdots(n-i)}{n(n-1)\cdots(i+1)}\cdot\frac{T_i}{T_n},$$

что переписывается такъ:

$$C_n^i\sqrt[n]{T_0{}^{n-i}T_n{}^i} < T_i.$$

Оказывается, что эта формула справедлива для всякаго нумера i. Посредствомъ этой формулы для всякаго положительнаго x находимъ:

$$\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\,x + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}\right)^n < (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n).$$

Строеніе и форма молекулъ,

гипотеза и дѣйствительность.

Ѳ. Сведберга.

Согласно прекраснымъ изслѣдованіямъ Нернста (Nernst) объ удѣльной теплотѣ при низкихъ температурахъ и изысканіямъ Лауе (Laue) о строеніи кристалловъ, понятіе молекула, повидимому, можно примѣнять безъ ограниченія лишь къ газообразнымъ и жидкимъ тѣламъ. Но зато по отношенію къ нимъ, — я желалъ бы обратить на это особенное вниманіе, — нѣтъ другихъ понятій, которыя оказались бы столь же плодотворными и реальность которыхъ была бы доказана столь же убѣдительно, какъ понятіе молекулы. За послѣдніе годы было предложено нѣсколько опредѣленій этого понятія. Наиболѣе сообразнымъ съ современными идеями является, повидимому, опредѣленіе, которое исходитъ изъ закона равнаго распредѣленія кинетической энергіи. Согласно этому опредѣленію мы должны представлять себѣ молекулу, какъ систему массъ, у которой энергія поступательнаго движенія равна всегда $^3/_2 RT/N$, если черезъ R обозначимъ постоянную газа, черезъ T — абсолютную температуру и N — число молекулъ въ граммъ-молекулѣ. Если, какъ это дѣлаетъ Рётгерфордъ (Rutherford), впускать въ пустой пріемникъ черезъ маленькое отверстіе α-излученіе какого-нибудь радіоактивнаго вещества, то по истеченіи извѣстнаго времени мы найдемъ, что пріемникъ будетъ наполненъ газомъ геліемъ. Посредствомъ электрическихъ или оптическихъ процессовъ можно вычислить, сколько частицъ проникло черезъ отверстіе. Такимъ образомъ, допуская, что съ потерей скорости своего направленнаго поступательнаго движенія частицы α сохраняютъ свое индивидуальное существованіе и являются въ формѣ молекулъ гелія, можно опредѣлить число молекулъ содержащихся въ граммъ-молекулѣ гелія. Такимъ путемъ мы узнаемъ число N, а такъ какъ константу R можно найти, измѣряя расширеніе газовъ, то въ нашемъ распоряженіи всѣ данныя, необходимыя для того, чтобы выразить численно въ абсолютныхъ мѣрахъ энергію поступательнаго движенія молекулы. Такимъ образомъ, получено число $2{,}08 \cdot 10^{-16}\, T$ эрговъ.

Представляетъ ли собою система массъ, обладающая этой кинетической энергіей, континуумъ или же она имѣетъ структуру? Другими словами, должны ли мы приписывать химическимъ атомамъ индивидуальное существованіе или нѣтъ? Эта проблема самымъ тѣснымъ образомъ связана съ вопросомъ, продолжаютъ ли элементы существовать въ химически сложномъ тѣлѣ.

Существованіе молекулъ установлено неопровержимымъ образомъ, такъ какъ доказано, что лучи α обладаютъ структурой, и что въ газахъ и жидкостяхъ совершается внутреннее движеніе; но изъ этихъ фактовъ не вытекаетъ непосредственно, что существуютъ атомы, т. е.

какъ бы кирпичики, изъ которыхъ составлены молекулы — не вытекаетъ, что эти послѣднія имѣютъ структуру.

Представимъ себѣ два сосуда, при достаточно высокой температурѣ, одинъ съ газообразнымъ радіемъ, другой съ хлоромъ, такъ какъ хлоръ и газообразный радій суть газы и въ этомъ смыслѣ сходны съ геліемъ, то оба они должны состоять изъ молекулъ. Смѣшаемъ теперь эти два газа. Тогда образуется новый газъ, — хлористый радій, который также имѣетъ молекулярную структуру, и молекулы котораго, по своей массѣ, могутъ быть представлены какъ сумма радіевой молекулы съ хлорной. Нетрудно доказать, что молекулы хлористаго радія обладаютъ структурой. Мы знаемъ, съ одной стороны, что всякое измѣненіе, испытываемое молекулой радія, сопровождается выдѣленіемъ огромныхъ количествъ энергіи и что, съ другой стороны, какъ въ количественномъ отношеніи, такъ и въ качественномъ, это выдѣленіе совершается въ хлористомъ радіѣ совершенно такъ же, какъ въ чистомъ. Молекула радія должна, слѣдовательно, въ хлоридѣ содержаться въ такомъ же видѣ, какъ въ чистомъ радіѣ. Такъ какъ съ химической точки зрѣнія нѣтъ существенной разницы между хлористымъ радіемъ и другими сложными тѣлами, то этимъ доказано, что элементы продолжаютъ существоватъ и въ сложныхъ тѣлахъ. Химики издавна принимали этотъ важный законъ, какъ самоочевидный. В и л ь г е л ь м ъ О с т в а л ь д ъ (Ostwald) первый указалъ, что этотъ законъ отнюдь не является очевиднымъ. Лишь примѣняя разсужденіе въ родѣ только-что приведеннаго, мы въ правѣ пользоваться этой гипотезой, какъ основой химическаго ученія о структурѣ молекулъ*).

Строеніе молекулъ, содержащихъ только два атома, непосредственно явствуетъ изъ закона неизмѣнности атомовъ. Остается лишь опредѣлить разстояніе, отдѣляющее два атома, — задача далеко не легкая. Интересно замѣтить, что положеніе кинетической теоріи относительно строенія сложныхъ тѣлъ, образующихся отъ соединенія двухъ атомовъ, согласуется съ фактомъ, что атомы сохраняютъ свое существованіе и въ сложной молекулѣ. Согласно этой теоріи молекулы обладаютъ, кромѣ энергіи поступательнаго движенія, выражаемой количествомъ $^3/_2\, RT/N$, еще и энергіей вращательнаго движенія. Эта послѣдняя совершенно такъ же, какъ энергія поступательнаго движенія, распредѣлена равномѣрно между степенями свободы молекулы. Двуатомная молекула имѣетъ два вращенія. Молярная удѣльная теплота двуатомнаго газа равна слѣдовательно $^5/_2\, R$ при постоянномъ объемѣ и $^7/_2\, R$ при постоянномъ давленіи; отношеніе этихъ двухъ удѣльныхъ теплотъ равно 1,400. Такое значеніе и найдено, дѣйствительно, для газовъ, разсматриваемыхъ съ химической точки зрѣнія какъ двуатомные, а именно, для кислорода, азота, водорода, окиси углерода и хлористо-водородной кислоты.

---

*) Изложенное доказательство при ближайшемъ разсмотрѣніи, можетъ быть, окажется несостоятельнымъ, такъ какъ оно неявно вводитъ гипотезу, что возможное измѣненіе, испытываемое молекулой радія, когда она соединяется съ молекулой хлора, тождественно съ хорошо извѣстнымъ радіоактивнымъ разложеніемъ, сопровождаемымъ образованіемъ нитона и гелія. Съ этой точки зрѣнія, гипотеза не уничтожается, а лишь переносится въ другое мѣсто.

Почти столь же простымъ представляется случай трехатомныхъ молекулъ. Кинетическая теорія даетъ для отношенія удѣльныхъ теплотъ въ газообразномъ состояніи значеніе 1,333, при чемъ предполагается, что центры тяжести атомовъ не находятся на одной прямой; оказалось, дѣйствительно, что у воды это отношеніе равно 1,33, у амміака 1,30, и 1,31 у углекислоты.

Согласно классической теоріи степеней свободы, каждая новая степень свободы влечетъ за собой приращеніе энергіи на $R/2$, совершенно независимо отъ теплового состоянія системы. Удѣльная теплота газовъ должна была бы, слѣдовательно, быть независимой отъ температуры. Опытъ противорѣчитъ этому заключенію и учитъ, что, напротивъ, удѣльная теплота газовъ, обладающихъ вращательной энергіей, возрастаетъ съ температурой. Какъ объяснить это противорѣчіе? Не является ли структура, разсматриваемыхъ молекулъ другой, чѣмъ та, какую требуетъ законъ согласно которому элементы пребываютъ въ сложныхъ тѣлахъ, — законъ сохраненія атомовъ? Это объясненіе весьма мало намъ улыбается; и дѣйствительно, выходъ изъ этого затрудненія искали въ другомъ направленіи. Единственно пригодный путь ведетъ прямо къ теоріи квантъ. Правда, объясненіе, къ которому такимъ образомъ приходятъ, на многихъ производитъ столь же странное впечатлѣніе, какъ и устраненіе закона сохраненія атомовъ. Но такъ какъ ученіе о квантахъ энергіи въ настоящее время является, повидимому, необходимымъ для объясненія нѣкоторыхъ другихъ важныхъ явленій, то мы не въ правѣ отказаться отъ него потому лишь, что оно намъ несимпатично. Въ самомъ дѣлѣ, весьма возможно, что эта теорія будетъ въ состояніи дать вполнѣ удовлетворительное объясненіе удѣльныхъ теплотъ.

Настоящія затрудненія начинаются съ молекулъ, содержащихъ четыре атома и болѣе. Здѣсь кинетическая теорія ничего не можетъ дать намъ относительно структуры, и законъ сохраненія атомовъ не указываетъ ничего опредѣленнаго о расположеніи атомовъ, когда число ихъ выше трехъ. Важнѣйшіе методы, какими мы располагаемъ, основаны на слѣдующихъ явленіяхъ: химическія реакціи, оптическая активность, симметрія кристалловъ, явленія Керра (Kerr) и Коттона (Kotton), переносъ массъ въ жидкихъ кристаллахъ.

Для проблемы о структурѣ многоатомныхъ молекулъ чрезвычайно важно рѣшить, есть ли въ молекулѣ внутреннія движенія или нѣтъ; другими словами, должны ли мы разсматривать молекулу какъ статическую систему или же какъ динамическую. Многочисленныя явленія указываютъ, что съ дѣйствительностью согласно второе предположеніе. Однако, это состояніе движенія не можетъ быть совершенно неправильнымъ и зависѣть исключительно отъ случая; этому учитъ насъ изомерія, т. е. существованіе различныхъ веществъ, имѣющихъ одинаковый химическій составъ и одинаковый молекулярный вѣсъ. Правильное интрамолекулярное движеніе можетъ совершаться двумя способами: атомы могутъ двигаться около опредѣленныхъ положеній равновѣсія, либо же вращаться по замкнутымъ траекторіямъ около одного центральнаго атома. Съ другой стороны, существованіе оптически активныхъ сложныхъ тѣлъ показываетъ, что есть молекулы, не обладающія плоскостью симметріи, а это можно объяснить, повидимому, только допуская, что движеніе атомовъ происходитъ около опредѣленныхъ положеній равновѣсія. Такимъ образомъ, вопросъ о структурѣ и свойствахъ симметріи молекулъ сливается съ изслѣдованіемъ этихъ положеній равновѣсія.

Разсмотримъ сначала молекулы, состоящія изъ одного атома углерода и четырехъ другихъ атомовъ. Согласно химической теоріи связи атомовъ, такъ называемой теоріи валентности, основанной на способности молекулъ вступать въ реакціи, вещества этого класса построены такимъ образомъ, что атомъ углерода можетъ оказывать на каждый изъ четырехъ другихъ атомовъ непосредственное динамическое дѣйствіе. Это представленіе выражаютъ формулой:

$$\begin{array}{c} X \\ | \\ X - C - X \\ | \\ X \end{array}$$

Необходимо, однако, подчеркнуть то обстоятельство, что теорія валентности не разсматриваетъ вовсе вопроса о пространственномъ распредѣленіи четырехъ атомовъ X около C. Такъ называемая структурная теорія молекулъ не даетъ намъ никакихъ свѣдѣній о геометрической структурѣ молекулъ. Первая химическая теорія, поставившая себѣ такую цѣль, это — стереохимія, развитая Вантъ-Гоффомъ (Van't-Hoff) и Ле Белемъ (Le Bel). Опытъ показываетъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда всѣ четыре атома X различные, молекула не обладаетъ оптической плоскостью симметріи, и что вслѣдствіе этого построенныя такимъ образомъ вещества всегда встрѣчаются въ двухъ оптически различныхъ видахъ, изъ которыхъ одинъ вращаетъ плоскость поляризаціи вправо, а другой — на такой же уголъ влѣво. Простѣйшее и, можетъ быть, единственно возможное объясненіе этого факта, есть то, которое даютъ Вантъ-Гоффъ и Ле Бель, а именно, они представляютъ себѣ, что четыре атома X одинаковымъ образомъ расположены въ пространствѣ вокругъ атома C. Согласно этому представленію, молекулы типа CX_4 должны имѣть форму тетраэдра (рис. 1).

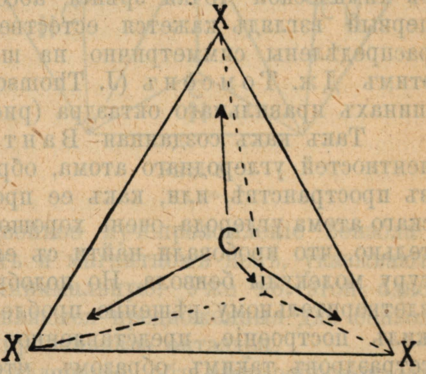

Рис. 1.

Структуру молекулы метана и его простыхъ производныхъ можно вывести также изъ другихъ фактовъ. Такъ, напримѣръ, Коттонъ и Мутонъ (Mouton) открыли, что CH_4 не обладаетъ въ замѣтной степени двойнымъ лучепреломленіемъ въ магнитнымъ полѣ, что у CCl_4 оно очень мало, и что по Лейзеру (Leiser) CH_4 обнаруживаетъ явленіе Керра лишь въ весьма слабой мѣрѣ. Эти факты доказываютъ, что разсматриваемыя молекулы обладаютъ высокой степенью симметріи, которая можетъ быть достигнута лишь равномѣрнымъ распредѣленіемъ атомовъ X въ пространствѣ вокругъ атома C, какъ центра.

Кристаллографическія изысканія Валя (Wahl) привели къ весьма важнымъ даннымъ о свойствахъ симметріи простѣйшихъ соединеній углерода, въ частности, производныхъ метана. Этотъ ученый установилъ, что метанъ и его четырехзамѣщенныя кристаллизуются въ кубической системѣ, двухзамѣщенныя производныя — въ ромбической системѣ, трехзамѣщенныя — въ гексагональной системѣ, а однозамѣщенныя — въ моноклинической. Если допустить, что кристаллическая симметрія этихъ простыхъ соединеній связана съ соотвѣтственной молекулярной симметріей, то изъ только-что приведенныхъ фактовъ слѣдуетъ, что углеродному атому необходимо приписать, центральное положеніе въ молекулѣ, такъ какъ лишь при этомъ условіи возможны системы, обладающія симметріей такого рода.

Перейдемъ теперь къ болѣе сложнымъ молекуламъ, и въ качествѣ примѣра возьмемъ молекулы группы бензола и группы нафталина. Химическія реакціи бензола не даютъ опредѣленныхъ указаній по которымъ можно было бы установить форму его молекулы. Даже пригодную конституціонную формулу очень трудно установить, хотя при этомъ еще не приходится разсматривать распредѣленія атомовъ въ пространствѣ. Такъ какъ шесть группъ CH молекулы бензола имѣютъ съ химической точки зрѣнія абсолютно одинаковое значеніе, то на первый взглядъ кажется естественнымъ представить себѣ, что онѣ распредѣлены симметрично на шаровой поверхности. Сообразно съ этимъ Дж. Томсонъ (J. Thomson) размѣщаетъ атомы C при вершинахъ правильнаго октаэдра (рис. 2).

Такъ какъ созданная Вантъ-Гоффомъ теорія четырехъ валентностей углероднаго атома, образующихъ между собою равные углы въ пространствѣ, или, какъ ее проще называютъ, теорія тетраэдрическаго атома углерода, очень хорошо согласуется съ фактами, то неудивительно, что пробовали найти съ ея помощью пространственную структуру молекулы бензола. Но подобныя попытки не приводятъ къ удовлетворительному рѣшенію проблемы. Лошмидтъ (Loschmidt) предложилъ построеніе, представленное на рис. 3. Онъ соединяетъ шесть тетраэдровъ такимъ образомъ, чтобы ихъ основанія образовали правильный шестиугольникъ, а вершины были всѣ направлены вверхъ. Углеродные атомы являющіеся центрами тетраэдровъ, находятся, такимъ образомъ, въ одной плоскости. Маршъ (Marsch) и позже Вобель (Vaubel) предложили сходную же форму, но немного болѣе симметричную, отличающуюся отъ Лошмидтовской тѣмъ, что вершины тетраэдровъ направлены попеременно вверхъ и внизъ. Углеродные атомы лежатъ здѣсь, слѣдовательно, по три въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ. Того же результата можно достигнуть съ помощью построенія, указаннаго Саксе (Sachse): шесть тетраэдровъ, основанія которыхъ лежатъ на шести граняхъ правильнаго октаэдра, соединены между собой въ формѣ кольца.

Штаркъ (Stark) совершенно отказался отъ принципа тетраэдра, вмѣсто чего онъ опирается на свою гипотезу валентныхъ электроновъ и предлагаетъ для бензола построеніе, въ которомъ всѣ углеродные атомы находятся въ одной плоскости при вершинахъ правильнаго шестиугольника. Каждый изъ этихъ атомовъ занимаетъ такое положеніе, чтобы плоскость, проходящая черезъ три его валентныхъ электрона, была перпендикулярна къ плоскости шестиугольника, при чемъ одинъ электронъ лежитъ въ плоскости этого шестиугольника, а два другихъ — сверху и снизу отъ этой плоскости на равныхъ отъ нея разстояніяхъ; четвертый же валентный электронъ каждаго атома тоже лежитъ въ плоскости шестиугольника, но внѣ этого послѣдняго.

Итакъ, чисто химическіе методы оставляютъ открытымъ вопросъ о пространственной структурѣ молекулы бензола, и то же самое мы должны сказать о молекулѣ нафталина.

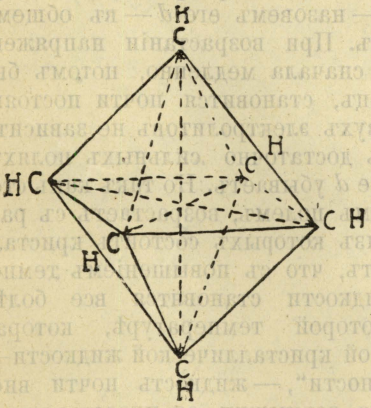

Рис. 2.

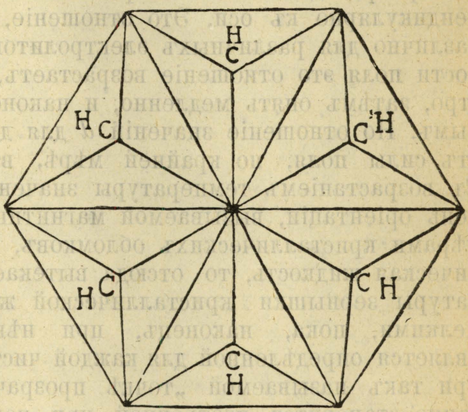

Рис. 3.

Кристаллическія свойства и двойное лучепреломленіе бензола и его производныхъ въ электрическомъ и магнитномъ полѣ, указываютъ на диссиметрію, и при томъ не минимальную. Уже по этой одной причинѣ очень мало вѣроятными являются предложенныя для бензола симметрическія конструкціи вродѣ правильнаго октаэдра.

Въ послѣднее время мои изслѣдованія объ электропроводности жидкихъ кристалловъ сильно увеличили доводы въ пользу допущенія значительной диссиметріи въ структурѣ бензольной молекулы.

Электропроводность въ жидкихъ кристаллахъ всегда бываетъ связана съ переносомъ массъ, т. е. передача электричества совершается такимъ образомъ, что атомы или группы атомовъ, заряженныя электричествомъ, такъ называемые іоны, должны подъ дѣйствіемъ электрическаго поля двигаться черезъ кристаллъ. Можно растворять различные электролиты въ жидкихъ кристаллахъ и такимъ образомъ, изучать, какъ движутся различные электролиты. Этимъ способомъ найдено, что подъ дѣйствіемъ молекулъ жидкаго кристалла движеніе іоновъ получаетъ опредѣленную оріентацію; въ этомъ именно и заключается главное условіе примѣненія нашего метода для изученія геометрической диссиметріи молекулъ.

Что касается, прежде всего, электропроводности по различнымъ направленіямъ жидкаго кристалла, то оказывается, что передача электричества совершается вполнѣ аналогично съ теплопроводностью и электропроводностью въ твердыхъ одноосныхъ кристаллахъ. Если вообразимъ источникъ электричества внутри жидкаго кристалла, то всѣ точки, которыхъ достигнетъ электричество по истеченіи нѣкотораго времени, представятъ собой поверхность эллипсоида вращенія, у котораго осью вращенія служитъ ось жидкаго кристалла.

Крупные жидкіе кристаллы, какіе примѣнялись въ нашихъ изысканіяхъ, получаются посредствомъ дѣйствія магнитнаго поля на кристаллическую жидкость. Когда измѣняютъ напряженіе поля, которымъ держится цѣлость жидкаго кристалла, измѣняется также отношеніе электропроводности въ направленіи оси къ электропроводности перпендикулярно къ оси. Это отношеніе, — назовемъ его d — въ общемъ различно для различныхъ электролитовъ. При возрастаніи напряженности поля это отношеніе возрастаетъ, сначала медленно, потомъ быстро, затѣмъ опять медленно, и наконецъ, становится почти постояннымъ. Но отношеніе значеній d для двухъ электролитовъ не зависитъ отъ силы поля, по крайней мѣрѣ, въ достаточно сильныхъ поляхъ. Съ возрастаніемъ температуры значеніе d убываетъ. Но такъ какъ степень оріентаціи, вызываемой магнитнымъ полемъ, возрастаетъ съ размѣрами кристаллическихъ обломковъ, изъ которыхъ состоитъ кристаллическая жидкость, то отсюда вытекаетъ, что съ повышеніемъ температуры зернышки кристаллической жидкости становятся все болѣе мелкими, пока, наконецъ, при нѣкоторой температурѣ, которая является опредѣленной для каждой чистой кристаллической жидкости — при такъ называемой „точкѣ прозрачности", — жидкость почти внезапно становится изотропной, при чемъ зернышки ея представляютъ собой молекулы.

Если точку прозрачности выбрать въ качествѣ общаго нуля всѣхъ кривыхъ, показывающихъ, какъ зависятъ d отъ температуры, то найдемъ интересный законъ: отношеніе значеній d двухъ электролитовъ не зависитъ отъ температуры. Разсматривая два электролита въ двухъ различныхъ жидкихъ кристаллахъ, мы найдемъ сверхъ того, что отношеніе двухъ значеній d не зависитъ также отъ природы растворителя. Это число представляетъ такимъ образомъ, натуральную константу, характерную для разсматриваемой пары электролитовъ.

Найдено, что электролиты, дающіе одноатомные іоны, обладаютъ одинаковыми значеніями d. Если разсматривать эти числа, какъ мѣру сопротивленія тренія, оказываемаго растворителемъ абсолютно симметричнымъ іонамъ, то отношеніе значеній d для даннаго электролита и для электролита, образуемаго одноатомными іонами, представляетъ степень геометрической диссиметріи іоновъ перваго электролита.

Такъ какъ степень диссоціаціи не можетъ зависѣть отъ направленія, то электропроводность въ этомъ случаѣ опредѣляется исключительно сопротивленіемъ тренія, оказываемымъ движенію іоновъ; но, какъ извѣстно, это сопротивленіе зависитъ въ значительной мѣрѣ отъ геометрической формы движущихся частицъ.

Что происходитъ, однако, въ случаѣ, когда два іона этого электролита не имѣютъ одинаковой диссиметріи? Какъ извѣстно, такъ именно и бываетъ обыкновенно. Такъ какъ два іона участвуютъ въ переносѣ массъ въ различной мѣрѣ, въ зависимости отъ своей подвижности, то для того, чтобы можно было вычислить сопротивленіе одного изъ іоновъ, мы должны знать отношеніе степеней подвижности аніона и катіона, какъ въ направленіи оси жидкаго кристалла, такъ и въ перпендикулярномъ къ ней направленіи. Чтобы опредѣлить это отношеніе, необходимо измѣрить множитель переноса; но такъ какъ я еще не произвелъ изысканій по этому вопросу, то приходится пока довольствоваться числами, относящимися къ электролиту, разсматриваемому въ цѣломъ.

Эти числа, относящіяся къ дисимметріи электролитовъ, доставляютъ намъ нижеслѣдующія данныя о геометрической структурѣ ихъ молекулъ. Вещества, являющіяся химически простыми производными бензола или нафталина, обнаруживаютъ чрезвычайно близкія между собою степени дисимметріи, т. е. фактически они имѣютъ почти одинаковую степень геометрической диссимметріи. Вопреки нѣкоторымъ пространственнымъ формуламъ, основаннымъ на химическихъ соображеніяхъ, эта диссиметрія является отнюдь не малой; напротивъ, она очень велика, какъ показываютъ слѣдующія числа.

Производныя бензола:		Производныя нафталина:	
Гидрохинонъ	0,90	*α*-нафтолъ	0,81
Пироказехинъ	0,88	2-3-нафтойная кислота	0,81
Пирогаллолъ	0,89	*α*-динитронафтолъ-литій	0,81
m-Нитрофенолъ	0,89		
Пикриновая кислота	0,90		
Тринитрорезорцинъ	0,89		

Если принять во вниманіе, что у этихъ электролитовъ подвижность катіона несомнѣнно гораздо больше, чѣмъ аніона, то прямо бросается въ глаза, что геометрическая диссиметрія аніона, — бензоловыя или нафталиновыя ядра, — должна быть велика, если она можетъ вызвать столь сильную анизотропію проводимости.

Такимъ образомъ, мы должны безъ колебаній отдать предпочтеніе тѣмъ химическимъ формуламъ бензола, которыя выражаютъ сильную пространственную диссиметрію молекулы.

Переносъ массъ въ жидкихъ кристаллахъ совершается не только путемъ электропроводности, т. е. посредствомъ движенія іоновъ: она можетъ также происходить черезъ диффузію. Это послѣднее явленіе даетъ намъ поэтому еще одинъ способъ для изслѣдованія геометрической диссимметріи молекулъ. Когда удастся преодолѣть большія экспериментальныя трудности, представляемыя подобнымъ опредѣленіемъ диффузіи, этотъ методъ окажется несомнѣнно весьма пригоднымъ для изученія формы молекулъ. Онъ имѣетъ много существенныхъ преимуществъ передъ методомъ, основаннымъ на измѣреніи электропроводности. Въ случаѣ не-электролитовъ измѣреніе скорости диффузіи въ направленіи оси жидкаго кристалла и перпендикулярно къ ней даетъ непосредственно отношеніе величинъ тренія; а такъ какъ число не-электролитовъ гораздо больше, чѣмъ электролитовъ, то этотъ методъ a priori обѣщаетъ гораздо больше приложеній.

Первая глава изъ элементарной теоріи чиселъ.

А. Обри.

(Переводъ съ французскаго).

Вмѣсто предисловія

Нѣкоторые изъ моихъ молодыхъ корреспондентовъ очень часто обращались ко мнѣ съ просьбами о разъясненіи самыхъ первыхъ началъ элементарной теоріи чиселъ. Я счелъ поэтому полезнымъ написать главу, которая, давая лишь общее предварительное знакомство съ духомъ и методами элементарной теоріи чиселъ, являлась бы, такимъ образомъ, введеніемъ въ эту теорію.

Такъ появилась эта глава, съ которой мнѣ, собственно, слѣдовало начать свои статьи*). Я стараюсь въ ней познакомить читателя съ понятіями и методами, составляющими особенность элементарной теоріи чиселъ. Я затрагиваю поэтому самые разнообразные вопросы, сопоставляю различныя формулы и теоріи, такъ какъ считаю, что такое сопоставленіе позволяетъ лучше и быстрѣе проникнуть въ сущность предмета и въ то же время внушаетъ новыя точки зрѣнія и наводитъ на новые способы доказательства. Въ приложеніи я даю нѣкоторыя задачи. При составленіи этого приложенія я разсматривалъ задачи, исключительно какъ иллюстрацію примѣненія теоріи. Я выбиралъ поэтому только задачи, полезныя въ указанномъ отношеніи, либо же задачи, пользующіяся заслуженной извѣстностью. Нетрудно, конечно, составить сколько угодно задачъ, и часто бываетъ довольно легко найти одно, нѣсколько или даже безчисленное число рѣшеній. Но очень рѣдко удается найти общее рѣшеніе, а между тѣмъ только въ этомъ послѣднемъ случаѣ можно считать задачу рѣшенной. — Нельзя вѣдь считать себя совершенно удовлетвореннымъ, когда знаешь только, что такое-то число удовлетворяетъ такому-то условію. Возникаетъ цѣлый рядъ вопросовъ. Имѣетъ ли это число какую-нибудь особенность, которая отличаетъ его отъ всѣхъ другихъ чиселъ? Единственное ли это

---

*) Статьи Aubry по элементарной теоріи чиселъ печатались въ „Enseignement Mathématique“, за разные годы.

рѣшеніе? Наибольшее ли это число, удовлетворяющее условію? Наименьшее ли? Не является ли оно тѣмъ рѣшеніемъ, которое почему либо легче всего найти?

Кажется, впрочемъ, что было бы своевременнымъ принять вообще мѣры противъ все возрастающаго наводненія задачъ, грозящаго затопить самое науку. Въ сборники упражненій слѣдовало бы включать лишь упражненія избранныя: интересныя, по условію задачи или способу доказательства; полезныя, какъ иллюстрація теорій или характеристика свойствъ предмета изслѣдованія; наконецъ, и это самое главное, такія, которыя имѣютъ точное и исчерпывающее рѣшеніе.

Въ теоріи чиселъ *) различаютъ три вполнѣ опредѣленныя ступени.

1) Элементарная ариѳметика, которую можно было бы назвать ариѳметикой Евклида. Самымъ новымъ учебникомъ по элементарной ариѳметикѣ является сборникъ упражненій Fitz-Patrick'a.

2) Элементарная теорія чиселъ, или ариѳметика Ферма, разработанная Эйлеромъ и Лагранжемъ. Популяризаціи элементарной теоріи чиселъ были посвящены мои статьи въ „Enseignement Mathématique".

3) Наконецъ, общая теорія чиселъ, или ариѳметика Гаусса.

Число занимающихся ею невелико. Однихъ отпугиваютъ трудности теоріи, другихъ она не интересуетъ. Е. Каганъ (E. Cahen) опубликовалъ недавно первый томъ общей теоріи чиселъ.

Что касается первой и второй ступеней, то области, подлежащія изслѣдованію въ каждой изъ нихъ, являются въ настоящее время вполнѣ строго опредѣленными, такъ что нѣтъ никакой необходимости въ обширныхъ предварительныхъ курсахъ, и можно непосредственно перейти къ изученію соотвѣтственной дисциплины. Я считаю поэтому настоящую главу вполнѣ достаточной, какъ введеніе въ общую элементарную теорію чиселъ.

---

1. **Опредѣленія.** Элементарная теорія чиселъ изучаетъ отношеніе цѣлыхъ чиселъ между собой, въ особенности формы, которыми могутъ быть представлены заданныя цѣлыя числа, равно какъ ихъ дѣлители и кратныя.

Всюду въ дальнѣйшемъ, гдѣ не будетъ оговорено противнаго, мы буквами будемъ обозначать цѣлыя числа.

Пусть коэффиціенты a, b, c обозначаютъ данныя цѣлыя числа. Говорятъ, что число n принадлежитъ къ линейной формѣ $ax+b$, либо къ квадратичной формѣ $ax^2+bxy+cy^2$, если можно найти или, по крайней мѣрѣ, доказать существованіе такихъ цѣлыхъ значеній для x, либо для x и y, при которыхъ соотвѣтствующее выраже-

---

*) Это названіе очень мало соотвѣтствуетъ обозначаемому имъ предмету, точное названіе котораго: ариѳметика употребляется теперь совсѣмъ въ другомъ смыслѣ. Было предложено названіе ариѳмологія, но это не лучше и, пожалуй, даже хуже, чѣмъ «теорія чиселъ». Лучше было бы названіе: ариѳмономія, но это слово слишкомъ длинно.

Прим. пер.

ніе становится равнымъ n. Въ такомъ случаѣ можно также написать, что $n = ax + b$, либо что $n = ax^2 + bxy + cy^2$.

Напримѣръ, число 47 принадлежитъ къ двумъ формамъ: $4x + 3$ и $x^2 + 3xy + 7y^2$, такъ какъ, полагая $x = 11$ въ первой формѣ, $x = 5$, $y = 1$ во второй, мы получаемъ 47.

Чаще всего коэффиціенты a, b, c не имѣютъ общихъ множителей. Въ такомъ случаѣ форма называется первообразной.

2. Нѣкоторыя основныя теоремы. Элементарная теорія чиселъ заимствуетъ изъ алгебры правила дѣйствій надъ буквенными выраженіями и методъ преобразованія формулъ. Кромѣ того, она основывается на нѣкоторыхъ предложеніяхъ элементарной ариѳметики, которыя достаточно будетъ только напомнить и которыя можно найти, если и не въ ясно выраженномъ видѣ, уже у Евклида.

Всякій общій дѣлитель чиселъ a и b дѣлитъ число $ka + lb$, въ частности числа $a + b$ и $a - b$. Обратно, если c дѣлитъ a, но не дѣлитъ b, то оно не дѣлитъ чиселъ $a \pm b$.

Число, дѣлящееся на нѣсколько цѣлыхъ взаимно простыхъ между собою чиселъ, дѣлится также на произведеніе этихъ чиселъ.

Число, дѣлящее произведеніе двухъ сомножителей и взаимно простое съ однимъ изъ этихъ сомножителей, дѣлитъ второй сомножитель.

Всякое простое число, дѣлящее произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, дѣлитъ по меньшей мѣрѣ одинъ изъ сомножителей этого произведенія.

Число, взаимно простое съ нѣсколькими другими числами, будетъ также взаимно простымъ съ произведеніемъ этихъ чиселъ. Въ частности, произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, меньшихъ даннаго простого числа, не можетъ дѣлиться на это простое число.

Число представляетъ собою точную n-ую степень если показатели степеней всѣхъ его сомножителей кратны n.

Если два числа взаимно простыя между собою, то и степени ихъ взаимно простыя между собою.

Если простое число дѣлитъ a^n, то оно дѣлитъ также a.

3. Сравненія. Два цѣлыхъ числа a и b, разность между которыми являтеся кратнымъ цѣлаго числа n, называются, по Гауссу, сравнимыми по модулю n*). Это обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$a \equiv b \pmod{n}. \tag{a}$$

Напримѣръ,

$$(nx + a)(nx' + a') \equiv aa' \pmod{n}. \tag{1}$$

*) Чаще всего b будетъ представлять собой остатокъ отъ дѣленія a на n; въ такомъ случаѣ пишутъ $b = R\frac{a}{n}$.

Изъ формулы (a) слѣдуетъ:

$$a+c\equiv b+c,\quad ka\equiv kb\quad (\text{mod } n). \tag{2}$$

Изъ формулъ $A\equiv a$, $B\equiv b$, $C\equiv c,\ldots$ (mod n) слѣдуетъ:

$$A+B\equiv a+b,\quad fA+gB+hC+\cdots\equiv fa+gb+hc+\cdots\ (\text{mod } n), \tag{3}$$

далѣе,

$$ABC\ldots\equiv abc\ldots,\quad (\text{mod } n) \tag{4}$$

и слѣдовательно,

$$A^k\equiv a^k\quad (\text{mod } n). \tag{5}$$

Пусть $ka\equiv kb$ (mod n), и пусть d будетъ общій наибольшій дѣлитель k и n. Тогда

$$a\equiv b\quad \left(\text{mod}\,\frac{n}{d}\right)\cdot \tag{6}$$

Дѣйствительно, $ka-kb=k(a-b)$ дѣлится на n; $\frac{k}{d}\cdot(a-b)$ дѣлится на $\frac{n}{d}$; $\frac{k}{d}$ и $\frac{n}{d}$ суть числа взаимно простыя; слѣдовательно, $a-b$ дѣлится на $\frac{n}{d}\cdot$

Сравненіемъ называется алгебраическое соотношеніе вида $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+Lx+M\equiv 0$ (mod n), гдѣ коэффиціенты $A, B,\ldots, L, M$ суть числа цѣлыя или нуль, а x также можетъ принимать только цѣлыя значенія.

Значенія x, меньшія n и удовлетворяющія этому сравненію, называются корнями послѣдняго. Напримѣръ, сравненіе $x^3-3x^2-x+3\equiv 0$ (mod 5) имѣетъ корни 1, 3, 4. Сравненіе $x^2+2x+5\equiv 0$ (mod 7) не имѣетъ корней.

Легко видѣть, что, если число x удовлетворяетъ нашему сравненію по модулю n, то и числа $x\pm n$ удовлетворяютъ ему. Зная одно число x, удовлетворяющее сравненію, мы можемъ получить безчисленное число такихъ чиселъ, прибавляя къ x и вычитая изъ него всевозможныя кратныя n. Всѣ эти удовлетворяющія сравненію числа сравнимы между собою по модулю n. Говорятъ, что они образуютъ классъ. Въ каждомъ такомъ классѣ есть одно и только одно число, меньшее n, корень сравненія.

4. О нѣкоторыхъ особенныхъ формахъ. Болѣе выпуклое изображеніе линейныхъ формъ получается, если прибѣгнуть къ помощи жирнаго шрифта. Напримѣръ, выраженіе $4x+1$, обозначающее кратное 4, увеличенное на 1, можно записать и такъ: $\mathbf{4}+1$. Легко видѣть, что формулы $\mathbf{4}+3$, $\mathbf{6}+4$ равнозначны съ формулами $\mathbf{4}-1$, $\mathbf{6}-2$. Этимъ часто пользуются для соединенія двухъ формулъ. Например, пишутъ „формулы $\mathbf{8}\pm 3$“ вмѣсто „формула $\mathbf{8}+3$ и формула $\mathbf{8}+5$“.

Приводимъ нѣсколько весьма простыхъ предложеній. Большая часть ихъ достаточно извѣстна. Можно было бы указать еще безконечное количество такихъ предложеній.

Произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ будетъ четнымъ числомъ, если одинъ изъ сомножителей четное число, нечетнымъ, если всѣ сомножители нечетныя числа.

Всякое цѣлое число принадлежитъ къ одной изъ двухъ формъ $\mathbf{2}$, $\mathbf{2}+1$; къ одной изъ трехъ формъ $\mathbf{3}$, $\mathbf{3}\pm 1$; къ одной изъ четырехъ формъ $\mathbf{4}$, $\mathbf{4}\pm 1$, $\mathbf{4}\pm 2$; и т. д.

Всякое простое число, кромѣ 2, принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{4}\pm 1$.

Всякое простое число, кромѣ 2 и 3, принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{6}\pm 1$.

Точно также, всякое простое число, кромѣ 2, 3 и 5, принадлежитъ къ одной изъ четырехъ формъ $\mathbf{10}\pm 1$, $\mathbf{10}\pm 3$; къ одной изъ четырехъ формъ $\mathbf{12}\pm 1$, $\mathbf{12}\pm 5$; и т. д.

Произведеніе чиселъ, принадлежащихъ къ формѣ $ax+1$ изоморфно (принадлежитъ къ той же формѣ). Напримѣръ, $(6 . 5+1)(6 . 9+1) = 6 . 284+1 = \mathbf{6}+1$. Это слѣдуетъ изъ формулы (1).

Всякое нечетное число принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{4}\pm 1$, въ зависимости отъ того, будетъ ли число его сомножителей вида $\mathbf{4}-1$ четнымъ или нечетнымъ. Дѣйствительно, произведеніе двухъ чиселъ вида $\mathbf{4}+1$ будетъ вида $\mathbf{4}+1$, точно такъ же какъ и произведеніе двухъ чиселъ вида $\mathbf{4}-1$, между тѣмъ какъ $(4f+1)(4g-1) = \mathbf{4}-1$. Изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что всякое число вида $\mathbf{4}-1$ имѣетъ хоть одинъ изоморфный дѣлитель.

Точно такъ же, всякое число нечетное и не кратное 3 принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{6}\pm 1$, въ зависимости отъ того, будетъ ли число его сомножителей вида $\mathbf{6}-1$ четнымъ или нечетнымъ.

Квадратъ цѣлаго числа будетъ числомъ четнымъ или нечетнымъ, смотря по тому, будетъ ли само число четнымъ или нечетнымъ.

Квадратъ числа $2a\pm b$ принадлежитъ къ формѣ $4ax+b^2$. Если a и b числа нечетныя, то этотъ квадратъ принадлежитъ къ формѣ $8ax+b^2$. Изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что квадраты чиселъ, принадлежащихъ къ формамъ $\mathbf{2}$, $\mathbf{2}+1$, $\mathbf{6}\pm 1$, $\mathbf{6}\pm 2$, принадлежатъ соотвѣтственно къ формамъ $\mathbf{4}$, $\mathbf{8}+1$, $\mathbf{24}+1$, $\mathbf{12}+4$.

Никакое число вида $\mathbf{8}\pm 2$, $\mathbf{8}\pm 3$, либо $\mathbf{8}-1$ не можетъ представлять собою точнаго квадрата. Напримѣръ, не можетъ представлять точнаго квадрата выраженіе x^2+4y+2, такъ какъ въ зависимости отъ того, будетъ ли x четнымъ или нечетнымъ, мы получаемъ число вида $\mathbf{4}+2$ или $\mathbf{4}+3$, что одинаково недопустимо для точнаго квадрата.

Не можетъ представлять точнаго квадрата выраженіе x^2+1 при отличномъ отъ нуля x. Дѣйствительно, при x отличномъ отъ нуля,

$x^2 < x^2+1 < (x+1)^2$. Слѣдовательно, число, квадратъ котораго равенъ x^2+1, должно быть $> x$ и въ то же время $< x+1$. При цѣломъ x это число не можетъ быть цѣлымъ. Точно также не можетъ представлять точнаго квадрата ни одно изъ выраженій x^2-1, $x^2 \pm x + 1$, $x^2 \pm 2x, \ldots$ при x отличномъ отъ нуля, а также выраженіе x^2+4x+5, которому можно придать видъ $(x+2)^2+1$.

Всякій точный квадратъ принадлежитъ къ одной изъ формъ **9** или **3**$+1$; къ одной изъ формъ **25** или **5**± 1; и т. д. Всякая точная четвертая степень принадлежитъ къ одной изъ формъ **625** или **5**± 1; и т. д. (Смотри также ниже упражненіе № 10).

Число y^2+kz^2, при нечетномъ k, можетъ быть простымъ числомъ только въ томъ случаѣ, когда y и z разной четности.

1) Въ частности, при $k=1$, число y^2+z^2 не можетъ быть простымъ, если оно не принадлежитъ къ формѣ **4**$+1$.

2) При $k=\pm 2$, число $y^2 \pm 2z^2$ будетъ нечетнымъ только тогда, когда y будетъ нечетнымъ. Въ этомъ случаѣ число y^2+2z^2 принадлежитъ къ линейной формѣ **8**$+1$ или **8**$+3$, число y^2-2z^2 — къ формѣ **8**$+1$ или **8**-1.

3) Пусть $k=3$, и пусть y будетъ число нечетное, а z — четное. Для того, чтобы y^2+3z^2 было простымъ числомъ, y должно принадлежать къ одной изъ формъ **6**± 1, его квадратъ къ формѣ **24**$+1$; квадратъ z принадлежитъ къ формѣ **4**; слѣдовательно, $y^2+3z^2 =$ **12**$+1$. При четномъ y и z нечетномъ

$$y = \mathbf{6} \pm 2, \quad z = \mathbf{6} \pm 1 \quad \text{или} \quad \mathbf{6}+3;$$

слѣдовательно, $y^2+3z^2=$ **12**$+7$. Слѣдовательно, когда число y^2+3z^2 простое, оно всегда принадлежитъ къ формѣ **6**$+1$.

5. **Неопредѣленный анализъ.** Неопредѣленными уравненіями называютъ систему уравненій, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, и которую требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ. Неопредѣленнымъ анализомъ называется способъ рѣшенія такихъ системъ или же способъ доказательства невозможности ихъ рѣшенія въ опредѣленныхъ случаяхъ. Умѣемъ мы рѣшать только неопредѣленныя уравненія первыхъ двухъ степеней. Но даже и въ этихъ случаяхъ рѣшеніе требуетъ столькихъ вычисленій, что самая возможность рѣшенія теряетъ почти всякое практическое значеніе. Въ особенности это вѣрно относительно уравненій второй степени. Чаще всего эти уравненія рѣшаются путемъ методическихъ испытаній, при чемъ стараются устроить такъ, чтобы придти къ цѣли какъ можно меньшимъ числомъ испытаній.

Займемся весьма важнымъ уравненіемъ $ax^2+bx+c=y^2$. Такъ какъ рѣчь идетъ только о рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ, то первое, что приходитъ въ голову, это попробовать подставлять вмѣсто x числа 1, 2, 3... и вычислять соотвѣтственныя значенія лѣвой части уравненія. Вычисленіе можно производить непосредственно; лучше пользоваться при этомъ, какъ мы это дѣлаемъ ниже, методомъ конечныхъ разностей. Но такъ какъ число рѣшеній, т. е. число значеній, удовлетворяющихъ данной системѣ, обыкновенно невелико, то предпочтительнѣе попытаться опредѣлить сначала тѣ области, въ которыхъ могутъ находиться рѣшенія. Мы, напримѣръ, значительно ограничимъ область нашихъ поисковъ, если намъ удастся установить верхній и нижній предѣлы для рѣшеній.

Ниже мы приводимъ другой, болѣе легкій и въ то же время болѣе выгодный, способъ опредѣленія извѣстныхъ, вообще говоря очень обширныхъ, областей, въ которыхъ никакого рѣшенія данной системы содержаться не можетъ. Этимъ способомъ мы обязаны Frenicle'у, который назвалъ его способомъ исключенія.

Примѣненія. Пусть намъ надо рѣшить уравненіе $4x^2+5x+$ $+7=y^2$. Пишемъ:

для $x=0$, $4x^2+5x+7=$	7		
		9	
„ $x=1$, „	16		8
		17	
„ $x=2$, „	33		8
		25	
„ $x=3$, „	58		8
		33	
„ $x=4$, „	91		8
		41	
„ $x=5$, „	132		8
		49	

Продолжаемъ такъ до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до точнаго квадрата. Можно предварительно ограничить область чиселъ, подлежащихъ испытанію, исключивъ тѣ числа, которыя непріемлемы, потому что принадлежатъ къ непріемлемымъ формамъ, и подвергая испытанію лишь оставшіяся.

Напримѣръ, выраженіе $15x^2+30x+17$ не можетъ представлять точнаго квадрата, такъ какъ принадлежитъ къ формѣ $3-1$.

При исключеніи не подлежащихъ испытанію чиселъ можно пользоваться слѣдующимъ замѣчаніемъ: если мы положимъ $x=fy+g$, то

$$ax^2+bx+c \equiv ag^2+bg+c \pmod{f}.$$

Напримѣръ, полагая $x=8+0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *), получаемъ:

$$4x^2+5x+7=8+7,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Слѣдовательно, при рѣшеніи уравненія $4x^2+5x+7=y^2$ нужно испы-

---

*) Это сокращенное обозначеніе, употребляемое вмѣсто $8+0$, $8+1$, $8+2$, и т. д.

тывать только значенія $x = \mathbf{8} + 1, 2, 5$, т. е. числа 1, 2, 5, 9, 10, 13, 17, 18, 21...

Пусть намъ дано выраженіе $15x^2 + 13x + 11$. Примѣненіе модуля 2 не приноситъ намъ никакой пользы. Примѣненіе модуля 3 показываетъ намъ, что это выраженіе не можетъ представлять точнаго квадрата, если $x = \mathbf{3}$. Положимъ сначала $x = 3y + 1$. Получаемъ выраженіе $135y^2 + 129y + 39$, которое можетъ представлять точный квадратъ, только тогда $y = \mathbf{5}$, либо $\mathbf{5} - 1$, либо $\mathbf{5} - 2$, т. е. когда $x = 3y + 1$ принадлежитъ къ формѣ $\mathbf{15} + 1$, либо $\mathbf{15} - 2$, либо $\mathbf{15} - 5$.

Теперь положимъ $x = 3y - 1$. Получаемъ выраженіе $135y^2 - 51y + 13$, которое можетъ представлять точный квадратъ только, когда $y = \mathbf{5} + 2$, либо $\mathbf{5} - 1$, либо $\mathbf{5} - 2$, т. е. когда $x = 3y - 1$ принадлежитъ къ формѣ $\mathbf{15} + 5$, либо $\mathbf{15} - 4$, либо $\mathbf{15} - 7$.

Слѣдовательно, намъ остается испытывать числа 1, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 21, 24, 25, 26, 28, 31, 35, 38, 40, 41, 43, 46, 50, 53, 55, 56, 58,... Изъ получаемыхъ при этомъ для $15x^2 + 13x + 11$ значеній безусловно не подходятъ тѣ, послѣднія двѣ цифры которыхъ не совпадаютъ ни съ одной изъ слѣдующихъ группъ:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61,

64, 69, 76, 81, 84, 89, 96,

такъ какъ въ точномъ квадратѣ послѣднія двѣ цифры всегда совпадаютъ съ одной изъ этихъ группъ:

Можно далѣе попробовать положить $x = \mathbf{7}, \mathbf{7} + 1, \mathbf{7} + 2, \ldots, \mathbf{11}, \mathbf{11} + 1 \ldots$ и т. д., что дало бы новыя условія, еще болѣе ограничивающія область чиселъ, подлежащихъ испытанію. Такимъ образомъ, мы узнаемъ, напримѣръ, что при $x = \mathbf{7} + 0, 1, 2, 6$ данное выраженіе не можетъ представлять точнаго квадрата. Слѣдовательно, излишне дѣлать подстановки $x = 1, 8, 13, 16, 21, 28, 35, 41, 43, 50, 55, 56, 58, \ldots$ и остается только испытать значенія $x = 5, 10, 11, 24, 25, 26, 31, 38, 40, 46, 53, \ldots$ такъ какъ только среди нихъ могутъ находиться рѣшенія уравненія $15x^2 + 13x + 11 = z^2$. Если это уравненіе имѣетъ рѣшенія*), то нахожденіе ихъ значительно облегчается такимъ образомъ.

6. **Тождества.** Хотя отношенія, извѣстныя подъ именемъ алгебраическихъ тождествъ, примѣняются совершенно одинаково какъ къ цѣлымъ, такъ и къ не цѣлымъ числамъ, тѣмъ не менѣе они имѣютъ очень большое значеніе именно въ ариѳметикѣ. Часто они указываютъ намъ условія, при которыхъ можно въ извѣстныхъ изслѣдованіяхъ исключить изъ разсмотрѣнія многочисленные классы чиселъ и, слѣдовательно, уменьшить число испытаній. Это позволяетъ расположить предпринимаемыя испытанія въ лучшемъ порядкѣ и облегчаетъ изслѣдованіе.

Приводимъ нѣсколько тождествъ, получающихся путемъ преобразованія другихъ, хорошо извѣстныхъ или же очевидныхъ тождествъ.

---

*) Въ дѣйствительности оно ихъ не имѣетъ. Смотри упражненіе 23, 6).

Напримѣръ, изъ тождества:

$$A - C = (A - B) + (B - C)$$

мы, полагая

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \quad C = \frac{1}{\alpha - \delta}$$

и далѣе:

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad \beta = \frac{b}{b'}, \quad \gamma = \frac{c}{c'}, \quad \delta = \frac{d}{d'},$$

получаемъ тождество Fontaine'а*):

$$(ac' - a'c)(bd' - b'd) = (ad' - a'd)(bc' - b'c) + (ab' - a'b)(cd' - c'd), \qquad (7)$$

которое, при $d' = b$, $b' = -d$, $c' = \pm a$, $a' = \mp c$, переходитъ въ тождество Fibonacci.

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab \pm cd)^2 + (bc \mp ad)^2. \qquad (8)$$

Послѣднее тождество говоритъ намъ, что произведенiе суммы двухъ квадратовъ на сумму двухъ квадратовъ можетъ быть представлено, какъ сумма двухъ квадратовъ и при томъ, за исключенiемъ того случая, когда $ad = bc$, двумя различными способами. Изъ этого слѣдуетъ, что неопредѣленное уравненiе $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ имѣетъ безчисленное число рѣшенiй.

7. Много полезныхъ формулъ получается изъ тождества:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2. \qquad (9)$$

Напримѣръ: 1) полагая $\alpha = a^2 + b^2$, $\beta = a^2 - b^2$, получаемъ тождество:

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2, \qquad (10)$$

которое было извѣстно уже Пиѳагору и Платону и которое даетъ намъ безчисленное число рѣшенiй уравненiя $x^2 + y^2 = z^2$ **). (См. упражненiя №№ 6 и 5).

2) Полагая $\alpha = a^2 + b^2$, $\beta = \sqrt{2} \,.\, ab$, получаемъ тождество Лейбница:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2} \,.\, ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2} \,.\, ab + b^2), \qquad (11)$$

---

*) Traité de calcul différentiel et intégral (Парижъ, 1770 г.). Fontaine пользуется этимъ тождествомъ для интегрированiя многочисленныхъ классовъ рацiональныхъ дифференцiаловъ.

**) Говорятъ въ этомъ случаѣ, что числа x, y, z образуютъ прямоугольный треугольникъ, гипотенузой котораго является z, а катетами x и y. Числа a и b называются генераторами треугольника.

которое, при замѣнѣ b через $\sqrt{2}\,.\,b$, переходитъ въ тождество Эйлера:

$$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2). \tag{12}$$

Послѣднее тождество содержитъ въ себѣ слѣдующія три предложенія Goldbach'a, Софіи Germain и Aurifeuille'a: за исключеніемъ числа 5, ни одно число вида $4x^4+1$, x^4+4, $2^{4x+2}+1$ не можетъ быть простымъ*). Для доказательства достаточно положить $a=1$, $b=x$; $a=x$, $b=1$; $a=1$, $b=2^x$.

8. Много большей частью очень интересныхъ формулъ получается изъ тождества Эйлера:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\cdots=1+a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+\cdots. \tag{13}$$

Приводимъ слѣдующія изъ нихъ.

1) Полагая $a=b=c=\cdots=x-1$, получаемъ тождество Евдокса:

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}, \tag{14}$$

которое даетъ намъ слѣдующее новое доказательство формулы (5) положимъ $x=\frac{a}{b}$, $b=a+hm$; изъ тождества (14) слѣдуетъ, что $(a+hm)^n-a^n$ дѣлится на $(a+hm)-a$, т. е. изъ $b\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$ слѣдуетъ $b^n\equiv a^n\ (\mathrm{mod}\ m)$.

Но при этомъ доказательствѣ формулы (5) мы получили гораздо далѣе идущій результатъ, а именнно: a^n-b^n дѣлится на $a-b$. Замѣняя b черезъ $-b$, получаемъ: $a^n-(-b)^n$ дѣлится на $a+b$ или, иначе говоря, $a^n\pm b^n$ дѣлится на $a+b$; верхній знакъ относится къ случаю нечетнаго n, нижній—къ случаю четнаго.

2) Полагая $a=\frac{n}{1}$, $b=\frac{n}{2}$, $c=\frac{n}{3}$, ... получаемъ изъ тождества (13) формулу для суммы такъ называемыхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ, выраженій, имѣющихъ весьма большое значеніе и обозначаемыхъ черезъ

$$C_{n,a}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-a+1)}{a!}.$$

---

*) Landry удалось добиться разложенія числа $2^{58}+1$ на его сомножителей только путемъ очень громоздкихъ вычисленій, и онъ думалъ, что, если бы это разложеніе затерялось, то немало столѣтій пройдетъ, пока человѣчество найдетъ его вновь. Мы видимъ теперь непосредственно изъ тождества (12), что это число является произведеніемъ двухъ сомножителей: $2^{29}+2^{15}+1$ и $2^{29}-2^{15}+1$.

Получаемое при указанной подстановкѣ тождество:

$$C_{n+k,\,k} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!} = 1 + C_{n,1} + C_{n+1,2} + \cdots + C_{n+k-1,k}, \quad (15)$$

впервые въ этомъ видѣ встрѣчаемое у Briggs'а, было доказано Паскалемъ съ помощью его метода совершенной индукціи*). Изъ него слѣдуетъ, что произведеніе $(n+1)\cdots(n+k)$ дѣлится на $k!$. Это предложеніе также доказано Паскалемъ. Проще доказать его, исходя изъ легко доказываемаго отношенія:

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1} \quad (16)$$

и замѣняя въ немъ послѣдовательно n черезъ $n-1$, $n-2, \ldots$ и одновременно k черезъ $k-1$, $k-2, \ldots$ что приводитъ насъ въ концѣ къ очевиднымъ тождествамъ вродѣ $C_{h,1} = 1 + C_{h-1,1}$.

Выраженіе $C_{n,k}$ обладаетъ еще цѣлымъ рядомъ замѣчательныхъ свойствъ, но разсмотрѣніе ихъ относится скорѣе уже къ области алгебраическаго анализа. Сдѣлаемъ только еще два замѣчанія.

Во-первыхъ, хотя это выраженіе сохраняетъ свой ариѳметическій смыслъ только до тѣхъ поръ, пока n и k цѣлыя положительныя числа, $(n \geqslant k)$ тѣмъ не менѣе условились считать:

$$C_{k,0} = 1. \quad (17)$$

Во-вторыхъ, пусть p простое число, большее k. $C_{p,k}$ дѣлится на k (Эйлеръ),, или же, иначе говоря,

$$C_{p,k} \equiv 0 \pmod p.$$

Это слѣдуетъ изъ очевиднаго равенства:

$$k\,.\,C_{p,k} = pC_{p-1,k-1}. \quad (18)$$

p не дѣлитъ k, слѣдовательно, оно дѣлитъ $C_{p,k}$.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

*) Этотъ часто употребляемый методъ, нѣсколько образцовъ котораго мы позже встрѣтимъ, состоитъ въ слѣдующемъ: доказывается, что если нѣкоторое предположеніе вѣрно для выраженія $F(n)$, то оно также вѣрно для $F(n+1)$. Изъ этого слѣдуетъ, что предположеніе вѣрно вообще, если оно вѣрно для $F(1)$. Дѣйствительно, такъ какъ оно вѣрно для $F(1)$, то оно вѣрно для $F(2)$. Будучи вѣрно для $F(2)$, оно вѣрно для $F(3)$. И т. д.

Таблицы для рѣшенія кубическаго уравненія.

В. Жардецкаго.

§ 1. Кубическое уравненіе имѣетъ слѣдующій общій видъ:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0. \qquad \text{(I)}$$

Но, какъ извѣстно, всякое уравненіе n-ой степени:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

можетъ быть освобождено отъ члена, содержащаго неизвѣстную величину въ $n-1$-ой степени. Это выполняется подстановкой новаго перемѣннаго, связаннаго со старымъ соотношеніемъ $z = y - \frac{a_1}{na_0}$, которое для кубическаго уравненія приметъ видъ $z = y - \frac{b}{3a}\cdot$ Если выполнимъ подстановку, то получимъ уравненіе:

$$y^3 + py + q = 0, \qquad \text{(II)}$$

гдѣ

$$p = c - \frac{b^2}{3a}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Въ этомъ видѣ уравненіе содержитъ 2 параметра, и рѣшенія его находятся по формуламъ К а р д а н а. Но оказывается возможнымъ видоизмѣнить уравненіе такъ, чтобы входилъ только одинъ параметръ. Дадимъ коэффиціенту при y нѣсколько иной видъ: $3p$, и будемъ считать $p > 0$ постоянно, тогда передъ 2-ымъ членомъ придется ввести знаки $\pm$. Если теперь положимъ $y = x\sqrt{p}$, то получимъ:

$$x^3 \pm 3x + m = 0, \quad \text{(III)} \qquad \text{гдѣ} \quad m = \frac{q}{p\sqrt{p}}\cdot$$

Рѣшимъ это уравненіе обычнымъ способомъ. Полагая $x = u + v$, для u и v найдемъ слѣдующія значенія:

$$u^3 = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} \pm 1}; \qquad v^3 = -\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} \pm 1}.$$

Откуда суммированіемъ соотвѣтствующихъ значеній u и v, какъ извѣстно, находимъ корни уравненія (III). Въ случаѣ $x^3 + 3x + m = 0$, будетъ очевидно одинъ вещественный корень $\left(\frac{m^2}{4} + 1 > 0\right)$. Въ случаѣ $x^3 - 3x + m = 0$, если $\frac{m^2}{4} - 1 > 0$, т. е. $|m| > 2$, то одинъ корень вещественный, а два мнимыхъ; если же $\frac{m^2}{4} - 1 < 0$, т. е. $|m| < 2$, то для

u и v получаются сопряженныя мнимыя значенія, и всѣ корни вещественныя.

§ 2. Въ уравненіе $x^3 \pm 3x + m = 0$ входитъ только одинъ параметръ m. Давая x'у рядъ значеній, мы можемъ получить рядъ значеній m, а имѣя 2-ой, находимъ 1-й т. е. является возможность составить таблицы, гдѣ бы по данному m можно было разыскать соотвѣтствующее x. Конечно ясно, что таблицы должны состоять изъ 2-хъ частей: для

$$x^3 + 3x = s \tag{IV}$$

и для

$$x^3 - 3x = r. \tag{V}$$

Придавая x'у значенія отъ 0 до 10 (черезъ одну десятую) мы получили значенія s отъ 0 до 1030. То обстоятельство, что перемѣна знака при s вызоветъ лишь измѣненіе знака при x, позволяетъ пользоваться таблицами при $s = -1030 \cdots + 1030$. Аналогично во 2-ой части значенія x можно найти для $r = -970 \cdots + 970$. Для значеній $|r| < 2$ дана особая таблица, въ которой находятся всѣ три вещественныхъ корня. Если же въ уравненіи $x^3 \pm 3x = n$, n выходитъ за предѣлы таблицъ, то x находится послѣдовательнымъ приближеніемъ $x_1^3 = n \mp \sqrt[3]{n}$; $x_2^3 = n \mp x_1$ и т. д. Таблицы провѣрены студентомъ Костецкимъ.

x	r	d_r	s	d_s
−2.0	−2.00	+0.84	−14.00	+1.44
−1.9	−1.16	+0.73	−12.56	1.33
−1.8	−0.43	+0.62	−11.23	1.22
−1.7	+0.19	+0.51	−10.01	1.11
−1.6	+0.70	+0.42	−8.90	1.02
−1.5	+1.12	+0.34	−7.88	0.94
−1.4	+1.46	+0.24	−6.94	0.84
−1.3	+1.70	+0.17	−6.10	0.77
−1.2	+1.87	+0.10	−5.33	0.70
−1.1	+1.97	+0.03	−4.63	0.63
−1.0	+2.00	−0.03	−4.00	0.57
−0.9	+1.97	−0.08	−3.43	0.52
−0.8	+1.89	−0.13	−2.91	0.47
−0.7	+1.76	−0.18	−2.44	0.42
−0.6	+1.58	−0.20	−2.02	0.40
−0.5	+1.38	−0.24	−1.62	0.36
−0.4	+1.14	−0.27	−1.26	0.33
−0.3	+0.87	−0.28	−0.93	0.32
−0.2	+0.59	−0.29	−0.61	0.31
−0.1	+0.30	−0.30	−0.30	0.30
0.0	0.00		0.00	

$x^3 + 3x = s.$

x	r	d_r	s	d_s
0.0	0.00	−0.30	0.00	+0.30
0.1	−0.30	−0.29	+0.30	0.31
0.2	−0.59	−0.28	0.61	0.32
0.3	−0.87	−0.27	0.93	0.33
0.4	−1.14	−0.24	1.26	0.36
0.5	−1.38	−0.20	1.62	0.40
0.6	−1.58	−0.18	2.02	0.42
0.7	−1.76	−0.13	2.44	0.47
0.8	−1.89	−0.08	2.91	0.52
0.9	−1.97	−0.03	3.43	0.57
1.0	−2.00	+0.03	4.00	0.63
1.1	−1.97	+0.10	4.63	0.70
1.2	−1.87	+0.17	5.33	0.77
1.3	−1.70	+0.24	6.10	0.84
1.4	−1.46	+0.34	6.94	0.94
1.5	−1.12	+0.42	7.88	1.02
1.6	−0.70	+0.51	8.90	1.11
1.7	−0.19	+0.62	10.01	1.22
1.8	+0.43	+0.73	11.23	1.33
1.9	+1.16	+0.84	12.56	1.44
2.0	+2.00		14.00	

$x^3 - 3x = r,$

x	r	d_r	s	d_s
2.0	+ 2.0	+ 1.0	+ 14.0	+ 1.6
2.1	3.0	1.0	15.6	1.8
2.2	4.0	1.3	17.2	1.9
2.3	5.3	1.3	19.1	1.9
2.4	6.6	1.5	21.0	2.1
2.5	8.1	1.7	23.1	2.3
2.6	9.8	1.8	25.4	2.4
2.7	11.6	2.0	27.8	2.6
2.8	13.6	2.1	30.4	2.7
2.9	15.7	2.3	33.1	2.9
3.0	18.0	2.5	36.0	3.1
3.1	20.5	2.7	39.1	3.3
3.2	23.2	2.8	42.4	3.4
3.3	26.0	3.1	45.8	3.7
3.4	29.1	3.3	49.5	3.9
3.5	32.4	3.5	53.4	4.1
3.6	35.9	3.7	57.5	4.3
3.7	39.6	3.9	61.8	4.5
3.8	43.5	4.1	66.3	4.7
3.9	47.6	4.4	71.0	5.0
4.0	52.0	4.6	76.0	5.2
4.1	56.6	4.9	81.2	5.5
4.2	61.5	5.1	86.7	5.7
4.3	66.6	5.4	92.4	6.0
4.4	72.0	5.6	98.4	6.2
4.5	77.6	5.9	104.6	6.5
4.6	83.5	6.2	111.1	6.8
4.7	89.7	6.5	117.9	7.1
4.8	96.2	6.8	125.0	7.4
4.9	103.0	7.0	132.4	7.6
5.0	110.0	7.4	140.0	8.0
5.1	117.4	7.6	148.0	8.2
5.2	125.0	8.0	156.2	8.6
5.3	133.0	8.3	164.8	8.9
5.4	141.3	8.6	173.7	9.2
5.5	149.9	8.9	182.9	9.5
5.6	158.8	9.3	192.4	9.9
5.7	168.1	9.6	202.3	10.2
5.8	177.7	10.0	212.5	10.6
5.9	187.7	10.3	223.1	10.9
6.0	198.0		234.0	

x	r	d_r	s	d_s
6.0	+ 198.0	+ 10.7	+ 234.0	+ 11.3
6.1	208.7	11.0	245.3	11.6
6.2	219.7	11.5	256.9	12.1
6.3	231.2	11.7	269.0	12.3
6.4	242.9	12.2	281.3	12.8
6.5	255.1	12.6	294.1	13.2
6.6	267.7	13.0	307.3	13.6
6.7	280.7	13.3	320.9	13.9
6.8	294.0	13.8	334.8	14.4
6.9	307.8	14.2	349.2	14.8
7.0	322.0	14.6	364.0	15.2
7.1	336.6	15.0	379.2	15.6
7.2	351.6	15.5	394.8	16.1
7.3	367.1	15.9	410.9	16.5
7.4	383.0	16.4	427.4	17.0
7.5	399.4	16.8	444.4	17.4
7.6	416.2	17.2	461.8	17.8
7.7	433.4	17.8	479.6	18.4
7.8	451.2	18.1	498.0	18.8
7.9	469.3	18.7	516.8	19.2
8.0	488.0	19.1	536.0	19.8
8.1	507.1	19.7	555.8	20.2
8.2	526.8	20.1	576.0	20.7
8.3	546.9	20.6	596.7	21.2
8.4	567.5	21.1	617.9	21.7
8.5	588.6	21.7	639.6	22.3
8.6	610.3	22.1	661.9	22.7
8.7	632.4	22.7	684.6	23.3
8.8	655.1	23.2	707.9	23.8
8.9	678.3	23.7	731.7	24.3
9.0	702.0	24.3	756.0	24.9
9.1	726.3	24.8	780.9	25.4
9.2	751.1	25.4	806.3	26.0
9.3	776.5	25.9	832.3	26.5
9.4	802.4	26.5	858.8	27.1
9.5	828.9	27.0	885.9	27.6
9.6	855.9	27.7	913.5	28.3
9.7	883.6	28.2	941.8	28.8
9.8	911.8	28.8	970.6	29.4
9.9	940.6	29.4	1000.0	30.0
10.0	970.0		1030.0	

$x^3 + 3x = s,$ $\qquad$ $x^3 - 3x = r.$

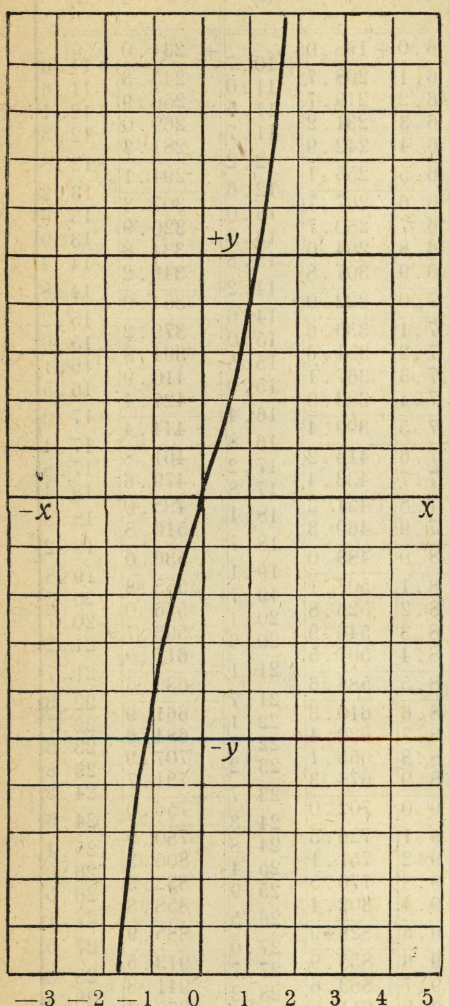

График для рѣшенія уравненія

$$x^3 + 3x = s.$$

По оси y откладывается s и находится соотвѣтствующее x.

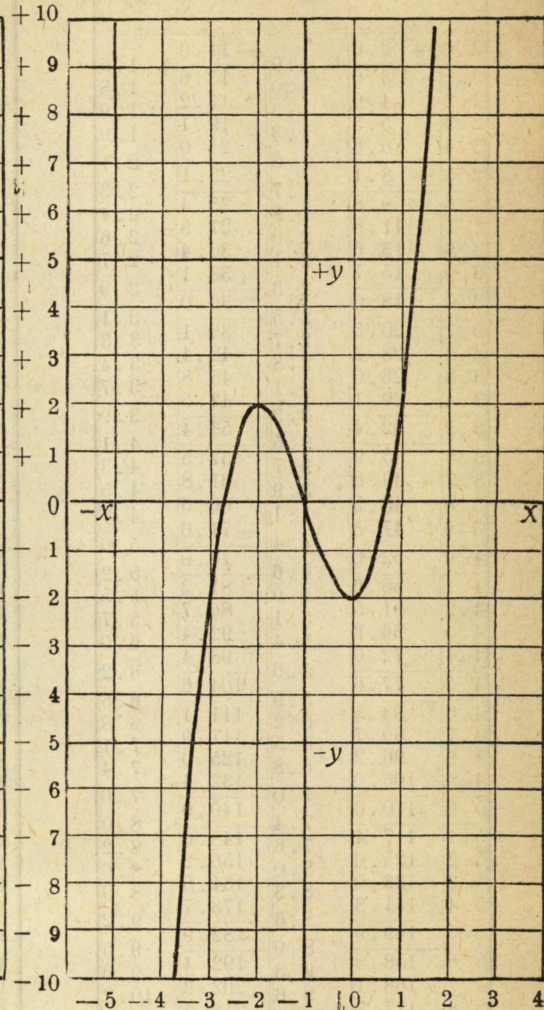

График для рѣшенія уравненія

$$x^3 - 3x = r.$$

По оси y откладывается r и находится соотвѣтствующее x.

ПОЛЕМИКА.

По поводу замѣтки I. Блаженова, „Автоматическій сифонъ“, помѣщенной въ отдѣлѣ „Опыты и приборы“ въ № 637 „Вѣстника“.

Въ № 637 „Вѣстника“ въ отдѣлѣ „Опыты и приборы“ помѣщено изображеніе и описаніе автоматическаго сифона. На самомъ дѣлѣ сифонъ этотъ будетъ дѣйствовать, когда при непремѣнномъ условіи быстраго опусканія будетъ обладать еще слѣдующими дополнительными свойствами; 1) малою площадью поперечнаго разрѣза трубки, не превышающаго наибольшей площади поперечнаго разрѣза воздушнаго пузыря въ трубкѣ, могущаго раздѣлить жидкость въ ней; 2) достаточнымъ превышеніемъ площади поперечнаго разрѣза трубки надъ внѣшнимъ отверстіемъ колбочки; 3) сверхъ обычныхъ свойствъ сифона (напримѣръ, уголъ для полнаго выливанія) еще опредѣленнымъ соотношеніемъ между объемомъ колбочки, сифонной трубки и ея частей и степенью погруженія сифона въ жидкость.

П. К.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Д. Святскій. *Астрономическія явленія въ русскихъ лѣтописяхъ съ научно-критической точки зрѣнія.* Съ прилож. табл. для опредѣленія историч. затменій, четырехъ картъ въ краскахъ и канона русскихъ солнечныхъ затменій М. А. Вильева. Петроградъ, 1915 г. Печатано по распоряженію Академіи Наукъ. Стр. 214. Ц. 1 р. 80 к. (Весь доходъ отъ продажи поступаетъ на усиленіе средствъ Русск. Общ. Люб. Міровѣдѣнія).

Изъ предисловія.

Авторъ ставилъ себѣ цѣлью при помощи научно-критическаго разбора лѣтописныхъ замѣтокъ о солнечныхъ и лунныхъ затменіяхъ, кометахъ, падающихъ звѣздахъ, солнечныхъ пятнахъ, сѣверныхъ сіяніяхъ и др. астрономическихъ явленіяхъ дать въ руки изслѣдователей русскихъ лѣтописей справочникъ, полезный при выясненіи календарныхъ датъ, вопросовъ хронологіи, территоріи, на которой могло быть наблюдаемо данное явленіе, наконецъ,— степени достовѣрности самихъ астрономическихъ текстовъ лѣтописей. Въ то же время этимъ самымъ авторъ собралъ воедино для астрономовъ весь тотъ матеріалъ, который непосредственно касается ихъ, но къ изученію котораго съ научно-критической точки зрѣнія никто еще не приступалъ основательнымъ образомъ. А между тѣмъ наши лѣтописи содержатъ въ себѣ богатый, правдивый и часто очень точный матеріалъ и по сравненіи съ западными хрониками много новаго и интереснаго. Благодаря М. А. Вильеву авторъ имѣлъ возможность приложить къ своей работѣ рядъ общедоступныхъ таблицъ, позволяющихъ разрѣшать вопросы о возможности солнечныхъ и лунныхъ затменій и объ условіи видимости ихъ въ Россіи для любого дня и года за нашъ лѣтописный періодъ съ X по XVIII столѣтія включительно.

Чикинъ А. А. *Отражательные телескопы.* Изготовленіе рефлекторовъ доступными для любителя средствами. Изд. Русскаго О-ва Любит. Міровѣд. (Б.-Разночинная, д. 9 кв. 2). Петроградъ, 1915. Стр. 128 съ 79 рис. и черт. Ц. 1 р. 50 к.

Изъ предисловія.

Вниманіе, которымъ былъ встрѣченъ докладъ автора объ изготовленіи зеркала для отражательнаго телескопа, побудило его выпустить эту книгу въ надеждѣ на то, что рефракторъ получитъ наконецъ, надлежащее распространеніе у насъ и тѣмъ будетъ содѣйствовать распространенію астрономическихъ знаній въ Россіи. Чтобы отшлифовать самому даже небольшой и посредственный объективъ, нужно много приспособленій и затратъ. Изготовить же зеркало можно и изъ дешеваго стекла и безъ помощи сложныхъ станковъ. Тѣмъ, кто имѣетъ склонность и охоту къ ручному труду и обладаетъ достаточнымъ запасомъ терпѣнія, внимательности и настойчивости, можно смѣло рекомендовать изготовить самому себѣ рефлекторъ. Тѣмъ же, кто не собирается строить себѣ рефлекторъ, а желаетъ пріобрѣсти себѣ готовый, предлагаемая книга послужитъ полезнымъ пособіемъ при обращеніи съ нимъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 287 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x-5}{3\sqrt[3]{2(x-1)}}-\sqrt[3]{2(x-1)}=2.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 288 (6 сер.). Доказать, что во всякой конечной геометрической прогрессіи, абсолютныя величины членовъ которой различны по числовой величинѣ, сумма абсолютныхъ величинъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ членовъ, убываетъ по мѣрѣ удаленія отъ концовъ прогрессіи къ ея серединѣ.

Н. С. (Одесса).

№ 289 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^{y^2} = y^{x^2}.$$

R.

№ 290 (6 сер.). Построить треугольникъ по основанію, противолежащему углу и по проведенной изъ вершины этого угла биссектрисѣ треугольника.

(Заимств.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 228 (6 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sin x + \cos y = a, \quad \cos x + \sin y = b.$$

Записавъ систему въ видѣ $a - \sin x = \cos y$, $b - \cos x = \sin y$, возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ $1 - 2(a \sin x + b \cos x) + a^2 + b^2 = 1$, откуда

$$(1) \quad a \sin x + b \cos x = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Записавъ систему въ видѣ $a - \cos y = \sin x$, $b - \sin y = \cos x$, послѣ ряда аналогичныхъ преобразованій приходимъ къ уравненію

$$(2) \quad a \cos y + b \sin y = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ограничимся обычнымъ въ элементарной математикѣ случаемъ, когда a и b вещественныя числа. Если $a^2 + b^2 > 0$, т. е. если хоть одно изъ чиселъ a и b отлично отъ нуля, то полагая (3) $\left|\sqrt{a^2 + b^2}\right| = r$, можно найти уголъ α, удовлетворяющій равенствамъ

$$(4) \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}, \quad (5) \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}.$$

Тогда, дѣля уравненія (1) и (2) на r, ихъ можно привести къ виду

$$\frac{a}{r} \sin x + \frac{b}{r} \cos y = \frac{r}{2}, \quad \frac{a}{r} \cos y + \frac{b}{r} \sin y = \frac{r}{2},$$

или [см. (4), (5)] $\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{r}{2}$, $\cos y \cos \alpha + \sin y \sin \alpha = \frac{r}{2}$, т. е.

$$(6) \quad \sin(x + \alpha) = \frac{r}{2}, \quad (7) \quad \cos(y - \alpha) = \frac{r}{2}.$$

Если $\frac{r}{2} \leqq 1$, т. е. [см. (3)] если (8) $a^2+b^2<4$, то можно опредѣлить углы, синусъ или косинусъ которыхъ равны $\frac{r}{2}$. Такимъ образомъ, предполагая, что условіе (8) соблюдено, изъ уравненій (6) и (7) находимъ, что

$$(9)\quad x=\arcsin\frac{r}{2}-\alpha,\qquad (10)\quad y=\arccos\frac{r}{2}+\alpha.$$

Эти формулы не даютъ еще окончательнаго рѣшенія первоначальной системы уравненій, такъ какъ надо еще выяснить, при какихъ изъ безчисленнаго множества вообще возможныхъ значеній угловъ $\arcsin\frac{r}{2}$ и $\arccos\frac{r}{2}$ значенія x и y, опредѣляемыя формулами (9) и (10), дѣйствительно удовлетворяютъ первоначальной системѣ. Для рѣшенія этого вопроса обозначимъ черезъ ϑ какой-нибудь опредѣленный изъ угловъ (напримѣръ, уголъ первой четверти), удовлетворяющій равенству $\sin\vartheta=\frac{r}{2}$, и положимъ (11) $\arccos\frac{r}{2}=z$. Тогда вообще $\arcsin\frac{r}{2}=(-1)^k\vartheta+k\pi$, гдѣ k — произвольное цѣлое число. Такимъ образомъ [см. (9), (10), (11)]

$$(12)\quad x=(-1)^k\vartheta-\alpha+k\pi,\quad (13)\quad y=z+\alpha,$$

откуда, полагая (14) $(-1)^k\vartheta+k\pi=\beta$, находимъ, что

$$\sin x=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha,\quad \cos x=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha,$$

$$\sin y=\sin z\cos\alpha+\cos z\sin\alpha,\quad \cos y=\cos z\cos\alpha-\sin z\sin\alpha.$$

Подставляя эти выраженія для $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ въ предложенную для рѣшенія систему и принимая во вниманіе равенства (4) и (5), получимъ

$$(\sin\beta+\cos z)\frac{a}{r}-(\cos\beta+\sin z)\frac{b}{r}=a,\quad (\cos\beta+\sin z)\frac{a}{r}+(\sin\beta+\cos z)\frac{b}{r}=b,$$

или же, такъ какъ [см. (14)] $\sin\beta=\sin\vartheta=\frac{r}{2}$ и [см. 11] $\cos z=\frac{r}{2}$,

$$a-(\cos\beta+\sin z)\frac{b}{r}=a,\quad (\cos\beta+\sin z)\frac{a}{r}+b=b,$$

откуда

$$(\cos\beta+\sin z)\,b=0,\quad (\cos\beta+\sin z)\,a=0;$$

но, такъ какъ a и b не равны по условію одновременно нулю, то два послѣднихъ равенства равносильны одному, а именно $\cos\beta+\sin z=0$, т. е.

$$(15)\quad \sin z=-\cos\beta.$$

Итакъ для того, чтобы формулы (12) и (13) давали рѣшенія разсматриваемой системы, необходимо и достаточно выбрать уголъ z такъ, чтобы удовлетворялось равенство (11), или же равносильное ему равенство

$$(16)\quad \cos z=\sin\beta,$$

и равенство (15). Одинъ изъ угловъ z, удовлетворяющихъ равенствамъ (15) и (16), есть $\beta - \frac{\pi}{2}$, а общее выраженіе такихъ угловъ опредѣляется формулой

$$(17) \quad z = \beta - \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

гдѣ n — произвольное цѣлое число. Изъ формулъ (12), (13), (14) и (17) выводимъ слѣдующія общія рѣшенія предложенной системы въ томъ случаѣ, когда a и b не равны одновременно нулю:

$$x = (-1)^k \vartheta - \alpha + k\pi, \quad y = (-1)^k \vartheta + \alpha + \left(2n + k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

гдѣ k и n — произвольныя цѣлыя числа, а углы α и ϑ суть любые опредѣленные углы, удовлетворяющіе соотвѣтственно равенствамъ (4), (5) и равенству $\sin\vartheta = \frac{|\sqrt{a^2+b^2}|}{2}$. Въ томъ случаѣ, когда $a = b = 0$, задача значительно упрощается и становится неопредѣленной. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ разсматриваемую систему можно записать въ видѣ $\sin x = -\cos y$, $\cos x = -\sin y$. Одинъ изъ угловъ x, удовлетворяющій этой системѣ при произвольномъ y, есть $\frac{3\pi}{2} - y$, а общее рѣшеніе выражается формулой $x = \frac{3\pi}{2} - y + 2n\pi$, или $x = \frac{(4n+3)\pi}{2} - y$, гдѣ n — произвольное цѣлое число, а y — произвольный уголъ.

Н. Михальскій (Екатринославъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Флавіанъ Д.* (дѣйствующая армія).

№ 243 (6 сер. *Доказать, что во всякой конечной ариѳметической прогрессіи, разность которой отличается отъ нуля, разность двухъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ членовъ, возрастаетъ по мѣрѣ удаленія отъ концовъ ея къ срединѣ.*

Пусть (1) $a, b, c, \ldots, i, k, l$ — нѣкоторая конечная ариѳметическая прогрессія, n — число ея членовъ, а d — разность, при чемъ $d \neq 0$. Замѣчая, что разность, написанной въ обратномъ порядкѣ прогрессіи (2) $l, k, i, \ldots, c, b, a$ равна $(-d)$, называя черезъ u_m и v_m соотвѣтственно m-ые члены прогрессіи (1) съ начала и съ конца и опредѣляя u_m и v_m соотвѣтственно изъ прогрессій (1) и (2), находимъ, что

$$u_m = a + d(m-1), \quad v_m = l - d(m-1), \quad u_m v_m = [a + d(m-1)][l - d(m-1)] =$$

$$= al + d(m-1)(l-a) - d^2(m-1)^2,$$

или же, подставляя вмѣсто l его значеніе изъ формулы

$$l = a + d(n-1), \quad u_m v_m = al + d^2(m-1)(n-1) - d^2(m-1)^2,$$

т. е.

$$(3) \quad u_m v_m = al + d^2(m-1)(n-m).$$

Подобнымъ же образомъ, называя черезъ u_p и v_p соотвѣтственно p-ые члены съ начала и съ конца, получимъ, что

$$(4) \quad u_p v_p = al + d^2(p-1)(n-p).$$

Вычитая изъ равенства (4) равенство (3), имѣемъ

$$u_p v_p - u_m v_m = d^2 [(p-1)(n-p) - (m-1)(n-m)] =$$

$$= d^2 (pn - n - p^2 + p - mn + n + m^2 - m) = d^2 [n(p-m) + (p-m) - (p^2 - m^2)] =$$

$$= d^2 (p-m)[n+1-(p+m)].$$

Итакъ (5) $u_p v_p - u_m v_m = d^2 (p-m)[n+1-(p+m)]$. Предполагая, что $p > m$ мы всегда можемъ допустить согласно съ условіемъ, что $p \leqq \frac{n}{2}$ и $m \leqq \frac{n}{2}$ и что поэтому $p + m \leqq n$. Такимъ образомъ $d^2 > 0$, такъ какъ $d \neq 0$, $p - m > 0$ и $n + 1 - (p+m) \geqq 1$, а потому $d^2 (p-m)[n+1-(p+m)] > 0$. Слѣдовательно [см. (4)] $u_p v_p > u_m v_m$.

М. Виленскій (Одесса); *М. Николаевъ* (Москва); *А. Иткинъ* (Петроградъ) *А. Кисловъ* (Москва); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *М. Бабинъ* (ст. Дитковка); *М. Шульманъ* (Мелекесъ, Самарск. губ.).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Я. Перельманъ. *Междупланетныя путешествія.* Изд. Сойкина. Петроградъ, 1915. Стр. VIII + 104. Ц. 60 к.

Б. Райковъ. *Методика практическихъ занятій по природовѣдѣнію.* Изд. Карбасникова. Петроградъ. 1915. Стр. 172. Ц. 1 р.

К. М. Курдовъ и А. А. Ивановскій. *Отечествовѣдѣніе.* Курсъ географіи Россіи съ 150 рис. въ текстѣ, 10 діаграммами, 10 картограммами и 3 картами. Изд. 3-е исправл. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Стр. 190. Ц. 1 р. 25 к.

Шохоръ-Троцкій. *Новый ариѳметическій задачникъ для учениковъ нач. школъ.* Ч. III-я Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Стр. 156. Ц. 25 к.

I. Тропфке. *Исторія элементарной математики въ систематическомъ изложеніи.* Т. I. «Ариѳметика и алгебра». Ч. I-я. «Ариѳметика». Перев. съ нѣм. подъ ред. I. И. Чистякова. Москва, 1914. Стр. VI + 146. Ц. 1 р.

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса. Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется