Обложка
ищется

Обложка
пщется

Второй серіи III-го семестра № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 632.

Геометрическое изслѣдованіе движенія планетъ.

Проф. А. Грингиля.

Въ сочиненіи: „Матерія и движеніе" — небольшой брошюрѣ о большомъ предметѣ — Максвеллъ (I. C. Maxwell) приводитъ геометрическое доказательство перваго закона Кеплера.

Орбита планеты относительно солнца есть эллипсъ, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

Доказательство Максвелла основывается на изслѣдованіи годографа Гамильтона (Hamilton) и разнится въ этомъ смыслѣ отъ геометрическаго доказательства, которое далъ Ньютонъ въ своихъ: „Philosophiae naturalis principia mathematica".

Въ настоящей статьѣ я имѣю въ виду развить оба эти метода: Покажемъ, какимъ образомъ, можно вполнѣ точно и при томъ чисто геометрически изслѣдовать движеніе тѣла, получающаго въ разныхъ угловыхъ промежуткахъ одинаковые центростремительные импульсы. Покажемъ далѣе, что можно получить результаты солнечнаго притяженія, если положимъ, что они непрерывны. Читатель увидитъ, что всѣ явленія происходятъ такъ, какъ если бы тѣло находилось въ полѣ центральнаго тяготѣнія, измѣняющагося обратно пропорціонально разстоянію отъ притягивающаго центра.

---

*) Настоящая статья извѣстнаго англійскаго геометра заимствована нами изъ журнала «Wektor», гдѣ она помѣщена на польскомъ языкѣ.

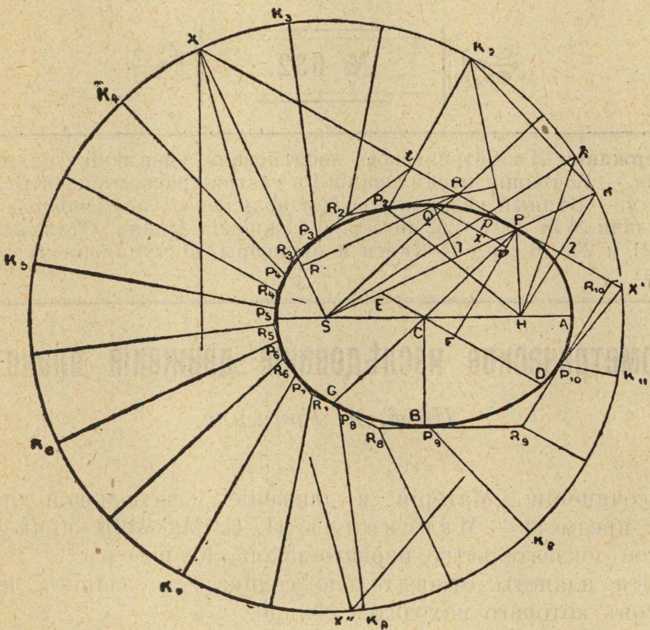
Пусть S — солнце, P — планета, движущаяся въ направленіи PR. Допустимъ, что внутри угла KSR_2 солнечное притяженіе сосредоточено по биссектрисѣ RS этого угла; планета получаетъ импульсъ, измѣняющій направленіе ея движенія съ PR на RP_2.

Изъ S, какъ изъ центра, опишемъ окружность $KK_2\ldots$ и проведемъ HK перпендикулярно къ PR, при чемъ выберемъ точку H такъ, чтобы

$$\sphericalangle HPR = \sphericalangle KPR.$$

Имѣемъ въ виду этого

$$PH = PK.$$



Построимъ чертежъ въ такомъ масштабѣ, чтобы длина вектора HK равнялась скорости тѣла въ точкѣ P и чтобы векторъ KK_2, перпендикулярный къ SR, равнялся скорости, сообщенной импульсомъ. Въ такомъ случаѣ длина HK_2 равна новой скорости тѣла P; прямая же RP_2, вдоль которой направлена эта скорость — перпендикулярна къ HK_2. Въ точкѣ P_2, въ которой траекторія пересѣкаетъ прямую SK_2, имѣемъ:

$$HP_2 = P_2K_2, \text{ такъ какъ } HR = RK = RK_2.$$

Въ виду этого должно быть:

$$HP_2 + P_2S = SK_2 = SK = HP + PS.$$

Отсюда вытекаетъ, что прямыя PR, RP_2 суть касательныя въ точкахъ P и P_2 къ эллипсу, большая ось котораго равна SK и фокусы котораго расположены въ точкахъ H и S.

Построимъ рядъ послѣдовательныхъ и равныхъ хордъ K_2K_3, $K_3K_4, \ldots$ Пусть величина новаго центральнаго импульса соотвѣтствуетъ длинѣ K_2K_3 и пусть R_2S будетъ его направленіемъ. Онъ измѣняетъ направленіе движенія тѣла съ P_2R_2 на R_2P_3, при чемъ прямая R_2P_3 перпендикулярна къ HK_3. Въ точкѣ P_3, лежащей на SK_3, имѣемъ:

$$HP_3 = P_3K_3,$$

такъ что прямая R_2P_3 есть касательная въ точкѣ P_3 къ упомянутому эллипсу.

Разсуждая аналогично и дальше, видимъ, что подъ дѣйствіемъ равныхъ импульсовъ, сообщаемыхъ тѣлъ въ равныя угловыя промежутки, это тѣло описываетъ ломанную $RR_2R_3R_4$, которая вмѣстѣ съ прямыми SR, SR_2, $SR_3, \ldots$, создаетъ какъ бы паутинную сѣть. Эта ломанная линія описана около эллипса, точки же касанія лежатъ на прямыхъ SK, $SK_2 \ldots$, образующихъ между собою равные углы. Заключеніе это вполнѣ согласно съ извѣстными выводами изъ теоріи коническихъ сѣченій.

На чертежѣ имѣемъ 10-угольникъ описанный около эллипса. Многоугольникъ $RR_2R_3 \ldots$ вписанъ также въ эллипсъ, имѣющій съ предыдущимъ общій фокусъ S и общую директриссу. Дѣйствительно, пусть X — точка пересѣченія PR съ перпендикуляромъ, возставленнымъ въ точкѣ S къ прямой SP. Точка X лежитъ на директриссѣ, которую получаемъ опуская перпендикуляръ на SH. [На чертежѣ простая случайность, что точка X лежитъ на окружности].

Проведемъ RR' перпендикулярно къ SX и обозначимъ черезъ $2a$ уголъ $\sphericalangle KSK_2$, это постоянный уголъ, подъ которымъ равные хорды KK_2, $K_2K_3, \ldots$, видны изъ центра S окружности.

Имѣемъ соотношеніе:

$$\frac{SR}{RX} = \sec a \cdot \frac{RR'}{RX} = \sec a \cdot \frac{SP}{PX}.$$

Если поэтому e — эксцентриситетъ перваго эллипса, то R лежитъ на коническомъ сѣченіи, эксцентриситетъ котораго равняется $e . \sec a$ и которое имѣетъ съ эллипсомъ общій фокусъ S и общую директриссу. То же самое можно сказать относительно точекъ R_2, $R_3, \ldots$

До сихъ поръ мы полагали, что дана окружность $KK_2K_3 \ldots$ и отсюда приходили къ заключеніямъ, какъ относительно положенія точки H, такъ и относительно скорости тѣла P.

Допустимъ, однако, что даны скорости, направленныя вдоль PR и RP_2, при чемъ пусть измѣненіе скорости будетъ вызвано импульсомъ, направленнымъ по RS — биссектрисѣ угла $\sphericalangle PSP_2$. Въ такомъ случаѣ точка H, получится, какъ пересѣченіе прямыхъ PH и P_2H, которые чертимъ такъ, чтобы

$$\sphericalangle LPH = \sphericalangle SPR \quad \text{и} \quad \sphericalangle RP_2H = \sphericalangle SP_2R_2.$$

Въ такомъ случаѣ точка K опредѣлится, какъ пересѣченіе SP съ прямой HL, перпендикулярной къ PR; теперь уже можно изъ центра S описать окружность $KK_2 \ldots$

Если H лежитъ внѣ окружности $KK_2\ldots$, то мы получимъ вмѣсто эллипса гиперболу; построеніе, однако, остается то же самая.

Если прямыя PH и P_2H параллельны между собою, радіусъ окружности — безконечно великъ; вмѣсто эллипса $PP_2\ldots$, получаемъ тогда параболу, а вмѣсто эллипса $RR_2\ldots$, получаемъ гиперболу — эксцентриситетъ которой равняется $\sec\alpha$. Треугольники PRS, RSP_2 тогда подобны, окружность же годографа $KK_2\ldots$ мы должны замѣнить окружностью, проходящей черезъ точку S.

Когда рѣчь идетъ о параболическомъ движеніи въ однородномъ гравитаціонномъ полѣ, дѣйствія непрерывной силы мы представляемъ себѣ, какъ равные импульсы, сообщаемые въ равные промежутки времени, при чемъ линіи дѣйствія образуютъ рядъ равноотстоящихъ другъ отъ друга параллельныхъ прямыхъ. Такимъ образомъ получаемъ многоугольную траекторію, вписанную въ одну параболу и описанную около другой, которая равна первой и имѣетъ съ ней общую ось.

Положимъ, что солнце S дѣйствуетъ не непрерывно, а такимъ образомъ, что сообщаетъ рядъ равныхъ импульсовъ, направленія которыхъ образуютъ между собою равные углы. При этихъ условіяхъ траекторія планеты получаетъ видъ многоугольника, вписаннаго въ одно коническое сѣченіе и описаннаго около другого; эти сѣченія имѣютъ общую ось.

Покажемъ теперь, что если эти равные импульсы становятся все болѣе частыми, а углы между ихъ направленіями, становятся безконечно малыми, то въ предѣлѣ они эквивалентны полю силъ съ напряженіемъ, обратно пропорціональнымъ квадрату разстоянія отъ S, согласно Ньютонову закону всемірнаго тяготѣнія.

Въ своихъ „Principia“ Ньютонъ слѣдующимъ образомъ доказываетъ второй законъ Кеплера.

Площадь, описываемая радіусомъ-векторомъ планеты, пропорціональна времени.

Ньютонъ полагаетъ, что точка R находится вблизи точки P, такъ что дугу PQ можно замѣнить хордой. Кромѣ того, онъ полагаетъ, что подъ дѣйствіемъ импульса, направленнаго вдоль RQ, параллельно PS, направленіе PR движенія измѣняется на направленіе PQ. Равенство площадей SPQ и SPR показываетъ, что площадь, описываемая векторомъ SQ такова, какъ будто не дѣйствуетъ никакая центральная сила, а потому площадь эта растетъ пропорціонально времени.

Скорость увеличенія этой площади обозначаютъ обычно черезъ $^1/_2\,h$; имѣемъ поэтому:

$$h = \overline{SP}^2 \times (\text{угловая скорость вектора } SP).$$

Примемъ во вниманіе эллиптическую траекторію PQ съ фокусомъ въ точкѣ S; допустимъ, что траекторія эта описана подъ дѣйствіемъ силы, производимой S, и пусть p — положеніе, занимаемое точкою P по истеченіи короткаго промежутка времени Δt. Имѣемъ:

$$h = \lim \frac{2 \times (\text{площадь } SPp)}{\Delta t} = \lim SY \frac{Pp}{\Delta t} = SY \times (\text{скорость точки } P)$$

гдѣ SY — перпендикуляръ изъ S на касательную PR.

На основанiи извѣстнаго свойства эллипса:

$$SY\,.\,HK = 2\overline{CB}^2,$$

поэтому

$$\text{скорость точки } P = \frac{h}{SY} = \frac{{}^1\!/_2\, h}{\overline{CB}^2}\cdot HK.$$

Если поэтому выберемъ соотвѣтствующiй масштабъ, то можемъ сказать, что векторъ HK — служитъ мѣрой скорости P; а окружность KK_2 можемъ разсматривать, какъ годографъ, что мы и сдѣлали въ началѣ этой статьи.

Когда P перемѣщается въ положенiе p, векторъ же SP описываетъ въ теченiи времени Δt малый уголъ $KSk = \Delta\delta$, векторъ Kk изображаетъ измѣненiе скорости, вызванное центральной силой съ напряженiемъ F на единицу массы. Но, съ другой стороны, это измѣненiе скорости равно $F\,.\,\Delta t$, а поэтому

$$\frac{F\,.\,\Delta t}{(\text{скорость точки } P)} = \frac{Kk}{HK},$$

откуда

$$F = \frac{(\text{скорость точки } K)\times(\text{скорость точки } P)}{HK}.$$

Но

$$(\text{Скорость точки } K) = (\text{угловой скорости вектора } SP)\,.\,SK = \frac{h\,.\,SK}{\overline{SP}^2};$$

$$\frac{(\text{скорость точки } P)}{HK} = \frac{{}^1\!/_2\, h}{\overline{DC}^2},$$

а потому

$$F = \frac{{}^1\!/_2\, h^2\,.\,SK}{\overline{BC}^2\,.\,\overline{SP}^2} = \frac{2h^2}{L}\cdot\frac{1}{\overline{SP}^2},\quad \text{гдѣ } L \text{ (latus rectum)} = 4\,\frac{\overline{BC}^2}{SK}.$$

Таково по существу доказательство Максвелла (Maxwell). Пользуясь его терминологiей, скажемъ: ускоренiе точки P — перпендикулярно и пропорцiонально вектору-скорости точки K на годографѣ KK_2... Годографъ этотъ есть окружность, а потому ускоренiе пропорцiонально угловой скорости вектора SP или обратно пропорцiонально квадрату SP на основанiи второго закона Кеплера.

Приведемъ теперь въ переводѣ съ латинскаго доказательство Ньютона. Прежде всего, Ньютонъ доказываетъ, что если PQ — малая дуга какой либо траекторiи, описанной подъ дѣйствiемъ силы F, производимой точкою S, то

$$F = \frac{2h^2}{\overline{SP}^2}\cdot\lim\frac{QR}{\overline{QT}^2}$$

при чемъ прямая QT перпендикулярна къ SP, а прямая QR параллельна SP.

Дѣйствительно, QR можемъ считать разстояніемъ, на которое движущаяся точка въ теченіи короткаго промежутка времени отклоняется отъ первоначальнаго направленія PR въ сторону силы F, т. е. въ направленіи PS. Получаемъ тогда:

$$QR = {}^1/_2\, Ft^2.$$

По второму закону Кеплера

$$ht = 2\ (\text{площадь } SPQ) = SP\,.\,QT,$$

такъ какъ треугольникъ SPQ можно считать прямолинейнымъ.

Переходя къ предѣлу, имѣемъ:

$$F = \lim \frac{2QR}{t^2} = \frac{2h^2}{\overline{SP}^2}\cdot \lim \frac{QR}{\overline{QT}^2}\cdot$$

Ньютонъ доказываетъ далѣе, что, если PQ — дуга эллипса, имѣющей фокусъ въ S, то

$$\lim \frac{QR}{\overline{QT}^2} = \frac{1}{L}\cdot$$

Дѣйствительно, на основаніи извѣстныхъ свойствъ, имѣемъ для коническаго сѣченія представленнаго на чертежѣ,

$$\frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC}, \tag{1}$$

$$\frac{Pv \times vG}{Qv^2} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CD}^2}, \tag{2}$$

$$\lim \frac{\overline{Qv}^2}{\overline{QT}^2} = \lim \frac{\overline{Qx}^2}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{PE}^2}{\overline{PF}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2}\,. \tag{3}$$

Перемножая (1), (2), (3) получаемъ:

$$\lim \frac{QR}{\overline{QT}^2} = \lim \frac{AC}{PC}\cdot\frac{\overline{CP}^2}{vG\,.\,CD^2}\cdot\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{AC}{PC}\cdot\frac{CP^2}{2CP\,.\,\overline{CD}^2}\cdot\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{AC}{2\overline{CB}^2} = \frac{1}{L}$$

q. d. e.

Отдѣльные импульсы, изображаемые хордами Kk, совокупность которыхъ даетъ дугу kK_2, и подъ вліяніемъ которыхъ точка P описываетъ дугу эллипса PQP_2, имѣютъ результирующую, направленную вдоль RS, т. е. вдоль биссектриссы $\sphericalangle PSP_2$. Величина ея выражается длиной хорды KK_2. Если притягивающую силу, дѣйствующую непрерывно, замѣнимъ этимъ однимъ импульсомъ, то тѣло опишетъ ломанную PRP_2 и въ точкѣ P_2 будетъ имѣть скорость, направленную вдоль RP_2, т. е. такую же самую, какую имѣло бы, двигаясь по эллиптической траекторіи подъ дѣйствіемъ непрерывной притягивающей силы. Однако, время, нужное для прохожденія этой ломанной траекторіи, должно было бы быть больше въ отношеніи

$$\frac{\text{площадь четырехугольника } SPRP_2}{\text{площадь криволинейнаго вырѣзка } SPQP_2}.$$

Если бы мы импульсы центростремительные замѣнили центробѣжными, то получили бы траекторію — линію, вписанную въ одну гиперболу и описанную около другой, при чемъ обѣ эти гиперболы имѣли бы общій фокусъ S и соотвѣтственную общую директриссу. Доказательство аналогично предыдущему и относится къ орбитѣ, описанной подъ дѣйствіемъ отталкивательной силы, производимой S и измѣняющейся обратно пропорціонально квадрату разстоянія отъ S. Читатель можетъ вычертить соотвѣтственную фигуру, принимая во вниманіе, что точка H должна теперь находиться внѣ окружности $KK_2\ldots$

Укажемъ еще слѣдующее свойство коническаго сѣченія и окружности $KK_2\ldots$ Назовемъ X, X' — точки, въ которыхъ касательная къ сѣченію въ точкѣ P, пересѣкаетъ окружность $KK_2\ldots$ Двѣ другія касательныя къ коническому сѣченію, проведенныя изъ точекъ X и X', пересѣкаются въ точкѣ X'' на окружности, такъ что треугольникъ $XX'X''$ вписанъ въ нашу окружность и описанъ около коническаго сѣченія. На основаніи теоремы Понселе (Poncelet) существуетъ безконечное число такихъ треугольниковъ; ихъ общимъ ортоцентромъ служитъ H, главная же окружность коническаго сѣченія является для всѣхъ треугольниковъ окружностью девяти точекъ.

Огибающей всѣхъ эллиптическихъ траекторій, какія можетъ описать тѣло, выходящее изъ P съ данной скоростью, измѣняющейся по направленію, является эллипсъ, фокусами котораго служатъ точки S и P, одна же вершина лежитъ въ K. Точка касанія эллипса съ огибающей находится въ P' на продолженіи прямой PH.

Импульсъ центростремительный, дѣйствующій на P въ направленіи SP не измѣняетъ величины h, т. е. не измѣняетъ значенія L новой орбиты, которая будетъ проходить черезъ постоянную точку P'' на продолженіи PS, такъ какъ L — средняя гармоническая между PS и SP''.

Если PK есть направленіе начальной скорости, то тѣло прійдетъ въ точку K съ нулевой скоростью, такъ что окружность $KK_2\ldots$ можно назвать „окружностью нулевой скорости". Можно также сказать, что скорость тѣла въ точкѣ P такова, какъ если бы тѣло вышло изъ точки K съ начальной скоростью равной 0 и двигалось бы вдоль KP подъ вліяніемъ притяженія, производимаго S.

Допустимъ теперь что S — центръ земли, а P — ея полюсъ. Допустимъ далѣе, что изъ P бросаемъ матеріальную точку съ начальной скоростью v такой величины что, если бы она была направлена вертикально, брошенное тѣло достигло бы высоты PK.

Имѣемъ:

$$\tfrac{1}{2} v = g \,.\, SP\left(1 - \frac{SP}{SK}\right).$$

Допустимъ, что нѣтъ сопротивленія движенію. Въ такомъ случаѣ при начальной скорости, направленной подъ угломъ β къ вертикали, брошенное тѣло опишетъ эллипсъ, однимъ фокусомъ котораго служитъ S, а другимъ — точка H такая, что $\sphericalangle KPH = 2\beta$.

Разстояніе, пройденное брошеннымъ тѣломъ, считаемое по поверхности земли, равнялось бы $120a$ морскимъ милямъ, гдѣ $a = \sphericalangle PSH$: Уголъ этотъ, выражаемый въ градусахъ, удовлетворяетъ соотношенію:

$$\frac{\sin a}{\sin(2\beta - a)} = \frac{PH}{SP} = \frac{PK}{SP}.$$

Обозначаемъ послѣднее отношеніе черезъ $1/n$. Разстояніе достигаетъ maximum'а, когда

$$\sphericalangle PHS = 2\beta - a = 90^\circ,$$

$$\sin a = -\cos 2\beta = \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} v^2 = \frac{g \cdot SP}{n+1}.$$

Желая, напримѣръ, чтобы этотъ maximum равнялся разстоянію отъ полюса до экватора, нужно было бы положить:

$$a = 45^\circ; \quad n = \sqrt{2}; \quad \beta = 67^\circ 30';$$

тѣло слѣдовало бы бросить по направленію, образующему съ горизонтомъ уголъ равный $22^\circ 30'$. Время, нужное для прохожденія этого разстоянія, равнялось бы $30\,m$, начальная скорость должна была бы быть не меньше $7200\ m/s$.

Полагая $n = 1$, мы получили бы скорость тѣла, которое двигалось бы вокругъ земли, при ея поверхности. Время обращенія этого тѣла равнялось бы $^1/_{17}$ сутокъ.

Выраженіе $\sqrt{2g \cdot SP}$ можно назвать „параболической скоростью“. Дѣйствительно, при такой начальной скорости, SK становится безконечно большимъ, траекторія же — параболою, имѣющая фокусъ въ S.

Полагая:

$$g = 9{,}81\ m/s^2; \quad {}^1/_2\, \pi SP = 10^7 m,$$

получаемъ для „параболической скорости“ приблизительное значеніе $11200\ m/s$.

К е п л е р ъ вывелъ первые два свои закона изъ наблюденій надъ движеніемъ Марса. Эти законы легко можно получить изъ таблицъ видимыхъ полудіаметровъ солнца и измѣненій его долготы. Таблицы эти находятся въ „Annuaire du Bureau des Longitudes“.

1) Изъ таблицъ видимъ, что между діаметромъ D солнца и его долготой Θ существуютъ слѣдующія соотношенія:

$$D = a + b\cos\Theta; \quad a + b = 1956''; \quad a - b = 1892''.$$

Это даетъ намъ первый законъ К е п л е р а.

2) Часовое измѣненіе долготы солнца, т. е. угловая скорость пропорціональна площади видимаго диска, т. е. D^2, что доказываетъ справедливость второго закона К е п л е р а.

Ньютоновскій законъ всемірнаго тяготѣнія въ примѣненіи къ системѣ, состоящей изъ солнца и одной планеты, выражается соотношеніемъ

$$F=\frac{G\,.\,S}{SP^2} \quad \text{откуда} \quad G\,.\,S=\frac{2R^2}{L}$$

гдѣ S — масса солнца; G — постоянная всемірнаго тяготѣнія. Эта постоянная, согласно изслѣдованіямъ Бойса (C. V. Boys) имѣетъ численную величину, выражаемую въ единицахъ системы C. G. S.

$$G=666\,.\,10^{-10}.$$

Если среднюю плотность земли обозначимъ черезъ Δ, массу ея черезъ E, радіусъ черезъ r, ускореніе силы тяжести на земной поверхности черезъ $-g-$ (въ единицахъ C. G. S.), то имѣемъ:

$$g=\frac{G\,.\,E}{r^2}={}^4/_3\,\pi r\,.\,G\,.\,\Delta={}^8/_3\,10^9\,.\,G\,.\,\Delta,$$

если положимъ, что $^1/_2\,\pi r=10^9$ *cm*. Отсюда

$$G\,.\,\Delta={}^3/_8\,g\,.\,10^{-9},$$

но, такъ какъ

$$g=981\;cm/s^2, \quad \Delta=5{,}53\;g/cm^3,$$

поэтому:

$$E={}^4/_3\,\pi r^3\,.\,\Delta={}^4/_3\,\pi\left(\frac{10^9}{^1/_2\,\pi}\right)^3\cdot\Delta=\frac{32}{3\pi^2}\cdot 10^{27}\,.\,\Delta=6\,.\,10^{27}g.$$

Время обращенія земли, выраженное въ секундахъ:

$$T=\frac{(\text{пл. эллиптической траекторіи})}{^1/_2\,h}=2\pi\cdot\frac{AC\,.\,BC}{h},$$

откуда

$$\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{h^2}{AC^2\,.\,BC^2}=\frac{G\,.\,S}{AC^3}\,.$$

Обозначая по Лапласу среднюю угловую скорость $\frac{2\pi}{T}$ черезъ n, среднее же разстояніе AC черезъ a, получаемъ:

$$n^2\,.\,a^3=G\,.\,S.$$

Это есть третій законъ Кеплера, который формулируемъ такъ: Квадратъ времени обращенія планеты, пропорціоналенъ корню кубичному изъ ея средняго разстоянія отъ солнца. Въ предыдущемъ изложеніи мы полагали, что солнце неподвижно, и что притяженіе планеты не сдвигаетъ солнца. Если рѣчь идетъ о движеніи земли по отношенію къ такой большой звѣздѣ, какъ солнце, то наше допущеніе не далеко отъ истины; но когда мы изслѣдуемъ движеніе большихъ планетъ, либо двойной звѣзды, напримѣръ, системы земля-луна, то мы должны принимать во вниманіе и другія обстоятельства.

Обозначимъ массу планеты черезъ E. Желая найти движеніе планеты относительно солнца, мы должны принять во вниманіе ускореніе $\frac{G.E}{SP^2}$, вызванное притяженіемъ планеты и имѣющемъ направленіе, противоположное направленію ускоренія $\frac{G.S}{SP^2}$, вызваннаго притяженіемъ солнца.

Въ виду этого имѣемъ:

$$F=\frac{G(E+S)}{SP^2}, \quad G(S+E)=\frac{2h^2}{L},$$

откуда

$$n^2=\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{G(S+E)}{a^3}.$$

Такъ выражается третій законъ Кеплера послѣ введенія поправки и въ такой формѣ мы находимъ его у Максвелла. Поправку эту мы должны обязательно принимать во вниманіе въ тѣхъ случаяхъ, когда изслѣдуемъ движенія планетъ, значительныхъ по своей величинѣ и находящихся на значительномъ разстояніи отъ солнца.

Пусть, например, мы желаемъ опредѣлить массу S солнца. Пусть будутъ E — масса земли, M — масса луны, a' — его среднее разстояніе, n' — его среднее движеніе. Имѣемъ:

$$\frac{S+E}{E+M}=\frac{n^2 . a^3}{n'^2 . a'^3}.$$

Какъ извѣстно, въ круглыхъ числахъ

$$\frac{n}{n'}=\frac{1}{13}; \quad \frac{a}{a'}=400; \quad \frac{E}{M}=80.$$

Поэтому

$$\frac{S}{E}=\frac{81}{80}\cdot\frac{(400)^3}{13^2}-1=350000, \quad S=21 . 10^{32}g.$$

Основываясь на третьемъ законѣ Кеплера, можемъ примѣнить разсужденія, касающіяся механическаго подобія къ солнечной системѣ и ея модели. (Первый ее построившій лордъ Оррери (Orrery).

Если въ модели сохранены относительныя плотности отдѣльныхъ частей, тогда $S+E$ пропорціонально a^3, а также отношенію плотностей тѣлъ системы и модели. На основаніи третьяго закона Кеплера отношеніе плотностей пропорціонально n^2. Этотъ результатъ справедливъ для сочетанія двухъ тѣлъ: солнца и планета; его можно также примѣнить и ко всей солнечной системѣ, даже принимая во вниманіе возмущенія планеты. Однимъ словомъ, модель солнечной системы, свободная въ пространствѣ и предоставленная дѣйствію собственаго тяготѣнія, удовлетворяетъ условіямъ геометрическаго подобія; времена же обращеній измѣнены обратно пропорціонально корнямъ квадратнымъ изъ плотностей оригинала и модели. Если, строя модель, сохранимъ плотности оригинальной системы, то модель, въ каждый отдѣльный моментъ, будетъ геометрически подобна оригиналу.

Новѣйшія изслѣдованія въ ультра-красномъ спектрѣ.

Прив.-доц. В. Вестфаля.

Въ настоящей статьѣ я намѣренъ дать обзоръ успѣховъ, достигнутыхъ за послѣдніе годы въ изученіи ультра-красной области спектра.

Этими успѣхами мы въ значительной степени обязаны усовершенствованію измѣрительныхъ инструментовъ. Въ этомъ отношеніи извѣстную роль сыграло увеличеніе чувствительности термоэлектрическаго столбика, достигнутое какъ Г. Рубенсомъ (H. Rubens) такъ и Ф. Пашеномъ (F. Paschen). Но особенно плодотворнымъ оказалось усовершенствованіе микрорадіометра Бойсса *), которымъ мы обязаны, главнымъ образомъ, Рубенсу. Въ настоящее время мы въ состояніи подвергать измѣренію чрезвычайно малыя количества лучистой энергіи, которыя всего лишь нѣсколько лѣтъ тому назадъ немыслимо было даже обнаружить.

Обыкновенно ультра-красный спектръ дѣлятъ на область короткихъ волнъ (длина волны h равна отъ 0,76 μ **) примѣрно до 22 μ) и область длинныхъ волнъ ($h > 22\,\mu$). Такое раздѣленіе объясняется тѣмъ, что методы, какъ полученія, такъ и изслѣдованія ультра-красныхъ лучей въ этихъ двухъ областяхъ существенно различны. Тогда какъ при изслѣдованіи короткихъ волнъ можно примѣнять методы обыкновенной оптики съ нѣкоторыми лишь измѣненіями, касающимися матеріала призмъ и линзъ, область длинныхъ волнъ требуетъ существенно другихъ методовъ. Весьма большіе успѣхи, достигнутые за послѣдніе годы въ обѣихъ областяхъ, заключаются, какъ въ усовершенствованіи старыхъ методовъ, такъ и въ выработкѣ новыхъ, послѣднее въ особенности въ области самыхъ длинныхъ волнъ.

I. Область ультра-краснаго спектра съ короткой волной.

1. Ультра-красные спектры испусканія.

Изслѣдованіе ультракрасныхъ спектровъ испусканія въ послѣдніе годы связано, главнымъ образомъ, съ именемъ Ф. Пашена, который въ сотрудничествѣ со своими учениками шелъ по пути, проложенному впервые Ланглеемъ (Langley) въ его классическихъ изслѣдованіяхъ ультра-краснаго солнечнаго спектра. Методы Ланглея разработаны

*) Такъ называется гальванометръ съ вращающейся катушкой, соединенный съ термоэлементомъ такимъ образомъ, что термоэлементъ виситъ непосредственно на катушкѣ, и послѣдняя, слѣдовательно, лишена приводящихъ проволокъ. Измѣряемое излученіе падаетъ на одинъ спай, и возникающая вслѣдствіе этого разность потенціаловъ вызываетъ отклоненіе стрѣлки гальванометра.

**) $1/\mu$ равняется $^1/_{1000}$ *мм.*

Пашеномъ до высокой степени совершенства. Особенно замѣчательны построенные имъ весьма свѣтосильные спектрографы съ большой разсѣивающей способностью, позволяющіе доводить разложеніе ультра-красныхъ спектровъ до очень высокой степени. Не будетъ преувеличеніемъ, если мы въ настоящее время спектроскопію въ ультра-красной области съ короткой волной поставимъ наравнѣ съ спектроскопіей въ видимой области.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ Пашенъ и его школа руководились, какъ исходной точкой зрѣнія, во-первыхъ тѣмъ, что установили опредѣленныя линіи, которыя служили, какъ нормальныя длины волнъ въ ультра-красной области. Особенный интересъ, однако, представляетъ произведенное ими изученіе законовъ серій, установленныхъ, главнымъ образомъ, Рицомъ (Ritz) и Рудбергомъ (Rudberg*). Работы Пашена показали, что закономѣрности, въ области видимаго спектра выражаемыя такъ называемыми законами серій, находятъ полную аналогію въ ультра-красной области съ короткой волной. При той универсальной природѣ, которой очевидно обладаютъ законы серій, имъ, вѣроятно, предстоитъ еще сыграть важную роль въ познаніи строенія атомовъ. Н. Боръ (N. Bohr) и другіе сдѣлали уже попытки использовать въ этомъ направленіи законы серій, но пока онѣ еще во всякомъ случаѣ, очень далеки отъ дѣйствительности.

Дальнѣйшія подробныя изслѣдованія спектровъ испусканія были произведены Кобленцомъ (W. Coblenz) въ Вашингтонскомъ Бюро Мѣръ. Его работы обнимаютъ, между прочимъ, спектры газовъ, свѣтовыхъ дугъ и разрѣженныхъ трубокъ.

2. Ультра-красные спектры поглощенія.

Очень цѣнныя изслѣдованія объ ультра-красныхъ спектрахъ поглощенія, простиравшіяся, правда, лишь до длины волны въ 1,2 μ, опубликовали еще въ 1882 г. Абней (Abney) и Фестингъ (Festing). Новѣйшими работами Юліуса (Julius), Пучанти (Pucciauti) и, прежде всего, В. Кобленца эти изслѣдованія были распространены до 15 μ, при чемъ существенные результаты, полученные Абнеемъ и Фестингомъ, подтвердились на большомъ числѣ веществъ, а именно: опредѣленныя большія группы соединеній обладаютъ, соотвѣтственно своему химическому раздѣленію, характерными ультра-красными спектрами поглощенія. Далѣе оказалось, что изомеры, спектры которыхъ не отличаются въ своей видимой области, имѣютъ различные спектры поглощенія въ ультра-красной области, тогда какъ вещества, встрѣчающіяся въ оптически право-вращающей и лѣво-вращающей модификаціяхъ, въ обоихъ случаяхъ обнаруживаютъ одинаковый спектръ.

Этимъ подтверждается фактъ, имѣющій также и другія твердыя основанія, что ультра-красныя собственныя колебанія въ веществахъ,— ими, какъ извѣстно, объясняется поглощеніе,— въ отличіе отъ види-

*) См. статью В. Ритца „Линейные спектры и строеніе атомовъ". „Вѣстникъ" №№ 489 и 490.

маго спектра — не представляютъ собою колебаній электроновъ вокругъ атомныхъ центровъ, но зависятъ отъ строенія всей молекулы. Ихъ нужно разсматривать, какъ колебанія атомовъ въ молекулѣ другъ относительно друга, а квази-упругая сила, лежащая въ основѣ этихъ колебаній, вѣроятно, тождественна съ химическими силами, которыми держится атомъ. Не исключена, впрочемъ, возможность, что при извѣстныхъ условіяхъ отдѣльныя молекулы вещества тоже колеблются иногда одна относительно другой.

Своими работами названные авторы установили характерныя полосы важнѣйшихъ атомныхъ группировокъ (напримѣръ, HO, SO_4 и т. д.). Одинъ Кобленцъ изслѣдовалъ 131 органическое соединеніе. При сравненіи всѣхъ найденныхъ такимъ образомъ полосъ поглощенія бросаются въ глаза мѣста скопленія приблизительно при длинѣ волны 0,85 μ и при цѣлыхъ кратныхъ ей длинахъ; значеніе этого факта, если это только не простая случайность, еще не выяснено.

Относительно кристаллизаціонной воды и конституціонной Кобленцъ доказалъ, что ультра-красными полосами поглощенія воды обладаютъ только вещества, имѣющія кристаллизаціонную воду, а не вещества, имѣющія лишь конституціонную воду; эти полосы подробно изслѣдовали Рубенсъ и Ладенбургъ (Ladenburg).

Изъ множества другихъ работъ объ ультра-красныхъ спектрахъ поглощенія упомянемъ здѣсь лишь еще нѣкоторыя, относящіяся къ газамъ. Эти послѣдніе особенно интересны уже потому, что въ достаточно разрѣженномъ газообразномъ состояніи молекулы обнаруживаютъ свои свойства въ чистѣйшемъ видѣ, а, съ другой стороны, измѣняя давленіе и температуру, можно вскрыть вліяніе, оказываемое сосѣдними молекулами одна на другую.

Весьма простыя свойства обнаруживаютъ газообразные элементы, которые, согласно послѣднимъ работамъ Бурмейстера (Burmeister), выше длины въ 1 μ не даютъ вовсе полосъ поглощенія. Тотъ же изслѣдователь подчеркиваетъ фактъ, что весьма многія полосы поглощенія газообразныхъ соединеній являются двойными.

Особенно подробныя изслѣдованія посвящены углекислотѣ и водяному пару. Это объясняется отчасти тѣмъ обстоятельствомъ, что названныя вещества, — какъ единственныя составныя части земной атмосферы, поглощающія лучи ультра-красной области спектра — играютъ важную метеорологическую роль: ихъ значеніе въ одной экономіи земли такое же, какъ значеніе стеклянной крыши въ оранжереѣ (такъ называемое „greenhousetheory"). Они пропускаютъ большей частью непоглощеннымъ солнечное излученіе, обладающее по преимуществу короткой длиной волны (h максимумъ около 0,7 μ), и, наоборотъ, поглощаютъ и отражаютъ излученіе нагрѣтой земной поверхности, обладающее большой длиной волны (h максимумъ около 13 μ), и такимъ образомъ вбираютъ тепловую энергію солнца.

С. Арреніусъ (Arrhenius) построилъ теорію ледниковыхъ эпохъ на перемѣнномъ содержаніи углекислоты въ атмосферѣ.

Весьма сомнительно, однако, допускаетъ ли эта теорія количественную разработку.

Углекислота обнаруживаетъ три полосы поглощенія въ ультракрасной области съ короткой волной: при 2,7 μ, 4,3 μ и 14,7 μ.

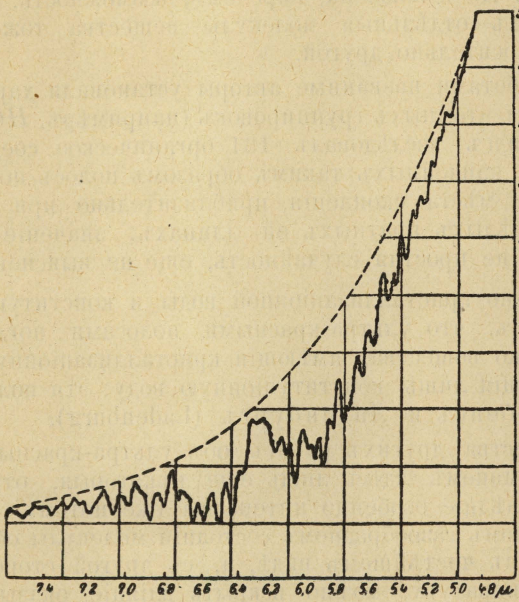


Рис. 1.

Энгстромъ (K. Ängström), Шеферъ (Cl. Schäfer) Баръ (E. v. Bahr), и Герцъ (G. Hertz) изслѣдовали, примѣнимъ ли къ этимъ полосамъ такъ называемый законъ Бера (Beer). Этотъ законъ гласитъ, что поглощеніе въ веществѣ пропорціонально произведенію парціальнаго давленія на толщину слоя, т. е. зависитъ отъ числа молекулъ, на которыя падаютъ лучи. Это доказано для твердыхъ тѣлъ и жидкостей, тогда какъ для поглощенія ультракрасныхъ лучей въ газахъ законъ примѣнимъ только въ случаѣ очень разрѣженныхъ газовъ; помимо числа молекулъ, на которыя падаютъ лучи, поглощеніе зависитъ также отъ полнаго давленія на поглощающій газъ. При этомъ почти безразлично, производится ли это давленіе самимъ газомъ или же примѣсью какого либо индифферентнаго газа, лишь бы число поглощающихъ молекулъ было одинаково въ обоихъ случаяхъ. Это показываетъ, что отступленія отъ закона Бера зависятъ существенно отъ числа толчковъ, испытываемыхъ такой молекулой.

Рис. 2.

Весьма замѣчательнымъ веществомъ является водяной паръ, у котораго ультра-красный спектръ поглощенія очень сложенъ; онъ былъ изслѣдованъ сперва Рубенсомъ и Ашкинасомъ (Aschkinass), а также Пашеномъ, а потомъ, въ области отъ 4,8 μ до 7,6 μ, Баромъ, измѣренія котораго представлены на рис. 1.

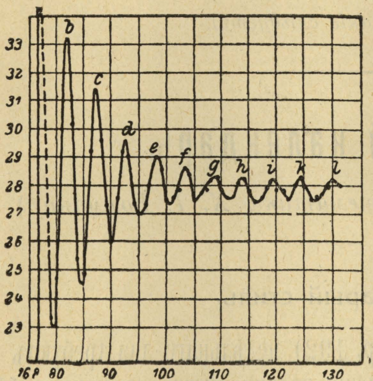


Рис. 3a.

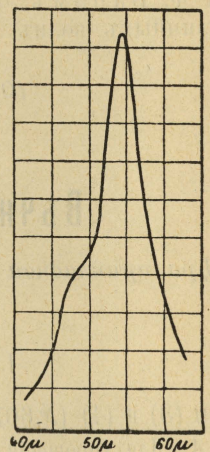


Рис. 3b.

Прерывистая кривая показываетъ распредѣленіе энергіи взятаго источника лучей, когда на пути ихъ нѣтъ водяного пара; сплошная же кривая представляетъ распредѣленіе энергіи послѣ того, какъ лучи

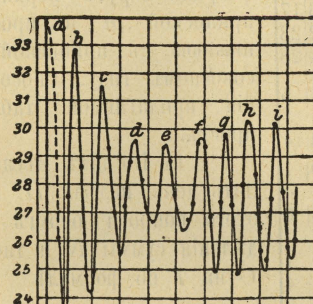


Рис. 3a.

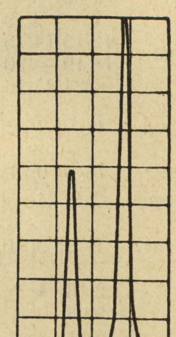


Рис. 4b.

прошли черезъ слой водяного пара (рис. 2). Мы видимъ, что спектръ пресѣченъ множествомъ линій поглощенія. Какъ ни сложенъ этотъ спектръ, онъ, повидимому, весьма удовлетворительно объясняется съ помощью теоріи Бьеррума (Bjerrum). Кажущіяся собственныя колебанія, соотвѣтствующія отдѣльнымъ полосамъ поглощенія, могутъ быть сведены къ одному колебанію при 6,26 μ, если допустить, что это колебаніе совершается молекулами, которыя помимо того въ состояніи выполнить рядъ вращательныхъ колебаній съ большой длиной волны (рис. 3a, 3b, 4a, 4b). Переходы этихъ колебаній, вычисленныя по этой теоріи Ф. Баромъ, очень хорошо согласуются съ областями поглощенія длинныхъ волнъ водяного пара, найденными Рубенсомъ (см. ниже).

(Окончаніе слѣдуетъ).

Вѣчный календарь.

Д-ра прикладной математики Х. І. Гохмана *).

I. Старый стиль.

Формулы (3) и (4) (№ 607, стр. 192) недѣльнаго дня требуютъ вычисленія примѣты года A. Для упрощенія рѣшенія задачи можно соединить обѣ примѣты, M мѣсяца и K года, въ одну составную примѣту $C = M + K - 7\partial = R\left(\dfrac{M+K}{7}\right)$ и составить маленькую таблицу, дающую составную примѣту для всѣхъ мѣсяцевъ года и всѣхъ годовъ r солнечнаго круга. Для мѣсяцевъ января и февраля берутъ верхнюю строку съ припиской „n" въ простомъ году, а нижнюю съ припиской „$в$" въ високосномъ году. Способъ употребленія прилагаемой таблицы весьма простъ.

Таблица I вѣчнаго календаря.

	№ столбца	1	2	3	4	5	6	7
	Остатки r отъ дѣленія года A на 28	1	2	3	—	4	5	6
		7	—	8	9	10	11	—
		12	13	14	15	—	16	17
		18	19	—	20	21	22	23
		—	24	25	26	27	--	28
$C = M + K - 7\partial$	январь пр.	6	0	1	2	3	4	5
	январь вис.	5	6	0	1	2	3	4
	февраль пр.	2	3	4	5	6	0	1
	февраль вис.	1	2	3	4	5	6	0
	мартъ	2	3	4	5	6	0	1
	апрѣль	5	6	0	1	2	3	4
	май	0	1	2	3	4	5	6
	іюнь	3	4	5	6	0	1	2
	іюль	5	6	0	1	2	3	4
	августъ	1	2	3	4	5	6	0
	сентябрь	4	5	6	0	1	2	3
	октябрь	6	0	1	2	3	4	5
	ноябрь	2	3	4	5	6	0	1
	декабрь	4	5	6	0	1	2	3

1) По датѣ мѣсяца N опредѣлить день недѣли H. Для рѣшенія этого вопроса берутъ остатокъ отъ дѣленія суммы N и табличнаго числа C на 7 по формулѣ

$$H = R\left(\frac{N+C}{7}\right) \quad (1)$$

Примѣръ. Сегодня 4-ое ноября 1914 г. Опредѣлить день недѣли. Остатокъ r отъ дѣленія 1914 на 28 есть 10. На пересѣченіи столб-

*) Къ статьѣ Х. І. Гохмана: „Упрощенный методъ календарныхъ вычисленій пасхалій и недѣльнаго дня". „Вѣстникъ", №№ 607 и 608.

ца 5-го съ остаткомъ $r = 10$ и ноября стоитъ число 6: это и есть составная примѣта 1914 года и ноября; недѣльный день $H = R\left(\frac{4+6}{7}\right) = 3 =$ вторникъ.

2) Обратно. По дню недѣли опредѣлить дату. Изъ формулы (4) № 607 „Вѣстника“, слѣдуетъ

$$N = 7д + H - (K + M) = 7д + H - C, \qquad (2)$$

т. е. для опредѣленія даты надо изъ недѣльнаго дня вычесть табличное число C и прибавить нѣсколько разъ 7. Если табличное число C больше недѣльнаго, то предварительно прибавляютъ 7 къ недѣльному числу, для того чтобы получить положительный остатокъ.

Примѣръ. Сегодня вторникъ въ началѣ ноября 1914 года; опредѣлить дату. Разность $3 - 6 = -3$ между недѣльнымъ числомъ и табличнымъ отрицательна. Прибавимъ 7, мы получимъ положительное число 4. Слѣдовательно, въ ноябрѣ 1914 года со вторникомъ совпадаютъ даты: 4, 11, 18 и 25. Первый вторникъ приходится на 4-е число ноября.

2-ой способъ нахожденія даты по недѣльному дню.

Замѣна вычитанія сложеніемъ.

Вмѣсто того, чтобы пользоваться таблицей I также для рѣшенія обратной задачи объ опредѣленіи даты по недѣльному дню, пользуясь формулой (2), въ которой производится дѣйствіе вычитанія, гораздо удобнѣе пользоваться новой таблицей II, по которой рѣшеніе приводится къ сложенію. Именно, періодическія значенія для N въ формулѣ (2) не измѣнятся, если ко второй части (2) прибавимъ 7; тогда получимъ:

$$N = 7д + (7 - C) + H.$$

Если теперь составимъ таблицу II, въ которой числа $C' = 7 - C$, гдѣ C взяты изъ таблицы I-ой, то задача рѣшается формулой $N = H + C' + 7д$.

Для $C = 0$ мы, ради простоты, взяли также $C' = 0$, ибо въ нашихъ періодическихъ формулахъ $7 = 0$.

Итакъ, для опредѣленія даты по дню надо къ недѣльному числу прибавить табличное число C'. Если получится число $\leqq 7$, то это будетъ

Таблица II. Нахожденіе даты по дню недѣли.

№ столбца		1	2	3	4	5	6	7
Остатки r отъ дѣленія года A на 28		1	2	3	—	4	5	6
		7	—	8	9	10	11	—
		12	13	14	15	—	16	17
		18	19	—	20	21	22	23
		—	24	25	26	27	—	28
$C' = 7 - C;\ N = 7д + H + C'$								
январь	пр.	1	0	6	5	4	3	2
	вис.	2	1	0	6	5	4	3
февраль	пр.	5	4	3	2	1	0	6
	вис.	6	5	4	3	2	1	0
мартъ		5	4	3	2	1	0	6
апрѣль		2	1	0	6	5	4	3
май		0	6	5	4	3	2	1
іюнь		4	3	2	1	0	6	5
іюль		2	1	0	6	5	4	3
августъ		6	5	4	3	2	1	0
сентябрь		3	2	1	0	6	5	4
октяорь		1	0	6	5	4	3	2
ноябрь		5	4	3	2	1	0	6
декабрь		3	2	1	0	6	5	4

наименьшая дата, соотвѣтствующая данному дню; остальныя даты получаются прибавленіемъ 7, 14, 21 и 28. Если получается число, большее 7, то предыдущая дата получается черезъ вычитаніе 7, а послѣдующія черезъ прибавленіе 7, 14...

Примѣръ. Сегодня послѣдняя суббота въ мартѣ 1915 года; опредѣлите дату. Остатокъ r отъ дѣленія 1915 на 28 равенъ 11. На пересѣченіе 6-го столбца, гдѣ 11, со строкой „мартъ" стоитъ число $C' = 0$. Это значитъ, что суббота была канунoмъ 1-го марта. Въ мартѣ 1915 г. съ субботой совпадаютъ даты $0+7=7$, $7+7=14$, $14+7=21$, $21+7=28$. Съ послѣдней субботой совпадаетъ 28-ое марта 1915-го года.

II. Новый стиль.

Прилагаемыми таблицами можно пользоваться также для новаго стиля. Для этого надо предварительно перевести новый стиль на старый при помощи формулы перевода

$$N = N_g - g = N_g - \left[S - E\left(\frac{S}{4}\right) - 2\right] \qquad (3)$$

гдѣ N есть дата стараго стиля, а N_g – дата новаго стиля. Эту формулу можно упростить. Формулу (1) напишемъ такъ:

$$H = N + C - 7\partial = N_g - S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2 + C - 7\partial.$$

Такъ какъ выраженіе

$$C - S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2$$

всегда отрицательно, то вмѣсто него возьмемъ

$$C_g = C - S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2 + 7t = C + p, \quad p = -S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2 + 7t, \qquad (4)$$

выбравъ t такъ, чтобы было

$$p = -S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2 + 7t \begin{matrix} > -1 \\ < 7 \end{matrix}. \qquad (5)$$

Тогда

$$H = C_g + N_g - 7\partial = C + N_g + p - 7\partial = R\left(\frac{N_g + C + p}{7}\right). \qquad (6)$$

Число C_g есть составная примѣта григоріанскаго календаря. Для 20-го и 21-го вѣковъ $C_g = C - 19 + 4 + 2 + 7t = C - 13 + 7t$.

Возьмемъ $7t = 14$; тогда $C_g = C + 1$, т. е. для этихъ двухъ вѣковъ надо всѣ числа таблицы I увеличить на одну единицу.

Для упрощенія вычисленія можно составить слѣдующую таблицу, которая даетъ значенія

$$p = -S + E\left(\frac{S}{4}\right) + 2 + 7t. \tag{7}$$

Для порядковыхъ вѣковъ	16, 17	18	19	20, 21	22	23	24, 25
	26	27	28, 29	30	31	32, 33	34
	35	36, 37	38	39	40, 41	42	43
	и т. д.						
$p =$	4	3	2	1	0	6	5

Для рѣшенія обратной задачи объ опредѣленіи даты по данному недѣльному числу служитъ формула

$$N = 7д + H - (C + p), \tag{8}$$

т. е. для опредѣленія даты надо изъ недѣльнаго дня H вычесть поправленную составную примѣту $C + p$ и прибавить нѣсколько разъ 7. Замѣтимъ, что если $C + p$ больше 6, то удобнѣе взять $C + p - 7$. При пользованіи II-ой таблицей надо C' уменьшать на p и прибавить $7д$.

Миніатюрный календарь на 1915 годъ.

(Старый стиль).

Нахожденіе дня.	Мѣсяцъ.	Нахожденіе даты.
4 —	I	— 3
0 —	II	— 0
0 —	III	— 0
3 —	IV	— 4
5 —	V	— 2
1 —	VI	— 6
3 —	VII	— 4
6 —	VIII	— 1
2 —	IX	— 5
4 —	X	— 3
0 —	XI	— 0
2 —	XII	— 5

Миніатюрный вездѣсущій ежегодный календарь.

При помощи таблицъ вѣчнаго календаря можно получить миніатюрный, такъ сказать, вездѣсущій календарь. Для этого на полоскѣ бумаги выписываютъ изъ таблицъ столбцы даннаго года; вмѣсто названій мѣсяцевъ пишутъ римскія цифры, какъ показано на чертежѣ для 1915 года. Эту полоску наклеиваютъ на мелкіе предметы, которые человѣкъ всегда имѣетъ при себѣ или у себя на письменномъ столѣ, напримѣръ, ножикъ, спичечница, портсигаръ, ручка пера и т. п. Если ручка пера толстая, то удобнѣе наклеить двойную полоску, по 6 мѣсяцевъ въ каждой половинѣ; если ручка тоненькая. то дѣлаютъ одну полоску узенькую со всѣми мѣсяцами въ одномъ столбцѣ. Можно также наклеить на часы. Для этого или вырѣзываютъ сплошной кружокъ, пишутъ по окружности мѣсяцы и примѣты и наклеиваютъ на внутреннюю поверхность крышки часовъ или же вырѣзываютъ узенькое кольцо, пишутъ по окружности только примѣты и наклеиваютъ на стекло циферблата; при этомъ цифры циферблата замѣняютъ названія мѣсяцевъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 259 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$(ax+by)(a_1x+b_1y)+a_2x+b_2y=c,$$

гдѣ a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, c — данныя цѣлыя числа.

Н. К-новъ (Петроградъ).

№ 260 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1.$$

Н. Ченгери (Курскъ).

№ 261 (6 сер.). Доказать, что во всякомъ параллелопипедѣ сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ всѣхъ его реберъ.

Доказать это предложеніе вполнѣ элементарнымъ путемъ, а также съ помощью аналитической геометріи.

R.

№ 262 (6 сер.). Построить треугольникъ ABC по углу A и по периметру $2p$, зная, что

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\varrho},$$

гдѣ b и c — стороны, образующія уголъ A, а ϱ — данный отрѣзокъ.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 211 (6 сер.). *Изъ нѣкоторой точки* A *проведены къ прямой* MN *перпендикуляръ* AB *и рядъ наклонныхъ такъ, что каждая наклонная равна проекціи ближайшей наклонной. Доказать, что перпендикуляры, возставленные къ этимъ наклоннымъ изъ основаній ихъ на прямой* MN, *пересѣкаютъ прямую* AB *въ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ* AB *составляютъ ариѳметическую прогрессію и найти разность этой прогрессіи.*

Пусть AD, AD_1, $AD_2, \ldots$, рядъ наклонныхъ, построенныхъ такъ, что проекціи ихъ BD, BD_1, $BD_2, \ldots$ на прямую MN удовлетворяютъ равенствамъ (1) $AD_1 = BD$, $AD_2 = BD_1, \ldots, AD_n = BD_{n-1}$. Обозначимъ точки встрѣчи перпендикуляровъ, возставленныхъ къ наклоннымъ AD, AD_1, $AD_2, \ldots$ изъ ихъ основаній D, D_1, $D_2, \ldots$, съ прямой AB соотвѣтственно черезъ P, P_1, $P_2, \ldots$ и введемъ слѣдующія обозначенія: $AB = h$, $BP = a$, $BP_1 = a_1$, $BP_2 = a_2, \ldots$ и [см. (1)] $BD = AD_1 = l_1$, $BD_1 = l_2$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADP, AD_1P_1 и ABD_1 имѣемъ соотвѣтственно

$$AB \cdot BP = \overline{AD}^2, \quad AB \cdot BP_1 = \overline{AD}_1^2, \quad \overline{BD}_1^2 = \overline{AD}_1^2 - AB^2,$$

т. е.

$$(2) \;\; ha = l_1^2, \quad (3) \;\; ha_1 = l_2^2, \quad (4) \;\; l_2^2 = l_1^2 - h^2.$$

Изъ равенствъ (3) и (4) находимъ, что $ha_1 = l_1^2 - h^2$; вычитая это равенство изъ равенства (2), получимъ, что $h(a - a_1) = h^2$, откуда (5) $a - a_1 = h$. Подобнымъ же образомъ изъ равенствъ $ha_1 = l_2^2$, $ha_2 = l_3^2$, $l_3^2 = l_2^2 - h^2$ можно получить, что $a_1 - a_2 = h$, и также убѣдимся, что $a_2 - a_3 = a_3 - a_4 = \cdots = a_{n-1} - a_n = h$. Итакъ отрѣзки BP, BP_1, $BP_2, \ldots, BP_n$ образуютъ убывающую ариѳметическую прогрессію, разность которой равна длинѣ h перпендикуляра AB.

Замѣчаніе. Выбравъ первую наклонную $AD = l$ произвольно, можно построить ближайшую меньшую наклонную AD_1 такъ, чтобы она равнялась проекціи BD лишь тогда, если BD больше AB, и повторить такое построеніе, если оно возможно, можно лишь конечное число разъ, такъ какъ квадраты проекцій $l_1, l_2, l_3, \ldots$ убываютъ [см. (4)] послѣдовательно на h^2. Зато всегда можно, начавъ съ произвольной наклонной $AD_n = l_n$, построить наклонную AD_{n-1}, проекція которой BD_{n-1} равна AD_n, затѣмъ наклонную AD_{n-2}, проекція которой BD_{n-2} равна AD_{n-1}, и т. д. и получить такимъ образомъ любое число наклонныхъ, удовлетворяющихъ условію задачи.

И. Михальскій (Екатеринославъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *Гукъ*; *В. Смирновъ* (Юзовка, Екатеринославской губ.); *А. Кисловъ* (Москва); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское). *В. Ревзинъ* (Сумы); *Н. Ченгери* (Курскъ); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 215 (6 сер.). *Доказать неравенство*

$$(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \cdots + a_n^{n-m}) \geqq n^2 a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— данныя положительныя числа, а* m *— любое вещественное число*

Примѣняя извѣстное предложеніе, которымъ устанавливается, что среднее ариѳметическое нѣсколькихъ положительныхъ чиселъ не менѣе ихъ средняго геометрическаго, къ двумъ рядамъ чиселъ $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ и a_1^{n-m}, $a_2^{n-m}, \ldots, a_n^{n-m}$, находимъ, что

$$(1) \quad \frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n} \geqq \sqrt[n]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^m},$$

$$(2) \quad \frac{a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \cdots + a_n^{n-m}}{n} \geqq \sqrt[n]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{n-m}}.$$

Перемножая неравенства (1) и (2), получимъ

$$\frac{(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \cdots + a_n^{n-m})}{n^2} \geqq \sqrt[n]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^n},$$

т. е.

$$\frac{(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \cdots + a_n^{n-m})}{n^2} \geqq a_1 a_2 \ldots a_n,$$

откуда, помножая на n^2, находимъ, что

$$(3) \quad (a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \cdots + a_n^{n-m}) \geqq n^2 a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Знакъ равенства въ послѣдней формулѣ возможенъ лишь тогда, если приходится удержать знакъ равенства въ каждой изъ формулъ (1) и (2), а это, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто лишь въ томъ случаѣ, если $n=1$ или, при $n>1$, если $a_1^m = a_2^m = \cdots = a_n^m$ и $a_1^{n-m} = a_2^{n-m} = \cdots = a_n^{n-m}$, что возможно лишь при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, такъ какъ числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по условію положительны. Итакъ въ окончательной формулѣ (3) приходится удержать знакъ равенства тогда и только тогда, если $n=1$ или если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Н Михальскій (Екатеринославъ); *В. Ревзинъ* (Сумы).

№ 216 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 8x - 8\sqrt{x+1} + 8 = 0.$$

Полагая $\sqrt{x+1} = y$, откуда (1) $x = y^2 - 1$, приводимъ данное уравненіе къ виду

$$(y^2-1)^2 - 4(y^2-1)y + 8(y^2-1) - 8y + 8 = 0,$$

или, послѣ обычныхъ преобразованій,

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (y+1)^4 = 0,$$

откуда $y = -1$, а потому [см. (1)] $x = (-1)^2 - 1 = 0$. Итакъ $x=0$ есть единственный корень даннаго уравненія.

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *N. N.* (Тифлисъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *Н. Кованько* (Вышній Волочокъ); *А. Кисловъ* (Москва); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *В, Ревзинъ* (Сумы); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 221 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x - 2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2}+2=0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ $x+2=2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2}$ и возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ $(x+2)^2=4(x\sqrt{x-1}+2)$, или, послѣ раскрытія скобокъ и перенесенія всѣхъ членовъ въ одну часть,

$$(1)\quad x^2+4x+4-4x\sqrt{x-1}-8=0.$$

Полагая $\sqrt{x-1}=y$, откуда (2) $x=y^2+1$, приводимъ уравненіе (1) къ виду

$$(y^2+1)^2-4(y^2+1)y+4(y^2+1)-4=0,$$

или, послѣ обычныхъ преобразованій,

$$y^4-4y^3+6y^2-4y+1=0,\quad \text{т. е.}\quad (y+1)^4=0,\quad \text{откуда}\quad y=-1,$$

а потому [см. (2)] $x=2$. Подставляя 2 вмѣсто x въ первоначальное уравненіе, мы видимъ, что найденное значеніе x дѣйствительно ему удовлетворяетъ, если подъ радикалами подразумѣвать ихъ ариѳметическое значеніе. Итакъ $x=2$ есть единственный корень разсматриваемаго уравненія.

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *N. N.* (Тифлисъ); *М. Х.* (Тифлисъ); *В. Лихачева* (Козьмодемьянскъ); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *В. Ковалько* (Вышній Волочокъ); *А. Кисловъ* (Москва); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 222 (6 сер.). *Найти общій видъ полинома, произведеніе котораго на* x^2-1 *содержитъ лишь два члена.*

Пусть $f(x)$ есть искомый полиномъ. Произведеніе его на x^2-1 даетъ по условію лишь два члена, которые по необходимости должны быть высшимъ и низшимъ членами. Обозначая высшій членъ черезъ ax^{n+p}, а низшій черезъ bx^n, гдѣ n — цѣлое неотрицательное, p — цѣлое положительное число и a, b — постоянные коэффиціенты, мы должны имѣть тожество

$$(1)\quad f(x)(x^2-1)=ax^{n+p}+bx^n,\quad \text{или}\quad (2)\quad f(x)(x-1)(x+1)=x^n(ax^p+b).$$

Полагая въ этомъ тожествѣ $x=1$, а затѣмъ $x=-1$, находимъ, что

$$(3)\quad a+b=0,\quad a(-1)^p+b=0.$$

Если бы p было нечетнымъ числомъ, то изъ равенства (3) имѣли бы видъ $b+a=0$, $b-a=0$, откуда $a=0$, $b=0$, и тогда [см. (1)] мы имѣли бы $f(x)=0:(x^2-1)$, $f(x)=0$, т. е. многочленъ $f(x)$ тожественно приводился бы къ нулю. Это рѣшеніе не даетъ собственно рѣшенія вопроса, такъ какъ произведеніе $0.(x^2-1)$ даетъ лишь одинъ членъ приводящійся къ нулю; кромѣ того, разъ мы желаемъ получить въ произведеніи $f(x)$ на x^2-1 дѣйствительно два члена, то по условію $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Пусть теперь p четное положительное число, т. е. $p=2m$, гдѣ m — цѣлое положительное число. Въ этомъ случаѣ система (3) приводится лишь къ одному уравненію $a+b=0$, откуда $b=-a$, и тожество (2) принимаетъ видъ

$$f(x)(x^2-1)=ax^n(x^{2m}-1),$$

откуда

$$f(x)=ax^n\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=ax^n(x^{2m-2}+x^{2m-4}+\cdots+x^4+x^2+1).$$

Итакъ искомый полиномъ $f(x)$ долженъ опредѣляться формулой

$$f(x)=ax^n(x^{2m-2}+x^{2m-4}+\cdots+x^4+x^2+1),$$

или

$$(4)\quad f(x)=ax^{2m+n-2}+ax^{2m+n-4}+\cdots+ax^{n+4}+ax^{n+2}+ax^n,$$

гдѣ a — любое число, отличное отъ нуля, n — любое цѣлое положительное число или нуль, m — любое цѣлое положительное число. Наоборотъ, при этихъ предположеніяхъ $f(x)$ всегда даетъ рѣшеніе вопроса, что можно провѣрить непосредственно умноженіемъ или же вывести изъ равенствъ (3), а еще проще изъ тожества $\frac{ax^n(x^{2m}-1)}{x^2-1}=ax^n(x^{2m-2}+x^{2m-4}+\cdots+x^2+1)$. Итакъ, при указанныхъ ограниченіяхъ относительно a, n и m, формула (4) даетъ общее рѣшеніе вопроса.

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

С. А. Богомоловъ. *Аргументы Зенона Элейскаго при свѣтѣ ученія объ актуальной безконечности.* Петроградъ, 1915. Стр. 42.

А. П. Грузинцевъ, проф. *Приложеніе термодинамики къ химическимъ реакціямъ съ твердыми фазами.* Харьковъ, 1915. Стр. 111.

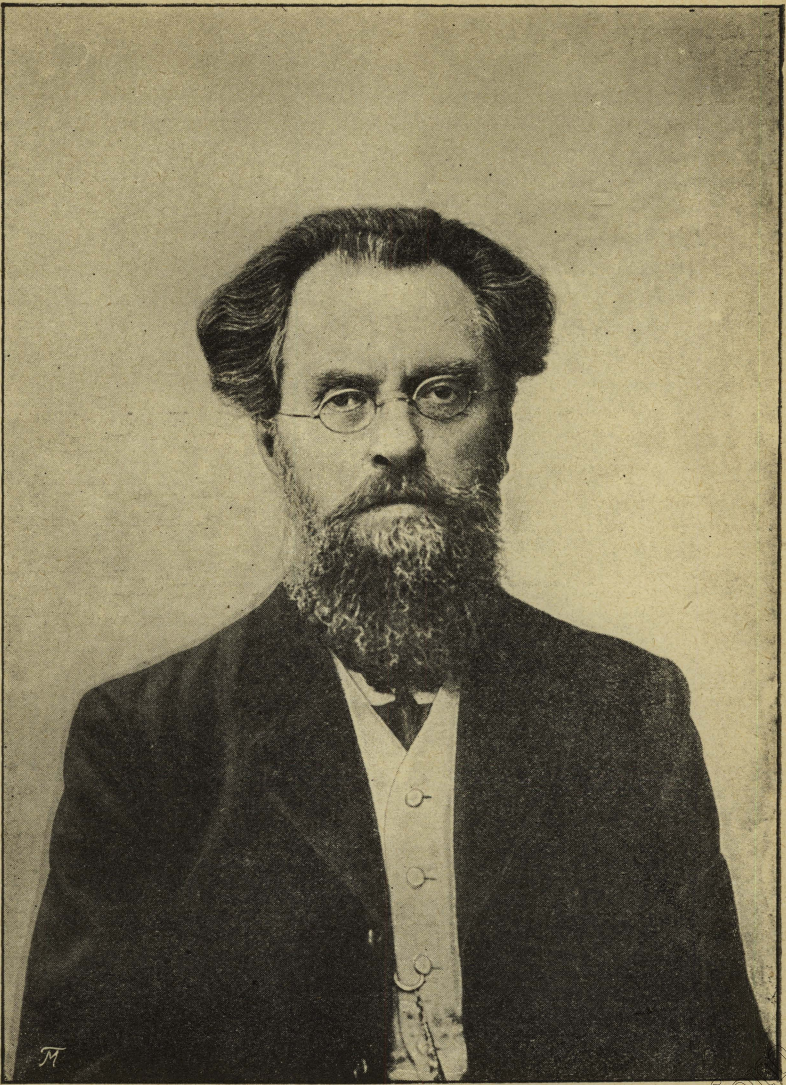
Германъ Минковскій. *Пространство и время.* Съ портретомъ автора и біографич. очеркомъ. Перевелъ І. В. Я ш у н с к і й. II-е изд. Кн-ство «Физика». Петроградъ. 1915. Стр. 55. Ц. 45 к.

А. В. Цингеръ. *Начальная физика.* Вторая ступень — «Механика». Изд. Думнова. Москва, 1915. Стр. 256. Ц. 1 р. 15 к.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.



† Николай Яковлевичъ Сонинъ.
1849 — 1915.

Обложка
ищется

Обложка
ищется