Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи III-го семестра № 4—5.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 628—629.

†

Н. Я. СОНИНЪ

1849—1915.

14 февраля 1915 г. скончался послѣ продолжительной и тяжкой болѣзни, академикъ Николай Яковлевичъ Сонинъ, одинъ изъ выдающихся русскихъ математиковъ.

Николай Яковлевичъ происходилъ изъ стариннаго дворянскаго рода Тульской губерніи. Въ раннемъ дѣтствѣ онъ былъ привезенъ въ Москву, гдѣ и жилъ до 1872 г. Воспитаніе онъ получилъ въ 4-ой Московской гимназіи, въ 1865 г. поступилъ въ Московскій Университетъ, гдѣ и окончилъ курсъ по Физико-Математическому Факультету со степенью кандидата и съ золотою медалью за сочиненіе на тему: „Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго", въ 1869 г.

Въ 1872 г. онъ былъ командированъ заграницу, но, будучи назначенъ въ маѣ того же года прив.-доц. въ Варшавскомъ университетѣ, воспользовался командировкой лишь въ $18^{73}/_{74}$ учебномъ году. Заграницей жилъ почти все время въ Парижѣ, гдѣ слушалъ лекціи Ліувилля, Эрмита, Бертрана, Серре и Дарбу.

Въ 1871 году онъ получилъ степень магистра, а въ 1874 — степень доктора чистой математики. Преподавательская дѣятельность Н. Я., начатая въ 1871 г. на женскихъ курсахъ при Московской 3-ей гимназіи, протекала затѣмъ въ теченіе 20 лѣтъ въ Варшавскомъ Университетѣ, до 1893 года. Въ томъ же университетѣ онъ состоялъ деканомъ Физико-Математическаго Факультета въ теченіе 6 лѣтъ.

Въ 1891 г. Н. Я. былъ избранъ членомъ корреспондентомъ, а въ 1893 г. — ординарнымъ академикомъ Императорской Академіи Наукъ и въ 1894 г. переселился въ Петербургъ. Здѣсь онъ читалъ лекціи на Высшихъ Женскихъ Курсахъ и въ Университетѣ на правахъ приватъ-доцента.

Въ теченіе 8 лѣтъ (1892 — 1899) онъ былъ назначаемъ предсѣдателемъ испытательныхъ университетскихъ коммиссій въ различныхъ городахъ Россіи. Въ 1899 г. по настойчивому предложенію Министра Народнаго Просвѣщенія Н. П. Боголѣпова принялъ должность попечителя Петербургскаго Учебнаго Округа, которую и занималъ до 1901 г., а съ этого времени, въ теченіе 14 лѣтъ, до самой кончины, занималъ постъ Предсѣдателя Ученаго Комитета Мин. Нар. Просв. и Члена Совѣта Министра.

Н. Я. Сонину принадлежатъ около 50 ученыхъ трудовъ, стяжавшихъ ему извѣстность въ Россіи и Западной Европѣ. Послѣдній его печатный трудъ: „Этюды по элементарной алгебрѣ“, напечатанный сперва въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, а потомъ изданный отдѣльной брошюрой, подъ псевдонимомъ „Н. Ниносъ“, въ 1913 г. доступенъ пониманію даже учениковъ гимназіи и заслуживаетъ особаго вниманія наиболѣе способныхъ къ математикѣ питомцевъ нашей средней школы.

Болѣе подробныя свѣдѣнія о жизни и дѣятельности Н. Я. Сонина будутъ помѣщены въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Журнала Мин. Нар. Просвѣщенія“.

К. Поссе.

Памяти Николая Алексѣевича Умова.

Рѣчь, произнесенная въ засѣданіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 20 февраля.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

Первый день наступившаго года унесъ съ собою въ могилу одного изъ наиболѣе извѣстныхъ русскихъ ученыхъ въ области точнаго знанія, одного изъ наиболѣе яркихъ, наиболѣе свѣтлыхъ представителей русской профессуры, Н. А. Умова. Принимая предложеніе президента Общества сдѣлать здѣсь сообщеніе о его жизни и дѣятельности, я руководился больше обязанностью ученика, сохранившаго благоговѣйныя воспоминанія о своемъ выдающемся учителѣ, нежели сознаніемъ возможности достаточно хорошо это выполнить. Жизнь Николая Алексѣевича мнѣ извѣстна мало. Хотя я и находился съ покойнымъ нѣкоторое время въ тѣсномъ общеніи, но это было, во первыхъ, почти исключительно общеніе ученика со своимъ профессоромъ, во вторыхъ, это имѣло мѣсто уже четверть вѣка тому назадъ. Со времени его отъѣзда изъ Одессы я лишь изрѣдка имѣлъ удовольствіе встрѣчаться и бесѣдовать съ Николаемъ Алексѣевичемъ или обмѣняться съ нимъ письмами. А между тѣмъ именно въ Москвѣ его дѣятельность, научно академическая и общественная, наиболѣе широко развернулась. Я могу сообщить Вамъ поэтому лишь скудныя свѣдѣнія; я постараюсь воспроизвести передъ Вами тотъ образъ, который составился и запечатлѣлся въ моей душѣ, — тѣ воспоминанія, которыя у меня связаны съ этой исключительной личностью, — его обликъ, какъ ученаго, его взгляды и міровоззрѣніе; но я разсчитываю на Ваше снисхожденіе за недостатокъ полноты, за отрывочность свѣдѣній, за недостаточную яркость картины. Я прошу также не поставить мнѣ въ вину, если въ какихъ либо фактическихъ деталяхъ произошла ошибка. Я возстановлялъ ихъ по памяти и не все имѣлъ возможность провѣрить.

Николай Алексѣевичъ Умовъ родился въ Симбирскѣ въ 1846 г. Онъ былъ сыномъ врача, повидимому, очень интеллигентнаго человѣка, не порвавшаго связи съ наукой, живо интересовавшагося широко разроставшимся въ ту пору естествознаніемъ. Отецъ въ началѣ лично руководилъ занятіями сына, но затѣмъ помѣстилъ его въ первую Московскую гимназію, которую онъ окончилъ 17-ти лѣтъ. Въ томъ же году онъ поступилъ на физико-математическій факультетъ Московскаго Университета. Цингеръ, Давидовъ, Бредихинъ, Слудскій, — таковы имена извѣстныхъ ученыхъ, занимавшихъ въ то время въ Московскомъ Университетѣ каѳедры математическаго отдѣленія.

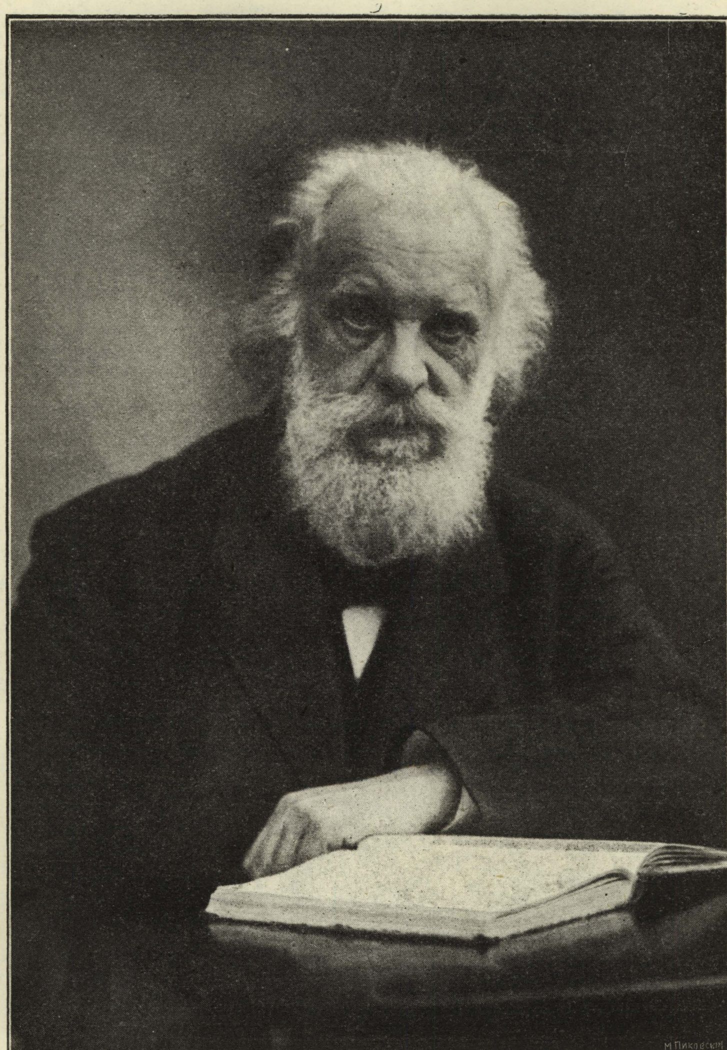
Каѳедры физики занимали: Николай Михайловичъ Любимовъ и Александръ Григорьевичъ Столѣтовъ. Мнѣ не нужно говорить въ этомъ собраніи о томъ значеніи, которое Столѣтовъ имѣлъ для русской физики, о томъ научномъ авторитетѣ, которымъ онъ пользовался, о томъ обаяніи, которое онъ производилъ на слушателей. Въ ту пору А. Г. Столѣтовъ былъ еще совсѣмъ молодымъ ученымъ. Только что вернувшійся изъ школы Кирхгофа, Александръ Григорьевичъ принадлежалъ къ числу тѣхъ физиковъ, которые умѣютъ равно высоко цѣнить и въ своихъ работахъ поддерживать равновѣсіе между опытнымъ изслѣдованіемъ и его теоретической разработкой. Впрочемъ, въ то время Столѣтовъ преподавалъ математическую физику, писалъ по математической физикѣ, въ этой области были сосредоточены всѣ его интересы. Въ эту область онъ увлекъ и перваго изъ обширной плеяды своихъ выдающихся учениковъ, Н. А. Умова. Впрочемъ Н. А. слушалъ Столѣтова только одинъ годъ. Но я слышалъ отъ него, что этотъ годъ имѣлъ для него рѣшающее вліяніе.

Умовъ окончилъ университетъ въ 1867 г. на 21 году своей жизни. Колебался ли онъ еще въ началѣ между научной и практической дорогой, о которой не могъ не думать въ виду крайней ограниченности средствъ; или вопросъ объ оставленіи его при университетѣ не сразу получилъ благопріятное рѣшеніе; или, быть можетъ, молодой человѣкъ еще не умѣлъ направить своихъ стремленій; но первые его шаги по окончаніи университета отличаются неувѣренностью. Каникулы онъ провелъ на вагоностроительномъ заводѣ, а осенью поступилъ въ Петроградскій технологическій институтъ.

Однако, здѣсь онъ оставался только короткое время. Въ октябрѣ состоялось постановленіе объ оставленіи его при Московскомъ Университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію по каѳедрѣ физики.

Съ этого времени начинается его систематическая научная работа, не прерывавшаяся до дня смерти. Преподавательскую дѣятельность онъ, какъ обыкновенно, началъ въ средней школѣ, во второй женской гимназіи, но оставался при этихъ занятіяхъ недолго. Въ 1870 г. онъ выдержалъ экзаменъ на степень магистра чистой математики и дѣятельно сталъ подготовлять диссертацію.

Въ эту пору физико-математическій факультетъ Новороссійскаго Университета принялъ рѣшеніе усилить преподаваніе физики и пригласить по этой каѳедрѣ второго преподавателя для чтенія математической физики.



Николай Алексѣевичъ Умовъ.
1846 — 1915.

Каѳедру физики въ Новороссійскомъ университетѣ со дня его основанія занималъ Василій Ивановичъ Лапшинъ, читавшій также физическую географію. Повидимому, этому профессору не удалось поставить каѳедру физики на надлежащую высоту. Научный авторитетъ его былъ невеликъ. Даже авторъ исторической записки, изданной Университетомъ по случаю двадцатипятилѣтія, счелъ нужнымъ отмѣтить, что „В. И. Лапшинъ, какъ преподаватель не пользовался успѣхомъ у студентовъ, которые по преподаваемымъ имъ предметамъ занимались мало и неохотно“. Учениковъ онъ не имѣлъ и шаговъ къ освѣженію преподаванія физики также не дѣлалъ. Къ концу шестидесятыхъ годовъ Лапшинъ заканчивалъ уже 35-лѣтіе службы. Профессоръ химіи, П. Н. Соколовъ, лишь недавно переѣхавшій въ Одессу изъ Петрограда, съ согласія Лапшина, представилъ въ доценты по каѳедрѣ физики молодого петербургскаго физика Ѳ. Н. Шведова, который былъ избранъ на эту должность въ августѣ 1868 г. Черезъ два года, послѣ защиты докторской диссертаціи, Ѳ. Н. Шведовъ былъ избранъ ординарнымъ профессоромъ. Обставивъ преподаваніе опытной физики и взявъ на себя также чтеніе физической географіи, Ѳ. Н. не могъ вести также преподаванія математической физики, составлявшей въ ту пору на математическомъ отдѣленіи обязательный предметъ; къ тому же по своимъ воззрѣніямъ и образованію онъ стоялъ довольно далеко отъ этой дисциплины. Онъ естественно пришелъ, такимъ образомъ, къ необходимости пригласить второго профессора и, получивъ на это согласіе, обратился къ А. Г. Столѣтову съ просьбой рекомендовать ему преподавателя. Столѣтовъ, естественно, рекомендовалъ своего первенца, Н. А. Умова.

Умовъ прислалъ Ѳ. Н-у подробный планъ своей магистерской диссертаціи и изложилъ выводы, къ которымъ онъ пришелъ. Въ своемъ представленіи факультету Шведовъ пишетъ, что эта работа несомнѣнно обнаруживаетъ въ авторѣ ученаго, способнаго къ весьма серьезному самостоятельному изслѣдованію.

22-го ноября 1871 г. Н. А. Умовъ былъ избранъ Совѣтомъ Новороссійскаго Университета доцентомъ по каѳедрѣ физики и переѣхалъ въ Одессу. Здѣсь развернулась его научная и академическая дѣятельность, здѣсь онъ пріобрѣлъ извѣстность, здѣсь онъ провелъ 20 лучшихъ лѣтъ своей жизни, хотя и не принадлежавшихъ къ числу легкихъ.

Въ слѣдующемъ же году послѣ избранія Н. А. защитилъ магистерскую диссертацію, еще черезъ три года докторскую. Послѣ этого Н. А. былъ избранъ экстра-ординарнымъ профессоромъ. Казалось бы, жизнь должна была потечь болѣе ровно, работа должна была наладиться тверже. Но терніи, покрывающіе академическій путь, настоящему собранію хорошо извѣстны.

Позвольте мнѣ, однако, начать не съ этихъ терніевъ. Я предпочитаю въ общихъ чертахъ охарактеризовать сначала научное міровоззрѣніе этого ученаго въ ту пору его жизни.

Н. А. читалъ, какъ я уже сказалъ, математическую физику. Отчетливо припоминаю слѣдующій эпизодъ. Когда я былъ студентомъ второго курса, я какъ то спросилъ старшаго товарища, только что пришедшаго съ лекціи Н. А. Умова: „Скажи, пожалуйста, что это за математическая физика? Очень она отличается отъ обыкновенной физики?“ — „Т. е. ничего общаго!“, послѣдовалъ отвѣтъ; — „совсѣмъ другая наука“. Эта наивная точка зрѣнія студента, усмотрѣвшаго цѣлую пропасть между описаніемъ опытнаго изслѣдованія и элементарными теоретическими разсужденіями, которыя онъ привыкъ слушать на лекціяхъ экспериментальной физики, съ одной стороны, и довольно глубокими математическими построеніями, которыя онъ слышалъ на лекціяхъ Н. А. Умова, съ другой стороны, — эта точка зрѣнія студента, не умѣвшаго отождествить ученія, представшія передъ нимъ въ различномъ научномъ облаченіи, — имѣетъ, къ сожалѣнію, довольно широкое распространеніе; и многіе дѣйствительно склонны думать, что физика раздѣляется на опытную и математическую. Въ дѣйствительности, конечно, физика одна; изслѣдованія экспериментатора, математическая ихъ разработка и подготовка, теоретическія предуказанія и опытная ихъ провѣрка, или предварительные опытные факты и теоретическая ихъ интерпретація составляютъ одно неразрывное цѣлое.

Физика одна; безъ теоріи невозможно никакое ея изложеніе, невозможна никакая ея разработка; а серьезная научная ея разработка необходимо облекается въ математическую форму. И нельзя, конечно, думать, что элементарная обработка тѣхъ же идей, имѣющая въ виду лицъ, недостаточно владѣющихъ высшимъ математическимъ анализомъ, составляетъ удѣлъ другой, спеціально экспериментальной физики.

Физика одна, но физиковъ много; ихъ міровоззрѣнія, ихъ склонности, направленіе ихъ дарованія и складъ ума очень различны. Объединяемые общей тенденціей раскрытія хода физическихъ процессовъ и ихъ внутренней связи, они подходятъ къ этой задачѣ съ различными способностями и различными умѣніями. Человѣкъ съ рѣзко выраженнымъ интуитивнымъ умомъ съ бо́льшимъ успѣхомъ работаетъ въ области экспериментальнаго раскрытія фактовъ, удачнѣе намѣчаетъ общую картину явленія; ученый, одаренный болѣе спекулятивнымъ умомъ, охотнѣе разбирается въ концепціи деталей, въ логическомъ построеніи физическихъ теорій. Современная физика представляетъ собой результатъ совмѣстной работы людей того и другого типа.

Н. А. Умовъ далеко не былъ чуждъ экспериментальнаго изслѣдованія; онъ любилъ экспериментъ, и преграды, которыя онъ встрѣчалъ при выполненіи этого рода работъ, причиняли ему немало горя. Но, по существу, это былъ человѣкъ спекулятивнаго образа мыслей. Изысканіе наиболѣе общихъ точекъ отправленія для дѣйствительнаго объединенія физическихъ явленій, проведеніе единой мысли черезъ все построеніе теоретической физики, объединеніе въ этой мысли всѣхъ процессовъ живой и мертвой природы, — вотъ вопросы, которые больше всего интересовали Н. А. Вы видите, проф. О. Д. Хвольсонъ совершенно правъ, называя Н. А. первымъ русскимъ философомъ-физикомъ.

Постановка очень широкихъ общихъ вопросовъ имѣетъ, конечно, свою отрицательную сторону. Всѣхъ интересующіе, старые, какъ научная мысль, и все же вѣчно свѣжіе и вѣчно неразрѣшимые, эти вопросы не сходятъ съ арены научнаго изслѣдованія и одинаково манятъ ученаго и профана. Но мысль, увлекаемая соблазномъ широкихъ перспективъ, легко расплывается въ чрезмѣрной общности и чрезвычайной трудности задачи. Очень немногимъ было дано внести что либо прочное въ рѣшеніе этихъ вопросовъ, и каждое зерно, принявшееся на этой почвѣ, имѣетъ высокую цѣнность.

Н. А, Умовъ никогда не подходилъ къ этимъ вопросамъ съ чисто раціоналистической точки зрѣнія. Онъ опирался на установившееся міровоззрѣніе и, пытаясь найти новые отправные пункты, искалъ для этого математическое обоснованіе; и я считаю, что онъ принадлежалъ къ числу тѣхъ, которымъ удалось заронить возросшія сѣмена въ неподатливую почву общихъ физическихъ вопросовъ; я постараюсь это показать, когда перейду къ разсмотрѣнію его работъ.

Изслѣдователь, занятый математической разработкой физическихъ вопросовъ уподобляется миѳическому герою, ведущему свой корабль между двумя жестокими чудовищами. Его Сциллой является опасность измѣнить физикѣ, а Харибдой — не меньшая опасность измѣнить математикѣ. Его изслѣдованіе имѣетъ физическую цѣнность, если математическіе символы и понятія, которыми онъ оперируетъ, являются дѣйствительными выразителями физическихъ факторовъ, если это соотвѣтствіе поддается дѣйствительному контролю. Всякое отступленіе отъ этого требованія грозитъ свести изысканіе къ математическому упражненію, и вызываетъ раздраженіе, что бы не сказать негодованіе, въ лагерѣ физиковъ. Съ другой стороны, математическій выводъ имѣетъ цѣну только въ томъ случаѣ, когда разсужденіе дѣйствительно имѣетъ доказательную силу, когда оно проведено со всею необходимою строгостью. Всякое отступленіе отъ этого требованія встрѣчаетъ возраженія среди математиковъ, справедливо находящихъ, что внѣ этихъ условій разсужденіе не имѣетъ не только математическаго, но и физическаго значенія. Кто стоитъ далеко отъ этого рода изслѣдованій, тотъ съ трудомъ себѣ можетъ преставить, какія трудности стоятъ на пути выполненія этихъ, кажется, элементарно справедливыхъ требованій. Съ трудомъ можно указать автора, даже среди классиковъ, который не грѣшилъ бы въ томъ или въ другомъ направленіи, а часто и въ томъ и въ другомъ. Я долженъ сказать, грѣшилъ въ этомъ отношеніи и Н. А.; но онъ употреблялъ всѣ усилія, чтобы оставаться физикомъ въ математическомъ изслѣдованіи и математикомъ въ физическомъ. Онъ и пользовался поэтому уваженіемъ и признаніемъ какъ со стороны физиковъ, такъ и со стороны математиковъ.

Самое названіе: „математическая физика“ за предметомъ, который Н. А. здѣсь въ Одессѣ читалъ, я сохранилъ въ томъ видѣ, какъ оно значилось въ „Обозрѣніи преподаванія“. Въ настоящее время физики предпочитаютъ названіе „теоретическая физика“. Въ связи съ математическимъ изслѣдованіемъ чисто физическихъ вопросовъ возникъ обширный рядъ математическихъ проблемъ, частью обобщающихъ тѣ задачи, къ которымъ привела физика, частью подготовляющихъ почву для безукоризненнаго ихъ рѣшенія. Чтобы отмежеваться отъ изысканій, стоящихъ отъ физики довольно далеко, физики въ настоящее время обыкновенно называютъ „теоретической физикой“ тѣ по преимуществу математическія работы, которыя посвящены дѣйствительно физическимъ вопросамъ, и разумѣютъ подъ „математической физикой“ изслѣдованія, хотя и возникшія на почвѣ рѣшенія физическихъ вопросовъ, но по существу стоящія отъ послѣднихъ далеко.

Я не думаю, чтобы такое подраздѣленіе можно было признать правильнымъ. Работы, по предмету своему стоящія далеко отъ физики, не представляютъ собою физики, хотя бы и математической, каковъ бы ни былъ ихъ генезисъ; напротивъ, того, — работы, хотя бы тонко математическія, но придающія анализу физическаго вопроса ту необходимую строгость, внѣ которой выводы не имѣютъ доказательной силы, составляютъ неотъемлемую часть физики теоретической или математической — все равно, какъ бы мы ее ни называли. На почвѣ этого разграниченія возникаетъ не мало разногласія, даже антагонизма. Здѣсь, онечно, не мѣсто и не время входить въ этотъ споръ; я только упомянулъ о немъ для того, чтобы указать, какое мѣсто занималъ въ немъ Н. А. Умовъ.

Умовъ былъ физикомъ и смотрѣлъ на себя прежде всего, какъ на физика. Работы чисто математическія, о которыхъ я говорилъ выше, его интересовали мало, хотя бы они и сохраняли внѣшнюю связь съ физикой. У Н. А. было небольшое число работъ, по существу математическихъ; такова, напримѣръ, работа „О геометрическомъ значеніи интеграловъ Френеля“; но по своему содержанію онѣ тѣсно срослись съ преподаваніемъ физики. Что касается работъ, имѣющихъ задачей приданіе необходимой строгости математическимъ разсужденіямъ теоретической физики, то Н. А. ихъ всегда цѣнилъ, хотя откровенно признавалъ, что изученіе ихъ его часто затрудняетъ. Въ ту пору это были, главнымъ образомъ, изслѣдованія относительно существованія интеграла уравненія Лапласа и функціи Грина при опредѣленныхъ задачахъ. Предлагая мнѣ въ 1900 г. въ качествѣ темы для работы вопросъ о возможности рѣшенія электростатической задачи, Н. А. говорилъ мнѣ, что вполнѣ признаетъ недостаточную доказательность разсужденій, приведенныхъ у него въ третьей главѣ его „Введенія въ курсъ математической физики“ и настоятельно рекомендовалъ мнѣ познакомиться съ новыми математическими изслѣдованіями по этому предмету.

Въ проведеніи извилистой черты, отдѣляющей изслѣдованія физическія отъ чистой математики, Н. А. былъ очень толерантенъ; я долженъ сказать, что толерантность, составляющая главное условіе успѣшности научной работы, была основной чертой его характера. Я опасаюсь навязать ученому, не могущему уже изъ другого міра меня опровергнуть, чуждыя ему точки зрѣнія; но мнѣ кажется, выраженный выше взглядъ, что нѣтъ разницы между математической и теоретической физикой, я заимствовалъ у него; это во всякомъ случаѣ подтверждается тѣмъ, что курсы свои онъ до послѣдняго времени называлъ математической физикой.

Итакъ, физикъ,—но физикъ-математикъ и физикъ-философъ, ищущій исходныхъ пунктовъ физическаго міровоззрѣнія,—вотъ общая характеристика покойнаго ученаго. Но въ чемъ же заключалось это міровоззрѣніе? Раньше, чѣмъ отвѣтить на этотъ вопросъ, позвольте мнѣ въ самыхъ общихъ чертахъ напомнить воззрѣнія, господствовавшія въ ту пору, когда Н. А. учился и когда развернулась его дѣятельность.

Къ срединѣ прошлаго столѣтія получилъ точную научную формулировку законъ сохраненія энергіи. Относящіяся сюда основныя работы Джоуля, Майера и Гельмгольца относятся къ концу сороковыхъ годовъ; пятидесятые годы ушли на выясненіе и признаніе этого закона, на проведеніе его черезъ всѣ отдѣлы физики и химіи. Въ эту пору Клаузіусъ и В. Томсонъ связали эти идеи съ работами Карно и создали механическую теорію тепла. Въ связи съ этимъ шестидесятые годы, (тѣ именно годы, которые Н. А. провелъ въ университетѣ и въ подготовкѣ къ научной дѣятельности), ознаменовались мощнымъ подъемомъ механистическаго міровоззрѣнія. Какъ совершенно правильно замѣчаетъ Э. Махъ, связь между механистическимъ ученіемъ и этими новыми широкими обобщеніями была чисто внѣшняя; она коренилась въ томъ, что самая идея о работѣ и точное опредѣленіе послѣдней по крайней мѣрѣ исторически принадлежали механикѣ. Но такъ или иначе это было новымъ импульсомъ къ усиленному стремленію построить совершенную механистическую картину мірозданія. Что дѣйствительно содѣйствовало утвержденію механистики, это созданіе кинетической теоріи газовъ; въ относящихся сюда работахъ Максуэлля и Больцмана вырисовывалась какъ будто и общая кинетическая теорія матеріи. Извѣстно, что успѣхъ окрыляетъ работника, а склонность широко раздвинуть предѣлы установленныхъ фактовъ есть слабость, которой ученые страдали и, вѣроятно, будутъ страдать во всѣ времена. Казалось, что сведеніе всѣхъ физическихъ и химическихъ процессовъ къ динамикѣ, всѣхъ видовъ энергіи къ механической работѣ, всѣхъ дифференціальныхъ уравненій физики къ уравненіямъ Лагранжа и Гамильтона дѣло ближайшаго времени. Уже въ 1855 г. появилась знаменитая книга Бюхнера „Kraft und Stoff", смѣло утверждавшая что и живая природа есть своеобразное проявленіе физическихъ и химическихъ силъ, а отсюда одинъ только шагъ къ сведенію жизни къ механистикѣ. Широкая перспектива, о которой родоначальникъ механистическаго ученія, Декартъ, и не мечталъ.

Сопоставляя идеи, господствовавшія въ ту пору въ морали и въ наукѣ Н. А. Умовъ говоритъ въ одной изъ своихъ рѣчей: „Подъ сѣнью тройственнаго идеала, добро для добра, наука для науки, искусство для искусства, развиваются къ пятидесятымъ годамъ нашего столѣтія блестящія научныя теоріи въ рамкахъ картезіанскихъ ученій".

Выросши, такъ сказать, на механистическихъ ученіяхъ, Н. А. выступаетъ на научную дорогу въ качествѣ убѣжденнаго и яркаго представителя механистическаго міровоззрѣнія. Въ немъ его сила, въ немъ его слабость. Въ немъ его сила, ибо изъ него были почерпнуты тѣ идеи, которыя я считаю наиболѣе цѣннымъ вкладомъ Н. А. въ науку; въ нихъ его слабость, ибо тиски механистическаго міровоззрѣнія не дали этимъ идеямъ развиться въ надлежащую сторону.

Въ мое время аудиторія Н. А. была невелика. Невеликъ былъ въ Одессѣ весь контингентъ студентовъ математиковъ, а математическая физика въ ту пору уже не была обязательнымъ предметомъ; довольно трудная дисциплина, требующая серьезной подготовки, привлекала мало любителей. Но кто выдерживалъ этотъ искусъ, тотъ выносилъ изъ аудиторіи то, что въ высшемъ образованіи наиболѣе цѣнно — ясное и цѣльное міросозерцаніе.

Онъ выходилъ изъ школы Н. А. не только съ ясными представленіями въ области физики, но съ болѣе отчетливымъ пониманіемъ математики. Немногіе способны усваивать отвлеченныя идеи помимо ихъ конкретизаціи. На лекціяхъ Умова абстрактныя идеи и символы высшаго анализа оживали, становились выразителями конкретныхъ физическихъ агентовъ. Дифференціальныя уравненія не были больше плодомъ исключенія параметровъ изъ аналитическихъ зависимостей. Они претворялись въ неизмѣнныя нормы, съ желѣзной необходимостью регулирующія ходъ отдѣльныхъ физическихъ процессовъ и всего мірозданія въ цѣломъ. Математическая физика представлялась кодексомъ, объединяющимъ эти нормы, и при томъ объединяющимъ ихъ не въ аггрегатъ разрозненныхъ законовъ, а въ стройную систему, разматывающуюся, какъ геометрія, изъ немногихъ положеній. А идеаломъ математика являлся духъ Лапласа или демонъ Максуэлла, владѣющій интегралами этихъ дифференціальныхъ уравненій и умѣющій съ ихъ помощью проникнуть взоромъ въ прошлое и въ будущее на неограниченное время.

Врядъ ли когда либо существовало міровоззрѣніе, болѣе безпощадное, чѣмъ механистическое.

Человѣкъ обыкновенно живетъ, окруженный гнетущей дѣйствительностью. Чтобы найти въ ней утѣшеніе и забвеніе, онъ создаетъ себѣ иллюзіи, сплетаемыя изъ фантазій, традицій и миѳовъ, и этими иллюзіями онъ живетъ.

Механистическое міровоззрѣніе не знаетъ иллюзій; оно не признаетъ существеннаго различія между живой и мертвой природой, не признаетъ свободной воли, порывовъ и стремленій. А гдѣ нѣтъ воли тамъ нѣтъ добра и зла, нѣтъ каръ и воздаянія. Есть лишь желѣзная необходимость, есть безпредѣльныя миріады матеріальныхъ частицъ, несущіяся то въ совершенномъ безпорядкѣ, то въ согласованной стройности; есть неисчислимыя столкновенія, сопровождаемыя обмѣномъ скоростей, который совершается съ сохраненіемъ энергіи и при неизмѣнномъ наростаніи энтропіи.

Но человѣку необходимо спасти свои иллюзіи, и поэтому, при громадномъ распространеніи механистическаго міровоззрѣнія въ 60-хъ и 70-хъ годахъ рѣдко для кого это ученіе было пріемлемо въ полной чистотѣ: почти каждый оставлялъ себѣ лазейку для спасенія своихъ вожделѣній; а эта лазейка была щелью, прорѣзанной острымъ зубомъ Мефистофелевой мыши: черезъ эту щель проникалъ дьяволъ и разрушалъ всю систему.

Н. А. Умовъ поражалъ всякаго, кто его зналъ, необычайной цѣльностью своей натуры; цѣльнымъ было и его міросозерцаніе. Онъ не оставлялъ никакихъ лазеекъ и не былъ склоненъ прятать истину въ угоду иллюзіямъ. Въ этой силѣ убѣжденія, не знавшей компромисса, заключался источникъ его вліянія на учениковъ. Въ ту пору, когда я слушалъ Н. А., онъ поддерживалъ механистическое міровоззрѣніе во всей его полнотѣ и твердо вѣрилъ, что неподатливую область электромагнитныхъ явленій удастся подогнать подъ дифференціальныя уравненія Лагранжа и при томъ не въ томъ смыслѣ, какъ это до нѣкоторой степени выполнено школой Максуэлля, а путемъ непосредственнаго установленія механизма электрическихъ и магнитныхъ взаимодѣйствій. Этой вѣрой проникнуты и работы его, относящіяся къ тому времени, но объ этомъ еще рѣчь впереди. Н. А. былъ чуждъ всякихъ слѣдовъ мистицизма или метафизики, и если на склонѣ лѣтъ онъ былъ вынужденъ сойти съ твердой почвы механистики, то это было сдѣлано не во имя иллюзій и не подъ давленіемъ мистицизма.

А между тѣмъ къ концу столѣтія мистика и метафизика, проложили себѣ пути въ обширные слои интеллигентнаго общества.

Широкія перспективы, которыя рисовались въ серединѣ столѣтія, подъ вліяніемъ установленныхъ новыхъ общихъ законовъ, не только не осуществлялись, но вызывали глубокія сомнѣнія. Всѣ усилія подогнать эѳиръ подъ классическую теорію упругости въ согласіи съ механистическимъ міровоззрѣніемъ съ одной стороны, и съ ходомъ электромагнитныхъ процессовъ, хотя бы только съ распространеніемъ трансверсальныхъ колебаній, съ другой стороны, — къ цѣли не привели. Не спѣшили также оправдаться предсказанія Бюхнера. Чрезвычайно быстро разворачивавшаяся картина естествознанія обнаружила такую сложность живой природы, что дѣйствительное сведеніе ея къ элементарнымъ физико-химическимъ процессамъ становилось похожимъ на утопію. Механистическое міровоззрѣніе стало терять приверженцевъ. Твердыхъ основаній къ этому, въ сущности, еще не было: было только ясно, что его побѣда отодвигается, что она не дается такъ легко и скоро, какъ этого ожидали. Но обѣщанія не сбылись, надежды были обманyты, люди иллюзіи и мистики подняли голову и въ воздухѣ сталъ носиться ропотъ, такъ художественно описанный Эмилемъ Зола въ его романѣ „Докторъ Паскаль“ — ропотъ, девизомъ котораго было:

„наука обанкротилась!“ Къ концу XIX столѣтія эти настроенія были очень сильны.

На святкахъ 1901 года въ Петроградѣ состоялся XII Съѣздъ Русскихъ естествоиспытателей и врачей. Я полагаю, многимъ изъ присутствующихъ еще памятны двѣ рѣчи, произнесенныя въ общихъ собраніяхъ этого съѣзда, яркія и страстныя, но противоположныя по своимъ тенденціямъ Н. В. Бугаева и Н. А. Умова. Бугаевъ ищетъ выхода, ищетъ куда спастись отъ детерминизма и отъ безпощадной необходимости, связанной съ механистическимъ міровоззрѣніемъ. Этотъ выходъ онъ находитъ въ ариѳмологіи, иначе говоря, въ систематизированной теоріи чиселъ. Физики пользовались до сихъ поръ исключительно анализомъ безконечно малыхъ, анализомъ непрерывныхъ величинъ и функцій, и это онъ привелъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ, къ детерминизму. Но вотъ грядетъ ариѳмологія, анализъ прерывныхъ величинъ, несущій совершенно другія средства изслѣдованія, а съ ними и возможность иного міровоззрѣнія. То было ярко выраженное отступленіе въ область метафизики, ибо никакой ариѳмологіи, способной не только замѣнить, но даже сколько нибудь придти на помощь анализу безконечно малыхъ въ дѣлѣ изслѣдованія природы, не существовало тогда и не появилось позже.

Черезъ три дня тѣ же вопросы подымаются въ рѣчи Умова. Тема — самая трудная которую себѣ можетъ поставить естествоиспытатель — механическая модель живой матеріи. Отказаться отъ такой модели — значитъ отказаться отъ механистическаго міровоззрѣнія. Н. А. находитъ, что для этого нѣтъ основаній, хотя наши физико-химическіе процессы и очень грубы по сравненію съ тонкими явленіями жизни. Въ идеяхъ Больцмана, подошедшаго въ кинетической теоріи вещества, къ закону энтропіи съ точки зрѣнія претворенія согласованныхъ, стройныхъ движеній въ нестройныя, Н. А. находитъ точку опоры. Онъ полагаетъ, что живой организмъ есть наибольшее накопленіе стройности; стройность есть, если не совершенная, то, во всякомъ случаѣ, возможная механическая модель живого организма. Можетъ быть и это есть борьба за иллюзію, на этотъ разъ за иллюзію механистики.

Вы видите, какъ твердо держался этихъ воззрѣній Н. А. Они были ему дороги, какъ традиціи, которыя онъ вынесъ изъ школы, какъ позиція, которую онъ занималъ и отстаивалъ въ теченіе свыше тридцати лѣтъ, какъ исходныя положенія его важнѣйшихъ работъ. Но въ послѣднія пятнадцать лѣтъ его жизни основы этого міровоззрѣнія зашатались; зашатались они теперь не во имя иллюзій, не въ угоду мистикѣ; они не выдержали одновременнаго напора новыхъ фактовъ и связаннаго съ этимъ тонкаго логическаго анализа. Они заколебались въ первоклассныхъ лабораторіяхъ Дж. Дж. Томсона, Кауфмана, Майкельсона и Морлея; они были подвергнуты сомнѣнію теоретическими изысканіями Лоренца и его учениковъ.

Открытіе катоднаго потока и тѣсно съ нимъ связанныхъ радіоактивныхъ излученій развернули передъ глазами физиковъ картину движеній матеріальныхъ частицъ, совершающихся со скоростью, неизмѣримо большею, чѣмъ та, съ которой мы имѣли дѣло раньше въ приложеніяхъ механики, даже въ небесной механикѣ. И, какъ это нерѣдко бывало при переходѣ къ величинамъ другого порядка, оказалось что прежнія нормы къ нимъ непримѣнимы. Заколебались самыя основы механики Ньютона и Лагранжа. Не вынесъ напора новыхъ фактовъ законъ постоянства массы, это основное исходное положеніе классической механики. Среди возникшихъ сомнѣній съ особою остротою возродились указанія, что классическая механика несетъ на себѣ неизгладимую печать абсолютнаго, — указанія, высказывавшіяся почти съ самаго ея зарожденія. Теперь эти сомнѣнія получили болѣе конкретную почву, а главное, стремленіе привести теорію въ согласіе съ новыми фактами, привели къ смѣлой попыткѣ расширить рамки механики, найти для нея совершенно иныя точки отправленія и при томъ въ той именно области явленій, сведеніе которыхъ къ механикѣ составляло наибольшую трудность. Мнѣ не нужно называть здѣсь именъ, которыя теперь у всѣхъ на устахъ, именъ людей, которые рѣшились отвергнуть классическую механику, эту — казалось — незыблемую основу всего человѣческаго знанія и стать на трудный путь созданія для физика новаго фундамента. Новой цѣльной механики еще нѣтъ; есть лишь небольшія ея главы и общій абрисъ системы. Но сколько можно судить по этимъ очертаніямъ, ученіе о движеніи уже не укладывается въ рамки дифференціальныхъ уравненій, и смѣлыя обобщенія механистическаго міровоззрѣнія утратили старыя основы, не пріобрѣтши еще новыхъ.

Съ другой стороны, утрачена вѣра и въ начальный элементъ механистическаго міровоззрѣнія — въ матеріальную частицу, которая вытѣснена изъ физики электрономъ.

Извѣстно, что этотъ глубокій переворотъ встрѣтилъ очень различное отношеніе среди физиковъ. Мы слышали смѣлыя утвержденія, что стараго міровоззрѣнія болѣе не существуетъ, и въ то же время съ другой стороны мы слышали заявленія, что большинство физиковъ, повидимому, лишилось разсудка.

Эти новыя идеи пришли, когда Н. А былъ уже почти на склонѣ лѣтъ. Вы знаете, какъ трудно бываетъ въ эти годы перестраивать свое міровоззрѣніе, воспринимать идеи, въ корнѣ подрывающія всѣ тѣ начала, которыми человѣкъ жилъ цѣлую жизнь. Но теперь, когда отбой механистики идетъ не отъ сердца, а отъ ума, — не отъ вожделѣній, а отъ фактовъ, — не во имя иллюзій, а во имя логики, Н. А. смѣло становится на новый путь. Среди присутствующихъ есть, вѣроятно, люди, которые слышали его рѣчь на Первомъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей физики, химіи и космографіи, другіе ее читали въ печати. Отъ нея вѣетъ свѣжестью и ясностью мысли; степень увлеченія такова, что передъ Вами рисуется молодой и страстный поборникъ новыхъ ученій. Но не только свѣжесть и страстность вложилъ Н. А. въ изложеніе этихъ взглядовъ; въ статьяхъ по тому же предмету, предназначенныхъ для спеціалистовъ, вложена своеобразная окраска, полныя зерна собственной мысли.

Что чрезвычайно характерно для Н. А., это тѣсная связь въ немъ ученаго и профессора. Кто стоитъ близко къ университетскому дѣлу, тотъ знаетъ, какъ часто преподаваніе профессора стоитъ далеко отъ научныхъ интересовъ, которыми онъ въ данный моментъ живетъ. Н. А. вносилъ въ преподаваніе новыя идеи, какъ только онѣ становились его достояніемъ. Я хорошо зналъ курсъ, который Н. А. читалъ здѣсь въ Одессѣ. Лѣтъ пять тому назадъ я имѣлъ потребность ознакомиться съ курсомъ математической физики, который онъ читалъ въ послѣдніе годы въ Москвѣ. Я получилъ его лекціи — и совершенно не узналъ этого курса. Эти лекціи были свѣжимъ выраженіемъ того, что содержала текущая научная литература.

И не только университетская аудиторія была для Н. А. ареной распространенія новыхъ идей физики. Не было того съѣзда, устроители котораго не обращались бы къ Умову съ просьбой оживить его своею рѣчью — и Умовъ не отказывалъ; не было того научнаго и популярно-научнаго журнала, который не просилъ бы у Умова статьи, и Умовъ не отказывалъ. Не было ученаго общества и учрежденія, которое не обременяло бы Умова отвѣтственными обязанностями, и Умовъ не отказывалъ.

Человѣкъ съ яснымъ и цѣльнымъ міросозерцаніемъ, внимательно прислушивающійся къ каждому движенію научной мысли, стойкій подъ напоромъ ненаучныхъ тенденцій и смѣлый приверженецъ новыхъ идей, когда онѣ имѣютъ экспериментальное и логическое обоснованіе, всегда занятый основными вопросами науки и умѣющій сказать въ нихъ свое слово какъ на зарѣ, такъ и на закатѣ своей дѣятельности, неустанный распространитель физическихъ знаній устнымъ и печатнымъ словомъ, не упускающій для этого ни одного случая, вотъ образъ ученаго, который мнѣ хотѣлось начертить.

Я до сихъ поръ ограничивался общей характеристикой, не касаясь научныхъ трудовъ Н. А. Я и не имѣю въ виду дать здѣсь полный обзоръ этихъ трудовъ, во первыхъ потому, что это слишкомъ трудная и отвѣтственная задача, во вторыхъ потому, что это въ настоящемъ собраніи врядъ ли цѣлесообразно. Я хотѣлъ бы только коснуться нѣсколькихъ его работъ, относящихся къ періоду одесской жизни. Я имѣю въ виду тѣ его работы, которыя являются выраженіемъ общихъ идей, его занимавшихъ, а не случайныхъ интересовъ короткаго періода.

Его магистерская диссертація: „Законы колебаній въ неограниченной средѣ постоянной упругости“ была напечатана въ V томѣ „Математическаго Сборника“. Я сказалъ бы, что это работа, болѣе математическая, чѣмъ физическая. Я думаю, что многіе физики отнесли бы ее за ту черту, которая отдѣляетъ теоретическую физику отъ математической, и я думаю, что они были бы правы. Я долженъ сказать объ этой работѣ потому, что въ ней болѣе, чѣмъ въ послѣдующихъ сочиненіяхъ сказался Умовъ-математикъ во всеоружіи тѣхъ средствъ, которыми онъ владѣлъ, и въ тѣхъ предѣлахъ, до которыхъ онъ доходилъ.

Задача заключается въ слѣдующемъ: упругая неограниченная среда постоянной упругости совершаетъ періодическія колебанія. Если эти колебанія извѣстны, то этимъ конечно опредѣляются волновыя поверхности. Умовъ ставитъ себѣ обратную задачу: задано семейство волновыхъ поверхностей, требуется опредѣлить, какими колебаніями оно можетъ быть обусловлено. Работа несетъ на себѣ печать явно выраженнаго вліянія Ламэ. Заданное семейство поверхностей авторъ выбираетъ за одну изъ системъ криволинейныхъ ортогональныхъ координатныхъ поверхностей, разстояніе по лучу за одну изъ координатъ. Преобразовывая дифференціальныя уравненія колебаній упругой среды къ этимъ новымъ перемѣннымъ, онъ получаетъ дифференціальныя уравненія трансверсальныхъ и продольныхъ колебаній, воспроизводящихъ эту волну. Авторъ и интегрируетъ эти уравненія въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Какъ вы видите, работа является дѣйствительно болѣе математической, чѣмъ физической. Но для математика возникъ бы вопросъ, всякое ли семейство поверхностей можетъ быть разсматриваемо, какъ одна изъ совокупностей трижды ортогональныхъ поверхностей, иными словами, всегда ли можетъ найти примѣненіе тотъ путь изслѣдованія, которымъ авторъ пользуется. Умовъ этого вопроса не ставитъ. Нужно сказать, это черта, за которую въ ту пору еще мало заходили.

Слѣдующая работа приводитъ насъ уже глубоко въ область физики. Она называется „Теорія простыхъ средъ и ея приложеніе къ выводу основныхъ законовъ электро-статическихъ и электро-динамическихъ взаимодѣйствій". Здѣсь передъ нами уже яркій представитель механистическаго міровоззрѣнія, пытающійся подойти къ одной изъ основныхъ проблемъ этого ученія.

Въ системѣ движущихся матеріальныхъ частицъ ея энергія представляется живой силой. Но, при движеніи такой системы и при столкновеніяхъ частицъ живая сила можетъ мѣняться. Коррективъ, спасающій законъ сохраненія энергіи, какъ извѣстно, заключается здѣсь въ томъ, что кинетическая энергія переходитъ въ потенціальную.

Но что же, собственно, такое — потенціальная энергія? Вотъ вопросъ, который имѣлъ фундаментальное значеніе для механистическаго міровоззрѣнія и въ ту пору составлялъ врядъ ли не важнѣйшій вопросъ теоретической физики. Вопросъ остается во всемъ своемъ объемѣ открытымъ и по сей день, и такъ называемая феноменологическая точка зрѣнія есть лишь признаніе безсилія въ рѣшеніи этого вопроса. Но въ ту пору, какъ уже было сказано, механистика была въ апогеѣ своего развитія и, казалось, для ея полной побѣды остается сдѣлать лишь одно завоеваніе: раскрыть, что такое потенціальная энергія. Строго говоря, этотъ вопросъ рѣшался всѣми физиками одинаково: поскольку ничего иного кромѣ вещества и движенія не существуетъ, потенціальная энергія можетъ быть только инымъ, сокрытымъ видомъ кинетической энергіи. Живая сила однихъ движеній переходитъ въ живую силу другихъ, менѣе уловимыхъ движеній, частью молекулярныхъ, частью еще глубже сокрытыхъ. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда намъ приходится считаться съ явнымъ превращеніемъ кинетической энергіи въ потенціальную, которое не можетъ быть объяснено переходомъ въ молекулярное движеніе, процессъ всегда протекаетъ въ нѣкоторой средѣ, ощутимой или предполагаемой. Эта среда должна была поглотить исчезнувшую живую силу и претворить ее въ движеніе собственныхъ частицъ, ибо ничего иного механистическое міровоззрѣніе не признаетъ. Потенціальная энергія есть кинетическая энергія окружающей и проникающей среды, обыкновенной матеріальной среды или эѳира, и превращеніе кинетической энергіи въ потенціальную есть только обмѣнъ живой силы между наблюдаемой системой и окружающей средой.

Изслѣдователь, желающій проникнуть въ тайну сложнаго вопроса, долженъ прежде всего упростить его до крайнихъ предѣловъ. И не бѣда, если это упрощеніе доведетъ насъ до полной абстракціи; этими абстракціями полна вся физика.

Руководствуясь такой точкой зрѣнія, Умовъ задается вопросомъ, что будетъ, если система такова, что никакой среды для нея не существуетъ, т. е. если обмѣнъ можетъ происходить только между частицами этой изолированной системы. Такого рода систему Умовъ называетъ простой средой. Ясно, что здѣсь возможенъ только обмѣнъ живыхъ силъ между частицами, и авторъ ставитъ себѣ задачей опредѣлить, какому закону долженъ слѣдовать ходъ этого обмѣна. Какими средствами владѣетъ физикъ для рѣшенія этого вопроса въ такомъ общемъ видѣ? Ничѣмъ, кромѣ закона сохраненія энергіи. Каждый элементъ объема пріобрѣтетъ нѣкоторое количество, (положительное или отрицательное) живой силы и все количество кинетической энергіи, пріобрѣтенное конечнымъ объемомъ, должно быть равно количеству ея, протекшему черезъ окружающую этотъ объемъ поверхность.

Представимъ себѣ теперь на минуту, что рѣчь идетъ не объ энергіи вообще, а о теплотѣ. Простой средой будетъ въ такомъ случаѣ такая среда, въ которой теплота распространяется безъ превращенія въ какіе либо другіе виды энергіи, такъ что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ прямого распространенія тепла.

Аналогія ясна, но неполна; и, именно неполна въ слѣдующемъ отношеніи. Тепло течетъ по линіи паденія температуры (противъ градіента). Въ какую сторону потечетъ энергія вообще, въ чью пользу долженъ совершиться обмѣнъ между частицами? Рѣшеніе этого вопроса очень затруднительно, и авторъ пополняетъ аналогію при помощи соображеній, которыя мнѣ представляются недостаточно ясными. Дополнивъ же аналогію, авторъ получаетъ для распространенія живой силы дифференціальное уравненіе, аналогичное дифференціальному уравненію теплопроводности. Оно интегрируется тригонометрическими рядами. Но для того, чтобы эти ряды, дѣйствительно опредѣлить, чтобы фиксировать ихъ коэффиціенты, нужны дополнительныя условія, такъ называемыя, предѣльныя условія.

Въ теоріи теплопроводности этими предѣльными условіями является распредѣленіе температуры на поверхности. Что должно ихъ замѣнить въ задачѣ о распространеніи энергіи въ простой средѣ? Сама простая среда представляетъ собой слишкомъ далекую абстракцію и опредѣленный отвѣтъ затруднителенъ. Простой средой можно было бы считать развѣ только эѳиръ; но механика эѳира, всегда оставалась только открытой задачей.

Эти два обстоятельства: абстракція, проведенная такъ далеко, что не остается мѣста опытной провѣркѣ полученныхъ результатовъ, и невозможность установленія предѣльныхъ условій, фиксирующихъ результатъ, составляютъ, конечно, слабую сторону работы.

Но одна основная мысль въ ней вырисовывается: она заключается въ слѣдующемъ: физическій процессъ характеризуется движеніемъ энергіи въ тѣлахъ. Эта мысль и получила развитіе въ слѣдующей работѣ Н. А. — „О движеніи энергіи въ тѣлахъ".

Идея о простой средѣ здѣсь отброшена, и задача ставится болѣе опредѣленно въ томъ смыслѣ, что она рѣшается по отношенію къ отдѣльнымъ процессамъ, главнымъ образомъ, по отношенію къ упругимъ колебаніямъ, извѣстный ходъ которыхъ служитъ ключемъ къ рѣшенію вопроса.

Въ каждомъ элементѣ объема изслѣдуемой среды содержится опредѣленное количество энергіи. Отношеніе этого количества энергіи къ объему элемента Н. А. называетъ „плотностью энергіи въ данной точкѣ среды". Я не берусь утверждать, что этотъ терминъ, столь употребительный въ современной физикѣ, появляется здѣсь впервые; но Н. А., повидимому, пришелъ къ нему совершенно самостоятельно. Авторъ рисуетъ себѣ далѣе, что энергія течетъ, какъ течетъ жидкость. Въ каждой точкѣ въ каждый моментъ опредѣленный векторъ выражаетъ скорость движенія энергіи. По существу мы находимся въ совершенно аналогичныхъ условіяхъ съ теченіемъ жидкости; законъ сохраненія энергіи замѣняетъ законъ сохраненія вещества, и авторъ получаетъ въ силу этой аналогіи для движенія энергіи дифференціальное уравненіе, вполнѣ соотвѣтствующее, такъ называемому уравненію неразрывности въ гидродинамикѣ. Плотность и скорость энергіи замѣняютъ собою плотность и скорость жидкости. Исходя изъ этого уравненія, и примѣняя его къ періодическимъ колебаніямъ въ средѣ постоянной упругости, авторъ при помощи разсужденій, можетъ быть, недостаточно доказательныхъ, опредѣляетъ скорость энергіи въ каждой точкѣ среды въ зависимости отъ ея смѣщенія. Вмѣстѣ съ тѣмъ авторъ высказываетъ убѣжденіе, что по распредѣленію энергіи можно судить о всякомъ статическомъ процессѣ, по теченію энергіи — о ходѣ динамическаго процесса. Онъ намѣчаетъ общую картину, въ которой это могло бы быть выполнено, твердо оставаясь на механистической точкѣ зрѣнія. Онъ старается провести эту точку зрѣнія для электростатическихъ и, такъ называемыхъ (въ настоящее время) квази-стаціонарныхъ электромагнитныхъ явленій.

Со времени Герца вопросъ въ современной теоретической физикѣ, въ сущности, иначе не ставится. Электромагнитное поле опредѣляется плотностью энергіи въ каждой ея точкѣ, и это выраженіе энергіи служитъ точкой отправленія для развитія всего ученія объ электромагнитныхъ явленіяхъ. Пойнтингомъ установленъ векторъ энергіи, опредѣляющій ея движеніе. Вся современная электромагнитная теорія лучистыхъ явленій построена на теоремѣ Пойнтинга. Но Пойнтингъ исходилъ изъ уравненій Максуэлля, а Умовъ — изъ закона живыхъ силъ. Я уже сказалъ, отъ механистики шли его руководящія идеи, и въ механистикѣ была его слабость. Но уравненіями Максуэлля Н. А. не располагалъ: онѣ только создавались въ ту пору, когда Умовъ писалъ о движеніи энергіи.

Вы видите, что руководящая идея Умова была совершенно правильна и нашла въ настоящее время осуществленіе, хотя и не въ тѣхъ формахъ, которыя были намѣчены Н. А.

Теперь это ясно для всякаго; но въ ту пору дѣло обстояло иначе, и Умовъ пережилъ на этой почвѣ немало тяжелыхъ дней. Работа о движеніи энергіи была представлена въ качествѣ докторской диссертаціи въ Московскій Университетъ. Столѣтовъ и Слуцкій были оппонентами. Позвольте мнѣ привести выдержки изъ ихъ отзыва о диссертаціи:

„Авторъ считаетъ необходимымъ ввести въ теоретическую физику общее понятіе о движеніи энергіи. Разсматривая такъ называемые тепловые токи, какъ частный случай движенія энергіи, онъ пытается установить общія начала ученія о движеніи энергіи въ средахъ. Понятіе о тепловомъ токѣ возникло въ то время, когда на теплоту смотрѣли, какъ на вещество; въ настоящее время, когда взглядъ на теплоту, какъ на движеніе, окончательно утвердился, выраженіе „тепловой токъ“ стало условнымъ и предполагаетъ дальнѣйшій механическій анализъ. Это-то условное и не вполнѣ выясненное понятіе г. Умовъ обобщаетъ, примѣняя его ко всякой вообще физической энергіи“.

Далѣе слѣдуютъ указанія на то, что при этихъ условіяхъ векторъ, представляющій скорость энергіи есть лишь математическій символъ и что авторъ уклонился отъ задачъ физики. Ему инкриминируется, что и самое излученіе онъ отождествляетъ съ токомъ энергіи.

Нужно лишь поверхностное знакомство съ современной постановкой теоретической физики, чтобы судить, кто былъ въ этомъ случаѣ правъ: учителя или ученикъ?

Конечно, лишь основная руководящая мысль Н. А. получила подтвержденіе и признаніе приблизительно черезъ четверть вѣка; но вѣдь эта-то основная мысль и подвергалась обсужденію.

Я опасаюсь утомить ваше вниманіе, но я считаю необходимымъ остановиться еще на одной изъ работъ, сдѣланныхъ Н. А. въ Одессѣ. Она называется „Термопотенціалъ соляныхъ растворовъ“.

Какъ извѣстно, электростатическое поле вполнѣ характеризуется однимъ скаляромъ, такъ называемой потенціальной функціей поля. Если эта функція извѣстна, то тѣмъ самымъ извѣстно все, что насъ можетъ въ электростатическомъ полѣ интересовать: распредѣленіе массъ, энергіи, напряженія поля и т. д. Гибсу пришла идея построить функцію, которая въ такой же мѣрѣ характеризовала бы термодинамическое поле. Эту функцію Гибсъ назвалъ термодинамическимъ потенціаломъ. Для совершеннаго газа такого рода функцію дѣйствительно удалось выразить въ его физическихъ координатахъ. Съ точки зрѣнія механистическаго міровоззрѣнія теорія совершеннаго газа представляетъ собою идеалъ физической теоріи вещества, и потому казалось очень заманчивымъ дать дальнѣйшее развитіе этой идеѣ. Дюгемъ былъ очень увлеченъ этой идеей и считалъ возможнымъ на ученіи о термопотенціалѣ построить всю физику, т. е. свести всю физику къ термодинамикѣ. Но термопотенціальная функція у Дюгема фигурируетъ только въ качествѣ общаго символа, никогда не получающаго явное выраженіе. Руководствуясь выраженіемъ для термопотенціала совершенныхъ газовъ, Умовъ пришелъ къ мысли, что аналогичное выраженіе можетъ быть построено и для растворовъ. Опираясь на работу своего лаборанта, г. Герича, о соляныхъ растворахъ, Умовъ дѣйствительно даетъ выраженіе этой функціи. Въ настоящее время эта аналогія сама собою напрашивается; но въ то время относящихся сюда работъ Вантъ-Гоффа и Аррениуса не существовало, и Умовымъ руководило лишь чутье талантливаго ученаго. Правда, дальше ученіе о термопотенціалѣ не пошло, и надеждамъ Дюгема не суждено было сбыться; но Умовъ и это предвидѣлъ и очень опредѣленно въ этомъ смыслѣ высказывался.

Позвольте мнѣ на этомъ закончить обзоръ работъ Н. А. Повторяю, онъ ни малѣйшимъ образомъ не претендуетъ на полноту. Я имѣлъ только въ виду оправдать высказанное раньше утвержденіе, что Умовъ умѣлъ заронить плодоносныя зерна въ неподатливую почву наиболѣе трудныхъ, общихъ вопросовъ физики. Правда, мнѣ приходилось дѣлать не мало оговорокъ, и всякій долженъ будетъ признать очень многое въ этихъ работахъ потерявшимъ значеніе. Но, во первыхъ, весь обликъ теоретической физики быстро мѣняется, и, даже читая классическія произведенія, видишь, какъ много въ нихъ такого, что уже отошло въ область исторіи. Съ другой стороны, въ рѣчи, посвященной памяти дорогого человѣка, надо быть осторожнымъ въ правдивой оцѣнкѣ его твореній, въ особенности, когда рѣчь идетъ о такомъ человѣкѣ, какъ Н. А. Умовъ, который представлялъ собою воплощенную скромность, въ которомъ все дышало правдой, котораго ничто не могло бы такъ огорчить, какъ преувеличеніе его заслугъ.

Возвратимся теперь къ обстановкѣ, въ которой протекала его работа. Нашего прекраснаго физическаго института въ ту пору еще не было. Гдѣ теперь помѣщается ботаническая лабораторія, въ двухъ большихъ комнатахъ помѣщался физическій кабинетъ. Здѣсь помѣщались приборы, здѣсь шли упражненія студентовъ, здѣсь въ укромномъ уголкѣ налаживалась спеціальная работа профессора. Въ двухъ смежныхъ комнатахъ, соединенныхъ узкой дверью, работало два выдающихся человѣка — Ѳ. Н. Шведовъ и Н. А. Умовъ.

Если бы поставить себѣ задачей свести для совмѣстной работы двухъ выдающихся людей большого авторитета какъ научнаго, такъ и моральнаго, но совершенно противоположныхъ по своимъ тенденціямъ, по своему міровоззрѣнію, по складу ума и сердца, то это врядъ ли можно было бы выполнить лучше, чѣмъ это сдѣлалъ слѣпой случай, сведя Шведова и Умова. Довольно суровый, твердый и настойчивый Шведовъ — сердечный, мягкій и податливый Умовъ. Прямолинейный увѣренный и рѣшительный Шведовъ — и скромный, привѣтливый, осторожный Умовъ. Различіе шло и дальше. Шведовъ былъ интуитивистъ по міровоззрѣнію, онъ мыслилъ образами, онъ былъ довольно далекъ отъ математики; Умовъ былъ человѣкъ спекулятивнаго ума и, какъ вы видѣли, тяготѣлъ къ математическому выраженію физическихъ явленій. Склонный вообще къ ироніи Шведовъ нерѣдко относился саркастически къ „избытку теоретическихъ измышленій“, какъ онъ выражался; его девизомъ былъ здравый смыслъ, а Умовъ былъ постояннымъ тонкимъ критикомъ здраваго смысла. Но по началу, смолоду это различіе характеровъ или взглядовъ не такъ разобщало людей. Къ тому же между двумя учеными были двѣ женщины — ихъ жены. Я уже не засталъ здѣсь Шведовой; но, когда я пріѣхалъ, то о ней говорила вся Одесса. О ней говорили, какъ объ ангелѣ во плоти; повидимому, она умѣла смягчать несогласія между этими людьми. Ея преждевременная смерть глубоко повліяла на Шведова: онъ сильно измѣнился — съ этого времени и начинаютъ обостряться его отношенія съ Умовымъ. Шведова не удовлетворяли ни его преподаваніе, ни его взгляды, его работы, его начинанія. Быть можетъ, тутъ было бы не такъ трудно размежеваться, если бы не одно обстоятельство, такъ часто разобщающее профессоровъ, работающихъ по общей каѳедрѣ; завѣдующимъ физическимъ кабинетомъ былъ Шведовъ, и ни одна работа, ни одинъ шагъ Умова не могъ осуществиться безъ согласія Шведова, а рука у Ѳ. Н. была твердая и тяжелая: много горечи приносили Умову эти отношенія.

Аудиторія Умова, я уже говорилъ, была очень невелика, и если среди его слушателей находились студенты, дѣйствительно заинтересованные его предметомъ, то онъ имъ удѣлялъ очень много времени, души и сердца. Живя самъ всецѣло интересами науки, Н. А. растилъ и лелѣялъ въ студентѣ каждое проявленіе интереса къ знанію и при всемъ томъ Н. А. не везло на учениковъ. За мою память здѣсь въ Одессѣ у него было три ученика, на которыхъ онъ возлагалъ серьезныя надежды. Однако, одинъ изъ нихъ на предложеніе Н. А. остаться при университетѣ по его каѳедрѣ не безъ надменности ему отвѣтилъ, что онъ никогда не смотрѣлъ серьезно на занятія физикой. Я думаю, это лицо поступило правильно, оставшись на пути чистой математики; но Н. А. этотъ отвѣтъ, дышавшій юношескимъ задоромъ, не могъ не огорчить. Съ другимъ молодымъ человѣкомъ вопросъ уже былъ, собственно улаженъ и казался совершенно рѣшеннымъ; но Н. А. обомлѣлъ, когда тотъ совершенно неожиданно ему заявилъ, что онъ покидаетъ Одессу. Н. А. лишь послѣ узналъ, что между учителемъ и ученикомъ стала пара голубыхъ глазъ, которая увлекла юношу въ Парижъ. То былъ безумный шагъ юношеской смѣлости; молодой человѣкъ очень скоро остался безъ средствъ и Н. А. прилагалъ здѣсь въ Одессѣ величайшія усилія, чтобы устроить ему стипендію. Но было уже поздно: молодой человѣкъ сгорѣлъ въ одинъ годъ. Этотъ случай произвелъ на Н. А. очень тяжелое впечатлѣніе. Третій изъ его учениковъ въ тяжелые университетскіе дни остался за бортомъ университета. Такія дни бывали для Н. А. днями тяжкихъ испытаній. „Человѣкъ не долженъ вырѣзывать себѣ мозги“ — вотъ требованіе, которое онъ предъявлялъ къ студентамъ, которыхъ увлекала политическая волна.

Я не знаю, насколько правильно я рисую картину, но у меня всегда было впечатлѣніе, что Н. А. тяжело жилось въ Одессѣ, да онъ этого и не скрывалъ. Я, впрочемъ думаю, что людямъ этого типа нигдѣ и никогда не живется легко. Человѣкъ кристалически чистой души; человѣкъ, совершенно не способный къ какому бы то ни было компромиссу; человѣкъ, болѣзненно реагирующій на всякую несправедливость и всегда болѣющій чужимъ горемъ,—гдѣ и когда жилось легко такому человѣку?

Въ 1893 году А. Г. Столѣтовъ закончилъ 35-тилѣтіе службы и освободилъ каѳедру. Факультетъ и Совѣтъ Московскаго Университета избрали его замѣстителемъ Н. А. Пріѣхавъ въ ту пору въ Одессу, я засталъ Н. А. на сундукахъ. Онъ былъ очень веселъ и съ большимъ подъемомъ готовъ былъ начать новую дѣятельность въ университетѣ, въ которомъ онъ учился, въ самомъ людномъ, въ самомъ славномъ русскомъ университетѣ. О жизни и дѣятельности Н. А. въ Москвѣ я знаю мало — больше, по наслышкѣ. Черезъ три года послѣ его перевода въ Москву я имѣлъ случай его навѣстить, и мнѣ не казалось, чтобы онъ былъ доволенъ своимъ положеніемъ. А. Г. Столѣтовъ сохранилъ въ своихъ рукахъ и преподаваніе опытной физики, и завѣдываніе кабинетомъ. Есть, повидимому, возрастъ, когда зависимое положеніе становится невыносимымъ, даже если зависишь отъ человѣка благорасположеннаго. Только послѣ кончины Столѣтова, Н. А. занялъ совершенно независимое положеніе. Съ этого времени онъ читалъ основной курсъ физики и велъ экспериментальныя работы, о которыхъ намъ, вѣроятно, разскажетъ Дмитрій Дмитріевичъ*). Большой радостью было для него ассигнованіе средствъ на устройство новаго физическаго института; Умовъ вложилъ много труда на его сооруженіе.

Казалось, здѣсь, въ воздвигнутомъ имъ дворцѣ науки, долженъ былъ спокойно протечь остатокъ его жизни. Но наступили памятные критическіе дни Московскаго Университета; мечтамъ не суждено было сбыться. Н. А. покинулъ воздвигнутую имъ лабораторію и вмѣстѣ съ Лебедевымъ перебрался въ Мертвый переулокъ. На скромныя средства устроили они небольшую частную лабораторію, и работа какъ будто снова наладилась. Но въ 1912 году П. Н. Лебедевъ неожиданно скончался. Н. А. души не чаялъ въ своемъ младшемъ товарищѣ, и эта смерть произвела на него удручающее впечатлѣніе. Прочтите немногія слова, посвященныя имъ покойному другу въ „Природѣ“: онѣ дышатъ глубокою скорбью. Н. А. писалъ мнѣ, что остатокъ жизни онъ посвящаетъ работѣ въ ученыхъ обществахъ. Онъ былъ уже на склонѣ лѣтъ, но производилъ впечатлѣніе хотя и стараго, но все же бодраго человѣка. Вы видѣли, какою свѣжестью дышали его послѣднія рѣчи. Для всѣхъ его кончина была полной неожиданностью.

Милостивыя государыни и Милостивые государи!

Мы переживаемъ трудные дни; наши внуки и правнуки будутъ о нихъ разсказывать съ ужасомъ и содроганіемъ. Но эти дни пройдутъ;

*) Прив.-доц. Д. Д. Хмыровъ. Его сообщеніе также будетъ напечатано въ „Вѣстникѣ“.

громъ орудій, оглашающій весь міръ, умолкнетъ; земля поглотитъ оросившіе ее потоки крови и материнскихъ слезъ; могильные холмы покроютъ останки героевъ, извѣстныхъ и безвѣстныхъ, и жизнь станетъ входить въ свое нормальное русло.

И тогда нужны будутъ люди, которые сумѣютъ смягчить ожесточенныя сердца, которые сумѣютъ успокоить пѣнящееся море горя и слезъ. Нужны будутъ люди, которые сумѣютъ привлечь наши мысли вновь къ созидательной творческой работѣ. Нужны будутъ учители, которые сумѣютъ внушить молодежи, утрачиваемую вѣру въ науку и культуру, въ ихъ облагораживающее вліяніе.

И всѣ мы вѣримъ, что такіе люди у насъ найдутся. Но вотъ человѣка, который, какъ немногіе другіе, былъ призванъ для выполненія этой высокой и отвѣтственной задачи, человѣка,—въ которомъ все было полно призыва къ миру, къ правдѣ и къ знанію — этого человѣка не стало. Голосъ, который этимъ призывомъ первый-бы прозвучалъ и, главное, былъ бы услышанъ, этотъ голосъ замеръ навсегда. Н. А. Умова, покрыла могильная земля. Да будетъ она ему легка!

Провѣрка одного неравенства.

П. Флорова.

§ 1. Цѣль статьи.

Пусть P_n означаетъ периметръ правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго единица. Цѣль настоящей статьи заключается въ доказательствѣ слѣдующаго предложенія.

За исключеніемъ треугольника, квадрата и пятиугольника периметры всѣхъ прочихъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{P_n^2}{24}.$$

Для доказательства этого предложенія потребуются вспомогательныя формулы, къ выводу которыхъ сейчасъ приступимъ.

§ 2. Зависимость между P_n и P_{2n}.

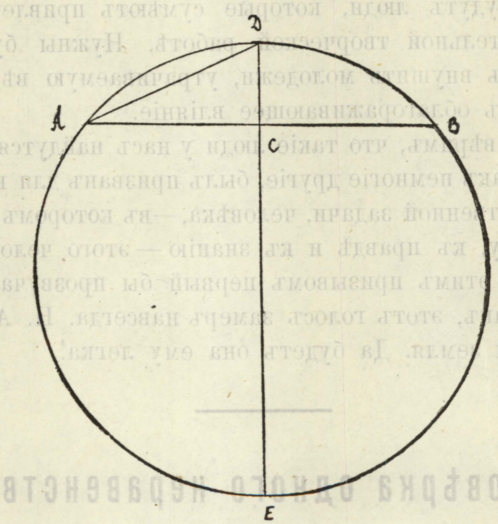
Въ кругъ, діаметръ котораго $DE=2R$, вписанъ правильный n-угольникъ со стороною AB перпендикулярною къ DE и правильный

$2n$-угольникъ со стороною AD. Пусть C будетъ точка пересѣченія DE и AB. Имѣемъ,

$$AD^2 = DE\,.\,DC, \quad DC^2 = AD^2 - AC^2.$$

Исключивъ отсюда DC, найдемъ:

$$AD^4 = 4R^2\,(AD^2 - AC^2).$$



Посредствомъ обозначеній

$$nAB = P_n \quad \text{и} \quad 2nAD = P_{2n}$$

получаемъ:

$$R^2\left(P_{2n}^2 - P_n^2\right) = \frac{P_{2n}^4}{16n^2}.$$

§ 3. Высшій и низшій предѣлы P_n^2.

При $R = 1$ имѣемъ

$$P_{2n}^2 - P_n^2 = \frac{P_{2n}^4}{16n^2}.$$

Извѣстно, что $P_n < 2\pi$, гдѣ π означаетъ отношеніе окружности къ діаметру.

На этомъ основаніи пишемъ:

$$\frac{P_{2n}^4}{16n^2} = P_{2n}^2 - P_n^2 < \frac{(2\pi)^4}{16n^2}.$$

Перемѣнивъ здѣсь n на $2n$ и поставивъ P_{2n}^4 вмѣсто P_{4n}^4 найдемъ:

$$\frac{P_{2n}^4}{16n^2}\cdot\frac{1}{4} < P_{4n}^2 - P_{2n}^2 < \frac{(2\pi)^4}{16n^2}\cdot\frac{1}{4}.$$

Точно такъ же получимъ:

$$\frac{P_{2n}^4}{16n^2}\cdot\frac{1}{4^2} < P_{8n}^2 - P_{4n}^2 < \frac{(2\pi)^4}{16n^2}\cdot\frac{1}{4^2}.$$

Этотъ рядъ неравенствъ продолжаемъ неограниченно и затѣмъ складываемъ. Въ результатѣ найдемъ:

$$\frac{P_{2n}^4}{16n^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right) < 4\pi^2 - P_n^2 < \frac{(2\pi)^4}{16n^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right).$$

Просуммировавъ безконечно убывающую геометрическую прогрессію

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{4}{3},$$

будемъ имѣть:

$$\frac{P_{2n}^4}{12n^2} < 4\pi^2 - P_n^2 < \frac{(2\pi)^4}{12n^2}.$$

Отсюда окончательно

$$4\pi^2 - \frac{(2\pi)^4}{12n^2} < P_n^2 < 4\pi^2 - \frac{P_{2n}^4}{12n^2}.$$

§ 4. Выводъ неравенства $\frac{n+1}{n}P_{2n}^2 < \frac{n}{n-1}P_{2n-2}^2$.

Перемѣнивъ въ предыдущемъ неравенствѣ n на $2n$, получимъ:

$$4\pi^2 - \frac{(2\pi)^4}{48n^2} < P_{2n}^2 < 4\pi^2 - \frac{P_{4n}^4}{48n^2}.$$

Умноживъ это на -1 и измѣнивъ n въ $n-1$ будемъ имѣть:

$$-4\pi^2 + \frac{P_{4n-1}^4}{48(n-1)^2} < -P_{2n-2}^2 < -4\pi^2 + \frac{(2\pi)^4}{48(n-1)^2}.$$

Сложивъ предыдущія неравенства, найдемъ:

$$\frac{P_{4n-4}^4}{48(n-1)^2} - \frac{(2\pi)^4}{48n^2} < P_{2n}^2 - P_{2n-2}^2 < \frac{(2\pi)^4}{48(n-1)^2} - \frac{P_{4n}^4}{48n^2}.$$

Чтобы провѣрить неравенство

$$\frac{n+1}{n}P_{2n}^2 < \frac{n}{n-1}P_{2n-2}^2,$$

которое легко приводится къ виду

$$P_{2n}^2 - P_{2n-2}^2 < \frac{1}{n^2-1} P_{2n-2}^2,$$

достаточно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго неравенства:

$$\frac{(2\pi)^4}{48(n-1)^2} - \frac{P_{4n}^4}{8n^2} < \frac{1}{n^2-1} P_{2n-2}^2.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$(2\pi)^4 < 16 \,.\, 99, \quad P_{12} < P_{4n}, \quad P_4 < P_{2n-2}$$

мы можемъ замѣнить предыдущее неравенство слѣдующимъ болѣе строгимъ:

$$\frac{16 \,.\, 99}{48(n-1)^2} - \frac{P_{12}^4}{48n^2} < \frac{P_4^2}{n^2-1}.$$

Если это неравенство оправдается, то и подавно оправдается заданное для провѣрки.

Сдѣлавъ подстановку по формуламъ:

$$P_4 = 4\sqrt{2} \quad \text{и} \quad P_{12}^4 > 16 \,.\, 93,$$

получимъ:

$$\frac{33}{(n-1)^2} < \frac{31}{n^2} + \frac{32}{n^2-1},$$

откуда

$$n^3\left(30 - \frac{96}{n} - \frac{31}{n^2}\right) + 31 > 0.$$

Это неравенство удовлетворяется при $n = 4$ и à fortiori при $n > 4$, такъ какъ его лѣвая часть возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Отсюда слѣдуетъ, что неравенство

$$\frac{n+1}{n} P_{2n}^2 < \frac{n}{n-1} P_{2n-2}^2$$

и подавно имѣетъ мѣсто при $n \geqq 4$. Помощью формулъ

$$P_4 = 4\sqrt{2}, \quad P_6 = 6,$$

оно легко провѣряется и для случая $n = 3$ и $n = 4$.

§ 5. Высшій и низшій предѣлы разности $P_{n+1}^2 - P_n^2$.

Перемѣнивъ въ неравенствѣ

$$4\pi^2 - \frac{(2\pi)^4}{12n^2} < P_n^2 < 4\pi^2 - \frac{P_{2n}^4}{12n^2}$$

n на $n+1$, получимъ:

$$4\pi^2 - \frac{(2\pi)^4}{12\,(n+1)^2} < P_{n+1}^2 < 4\pi^2 - \frac{P_{2n+2}^4}{12\,(n+1)^2}.$$

Сложивъ почленно это неравенство съ неравенствомъ

$$-4\pi^2 + \frac{P_{2n}^4}{12n^2} < -P_n^2 < -4\pi^2 + \frac{(2\pi)^4}{12n^2},$$

найдемъ:

$$\frac{P_{2n}^4}{12n^2} - \frac{(2\pi)^4}{12\,(n+1)^2} < P_{n+1}^2 - P_n^2 < \frac{(2\pi)^4}{12n^2} - \frac{P_{2n+2}^4}{12\,(n+1)^2}.$$

§ 6. Рѣшеніе неравенства $\frac{24}{(n+1)^2} < P_{n+1}^2 - P_n^2$.

Очевидно, что это неравенство удовлетворяется значеніями n, удовлетворяющими неравенству

$$\frac{24}{(n+1)^2} < \frac{P_{2n}^4}{12n^2} - \frac{(2\pi)^4}{12\,(n+1)^2},$$

которому можно дать видъ:

$$(2\pi)^4 + 24\,.\,12 < \frac{(n+1)^2}{n^2} P_{2n}^4.$$

Покажемъ, что это неравенство удовлетворяется при $n=10$. Помощью формулы

$$P_k = 2k \sin \frac{180^\circ}{k}$$

и логариѳмическихъ таблицъ, полагая $k=20$, находимъ:

$$P_{20} = 6{,}25728 \quad \text{и} \quad \frac{121}{100} P_{20}^4 = 1855{,}04.$$

Послѣ этого провѣряемое неравенство приводится къ виду

$$\pi^4 < 97{,}94,$$

а это справедливо.

Теперь дѣлается яснымъ, что неравенство

$$(2\pi)^4 + 24\,.\,12 < \frac{(n+1)^2}{n^2} P_{2n}^4$$

провѣренное при $n=10$ и подавно будетъ выполняться при n меньшемъ 10, такъ какъ

$$\left(\frac{n+1}{n} P_{2n}^2\right)^2 < \left(\frac{n}{n-1} P_{2n-2}^2\right).$$

Окончательный итогъ этихъ разсужденій таковъ, что неравенство

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{P_{n+1}^2}{24} - \frac{P_n^2}{24}$$

оказывается справедливымъ при

$$n = 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3.$$

Можно было бы убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, что предыдущее неравенство имѣетъ мѣсто и при $n = 11$, но для главной цѣли это не имѣетъ значенія.

§ 7. Доказательство предложенія при $n < 12$.

Составимъ слѣдующую таблицу:

n	$\frac{1}{n^2}$	$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$	$\frac{P_n^2}{24} = \frac{n^2}{6} \sin^2 \frac{180^\circ}{n}$
3	0,11111	1,36111	1,12500
4	0,06250	1,42361	1,33333
5	0,04000	1,46361	1,43956
6	0,02777	1,49136	1,50000

Эта таблица провѣряетъ нашу теорему при

$$n = 3, \quad n = 4, \quad n = 5$$

и показываетъ, что при $n = 6$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{P_n^2}{24}.$$

Распространимъ это неравенство на значенія n, большія 6, по способу заключенія отъ n къ $n+1$.

Сложивъ съ предыдущимъ неравенствомъ неравенство

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{P_{n+1}^2}{24} - \frac{P_n^2}{24},$$

получимъ

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{P_{n+1}^2}{24}.$$

Отсюда видно, что, если наше неравенство оправдается при какомъ нибудь значенiи n (а оно оправдывается при $n=6$), то должно оправдаться и при значенiи n, на единицу большемъ прежняго значенiя. Это заключенiе будетъ оставаться справедливымъ до тѣхъ поръ, пока будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{1}{(n+1)}<\frac{P_{n+1}^2}{24}-\frac{P_n^2}{24},$$

т. е. пока n не превзойдетъ 10. Отсюда слѣдуетъ, что наше предложенiе доказано для всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ съ числомъ сторонъ, не большимъ 11.

§ 8. Рѣшенiе неравенства $P_{n+1}^2-P_n^2<\frac{24}{(n+1)^2}$.

Очевидно, что для рѣшенiя этого неравенства достаточно рѣшить неравенство

$$\frac{(2\pi)^4}{12n^2}-\frac{P_{2n+2}^4}{12\,(n+1)^2}<\frac{24}{(n+1)^2},$$

которому можно дать видъ:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2}<\frac{P_{2n+2}^4+24\,.\,12}{(2\pi)^4}.$$

Мы не будемъ разсматривать значенiй n меньшихъ 12 и, пользуясь формулой:

$$P_{2\,.\,12+2}<P_{2n+2},$$

замѣнимъ предыдущее неравенство болѣе строгимъ:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2}<\frac{P_{26}^4+24\,.\,12}{(2\pi)^4}.$$

Провѣримъ это неравенство при $n=12$. Посредствомъ логариѳмическихъ таблицъ находимъ:

$$P_{26}=6{,}26771,\quad P_{26}^4=1543{,}25$$

и затѣмъ получаемъ:

$$\pi^4<97{,}5075,$$

а это справедливо.

Итакъ, число $n=12$ удовлетворяетъ неравенству:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{P_{26}^4 + 24\,.\,12}{(2\pi)^4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что ему и подавно удовлетворяетъ всякое число превосходящее 12. Это видно изъ формулъ:

$$\frac{(k+13)^2}{(k+12)^2} < \frac{13^2}{12^2} < \frac{P_{26}^2 + 24\,.\,12}{(2\pi)^4}.$$

Окончательный итогъ изложенныхъ разсужденій таковъ, что неравенство

$$\frac{P_{n+1}^2}{24} - \frac{P_n^2}{24} < \frac{1}{(n+1)^2}$$

оправдывается при всѣхъ значеніяхъ n не меньшихъ 12.

§ 9. Доказательство предложенія при $n \geqq 12$.

Пусть n будетъ какое нибудь число, не меньшее 12. Тогда будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{P_{n+1}^2}{24} - \frac{P_n^2}{24} < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Перемѣнимъ въ немъ послѣдовательно n на $n+1$ неограниченное число разъ. Получимъ:

$$\frac{P_{n+2}^2}{24} - \frac{P_{n+1}^2}{24} < \frac{1}{(n+2)^2}, \quad \frac{P_{n+3}^2}{24} - \frac{P_{n+2}^2}{24} < \frac{1}{(n+3)^2}.$$

. . . .

Сложивъ всѣ эти неравенства, найдемъ:

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{P_n^2}{24} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots$$

Отсюда при помощи тождества

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

найдемъ:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{P_n^2}{24},$$

что и надлежало провѣрить.

Задача о четырехъ и о пяти краскахъ.

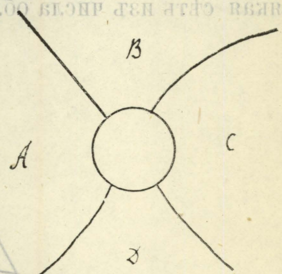
Прив.-доц. С. Бернштейна.

Такъ называемая задача о четырехъ краскахъ, т. е. задача о томъ, чтобы раскрасить карту изъ какого угодно числа странъ посредствомъ четырехъ красокъ, такъ, что двѣ сосѣднія страны всегда имѣютъ разные цвѣта, до настоящаго времени не получила общаго рѣшенія. Къ вопросу о томъ, что сдѣлано въ этомъ направленіи, я вернусь далѣе; но сначала я хочу показать, что рѣшеніе задачи о пяти краскахъ не представляетъ труда и является почти прямымъ слѣдствіемъ изъ извѣстнаго соотношенія Эйлера между числами вершинъ, границъ и областей любой фигуры на плоскости.

Напомню эту формулу Эйлера, которая вытекаетъ изъ замѣчанія, что всякая новая граница, введенная въ фигурѣ увеличиваетъ на 1 число областей, каждая же новая вершина увеличиваетъ на 1 число границъ; обозначая черезъ S число областей, G число границъ, E число вершинъ, имѣемъ:

$$S+E-G=2$$

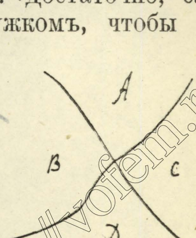
(въ этой формулѣ, какъ и въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ, въ число S областей включена и область, окружающая фигуру*).



Фиг. 1.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ называть нашу карту сѣтью, и обратимъ вниманіе на то, что, не нарушая общности задачи раскрашиванія, можно принять, что въ каждой вершинѣ (или узлѣ) сходятся 3 области, такъ какъ ясно, что, если бы мы сумѣли раскрасить разными цвѣтами области A, B, C, D, E (фиг. 1) то тѣмъ болѣе, мы сумѣли бы это сдѣлать для областей $ABCD$ (фиг. 2). Достаточно, слѣдовательно, обвести кратный узелъ небольшимъ кружкомъ, чтобы замѣнить его тройными узлами.

Такимъ образомъ, для теоретическаго изслѣдованія мы можемъ предварительно введеніемъ новыхъ вершинъ привести нашу сѣть къ такой, которая имѣетъ лишь тройные узлы, какъ на нашемъ первомъ чертежѣ.



Фиг. 2.

Далѣе изъ формулы Эйлера заключаемъ, что въ каждой сѣти должны быть области, имѣющія не болѣе 5 вершинъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

---

*) При примѣненіи этой формулы нужно помнить, что за границу принимается линія, раздѣляющая двѣ области. Поэтому кружокъ на фиг. 1 составленъ изъ 4 границъ. Здѣсь $S=6$, $E=4$, $G=8$. *Ред.*

черезъ S_3 число треугольниковъ, S_4 — число четырехугольниковъ и т. д., находимъ немедленно:

$$3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \cdots = 2G = 3E$$

и

$$S_3 + S_4 + S_5 + \cdots = S.$$

Поэтому изъ формулы Эйлера $6(S + E - G) = 12$, получаемъ:

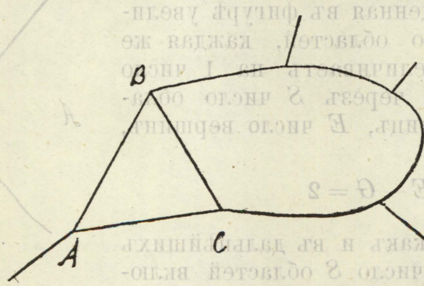
$$6\,[S_3 + S_4 + S_5 + \cdots] - [3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \cdots] = 12,$$

т. е.

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 = 12 + S_7 + 2S_8 + \cdots,$$

откуда мы и выводимъ, что по крайней мѣрѣ одна изъ трехъ величинъ S_3, S_4, S_5 должна быть отлична отъ нуля.

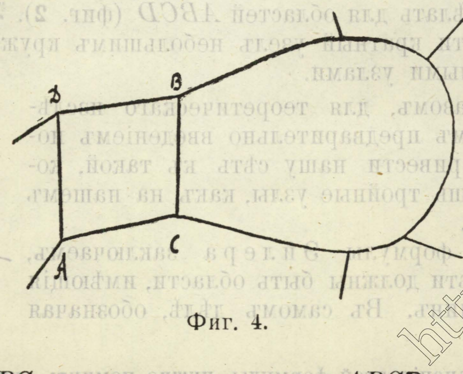
Допустимъ теперь, что для нѣкотораго числа n извѣстно, что всякая сѣть изъ числа областей $S < n$ можетъ быть раскрашена 5 крас-



Фиг. 3.

ками; я говорю, что въ такомъ случаѣ задача можетъ быть также рѣшена для всякой сѣти, у которой $S = n$.

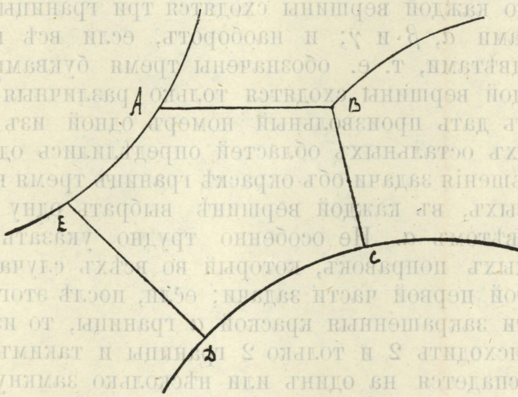
Въ самомъ дѣлѣ, если въ сѣти, имѣющей $S = n$ областей, есть



Фиг. 4.

треугольникъ ABC или четырехугольникъ $ABCD$, то, отбрасывая границу BC, мы получаемъ сѣть изъ $n-1$ области, которую мы умѣемъ закрасить. Поэтому, сохраняя всѣ краски безъ измѣненія, мы должны будемъ перекрасить лишь нашъ треугольникъ ABC или четырехугольникъ $ABCD$ такъ, чтобы они не сливались съ прилегающими къ нимъ областями; но это всегда возможно, такъ какъ ихъ ограничиваютъ лишь три или четыре области, и, слѣдовательно, въ нашемъ распоряженіи остается, по крайней мѣрѣ, еще одна краска.

Въ случаѣ, когда въ сѣти нѣтъ треугольниковъ и четырехугольниковъ, въ ней, какъ мы видѣли, должны быть пятиугольники. Пусть $ABCDE$ будетъ такой пятиугольникъ. Если мы уничтожимъ границы AE и DC, то нашъ пятиугольникъ сольется съ двумя прилегающими къ нему областями и мы получимъ сѣть изъ $n-2$ областей, которую,



Фиг. 5.

по предположенію мы умѣемъ закрасить. Намъ нужно теперь возстановить обѣ границы AE и CD, но легко видѣть, что такъ какъ области, примыкающія къ AE и CD, закрашены однимъ и тѣмъ же цвѣтомъ, пять областей, прилегающихъ къ нашему пятиугольнику, окрашены не болѣе, чѣмъ четырьмя различными красками; поэтому въ нашемъ распоряженіи имѣется еще краска и для пятиугольника.

Но для $n=5$, рѣшеніе задачи очевидно: слѣдовательно, она можетъ быть рѣшена и для $n=6$, $n=7$ и т. д., т. е. для какого угодно значенія n. Такимъ образомъ, возможность закрасить любую карту 5 красками доказана.

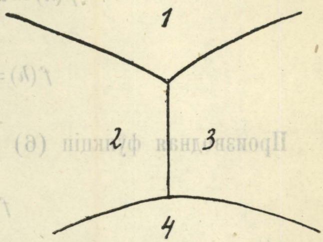
Простота этого доказательства вытекала изъ того, что, всякую сѣть изъ S областей можно уничтоженіемъ соотвѣтствующей одной или двухъ границъ привести къ такой сѣти изъ $S-1$ или $S-2$ областей, которую мы можемъ предварительно окрасить, послѣ чего остается лишь перекрасить въ новый цвѣтъ вновь вводимую область.

Трудность задачи о четырехъ краскахъ заключается въ томъ, что здѣсь подобное приведеніе вообще невозможно (за исключеніемъ случая, когда въ сѣти есть треугольники или четырехугольники): при введеніи одной новой области необходима перекраска значительнаго числа областей, и анализъ всѣхъ случаевъ, которые при этомъ могутъ представиться, требующій большого вниманія, никѣмъ до сихъ поръ не былъ доведенъ до удовлетворительнаго конца.

Англійскій физикъ Тэтъ (Tait) показалъ разнозначность задачи о четырехъ краскахъ съ другой задачей: закрасить всѣ границы тремя красками, такъ чтобы 3 границы, сходящіяся около одной вершины имѣли разные цвѣта. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая всѣ краски номерами 1, 2, 3, 4, замѣчаемъ, что около одной вершины встрѣчаются только 3 изъ 4 номеровъ; поэтому, если мы обозначимъ одною и тою же буквой α границу между номерами (1, 2) и между номерами (3, 4), буквою β — границу между номерами (1, 3) и между (2, 4), буквою γ — границу между номерами (1, 4) и между (2, 3), то окажется, что въ картѣ, въ которой всѣ области закрашены четырьмя красками, около каждой вершины сходятся три границы съ тремя различными буквами α, β и γ; и наоборотъ, если всѣ границы закрашены тремя цвѣтами, т. е. обозначены тремя буквами α, β, γ такъ, что около каждой вершины сходятся только различныя буквы, то достаточно будетъ дать произвольный номеръ одной изъ областей, чтобы номера всѣхъ остальныхъ областей опредѣлились однозначно.

Для разрѣшенія задачи объ окраскѣ границъ тремя красками α, β, γ, нужно, во первыхъ, въ каждой вершинѣ выбрать одну опредѣленную границу съ цвѣтомъ α. Не особенно трудно указать такой пріемъ послѣдовательныхъ поправокъ, который во всѣхъ случаяхъ приводитъ къ рѣшенію этой первой части задачи; если, послѣ этого мы мысленно уничтожимъ эти закрашенныя краской α границы, то изъ каждой вершины будутъ исходить 2 и только 2 границы и такимъ образомъ вся наша сѣть распадется на одинъ или нѣсколько замкнутыхъ цикловъ, не имѣющихъ между собой общихъ точекъ. Для полнаго разрѣшенія задачи, очевидно, достаточно и необходимо, чтобы въ каждомъ изъ полученныхъ цикловъ оказалось по четному числу вершинъ, ибо тогда возможно будетъ послѣдовательныя границы каждаго цикла попеременно обозначать буквами β и γ. Такимъ образомъ, слѣдуетъ считать установленнымъ, что всякую сѣть возможно различными способами представить въ видѣ нѣсколькихъ отдѣльныхъ цикловъ, соединенныхъ поперечными границами (физически это утвержденіе сводится къ тому, что всякую веревочную сѣть съ тройными узлами возможно нѣсколькими разрѣзами между двумя узлами превратить въ одинъ или нѣсколько несвязанныхъ между собой цикловъ); остается показать, что всегда возможно такъ выбрать эти циклы, чтобы число вершинъ на каждомъ было четное. Общее доказательство очевидное, напримѣръ, если каждая область имѣетъ четное число вершинъ, этого предложенія, къ которому приводится, на основаніи выше сказаннаго, задача о четырехъ краскахъ, представляется мнѣ, однако, довольно затруднительнымъ.

Слѣдуетъ отмѣтить другой путь къ рѣшенію задачи о четырехъ краскахъ, который мы находимъ въ работѣ П. Вѣрнике (P. Wernicke) („Mathem. Ann.“, 1904 г.) содержащей остроумныя мысли, но тѣмъ не менѣе не дающей строгаго общаго рѣшенія задачи. П. Вѣрнике показалъ, что задача сводится къ тому, чтобы каждой вершинѣ сѣти дать знакъ + или — такъ, чтобы въ каждой области разность между числомъ положительныхъ и отрицательныхъ вершинъ дѣлилась на 3. Нетрудно это выполнить, если каждая область имѣетъ четное число вершинъ, или же число вершинъ кратное 3. Кромѣ того, П. Вѣрнике замѣчаетъ, что въ первомъ случаѣ, т. е. когда всѣ области имѣютъ четное число вершинъ, онѣ могутъ быть раскрашены даже только тремя красками. Отсюда, между прочимъ, непосредственно вытекаетъ, что задача о 4 краскахъ также всегда разрѣшима, если всѣ области съ нечетнымъ числомъ сторонъ группируются по двѣ или по четыре, какъ указано на фиг. 6 такъ, что области 1, 4, имѣетъ по нечетному числу вершинъ, области же 2 и 3 должны имѣть одновременно либо четное, либо нечетное число вершинъ.



Фиг. 6.

Таковы, насколько мнѣ извѣстно, наиболѣе существенные изъ точно установленныхъ результатовъ, относящихся къ задачѣ о четырехъ краскахъ.

ПОЛЕМИКА.

По поводу статьи П. Флорова „Парадоксальный случай при отысканіи минимума", помѣщенной въ № 609 „Вѣстника".

Г. Михневича.

Въ упомянутой статьѣ г. Флоровъ предлагаетъ распутать парадоксъ при отысканіи максимума въ слѣдующей задачѣ:

Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же периметръ $2p$, найти такой прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма катетовъ и высоты есть максимумъ.

Напомню въ нѣсколькихъ словахъ ходъ разсужденій г. Флорова.

Если x, y и h суть соотвѣтственно катеты и высота треугольника, то мы имѣемъ слѣдующихъ два соотношенія:

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2p, \tag{1}$$

$$xy=h\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Освобождая уравненіе (1) отъ радикала и исключая его изъ уравненій (1) и (2), находимъ:

$$2p(x+y)-xy=2p^2. \tag{3}$$

$$h(x+y)+xy=2ph. \tag{4}$$

За независимую перемѣнную возьмемъ h. Изъ уравненій (3) и (4) находимъ:

$$x+y=\frac{2p(h+p)}{h+2p}. \tag{5}$$

Если сумму катетовъ и высоты обозначимъ черезъ $f(h)$, то

$$f(h)=x+y+h=h+\frac{2p(h+p)}{h+2p},$$

$$f(h)=\frac{h^2+4ph+2p^2}{h+2p}. \tag{6}$$

Производная функціи (6) есть положительная величина

$$f'(h)=\frac{h^2+4ph+6p^2}{(h+2p)^2}>0 \tag{7}$$

и ни для какого положительнаго h (а высота h есть существенно положительная величина) въ нуль не обращается.

Между тѣмъ, говоритъ г. Флоровъ, существованіе максимума слѣдуетъ изъ того, что $f(h)$ при измѣненіи x (или y) отъ нуля до $x=p$ (или $y=p$), все время остается больше p, а для концовъ области измѣненія $x=0$, $x=p$ получаетъ равныя значенія $f(h)=p$.

Противорѣчіе возникаетъ слѣдующимъ образомъ. Функція $f(h)$ не для всѣхъ значеній h выражаетъ сумму катетовъ и высоты треугольника. Она опредѣлена и непрерывна для значеній h въ предѣлахъ $(0, \infty)$, если ограничиться положительными значеніями h. Между тѣмъ изъ самихъ условій задачи — всѣ треугольники равнаго периметра — очевидно, что значенія h не могутъ стать больше нѣкоторой постоянной величины.

Дѣйствительно, изъ уравненій (3), (4) и (5) находимъ:

$$x+y=2p\cdot\frac{h+p}{h+2p},\quad xy=\frac{2p^2\cdot h}{h+2p}, \tag{8}$$

т. е. x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$\xi^2-2p\cdot\frac{h+p}{h+2p}\cdot\xi+\frac{2p^2h}{h+2p}=0.$$

Для того, чтобы оно имѣло вещественные корни, необходимо, чтобы выполнялось условіе:

$$\left[-2p\frac{(h+p)}{2p+h}\right]^2-4\cdot\frac{2p^2h}{h+2p}\geqslant 0,$$

откуда

$$h^2+2ph\leqslant p^2,$$

или

$$(h+p)^2<2p^2,$$

т. е.

$$h - p\sqrt{2} + p < 0.$$

Такимъ образомъ, $f(h)$ выражаетъ сумму катетовъ и высоты только для h въ $\langle 0,\ p(\sqrt{2}-1)\rangle$.

Разсмотримъ теперь ближе функцію $f(h)$. Во всей области $\langle 0, \infty\rangle$ она возрастаетъ.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$f(h) = h + 2p - \frac{2p^2}{h+2p}.$$

Съ возрастаніемъ h отъ нуля уменьшаемое увеличивается, вычитаемое уменьшается. Возрастающая функція, заданная въ замкнутомъ промежуткѣ, достигаетъ наибольшаго значенія на одномъ изъ концовъ. Наибольшее значеніе, которое можетъ принять h въ условіяхъ задачи есть $h = (\sqrt{2}-1)\,.\,p$, наименьшее $h = 0$.

Функція $f(h)$ для значеніи h отъ 0 до ∞ не имѣетъ наибольшого значенія (безгранично возрастаетъ, когда h стремится къ ∞).

Но для замкнутой части всей области

$$\langle 0,\ p(\sqrt{2}-1)\rangle$$

она имѣетъ максимумъ на одномъ изъ концовъ, въ данномъ случаѣ на второмъ.

Такимъ образомъ парадоксъ раскрытъ.

Задачу можно рѣшить иначе, и такое рѣшеніе мнѣ кажется удобнѣе.

Изъ рѣшенія г. Флорова не видно прямо, что треугольникъ, для котораго сумма катетовъ и высоты максимумъ, есть равнобедренный. Правда, здѣсь мы не имѣемъ уже постоянно возрастающей функціи и приходится прибѣгать къ отысканію extrema.

Пусть OAB — одинъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Введемъ уголъ $\varphi = AOB$, тогда

$$x = \xi\cos\varphi, \quad (8) \qquad y = \xi\sin\varphi, \qquad (9)$$

$$h = x\sin\varphi \quad \text{или} \quad (\text{изъ } 8) \quad h = \xi\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (10)$$

Условіе, что треугольники имѣютъ одинъ и тотъ же периметръ $2p$ даетъ:

$$\xi + \xi\cos\varphi + \xi\sin\varphi = 2p. \qquad (11)$$

Сумма высоты и катетовъ S есть

$$S = S(\varphi) = 2p\,\frac{\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\,.\,\cos\varphi}{1 + \sin\varphi + \cos\varphi}, \qquad (12)$$

если исключить ξ изъ уравненія (10).

Уголъ φ удобно взять за независимую перемѣнную, такъ какъ черезъ него выражаются всѣ величины. При измѣненіи φ отъ 0 до $\pi/2$ получимъ всѣ возможные треугольники. Будемъ искать extrema (12):

$$S'(\varphi) = 2p\,\frac{(2 + \cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\,.\,\sin\varphi)}{(1 + \sin\varphi + \cos\varphi)^2}\,(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

для φ въ промежуткѣ $(0\ldots\pi/2)$ только второй множитель можетъ равняться нулю:

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 0.$$

для $\varphi < \pi/2$ единственный корень есть:

$$\varphi = \pi/4 = 45^\circ.$$

Это максимумъ, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Q. d. f.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новое въ области радіохиміи. Взгляды К. Фаянса*) на періодическую систему получили въ іюнѣ 1914 года интересное экспериментальное подтвержденіе. Одинъ изъ учениковъ К. Фаянса, Лембертъ (M. Lembert) произвелъ въ лабораторіи знаменитаго Рихардса (Th. W. Richards) опредѣленіе атомнаго вѣса свинца, выдѣленнаго изъ урановыхъ минераловъ, не содержащихъ торія, и нашелъ его въ одномъ случаѣ (для свинца изъ Іохимстальской смоляной обманки) равнымъ $206{,}60 \pm 0{,}03$ а въ другомъ (карнотитъ изъ Колорадо) $206{,}60 \pm 0{,}01$, въ то время какъ атомный вѣсъ обыкновеннаго свинца равенъ 207,15. Чѣмъ обусловлена разность между числомъ 206,6 и теоретическимъ атомнымъ вѣсомъ для урановаго свинца — 206, трудно рѣшить; во всякомъ случаѣ, сомнительно, чтобы она зависѣла отъ небольшой примѣси актиніеваго свинца; вѣроятнѣе, что препаратъ состоялъ частью изъ обыкновеннаго свинца. Болтвуду (Boltwood) удалось выдѣлить изъ уранинита незначительное количество свинца, атомный вѣсъ котораго еще ниже $(206{,}35 \pm 0{,}1)$. Экспериментальнаго доказательства существованія торо-свинца Рихардсу и Лемберту дать до сихъ поръ не удалось; свинецъ, выдѣленный изъ торіанита, имѣлъ атомный вѣсъ $206{,}83 \pm 0{,}02$ и состоялъ, повидимому, главнымъ образомъ, изъ урановаго свинца.

Конечно, на основаніи достигнутыхъ результатовъ нельзя считать вопросъ о свинцѣ вполнѣ выясненнымъ; во всякомъ случаѣ, то обстоятельство, что можно экспериментально доказать комплексную природу свинца, достаточно интересно само по себѣ. Что касается точности опредѣленій, то имя Рихардса, одного изъ крупнѣйшихъ авторитетовъ въ этой области, является вполнѣ достаточной гарантіей, кромѣ того Гёнигшмидтъ (O. Hönigschmidt) въ Прагѣ и

*) См. „Вѣстникъ", №№ 626 и 627.

М. Кюри (Maurice Curie) въ Парижѣ пришли совершенно независимо къ тѣмъ же результатамъ.

Фаянсъ считаетъ, что урановый свинецъ не является вполнѣ устойчивымъ элементомъ, а испускаетъ лучи β, превращаясь въ элементъ плеяды висмута. Дѣйствительно, изъ смоляной обманки удалось выдѣлить активный висмутъ, который не содержалъ полонія. Этотъ препаратъ испускалъ α-лучи. Такимъ образомъ окончательнымъ продуктомъ распада долженъ быть элементъ плеяды таллія, присутствіе котораго въ смоляной обманкѣ можно доказать спектроскопически.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Н. Каменьщиковъ. *Таблицы логариѳмовъ съ четырьмя десятичными знаками.* Съ приложеніемъ вспомогательныхъ таблицъ по физикѣ, химіи и космографіи и т. п. Изд. «Просвѣщеніе». Петроградъ, 1914. Ц. 90 к.

Около половины предлагаемой книги занимаютъ таблицы четырехзначныхъ логариѳмовъ натуральныхъ чиселъ и тригонометрическихъ величинъ. Точность четырехзначныхъ таблицъ вполнѣ достаточна для большинства практическихъ приложеній. Пользованіе таблицами весьма просто, такъ какъ логариѳмы (мантисы) даны непосредственно для всѣхъ четырехзначныхъ чиселъ и для всѣхъ угловъ, выраженныхъ въ градусахъ и цѣлыхъ минутахъ; благодаря этому интерполированіе по большей части является излишнимъ. Вопросъ объ интерполированіи разсмотрѣнъ авторомъ въ особой главѣ, посвященной приближеннымъ вычисленіямъ при помощи логариѳмовъ.

Среди другихъ таблицъ, имѣющихся въ книгѣ, отмѣтимъ еще четырехзначную таблицу натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Не останавливаясь на цѣломъ рядѣ другихъ небольшихъ таблицъ (всего въ книгѣ собрано 20 таблицъ), обратимъ вниманіе на таблицы XV и XVI, содержащія единицы мѣръ и важнѣйшія физическія постоянныя, XVII — химическія постоянныя и XVIII — астрономическія. Отдѣлъ мѣръ было бы желательно еще нѣсколько дополнить (опущены, напримѣръ, единицы свѣта); что касается физическихъ, химическихъ, метеорологическихъ и, въ особенности, астрономическихъ данныхъ, то они содержатъ очень много интереснаго матеріала, который обыкновенно надо искать въ разныхъ мѣстахъ и который, несомнѣнно, долженъ содѣйствовать развитію любознательности учениковъ: здѣсь они найдутъ, что земля летитъ вокругъ солнца со скоростью въ 50 разъ бо́льшею, чѣмъ пушечный снарядъ, что разстояніе до ближайшей звѣзды, приблизительно, въ 270 000 разъ больше, чѣмъ разстояніе до солнца и т. д., и это даетъ имъ существенный поводъ для самостоятельнаго составленія задачъ и вычисленій. Наконецъ, въ концѣ книги разъясняется способъ пользованія логариѳмической линейкой, которая изображена на отдѣльномъ листѣ, такъ что ее можно вырѣзать и самому сдѣлать себѣ логариѳмическую линейку.

Изъ вышесказаннаго видно, что книга Н. Каменьщикова является не только логариѳмической таблицею, но и довольно разнообразнымъ справочникомъ и можетъ оказать услуги не только ученикамъ и учащимъ, но и всѣмъ, вообще, практикамъ-вычислителямъ.

С. Бернштейнъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 247 (6 сер.). Пусть a — четное число, оканчивающееся значащей цифрой, а n — любое цѣлое положительное число. Доказать, что цифра десятковъ числа a^{20n} равна 7, а цифра единицъ равна 6, и найти три послѣднія цифры числа a^{100n}.

М. Огородовъ (Самара).

№ 248 (6 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$n(n-1^2)+2n(3n-2^2)+3n(5n-3^2)+\cdots+kn[(2k-1)n-k^2]+\cdots.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 249 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{y^3-4y^2-12y+16}{32\sqrt{y-1}}+\frac{y-1}{y}=0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 250 (6 сер.). Въ окружность вписанъ выпуклый четырехугольникъ $ABCD$. Черезъ точку M пересѣченія его діагоналей проведена хорда, дѣлящаяся въ точкѣ M пополамъ и пересѣкающая двѣ противоположныя стороны въ точкахъ E и F. Доказать равенство отрѣзковъ ME и MF.

В. Михайловъ (Харьковъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 169 (6 сер.) *На данной территоріи находятся* n *государствъ. Опредѣлить число всѣхъ вообще возможныхъ войнъ между ними, отличая эти войны по составу участвующихъ противниковъ и принимая во вниманіе, какъ войны каждыхъ двухъ государствъ, такъ и всѣ возможныя коалиціи.*

Обозначимъ число войнъ между n государствами черезъ $f(n)$. Ясно, что (1) $f(2)=1$. Покажемъ теперь, какъ, зная $f(2)$, опредѣлить послѣдовательно

$f(3)$, $f(4)$, и т. д. Съ этой цѣлью допустимъ, что число $f(n)$ при нѣкоторомъ опредѣленномъ значенiи n уже извѣстно, и постараемся опредѣлить число всѣхъ войнъ между $n+1$ государствами, т. е. $f(n+1)$. Для $(n+1)$-го государства при наличности войны между $n+1$ государствами представятся три возможности: 1) оставаться нейтральнымъ при наличности одной изъ войнъ между n государствами, 2) вмѣшаться въ пользу одной изъ сторонъ при наличности какой-либо изъ войнъ между остальными государствами и 3) воевать одному противъ каждаго изъ остальныхъ государствъ или же противъ нѣкоторой коалицiи, составленной изъ нихъ. Въ первомъ случаѣ возможны попрежнему $f(n)$-войнъ между остальными государствами. Во второмъ случаѣ возникаютъ новыя войны, каждую изъ которыхъ можно разсматривать, какъ результатъ вмѣшательства новаго, $(n+1)$-го государства въ одну изъ войнъ первой группы; такъ какъ въ каждой изъ такихъ войнъ $(n+1)$-ое государство можетъ выступить въ пользу одной изъ двухъ воюющихъ сторонъ, то число войнъ второй группы равно $2f(n)$. Наконецъ, число войнъ третьей группы равно числу всѣхъ сочетанiй изъ n остальныхъ государствъ по одному, по два, по три, ... и т. д. по n государствъ, которыя могутъ воевать съ $(n+1)$-ымъ государствомъ; изъ теорiи соединенiй*) извѣстно, что число всѣхъ такихъ сочетанiй равно 2^n-1, и такимъ образомъ число войнъ третьей группы равно 2^n-1. Итакъ

$$f(n+1)=f(n)+2f(n)+2^n-1,$$

или

$$(2)\quad f(n+1)=3f(n)+2^n-1.$$

Формулы (1) и (2) даютъ возможность опредѣлить послѣдовательно $f(3)$, $f(4)$ и т. д. Для нахожденiя же $f(n)$ въ общемъ видѣ, при любомъ n покажемъ, что уравненiю (2) можно удовлетворить, полагая

$$(3)\quad f(n)=a\,.\,3^n+b\,.\,2^n+c,$$

гдѣ a, b и c суть нѣкоторыя постоянныя числа. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что $f(n)$ выражается формулой (3), мы можемъ записать уравненiе (2) въ видѣ

$$a\,.\,3^{n+1}+b\,.\,2^{n+1}+c-3\,(a\,.\,3^n+b\,.\,2^n+c)-2^n+1=0,$$

или

$$a\,.\,3^{n+1}+2ba\,.\,2^n+c-a\,.\,3^{n+1}-3b\,.\,2^n-3c-2^n+1=0,$$

т. е.

$$(4)\quad (b+1)\,2^n+(2c-1)=0.$$

Желая удовлетворить уравненiю (2) при любомъ n, мы положимъ [см. (4)] $b+1=0$, $2c-1=0$, откуда $b=-1$, $c={}^1/_2$, а потому [см. (3)]

$$(5)\quad f(n)=a3^n-2^n+{}^1/_2,$$

гдѣ a остается пока произвольнымъ. Такъ какъ $f(2)=1$, то, желая выразить $f(n)$ формулой (5), мы должны положить

$$(6)\quad a\,.\,3^2-2^2+{}^1/_2=1.$$

---

*) Изъ теорiи бинома Ньютона извѣстно, что

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n,\quad \text{откуда}\quad C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

Опредѣливъ a изъ уравненія (6), получимъ, что $a = {}^1/_2$, а потому [см. (5)]

$$(7)\quad f(n) = \frac{3^n + 1}{2} - 2^n.$$

Формула (7) дѣйствительно даетъ общее выраженіе для $f(n)$, такъ какъ $f(2) = 1$ и такъ какъ правая часть этой формулы удовлетворяетъ реккурентной формулѣ (2).

Замѣчаніе. Любопытно прослѣдить при помощи общей формулы (7), насколько быстро возрастаютъ числа $f(n)$ даже для небольшихъ значеній n. Такъ $f(4) = 25$, $f(5) = 90$, $f(10) = 28501$. Конечно, изъ этого большого количества войнъ многія могутъ оказаться практически невозможными, если нѣкоторыя группы враждебныхъ государствъ не имѣютъ общихъ границъ, развѣ только допустить, что нейтральныя государства пропускаютъ свободно войска враждующихъ сторонъ; наконецъ, каждая изъ войнъ окажется возможной по крайней мѣрѣ въ видѣ морской войны, если допустить, что всѣ государства имѣютъ морскія границы.

В. Ревзинъ (Сумы); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ).

№ 207 (6 сер.). *Доказать неравенство*

$$\left(\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \geqq n^2,$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *суть числа одного знака. Въ какомъ случаѣ возможенъ въ предложенной для доказательства формулѣ знакъ равенства?*

Полагая $\frac{a_{n-1}}{a_k} = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, лѣвую часть разсматриваемаго неравенства можно записать въ видѣ

$$(1)\quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right),$$

гдѣ каждое изъ чиселъ x_k положительно, такъ какъ числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ по условію одного знака. Раскрывая скобки въ произведеніи (1), получимъ n членовъ вида $x_k \cdot \frac{1}{x_k}$, каждый изъ которыхъ равенъ единицѣ и сумма которыхъ равна n; кромѣ этихъ членовъ, мы получимъ еще сумму всевозможныхъ произведеній вида $x_k \cdot \frac{1}{x_i}$ при $k \neq i$, которыя можно сгруппировать попарно въ суммы вида $\frac{x_k}{x_i} + \frac{x_i}{x_k}$. Слѣдовательно, выраженіе (1) равно

$$(2)\quad n + \sum_{k,i}\left(\frac{x_k}{x_i} + \frac{x_i}{x_k}\right),$$

при чемъ суммированіе во второмъ членѣ надо распространить на всевозможныя пары неравныхъ указателей k и i; число этихъ паръ равно числу сочетаній изъ n по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$. Разсмотримъ одну изъ суммъ $\frac{x_k}{x_i} + \frac{x_i}{x_k}$;

Полагая (3) $\frac{x_k}{x_i}=z$, можно записать эту сумму въ видѣ $z+\frac{1}{z}$, гдѣ $z>0$, такъ какъ x_k и x_i положительны. Поэтому

$$\frac{x_k}{x_i}+\frac{x_i}{x_k}=z+\frac{1}{z}=2+\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geqq 2,$$

при чемъ знакъ равенства въ послѣдней формулѣ возможенъ лишь при условіи $\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}=0$, т. е. при $z=1$, или же [см. (3)] при $x_k=x_i$. Итакъ,

$$(4) \quad \frac{x_k}{x_i}+\frac{x_i}{x_k} \geqq 2,$$

и знакъ равенства возможенъ лишь при $x_k=x_i$. Суммируя неравенства (4) при всевозможныхъ парныхъ комбинаціяхъ указателей k и i и принимая во вниманіе, что число этихъ комбинацій равно $\frac{n.(n-1)}{2}$, находимъ, что

$$\sum_{k,i}\left(\frac{x_k}{x_i}+\frac{x_i}{x_k}\right) \geqq \frac{2n(n-1)}{2}, \quad \text{т. е.} \quad (5) \quad \sum_{k,i}\left(\frac{x_k}{x_i}+\frac{x_i}{x_k}\right) \geqq n^2-n.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ неравенства (5) по n, получимъ, что [см. (1), (2)]

$$(6) \quad (x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

Формула (6) справедлива для любыхъ положительныхъ значеній чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и знакъ равенства въ ней возможенъ лишь тогда, если каждая изъ формулы (4) обращается въ равенство, т. е. если всѣ числа x_k равны между собою. Поэтому и предложенная для доказательства формула справедлива при любыхъ значеніяхъ чиселъ a_k одного знака. Она обращается въ равенство лишь при равенствѣ всѣхъ чиселъ $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ или же обратныхъ имъ чиселъ $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, т. е. при соблюденіи равенствъ

$$(7) \quad \frac{a_1}{a_0}=\frac{a_0}{a_1}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

гдѣ q – нѣкоторое положительное число. Равенства (7) равносильны требованію, чтобы числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ образовали геометрическую прогрессію съ положительнымъ знаменателемъ и съ первымъ членомъ, отличнымъ отъ нуля.

Замѣчаніе. Формула (6), записанная въ видѣ

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}},$$

выражаетъ извѣстное предложеніе: среднее ариѳметическое нѣсколькихъ положительныхъ чиселъ не менѣе ихъ средняго гармоническаго.

А. Сердобинскій (Петроградъ); *А. Кисловъ* (Москва); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *Н. К-новъ* (Петроградъ).

№ 209 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2x\sqrt[3]{x} - 4x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6.$$

Полагая (1) $\sqrt[3]{x} = y$, приводимъ уравненіе къ виду

$$(2)\quad 2y^4 - 4y^3 + y^2 + y - 6 = 0.$$

Разлагая лѣвую часть на множителей, получимъ

$$(y-2)(y+1)(2y^2-2y+3) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (2) распадается на три уравненія

$$y - 2 = 0,\quad y + 1 = 0,\quad 2y^2 - 2y + 3 = 0,$$

рѣшая каждое изъ которыхъ, находимъ, что корни уравненія (2) суть

$$y_1 = 2,\quad y_2 = -1,\quad y_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2},$$

а потому корни первоначальнаго уравненія суть [см. (1)]

$$x_1 = 8,\quad x_2 = -1,\quad x_{3,4} = \left(\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *А. Стафійчукъ* (с. Пужайково); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *В. Кованько* (Вышній Волочокъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *N. N.* (Тифлисъ).

ПОПРАВКИ.

1) Въ задачѣ **№ 200** (6 сер.), напечатанной въ № 614—615 „Вѣстника", въ первой части уравненія вмѣсто $\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$ слѣдуетъ читать

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}.$$

2) Въ задачѣ **№ 208** (6 сер.), напечатанной въ № 617 „Вѣстника", вмѣсто $\Delta = \frac{3}{4}\sqrt{p_m(p_m-m_a)(p_m-m_b)(p_m-m_c)}$ слѣдуетъ читать

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{p_m(p_m-m_a)(p_m-m_b)(p_m-m_c)}.$$

3) Въ задачѣ **№ 211** (6 сер.), напечатанной въ № 618 „Вѣстника", вмѣсто словъ «... въ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ AB...» слѣдуетъ читать «... въ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ MN...».

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. **Издатель В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
пщется