Обложка
ищется

Обложка
ищется

L Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 596.

О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ.

Прив.-доц. Ю. Рабиновича.

Настоящая замѣтка состоитъ изъ двухъ частей. Во второй части я сообщаю довольно простое, повидимому, доказательство теоремы Лагранжа (Lagrange), гласящей, что, если обращать положительный вещественный корень цѣлочисленнаго квадратнаго уравненія (т. е. квадратнаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами) въ непрерывную дробь, то получается періодическая непрерывная дробь; этому доказательству я предпосылаю (въ первой части замѣтки) нѣкоторыя теоремы и опредѣленія, которыми приходится пользоваться во второй части и которыя я не могъ предполагать извѣстными.

I.

Теорема 1. Если ирраціональное число удовлетворяетъ двумъ цѣлочисленнымъ квадратнымъ уравненіямъ, то эти уравненія равносильны.

Доказательство. Пусть ω есть нѣкоторое ирраціональное число и пусть

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0, \quad a'\omega^2 + b'\omega + c' = 0,$$

гдѣ a, b, c, a', b', c' суть цѣлыя числа. Исключая изъ этихъ двухъ равенствъ ω^2, мы найдемъ, что, если бы не имѣли мѣста соотношенія $ca'-c'a=0$ и $ba'-b'a=0$, т. е. если бы уравненія не были равносильны, то ω могло бы быть представлено въ видѣ:

$$-\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a},$$

т. е. ω было бы раціональнымъ числомъ.

Опредѣленіе 1. Два ирраціональныхъ числа называются сопряженными, если они удовлетворяютъ одному и тому же цѣлочисленному квадратному уравненію.

Теорема 2. Для каждаго ирраціональнаго числа ω, удовлетворяющаго цѣлочисленному квадратному уравненію, существуетъ одно и только одно число, сопряженное съ нимъ.

Доказательство. Дѣйствительно, согласно теоремѣ 1' всѣ цѣлочисленныя квадратныя уравненія, которымъ удовлетворяетъ число ω, равносильны; слѣдовательно, всѣ они имѣютъ одинъ и тотъ же второй корень, который и есть число, сопряженное съ числомъ ω.

Число, сопряженное съ числомъ ω, мы будемъ обозначать знакомъ $\overline{\omega}$.

Теорема 3. Числа $\Omega=\dfrac{p\omega+p'}{q\omega+q'}$ и $\Omega_1=\dfrac{p\overline{\omega}+p'}{q\overline{\omega}+q'}$, гдѣ p, p', q, q' суть цѣлыя числа, а ω, $\overline{\omega}$ есть пара сопряженныхъ чиселъ, также есть пара сопряженныхъ чиселъ, т. е. $\Omega_1=\overline{\Omega}$.

Доказательство. Рѣшая данныя въ условіи равенства относительно ω и $\overline{\omega}$, найдемъ:

$$\omega=-\frac{q'\Omega-p'}{q\Omega-p}, \quad \overline{\omega}=-\frac{q'\Omega_1-p'}{q\Omega_1-p}. \tag{1}$$

Обозначимъ коэффиціенты уравненія, которому удовлетворяютъ числа ω и $\overline{\omega}$, черезъ a, b и c; тогда

$$a\omega^2+b\omega+c=0, \quad a\overline{\omega}^2+b\overline{\omega}+c=0;$$

подставляя сюда значенія ω и $\overline{\omega}$ изъ равенства (1), мы получимъ, освободившись отъ знаменателей и раскрывъ скобки, два тожества, которыя показываютъ, что числа Ω и Ω_1 удовлетворяютъ уравненію:

$$(aq'^2-bqq'+cq^2)x^2-(2aq'p'-bqp'-bq'p+2cqp)x+(ap'^2-bpp'+cp^2)=0.$$

Отсюда слѣдуетъ, если принять во вниманіе опредѣленіе 1 и теорему 2, что Ω и Ω_1 суть сопряженныя числа.

Опредѣленіе 2. Число

$$D = b^2 - 4ac$$

называется дискриминантомъ уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь ω есть положительное ирраціональное число, которое удовлетворяетъ квадратному уравненію съ цѣлыми коэффиціентами (мы будемъ предполагать, что коэффиціенты a, b, c не имѣютъ общаго множителя). Будемъ обращать ω въ безконечную непрерывную дробь и обозначимъ получающіяся при этомъ полныя частныя черезъ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ Всѣ эти числа также будутъ удовлетворять квадратнымъ уравненіямъ съ цѣлыми (взаимно простыми) коэффиціентами, при чемъ дискриминанты этихъ уравненій будутъ равны между собою (и равны дискриминанту даннаго уравненія).

Въ самомъ дѣлѣ, если обозначить n-тое неполное частное черезъ a_n, а коэффиціенты уравненія, которому удовлетворяетъ число ω_{n-1}, черезъ a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, такъ что

$$a_{n-1}\omega_{n-1}^2 + b_{n-1}\omega_{n-1} + c_{n-1} = 0$$

и

$$\omega_{n-1} = a_n + \frac{1}{\omega_n},$$

то, подставляя значеніе ω_{n-1} въ предыдущее равенство, мы послѣ упрощенія получимъ:

$$(a_{n-1}a_n^2 + b_{n-1}a_n + c_{n-1})\,\omega_n^2 + (2a_{n-1}a_n + b_{n-1})\,\omega_n + a_{n-1} = 0.$$

Коэффиціенты этого уравненія суть числа взаимно простыя (потому что общій множитель этихъ коэффиціентовъ дѣлилъ бы числа a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}), а дискриминантъ этого уравненія, какъ показываетъ тожество

$$(2a_{n-1}a_n + b_{n-1})^2 - 4a_{n-1}(a_{n-1}a_n^2 + b_{n-1}a_n + c_{n-1}) = b_{n-1}^2 - 4a_{n-1}c_{n-1},$$

равенъ дискриминанту уравненія, которому удовлетворяетъ число ω_{n-1}. Точно такъ же мы доказали бы, что этотъ дискриминантъ равенъ предыдущему и т. д. Слѣдовательно,

$$b_n^2 - 4a_n c_n = D. \tag{3}$$

II.

Теперь мы можемъ приступить къ доказательству того, что положительный ирраціональный корень цѣлочисленнаго квадратнаго уравненія обращается въ періодическую непрерывную дробь.

Обозначимъ числителя и знаменателя n'той подходящей той безконечной непрерывной дроби $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, въ которую обращается ω, черезъ p_n и q_n; остальныя обозначенія сохраняемъ прежнія. Тогда

$$\omega = \frac{p_n \omega_n + p_{n-1}}{q_n \omega_n + q_{n-1}}.$$

Рѣшая это равенство относительно ω_n, получимъ:

$$\omega_n = -\frac{q_{n-1}\,\omega - p_{n-1}}{q_n\,\omega - p_n}.$$

Согласно теоремѣ 3, число

$$\Omega_n = -\frac{q_{n-1}\,\overline{\omega} - p_{n-1}}{q_n \overline{\omega} - p_n} \tag{4}$$

удовлетворяетъ тому же уравненію, что и ω_n, т. е. уравненію

$$a_n x^2 + b_n x + c_n = 0.$$

Если мы напишемъ равенство (4) въ видѣ:

$$\Omega_n = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{\overline{\omega} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\overline{\omega} - \dfrac{p_n}{q_n}}$$

и замѣтимъ, что предѣлъ при $n = \infty$ второго сомножителя есть 1 (такъ какъ дроби $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\dfrac{p_n}{q_n}$ при $n = \infty$ имѣютъ предѣломъ ω и, значитъ, оба члена дроби имѣютъ предѣломъ одно и то же число $\overline{\omega} - \omega$, которое не равно нулю, такъ какъ ирраціональные корни цѣлочисленнаго квадратнаго уравненія не могутъ быть равны между собою), то мы увидимъ, что при достаточно большомъ n число $\Omega_n = \overline{\omega}_n$ становится и остается отрицательнымъ. Такъ какъ всѣ ω_n суть числа положительныя, то, начиная съ нѣкотораго n, коэффиціенты a_n и c_n имѣютъ противоположные знаки, т. е.

$$a_n c_n < 0.$$

Сопоставляя это съ равенствомъ (3), находимъ:

$$b_n^{\,2} < D.$$

Число b_n можетъ имѣть, такимъ образомъ, только конечное число значеній. Для каждаго b_n существуетъ конечное число значеній чиселъ a_n и c_n, удовлетворяющихъ соотношенію (3):

$$b_n^{\,2} - 4a_n c_n = D.$$

Такимъ образомъ, число различныхъ системъ значеній a_n, b_n, c_n конечно, и, значитъ, давая числу n достаточно большія значенія, мы неизбѣжно должны придти къ уравненію

$$a_n x^2 + b_n x + c_n = 0,$$

которое совпадаетъ съ встрѣчавшимся уже раньше уравненіемъ:

$$a_k x^2 + b_k x + c_k = 0,$$

и такъ какъ мы можемъ считать, что каждое изъ нихъ имѣетъ только по одному положительному корню, то

$$\omega_n = \omega_k.$$

Но изъ этого равенства слѣдуетъ, что

$$a_{n+1} = a_{k+1}, \quad \omega_{n+1} = \omega_{k+1};$$

а изъ этого вытекаетъ, что

$$a_{n+2} = a_{k+2}, \quad \omega_{n+2} = \omega_{k+2} \text{ и т. д.,}$$

т. е. что разсматриваемая дробь есть дробь періодическая.

Основныя свойства элементовъ.

Т. В. Рихардса.

(Фарадеевская лекція).

Читано передъ членами Химическаго Общества въ аудиторіи Королевскаго Института въ Лондонѣ 14 іюня 1911 года.

Сегодня мы собрались въ этомъ историческомъ мѣстѣ, чтобы почтить память Михаила Фарадея. Здѣсь онъ жилъ, здѣсь была его лабораторія и въ этой комнатѣ онъ читалъ свои лекціи. Наука, обнимая весь міръ и не признавая національныхъ перегородокъ, является могущественнымъ факторомъ объединенія всего человѣчества. Жизненный трудъ Фарадея—даръ всему міру; оставленное имъ наслѣдіе оказалось неисчерпаемымъ кладомъ для всего человѣчества. Поэтому время отъ времени благородные хранители этой славной аудиторіи приглашаютъ сюда химиковъ и физиковъ изъ разныхъ странъ, дабы они воздали дань уваженія этому рѣдкому генію. Англія, Германія, Франція, Италія, Россія уже посылали своихъ выдающихся представителей. Теперь я являюсь сюда пилигримомъ изъ-за океана; я горжусь, что на мою долю выпала честь принести отъ Новаго Свѣта дань благоговѣнія этому хранилищу священныхъ воспоминаній. Близость, связывающая наши націи, дѣлаетъ для меня исполненіе этой миссіи особенно пріятнымъ.

Тайна, окутывающая природу первоисточниковъ физической вселенной, всегда возбуждала любознательность мыслящихъ людей. Въ старину философы пытались разрѣшить загадку вселенной посредствомъ отвлеченнаго мышленія, но теперь всѣ мы согласны, что проникнуть въ ревниво охраняемую тайну удастся только черезъ точное измѣреніе осязаемаго и видимаго. Единственно надежную основу для логическихъ заключеній о реальной сущности вещей намъ можетъ дать только познаніе дѣйствительныхъ свойствъ вещества и энергіи. Фарадей былъ глубоко проникнутъ этимъ убѣжденіемъ, которое является признаннымъ основаніемъ всей современной опытной науки. Предметъ моей настоящей лекціи составляютъ методы и общіе результаты многихъ обширныхъ изслѣдованій, предпринятыхъ въ надеждѣ расширить посредствомъ тщательныхъ опытовъ основы человѣческаго познанія.

Для начала позвольте мнѣ привести старое изреченіе Платона, которое можетъ служить эпиграфомъ настоящей лекціи: „если отъ какого-либо искусства отнять ариѳметику, измѣреніе и взвѣшиваніе, то врядъ ли что-либо останется" (Plato, Philebus). Другими словами, надежность всѣхъ нашихъ умозаключеній зависитъ отъ степени достовѣрности лежащихъ въ ихъ основѣ данныхъ.

Лордъ Кельвинъ сказалъ: „Человѣку, лишенному научнаго воображенія, точное, кропотливое измѣреніе кажется менѣе достойнымъ и менѣе возвышеннымъ дѣломъ, чѣмъ разысканіе чего-либо новаго. Но почти всѣ величайшія научныя открытія явились наградой за точное измѣреніе, за многолѣтнее терпѣливое изслѣдованіе численныхъ результатовъ" [1]). Чѣмъ тоньше и сложнѣе умозаключенія, тѣмъ точнѣе должно быть количественное знаніе фактовъ.

Измѣреніе есть средство, а не цѣль. Посредствомъ измѣренія мы можемъ получить точный и цѣнный матеріалъ для размышленія. Но непланомѣрное измѣреніе не ведетъ ни къ чему. Мы должны весьма обдуманно выбирать объекты измѣреній, иначе мы только напрасно потеряемъ время.

Между всѣми величинами, достойными точнаго измѣренія, одно изъ первыхъ мѣстъ по своему фундаментальному значенію занимаютъ, несомнѣнно, химическіе элементы. Въ самомъ дѣлѣ, элементы являются носителями всѣхъ многообразныхъ явленій, доступныхъ нашему воспріятію.

Однимъ изъ важнѣйшихъ свойствъ элементовъ, очевидно, является вѣсъ. Восемьдесятъ или болѣе индивидуальныхъ чиселъ, которыя мы называемъ атомными вѣсами, представляютъ, можетъ быть, самыя поразительныя физическія записи, которыя природа сохранила для насъ о самыхъ раннихъ стадіяхъ въ исторіи развитія вселенной. Эти числа служатъ какъ бы нѣмыми свидѣтелями „дней творенія", когда вселен-

---

[1]) Sir W. Thomson (Lord Kelvin), Address to British Association, August, 1871. Life, т. 2, стр 600.

ная впервые возникала изъ хаоса. Понятно поэтому, что для химика-философа эти числа должны представлять величайшій интересъ.

Человѣкъ пока еще не въ состояніи предсказать съ точностью хотя бы одинъ только атомный вѣсъ, и потому точное опредѣленіе атомныхъ вѣсовъ основано на точной лабораторной работѣ. Чтобы давать намъ дѣйствительныя значенія этихъ фундаментальныхъ константъ, химическіе методы должны быть освобождены отъ случайныхъ и систематическихъ ошибокъ, а это можетъ быть достигнуто лишь постояннымъ стремленіемъ къ самокритикѣ и совершенствованію.

Въ чемъ же, спрашивается, состоятъ тѣ предосторожности, соблюденіе которыхъ играетъ для химика особенно важную роль? Мы должны остановиться на этомъ вопросѣ хотя бы вкратцѣ, такъ какъ именно эти предосторожности опредѣляютъ собой цѣнность получаемыхъ результатовъ; при всей своей элементарности онѣ часто игнорируются.

Прежде всего, всякій разъ, когда мы взвѣшиваемъ пробу вещества, мы должны быть увѣрены, что она не содержитъ какихъ-либо не замѣченныхъ нами примѣсей; въ противномъ случаѣ взвѣшиваніе ничего намъ не дастъ. Но не такъ-то легко пріобрѣсти эту увѣренность. Въ самомъ дѣлѣ, жидкости часто дѣйствуютъ разъѣдающе на стѣнки сосудовъ и поглощаютъ газы; кристаллы содержатъ въ себѣ въ видѣ включеній растворителей; осадки, выпадая, увлекаютъ съ собой загрязняющія ихъ примѣси; сухія вещества прилипаютъ къ водѣ, а изъ твердыхъ тѣлъ даже при высокой температурѣ не всегда удается выдѣлить заключенныя въ нихъ примѣси.

Послѣ того какъ начатъ анализъ, въ ближайшую очередь необходимо собрать малѣйшіе слѣды каждаго взвѣшиваемаго вещества и въ надлежащей послѣдовательности помѣстить ихъ на чашку вѣсовъ. Трудность здѣсь заключается въ томъ, чтобы оцѣнить, или хотя бы открыть, ничтожные слѣды веществъ, остающихся въ растворѣ, или малыя потери, вызываемыя испареніемъ при высокихъ температурахъ.

Коротко говоря, цѣлью является здѣсь „вся истина и только истина“. Химическая сторона задачи является гораздо болѣе запутанной и неопредѣленной, чѣмъ физическій процессъ взвѣшиванія. Въ виду этого безполезно брать большія количества матеріала. Обыкновенно для каждаго опыта достаточно брать отъ 5 до 20 граммовъ. Кто восклицаетъ: „въ какой мѣрѣ чувствительны должны быть вѣсы, чтобы ими можно было взвѣсить атомы!“ обнаруживаетъ этимъ недостаточную освѣдомленность. Въ дѣйствительности главныя трудности приходится преодолѣвать еще до того момента, какъ вещество кладется на чашку вѣсовъ [1]). Каждое вещество мы должны считать нечистымъ, каждую реакцію — неполной и каждое измѣреніе — содержащимъ погрѣшность, пока не будетъ доказано противное. Только крайняя осторожность и тщательность вмѣстѣ съ неусыпнымъ всепроникающимъ контролемъ

---

[1]) Richards, Methods Used in Precise Chemical Investigation, published by the Carnegie Institution of Washington, 1910, № 125, p. 97.

помогаютъ намъ открыть и обезвредить скрытые источники погрѣшностей, коварно подстерегающіе насъ въ каждомъ сложномъ процессѣ.

Между всѣми источниками погрѣшностей наиболѣе частымъ и самымъ коварнымъ слѣдуетъ, пожалуй, признать неожиданное присутствіе воды. Я покажу вамъ поэтому приборъ, который помогаетъ намъ устранить эту опасность. Этотъ инструментъ, между прочимъ, игралъ существенную роль въ новѣйшихъ изысканіяхъ, произведенныхъ въ Гарвардѣ для опредѣленія атомныхъ вѣсовъ, и именно ему въ значительной степени полученные результаты обязаны своимъ достоинствомъ. Онъ позволяетъ намъ высушить, заключить, куда слѣдуетъ, и взвѣсить безводное вещество такимъ образомъ, чтобы исключить всякую возможность проникновенія какихъ бы то ни было слѣдовъ воды изъ атмосферы [1]). Этотъ инструментъ вполнѣ заслуживаетъ того, чтобы его ввели въ каждую количественную лабораторію. Онъ состоитъ изъ

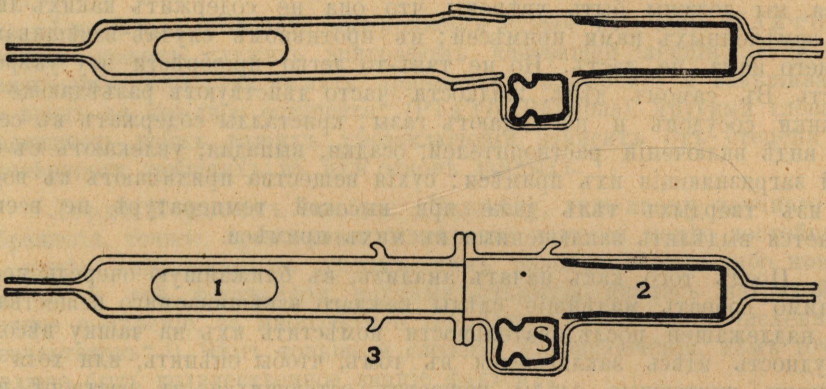

Рис. 1.

1. лодочка; 2. склянка; 3. кварцъ.

кварцевой трубки для накаливанія, придѣланной къ трубкѣ изъ мягкаго стекла, которая съ одной своей стороны снабжена выемкой, или карманомъ (рис. 1). Въ концѣ второй трубки помѣщается бутылочка для взвѣшиванія, а ея пробка находится въ выступѣ трубки. Лодочка съ веществомъ, которое желаютъ высушить, нагрѣвается въ кварцевой трубкѣ, въ атмосферѣ изъ надлежащей смѣси газовъ. Послѣ нѣкотораго

[1]) Richards, Zeitschr. f. anorg. Chem., 1895, т. 8, стр. 267; см. также Richards и Parker, ibid., 1897, т. 13, стр. 86. На рисункѣ представлены двѣ разновидности этого аппарата; верхняя форма употреблялась раньше и годится для накаливаемой трубки изъ твердаго стекла или фарфора, нижняя же форма слегка отлична отъ первоначальной, хотя идея та же. Плоское донышко, оставленное между кварцемъ и стекломъ, устраняетъ неудобство, обусловленное неодинаковыми коэффиціентами расширенія этихъ двухъ веществъ, и даетъ возможность въ случаѣ поломки замѣнить кварцевую трубку другой.

охлажденія эти газы вытѣсняются сперва азотомъ, а затѣмъ чистымъ сухимъ воздухомъ; лодочку проталкиваютъ мимо пробки въ склянку для взвѣшиванія и затѣмъ заставляютъ пробку занять свое мѣсто; такимъ образомъ взвѣшиваемое вещество оказывается заключеннымъ въ совершенно сухую атмосферу. Теперь можно удалить склянку, помѣстить ее въ обыкновенный дессиккаторъ и взвѣсить на досугѣ. При такихъ условіяхъ вещество будетъ дѣйствительно сухимъ, и его вѣсъ имѣетъ опредѣленное значеніе.

Упомяну еще про другой инструментъ — нефелометръ [1]), — который также значительно облегчилъ работу въ нашихъ Гарвардскихъ изслѣдованіяхъ. При помощи этого прибора можно съ приближеніемъ опредѣлить очень малые слѣды подвѣшеннаго осадка по яркости отражаемаго имъ свѣта. Устройство нефелометра весьма простое. Двѣ пробирки, находящіяся на близкомъ разстояніи и слегка наклоненныя одна къ другой, расположены такимъ образомъ, чтобы помѣщенные рядомъ передвижные экраны отчасти заслоняли ихъ отъ источника яркаго свѣта. Наблюдатель смотритъ на пробирки сверху сквозь двѣ тонкія призмы, которыя сводятъ оба изображенія вмѣстѣ, такъ что получается явленіе, подобное тому, которое наблюдается въ обыкновенномъ поляриметрѣ съ полутѣнью. Въ одной пробиркѣ искомое количество раствореннаго вещества осаждаютъ при помощи надлежащихъ реагентовъ въ видѣ слабой опалесценціи, а въ другой пробиркѣ приготовляютъ опредѣленное количество, обработанное точно такимъ же способомъ. Оба осадка отражаютъ свѣтъ, такъ что пробирки кажутся слабо свѣтящимися. Если при одинаковомъ расположеніи экрановъ обѣ трубки кажутся одинаковаго цвѣта, то можно принять, что количество осадка въ обѣихъ пробиркахъ одно и то же. Если же онѣ обнаруживаютъ неодинаковую окраску, то нужно измѣнить положеніе экрановъ такимъ образомъ, чтобы получить одинаковый цвѣтъ, и по этому измѣненію мы можемъ съ точностью судить объ отношеніи количествъ осадка въ нашихъ двухъ трубкахъ. Такимъ путемъ можно опредѣлить чрезвычайно малые слѣды вещества, которыхъ нельзя уловить при помощи обыкновенныхъ фильтровъ.

Посредствомъ этихъ простыхъ приспособленій устраняются два источника погрѣшностей, которые больше всѣхъ другихъ вредили прежнимъ изслѣдованіямъ,— устраняется присутствіе остаточной воды и улавливаются малѣйшіе слѣды осадка (по вреду, причиняемому этими двумя причинами, на одну ступень съ ними можно поставить развѣ лишь присутствіе въ осадкахъ постороннихъ веществъ).— Новѣйшія изслѣдованія, производившіяся въ этомъ направленіи въ Гарвардскомъ университетѣ, привели къ новому опредѣленію 30 атомныхъ вѣсовъ; съ цѣлью и методомъ этихъ изслѣдованій во всемъ ихъ значеніи можно ознакомиться лишь по оригинальнымъ работамъ [2]).

[1]) Richards, Zeitschr. anorg. Chem., 1895, т. 8, стр. 269; Richards и Wells, American Chemical Journal, 1904, т. 31, стр. 235; Richards, ibid., 1906, т. 35, стр. 510.

[2]) Существенная часть этихъ изслѣдованій выполнена Г. П. Бакстеромъ (G. P. Baxter); кромѣ того, автору помогали въ работѣ много способныхъ студен-

Представляется весьма вѣроятнымъ, что атомные вѣса могутъ быть связаны точными математическими уравненіями, и съ цѣлью рѣшить эту проблему сдѣлано много интересныхъ попытокъ [1]); тѣмъ не менѣе до сихъ поръ еще не удалось открыть точную природу этихъ соотношеній. Но всѣ тѣ попытки, которыя допускаютъ свободное обращеніе со значеніями наиболѣе достовѣрныхъ изъ найденныхъ величинъ, не заслуживаютъ особаго довѣрія. Какъ мнѣ кажется, окончательное обобщеніе удастся не раньше, чѣмъ будетъ опредѣлено съ величайшей точностью большое число атомныхъ вѣсовъ. Гарвардскія изслѣдованія будутъ безостановочно продолжаться далѣе, и будутъ предприняты попытки усовершенствовать ихъ въ качественномъ отношеніи, такъ какъ нѣтъ такихъ трудностей, которыхъ не стоило бы преодолѣть ради намѣченной цѣли. Въ самомъ дѣлѣ, открытіе математическаго соотношенія между атомными вѣсами дало бы намъ неизмѣримой цѣнности ключъ къ пониманію глубочайшей природы вещей.

Но вѣсъ есть только одно изъ основныхъ свойствъ элемента. Объемъ имѣетъ въ своемъ родѣ столь же или почти столь же важное значеніе, хотя и представляетъ собою несравненно болѣе измѣнчивое и запутанное свойство. Всѣ газы приблизительно удовлетворяютъ всѣмъ намъ извѣстному простому объемному соотношенію, опредѣляемому закономъ Гэ-Люссака и правиломъ Авогадро. Въ жидкомъ же и твердомъ состояніяхъ, напротивъ, обнаруживаются большія неправильности, и въ отношеніи объемовъ здѣсь, вообще, почти нельзя установить закономѣрности.

Около 12 лѣтъ тому назадъ, при изученіи небольшихъ аномалій, обнаруживаемыхъ газами, у меня возникла догадка о вѣроятной причинѣ большихъ аномалій въ жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ [2]). Когда я въ одномъ вычисленіи (не опубликованномъ) пробовалъ примѣнить къ нѣкоторымъ газамъ извѣстную формулу Ванъ-деръ-Ваальса (van der Waals), то оказалось, что количество b *) въ дѣйствительности не

товъ. Литература вопроса указана полностью въ „Извѣстіяхъ Института Карнеджи" („Publications Carnegie Institution of Washington", 1910, № 125, стр. 91). Большинство статей перепечатано полностью въ книгѣ, выпущенной авторомъ и его сотрудниками подъ заглавіемъ: „Experimentelle Untersuchungen über Atomgewichte" (Hamburg, 1909). Въ послѣдніе годы этимъ изслѣдованіямъ оказывалъ щедрую поддержку Институтъ Карнеджи въ Вашингтонѣ.

[1]) См. въ особенности Rydberd, Zeitschr. anorg. Ghem., 1897, т. 14, стр. 66.

[2]) Richards, The Significance of Changing Atomic Volume, Proceedings American Academy, 1901, т. 37, стр. 1; 1902, т. 37, стр. 300; 1902, т. 38, стр. 293; 1904, т. 39, стр. 581. Zeitschr. Physikal. Chem., 1902, т. 40, стр. 169, 597; 1903, т. 42, стр. 129; 1904, т. 49, стр. 15.

*) Въ „уравненіи состоянія" Ванъ-деръ-Ваальса

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)\left(v-b\right)=RT$$

b обозначаетъ объемъ молекулы газа.

Прим. перев.

есть постоянная, но измѣняется подъ вліяніемъ какъ давленія, такъ и температуры. Къ такому же заключенію пришелъ независимо отъ меня и Ванъ-деръ-Ваальсъ [1]). Но, если b—количество перемѣнное (предполагая, что оно зависитъ отъ пространства, дѣйствительно занимаемаго молекулами), то не оказываются ли сжимаемыми самыя молекулы [2])?

Дальнѣйшій шагъ въ этомъ ходѣ мыслей, пожалуй, является не менѣе очевиднымъ. Если уже относительно газовъ мы приходимъ къ заключенію объ измѣняемости ихъ молекулярнаго объема, то не служатъ ли расширеніе и сжиманіе твердыхъ и жидкихъ тѣлъ гораздо лучшимъ свидѣтельствомъ относительной расширяемости и сжимаемости ихъ молекулъ?

Большинство физико-химиковъ приписываютъ всѣ измѣненія въ объемѣ увеличенію и уменьшенію пустыхъ промежутковъ между молекулами. Но существуютъ ли на самомъ дѣлѣ такіе пустые промежутки въ твердыхъ и жидкихъ тѣлахъ? Судя по свойствамъ твердыхъ тѣлъ нельзя сказать, чтобы атомы ихъ были удалены одинъ отъ другого; отсутствіе пористости часто выражено совершенно явственно. Возьмемъ, напримѣръ, стекло. Тщательные опыты Ландольта (Landolt) о сохраненіи вѣса [3]) показываютъ, что стекло въ теченіе долгаго времени остается въ высокой степени непроницаемымъ для кислорода, азота и воды. Пористость, встрѣчающаяся въ компактныхъ твердыхъ тѣлахъ, обыкновенно позволяетъ проникать только такимъ веществамъ, которыя вступаютъ въ химическую структуру самихъ этихъ твердыхъ тѣлъ. Такъ, азотъ, заточенный въ горячей окиси мѣди, не можетъ освободиться изъ нея, кислородъ же можетъ [4]); далѣе, даже въ самой сухой атмосферѣ не можетъ испариться вода, случайно попавшая внутрь кристалла, лишеннаго кристаллизаціонной воды [5]). Окклюдируя водородъ, палладій оказывается вынужденнымъ расширить свой объемъ, чтобы дать мѣсто даже для такой ничтожной прибавки вещества. Платина, никкель и желѣзо обладаютъ, повидимому, аналогичнымъ же свойствомъ, хотя и менѣе ясно выраженнымъ [6]). Сплавленный кварцъ, непроницаемый на холоду, пропускаетъ въ себя гелій и водородъ при высокихъ температурахъ [7]); но большинство другихъ

---

[1]) Van der Waals, Zeitschr. physikal. Chem., 1901, т. 38, стр. 257. Опубликованное имъ раньше изслѣдованіе по тому же вопросу (Proc. R. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1898, т. 29, стр. 138) до того времени было мнѣ неизвѣстно. См. также Lewis, Proceedings American Academy, 1899, т. 35, стр. 21.

[2]) Въ цитированной выше статьѣ, на стр. 283, Ванъ-деръ-Ваальсъ выражается съ осторожностью, но видно, что онъ вполнѣ допускаетъ сжимаемость молекулъ.

[3]) H. Landolt, Ueber die Erhaltung der Masse bei chem. Umwandlungen, Abhandlung der königl. preuss. Akad. der Wissenschaften, 1910.

[4]) Richards, Zeitschr. anorg. Chem., 1892, т. 1, стр. 196; Proceedings American Academy, 1893, т. 28, стр. 200; ibid., 1898, т. 38, стр. 399.

[5]) Baker и Adlam, Journal Chemical Society Transactions, 1911, т. 99, стр. 507.

[6]) Richards и Behr, Publications Carnegie Institution, 1906, № 61.

[7]) Jacquerod и Perrot, Compt. rend., 1907, т. 144, стр. 135.

газовъ, повидимому, не могутъ черезъ него проходить. Очень много твердыхъ тѣлъ не пропускаютъ, повидимому, даже водорода и гелія, особенно при низкой температурѣ. Въ этихъ случаяхъ, какъ и въ очень многихъ другихъ, такъ называемая сфера дѣйствія атома является дѣйствительной границей, по которой мы узнаемъ атомъ и измѣряемъ его свойства[1]). Почему бы не назвать ее фактическимъ объемомъ атома?

Но и съ другой точки зрѣнія мнѣ всегда казалось, что обычное представленіе о твердомъ тѣлѣ мало чѣмъ отличается отъ нелѣпости. Въ самомъ дѣлѣ, газъ мы отлично можемъ представлять себѣ, какъ собраніе движущихся частичекъ, отдѣленныхъ между собою большими промежутками; но откуда при столь неустойчивой структурѣ возьмется твердость стали? Наиболѣе правдоподобное заключеніе изъ всѣхъ данныхъ, взятыхъ вмѣстѣ,— что промежутки между атомами въ твердыхъ и жидкихъ тѣлахъ обыкновенно должны быть весьма малы даже въ сравненіи съ размѣрами самихъ атомовъ, конечно, если только такіе промежутки, вообще, существуютъ.

Въ пользу этого взгляда легко привести также прямое и весьма убѣдительное доказательство другого рода. Идея сжимаемости атомовъ поразительнымъ образомъ подтверждается новѣйшимъ изслѣдованіемъ Грюнейзена[2]) о слабомъ вліяніи низкихъ температуръ на сжимаемость металловъ. Средняя сжимаемость алюминія, желѣза, мѣди, серебра и платины при охлажденіи отъ комнатной температуры до температуры жидкаго воздуха падаетъ всего лишь на 7 процентовъ. Экстраполяція кривыхъ доказываетъ, что при абсолютномъ нулѣ имѣетъ мѣсто весьма малое дальнѣйшее уменьшеніе. Такимъ образомъ, насколько мы можемъ заключить, твердые металлы при абсолютномъ нулѣ обладаютъ почти такой же сжимаемостью, какъ при комнатной температурѣ. Но, какъ учитъ насъ физика, при абсолютномъ нулѣ прекращаются всякія тепловыя колебанія; слѣдовательно, эту сохраняющуюся сжимаемость необходимо приписать самимъ атомамъ.

Если атомы сжимаемы, то всѣ математическія разсужденія, въ которыхъ атомы предполагаются несжимаемыми, ложны въ своей основѣ. Эти соображенія не затрагиваютъ кинетической теоріи газовъ, за исключеніемъ того пункта, что величина b въ уравненіи Ванъ-деръ-Ваальса является перемѣнной; но зато они служатъ серьезнымъ препятствіемъ для примѣненія этого уравненія къ твердымъ и жидкимъ тѣламъ.

---

[1]) Съ тѣхъ поръ, какъ впервые были высказаны эти идеи, Барлоу (Barlow) и Попъ (Pope) представили много интересныхъ данныхъ относительно значенія объемовъ твердыхъ и жидкихъ тѣлъ; эти данныя подтверждаютъ идею, что атомы находятся между собой въ близкомъ соприкосновеніи. (Trans., 1906, т. 89, стр. 1675; 1907, т. 91, стр. 1150; 1908, т. 93. стр. 1528; 1910, т. 97, стр. 2308).

[2]) E. Grüneisen, Ann. Physik, 1910 (iv), т. 33, стр. 1239. Приведенныя въ этой работѣ относительныя значенія сжимаемостей несомнѣнно заслуживаютъ довѣрія, но абсолютныя значенія ихъ представляются менѣе достовѣрными, такъ какъ они основаны на нѣсколько шаткой теоріи упругости.

Прослѣдимъ нѣсколько дальше выводы, вытекающіе изъ нашей гипотезы. Если атомы, дѣйствительно, тѣсно соприкасаются между собой, то объемы твердыхъ и жидкихъ тѣлъ должны доставлять намъ цѣнныя свѣдѣнія объ относительныхъ объемахъ, занимаемыхъ самими атомами при различныхъ условіяхъ. Для химика-философа плотности твердыхъ и жидкихъ тѣлъ получаютъ тогда гораздо большій интересъ, чѣмъ до сихъ поръ, такъ какъ онѣ имѣютъ болѣе опредѣленную связь съ коренной природой вещей.

Но сейчасъ же возникаетъ какъ будто возраженіе: если части уплотненнаго вещества дѣйствительно соприкасаются между собой, то какъ объяснить теплоту внутри вещества? Развѣ могутъ тѣсно соприкасающіеся атомы совершать колебанія?

На этотъ вопросъ намъ непосредственно отвѣчаетъ одно изъ слѣдствій теорій сжимаемыхъ атомовъ. Если атомы обладаютъ сжимаемостью по всей своей массѣ, то они могутъ сжиматься и расширяться или колебаться въ своихъ собственныхъ предѣлахъ, хотя бы тѣсное соприкосновеніе атомовъ препятствовало движенію ихъ поверхностей. Можно такимъ образомъ представлять себѣ колебательное явленіе даже въ соприкасающихся атомахъ, если только мы въ правѣ допустить, что эти атомы по всей своей массѣ обладаютъ упругостью. При этихъ условіяхъ легко можетъ имѣть мѣсто даже такое волненіе, котораго достаточно, чтобы произвести Брауновское движеніе.

Въ представленіи о сжимаемости атомовъ, очевидно, нѣтъ ничего невозможнаго или явно противорѣчащаго опытному знанію; напротивъ, старая идея малыхъ, твердыхъ частицъ, весьма удаленныхъ одна отъ другой, въ дѣйствительности болѣе произвольна и гипотетична, чѣмъ новая концепція. Очевидная простота послѣдней, скорѣе, говоритъ въ ея пользу, чѣмъ противъ нея, какъ простота говоритъ и въ пользу атомистической теоріи Дальтона. Вообще, чѣмъ проще гипотеза объясняетъ явленія природы, тѣмъ она обыкновенно полезнѣе, — конечно, при условіи, что объясненіе не противорѣчитъ дѣйствительности. Въ подобныхъ случаяхъ современная прагматическая философія можетъ служить превосходной руководящей нитью: о логической состоятельности теоріи слѣдуетъ судить по степени ея полезности. Испытаемъ же новую гипотезу путемъ примѣненія ея къ другимъ вопросамъ физической химіи.

Если давленіе вызываетъ измѣненіе объема самихъ атомовъ и молекулъ, то нельзя ли по дѣйствительному объему жидкихъ и твердыхъ тѣлъ судить о неизвѣстныхъ внутреннихъ давленіяхъ въ этихъ тѣлахъ? Не можемъ ли мы такимъ способомъ открыть, вызывается ли дѣйствіемъ химическаго сродства давленіе или нѣтъ? Руководясь этимъ соображеніемъ, выбрали сперва простѣйшій изъ возможныхъ случаевъ, а именно сравненіе сжатій, которыя происходятъ при соединеніи одного весьма сжимаемаго элемента послѣдовательно съ нѣсколькими другими элементами. Сперва были разсмотрѣны объемныя измѣненія, сопровождающія образованіе окисловъ, а позже изучены также хлориды и бромиды. Согласно теоріи сжимаемости атомовъ нужно было ожидать, что сжатіе тѣмъ больше, чѣмъ сильнѣе сродство. Такой выводъ вполнѣ подтверждается діаграммой (рис. 2), изображающей типичныя данныя, относящіяся къ нѣкоторымъ родственнымъ между собой хлоридамъ [1]). Одна изъ этихъ линій показываетъ полное измѣненіе объема при соединеніи граммъ-молекулы хлора съ эквивалентнымъ вѣсомъ металла, а другая даетъ теплоту, выдѣляющуюся во время соединенія. Эти двѣ линіи явно параллельны; это значитъ, что реакціи, развивающія больше теплоты, сопровождаются бо́льшимъ сокращеніемъ объема. Въ такого рода случаяхъ теплота реакціи обыкновенно мало отличается отъ израсходованной энергіи; мы можемъ поэтому заключить, что бо́льшее сродство сопровождается и бо́льшимъ сокращеніемъ, и достаточно лишь слегка уклониться въ область догадокъ, чтобы принять, что измѣненіе объема вызывается дѣйствіемъ сродства.

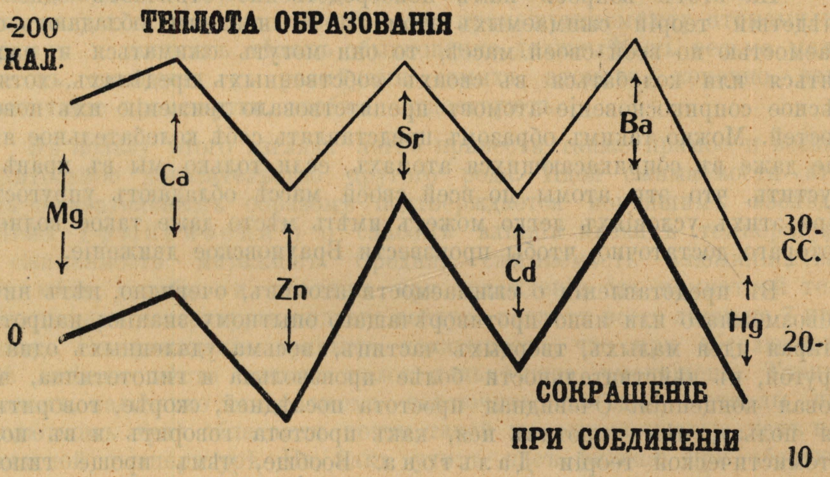

Рис. 2.

Сравненіе теплоты образованія хлоридовъ съ соотвѣтственнымъ сокращеніемъ при соединеніи

Такъ какъ химическое сродство прочно связываетъ два элемента, то отчего бы оно не могло оказывать давленіе? И если оно оказываетъ давленіе, то отчего бы объему системы не уменьшиться подъ дѣйствіемъ этого давленія?

Такое объясненіе не является совершенно новымъ. Деви [2]), великій учитель Фарадея, первый указалъ на подобный фактъ, а именно, что уменьшеніе объема, происходящее при образованіи окисла калія, больше, чѣмъ сокращеніе, сопровождающее образованіе нѣкоторыхъ другихъ окисловъ. Дэви приписалъ это явленіе различію сродства

---

[1]) Richards, Proceedings American Academy, 1902, т. 37, стр. 399; а также, въ особенности, Richards и Jones, Journal American Chemical Society, 1909, т. 31, стр. 188.

[2]) Humphry Davy, Collected Works, 1840, т. 5, стр. 133 (подстр. прим.).

въ этихъ случаяхъ, каковое тогда хорошо уже было извѣстно, но онъ не развилъ своей идеи дальше. Много лѣтъ спустя Браунъ[1]), Мюллеръ[2]), Гагеманнъ[3]) и Траубе[4]), независимо другъ отъ друга и, повидимому, не зная даже одинъ о работахъ другого, указали на цѣлый рядъ другихъ аналогичныхъ зависимостей.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе.

По поводу § 76 въ 25-мъ изданіи „Элементарной алгебры" А. Киселева.

Прив.-доц. В. Кагана.

Въ вышедшемъ въ текущемъ году новомъ изданіи «Элементарной алгебры» г. Киселева обычное очень простое доказательство теоремы объ остаткѣ отъ дѣленія цѣлаго многочлена $F(x)$ на двучленъ $x-a$ замѣнено другимъ, также хорошо извѣстнымъ, но болѣе сложнымъ доказательствомъ. Эта замѣна мотивирована слѣдующимъ примѣчаніемъ, которое мы воспроизводимъ цѣликомъ.

Назовемъ для краткости дѣлимое буквою P_x. Дѣленіе P_x на $x-a$ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ, не содержащій буквы x (потому что дѣлитель содержитъ x лишь въ первой степени). Назовемъ этотъ остатокъ R, а цѣлое частное, получившееся при этомъ, Q_x. Тогда

$$P_x = (x-a)\,Q_x + R. \qquad \text{(I)}$$

Это равенство есть тождество, т. е. оно вѣрно при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него. Поэтому оно останется вѣрнымъ, если положимъ въ немъ $x=a$. Отъ такой замѣны остатокъ R не измѣнится, такъ какъ онъ не содержитъ x; дѣлимое же и частное превратятся въ многочлены P_a и Q_a, которые получатся изъ P_x и Q_x, если въ нихъ x замѣнимъ на a.

Слѣдовательно,

$$P_a = (a-a)\,Q_a + R. \qquad \text{(II)}$$

Но $(a-a)\,Q_a = 0$; поэтому $P_a = R$, т. е.

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \cdots + K.$$

---

[1]) V. Braun, см. Johnson, Journal Chemical Society Transactions, 1877, т. 31, стр. 252.

[2]) Müller-Erzbach, Ber. d. Deutsch. Ch. Ges. 1881, т. 14, стр. 217, 2043.

[3]) Hagemann (въ приватной публикаціи, Friedländer, Berlin, 1900).

[4]) Traube, Über den Raum der Atome, Ahrens's Sammlung der chem. und chem.-techn.-Vorträge, т. 4, стр. 256.

Это весьма простое, повидимому, доказательство не вполнѣ строго. Въ самомъ дѣлѣ, дѣля P_x на $x - a$, мы тѣмъ самымъ должны предположить, что x не равенъ a, такъ какъ при $x = a$ дѣлитель обратился бы въ 0, а на 0 дѣлить невозможно. Значитъ, мы не имѣемъ права утверждать, что равенство $P_x = (x - a)\, Q_x + R$, получившееся изъ дѣленія P_x на $x - a$, вѣрно и при $x = a$.

Приводимое г. Киселевымъ въ новомъ изданіи доказательство имѣетъ свои преимущества: оно обычно приводится въ тѣхъ случаяхъ, когда желаютъ установить не только остатокъ отъ дѣленія, но и законъ составленія частнаго. Въ этомъ и только въ этомъ отношеніи это болѣе громоздкое доказательство имѣетъ преимущество. Утвержденіе же автора, будто приведенное въ примѣчаніи краткое доказательство неправильно, совершенно несправедливо. Это утвержденіе является результатомъ довольно обычнаго смѣшенія понятій объ ариѳметическомъ и алгебраическомъ дѣленіи.

Мы не будемъ останавливаться на опредѣленіи ариѳметическаго дѣленія, которое врядъ ли нужно здѣсь приводить. Что касается алгебраическаго дѣленія, то, напротивъ, въ элементарныхъ учебникахъ очень рѣдко мы встрѣчаемъ правильное его опредѣленіе. Это опредѣленіе основано на слѣдующей теоремѣ, которая, по справедливости, должна быть признана одной изъ важнѣйшихъ въ алгебрѣ.

Теорема. *Если $F(x)$ и $G(x)$ суть двѣ цѣлыя функціи, изъ которыхъ послѣдняя не сводится къ нулю тождественно, то существуетъ одна и только одна пара цѣлыхъ алгебраическихъ функцій $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ:*

1) должно имѣть мѣсто тождество

$$F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x); \tag{1}$$

2) степень функціи $R(x)$ должна быть ниже степени функціи $G(x)$.

Доказательство. Пусть наши функціи будутъ:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m, \\ G(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Такъ какъ вторая функція не сводится тождественно къ нулю и $b_0 x^n$ есть старшій ея членъ, то $b_0 \neq 0$.

Если $m < n$, то требованіямъ 1) и 2) можно удовлетворить, положивъ $Q(x) = 0$ и $R(x) = F(x)$. Мы можемъ поэтому считать $m \geqslant n$, такъ что разность $m - n = k$ равна нулю или больше нуля. Доказательство ведется далѣе индуктивно относительно k.

Если $k = 0$, т. е. если $m = n$, то требованію можно удовлетворить, полагая:

$$Q(x) = \frac{a_0}{b_0}, \quad R(x) = F(x) - \frac{a_0}{b_0} G(x) = \left(a_1 - \frac{b_1 a_0}{b_0}\right) x^{m-1} + \cdots + \left(a_m - \frac{b_m a_0}{b_0}\right). \tag{3}$$

Положимъ теперь, что требованіямъ 1) и 2) можно удовлетворить всякій разъ, когда k не превышаетъ $h-1$, и пусть для полиномовъ (2) $k=m-n=h$. Обозначимъ тогда черезъ $F_1(x)$ разность:

$$F_1(x) = F(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} G(x). \tag{4}$$

Степень этой разности ниже m, такъ какъ старшіе члены при вычитаніи сокращаются. Поэтому разность степеней полиномовъ $F_1(x)$ и $G(x)$ ниже h, а, слѣдовательно, существуютъ два полинома $Q_1(x)$ и $R(x)$, при которыхъ имѣетъ мѣсто тождество:

$$F_1(x) = G(x) Q_1(x) + R_1(x),$$

при чемъ степень функціи $R_1(x)$ ниже n.

Подставляя это выраженіе вмѣсто $F_1(x)$ въ тождество (4), получимъ:

$$F(x) = \left[\frac{a_0}{b_0} x^{m-n} + Q_1(x)\right] G(x) + R_1(x). \tag{6}$$

Мы удовлетворимъ, такимъ образомъ, равенству (1), положивъ:

$$Q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} + Q_1(x), \qquad R(x) = R_1(x).$$

Такимъ образомъ доказано, что пара полиномовъ $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющихъ требованіямъ теоремы, всегда существуетъ. Нужно еще показать, что существуетъ только одна такая пара. Если бы допустить, что существуетъ еще вторая пара $Q'(x)$, $R'(x)$ полиномовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же требованіямъ, то мы имѣли бы тождественно:

$$G(x) Q(x) + R(x) = G(x) \,.\, Q'(x) + R'(x),$$

или

$$R'(x) - R(x) = G(x)\,[Q(x) - Q'(x)].$$

Если допустить, что разность $R'(x) - R(x)$ не обращается тождественно въ нуль, то и разность $Q(x) - Q'(x)$ не обращается въ нуль тождественно, а потому представляетъ собою полиномъ нѣкоторой степени. Произведеніе, стоящее въ правой части, представляетъ собою поэтому цѣлую функцію, степень которой не ниже n; въ лѣвой же части находится функція, степень которой ниже n; такое равенство невозможно *).

Функціи $Q(x)$ и $R(x)$ называются **частнымъ** и **остаткомъ** отъ дѣленія функціи $F(x)$ на $G(x)$. Частное и остатокъ алгебраическаго дѣленія существуютъ всегда, если только дѣлитель не обращается въ нуль тождественно **). Вмѣстѣ съ тѣмъ равенство (1) имѣетъ мѣсто **тождественно**, т. е. при всѣхъ

*) Такъ называемый **законъ тождества цѣлыхъ функцій** предполагается уже доказаннымъ раньше.

**) Если дѣлитель равенъ нулю тождественно, то въ немъ нѣтъ старшаго члена, коэффиціентъ котораго b_0 отличенъ отъ нуля, и потому предыдущее разсужденіе падаетъ.

значеніяхъ x. Въ частности, если $G(x) = x - a$, то въ силу предыдущаго опредѣленія $R(x)$ есть постоянное число, равенство же (1) имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, въ томъ числѣ и при $x = a$. Никакихъ дефектовъ въ устраняемомъ г. Киселевымъ доказательствѣ нѣтъ.

Что является источникомъ возникшаго здѣсь недоразумѣнія? Смѣшеніе алгебраическаго дѣленія съ ариѳметическимъ. Выше опредѣлено значеніе частнаго и остатка при алгебраическомъ дѣленіи. Это дѣйствіе выполнимо всегда, если дѣлитель не обращается въ нуль тождественно; иначе говоря, коль скоро $G(x)$ не обращается въ нуль тождественно, то всегда существуютъ функціи $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющія поставленному выше требованію. Положимъ теперь, что эти полиномы — частное и остатокъ отъ дѣленія функціи $F(x)$ на $G(x)$ — найдены, такъ что имѣетъ мѣсто тождество (1). При $x = a$ дѣлимое, дѣлитель, частное и остатокъ алгебраическаго дѣленія принимаютъ численныя значенія $F(a)$, $G(a)$, $Q(a)$ и $R(a)$. Будетъ ли $Q(a)$ цѣлымъ частнымъ и $R(a)$ остаткомъ отъ ариѳметическаго дѣленія числа $F(a)$ на число $Q(a)$? Если $R(a) = 0$ и $G(a) \neq 0$, то равенство $F(a) = G(a) . Q(a)$ обнаруживаетъ, что $Q(a)$ есть частное отъ дѣленія числа $F(a)$ на число $G(a)$. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ дѣло можетъ обстоять иначе. Не говоря уже о томъ, что $F(a)$, $G(a)$ $Q(a)$, $R(a)$ могутъ не оказаться цѣлыми числами, даже въ томъ случаѣ, когда это числа цѣлыя, нельзя утверждать, что $Q(a)$ представляетъ собой частное, а $R(a)$ — остатокъ отъ ариѳметическаго дѣленія числа $F(a)$ на число $G(a)$. Напримѣръ, если мы дѣлимъ $F(x) = x^2 + 7$ на $G(x) = x - 1$, то частное $Q(x)$ равно $x + 1$, а остатокъ $R(x)$ есть 8; если положимъ x равнымъ, скажемъ, 5, то $F(5) = 32$, $G(5) = 4$, $Q(5) = 6$, $R(5) = 8$. Ясно, что $Q(5)$ не есть частное, а $R(5)$ не есть остатокъ отъ дѣленія $F(5)$ на $G(5)$. Ариѳметическое дѣленіе не имѣетъ въ данномъ случаѣ точекъ соприкосновенія съ алгебраическимъ, и это именно обстоятельство нерѣдко служитъ источникомъ заблужденій, однимъ изъ которыхъ является вышеуказанное примѣчаніе г. Киселева. Если мы дѣлимъ $P(x)$ на $(x - a)$ и получаемъ въ частномъ $Q(x)$ и въ остаткѣ $R(x)$, то равенство (I) остается въ силѣ и при $x = a$, т. е. справедливо ревенство (II); но $Q(a)$ вовсе не можетъ быть разсматриваемо, какъ частное отъ дѣленія $P(a)$ на $(a - a)$.

Къ проблемѣ тяготѣнія*).

Проф. Эйнштейна.

Явленія всеобщаго притяженія массъ были теоретически разработаны и выяснены раньше всѣхъ другихъ вопросовъ физики. Законы тяжести и движеній небесныхъ тѣлъ Ньютонъ свелъ къ простому закону движенія матеріальной точки и къ закону взаимодѣйствія двухъ тяготѣющихъ матеріаль-

*) Краткое содержаніе доклада, читаннаго на Съѣздѣ естествоиспытателей въ Вѣнѣ, составленное авторомъ.

ныхъ точекъ. Эти законы оказались въ точномъ согласіи съ дѣйствительностью, такъ что съ точки зрѣнія опыта нѣтъ никакихъ серьезныхъ основаній сомнѣваться въ ихъ строгой примѣнимости. И если, тѣмъ не менѣе, теперь врядъ ли найдется физикъ, который вѣрилъ бы въ точность этихъ законовъ, то это объясняется глубокимъ вліяніемъ того развитія, которое за послѣднія десятилѣтія получили наши знанія объ электромагнитныхъ процессахъ.

Электромагнитныя явленія тоже были сведены къ элементарнымъ законамъ, которые строились по точному образцу Ньютонова закона тяготѣнія, и согласно которымъ электрическія массы, магнитныя массы и элементы тока взаимодѣйствуютъ на разстояніи и распространеніе этого дѣйствія черезъ пространство не требуетъ времени. Теорія Максвелла замѣнила непосредственное дѣйствіе на разстояніи дѣйствіемъ отъ точки къ точкѣ, а 25 лѣтъ тому назадъ Герцъ показалъ своими геніальными опытами относительно распространенія электрической силы, что на самомъ дѣлѣ распространеніе электрическихъ дѣйствій требуетъ времени. Это содѣйствовало побѣдѣ теоріи Максвелла и доказало несостоятельность теоріи дѣйствія на разстояніи въ области электродинамики. Но этимъ же, естественно, была поколеблена вѣра въ Ньютонову теорію тяготѣнія на разстояніи, и постепенно создалось убѣжденіе, что Ньютоновъ законъ тяготѣнія не охватываетъ явленій тяготѣнія во всей ихъ совокупности, подобно тому какъ электростатическій и магнитостатическій законъ Кулона не охватываетъ совокупности электромагнитныхъ процессовъ. Правда, до сихъ поръ для вычисленія движеній небесныхъ тѣлъ можно было довольствоваться закономъ Ньютона, но это объясняется тѣмъ, что скорости и ускоренія небесныхъ движеній малы сравнительно съ электромагнитными. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что движенія небесныхъ тѣлъ опредѣляются электрическими силами, происходящими отъ электрическихъ зарядовъ на этихъ тѣлахъ, и что скорости и ускоренія этихъ небесныхъ тѣлъ суть того же порядка величины, какъ и въ движеніяхъ извѣстныхъ намъ небесныхъ тѣлъ. Нетрудно доказать, что при такихъ условіяхъ мы на этихъ движеніяхъ не могли бы обнаружить законовъ Максвелла; напротивъ, эти движенія можно было бы съ большой точностью описать, исходя изъ закона Кулона.

Хотя такимъ образомъ и была поколеблена вѣра во всеобъемлющее значеніе Ньютонова закона о дѣйствіи на разстояніи, но все же вначалѣ не было прямыхъ и побудительныхъ основаній къ расширенію теоріи Ньютона. Но въ настоящее время такое прямое основаніе возникло для тѣхъ, кто стоитъ на почвѣ теоріи относительности. Согласно этой послѣдней, въ природѣ не существуетъ средства, которое позволяло бы намъ посылать сигналы со скоростью, превышающей скорость свѣта. Но если бы законъ Ньютона обладалъ строгой силой, то мы могли бы при помощи тяготѣнія передавать сигналы моментально въ отдаленный пунктъ, такъ какъ движеніе тяготѣющей массы въ одномъ мѣстѣ должно было бы вызвать одновременныя измѣненія въ другомъ мѣстѣ.

Нордштрёмъ (Nördström) расширилъ поэтому теорію тяготѣнія и математически разработалъ ее, и въ этомъ видѣ она не противорѣчитъ теоріи относительности. Референтъ разобралъ математическія основы расширенной старой теоріи тяготѣнія и показалъ, что онѣ свободны отъ всякой неясности и удовлетворяютъ всѣмъ требованіямъ, которыя могутъ быть предъявлены теоріи тяготѣнія при современныхъ опытныхъ данныхъ. Имѣется только одинъ неудовлетворительный пунктъ: согласно этой теоріи инерція тѣла находится подъ вліяніемъ другихъ тѣлъ, но не порождена ими, такъ какъ сопротивленіе инерціи, оказываемое матеріальной точкой измѣненію ея скорости, согласно теоріи, становится тѣмъ большимъ, чѣмъ болѣе удалены отъ нея остальныя тѣла.

Эйнштейнъ попытался поэтому самъ расширить теорію относительности. Свой опытъ онъ иллюстрируетъ образомъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ долженъ показать, въ какой мѣрѣ установленіе теоріи относительности оправдывается эмпирически.

Когда человѣкъ находится въ вагонѣ съ завѣшаннымъ окномъ, при чемъ вагонъ движется прямолинейно и равномѣрно, то онъ не въ состояніи опредѣлить, въ какомъ направленіи и съ какой скоростью движется вагонъ; онъ не можетъ даже, если исключить неизбѣжныя сотрясенія вагона, рѣшить, движется ли вагонъ или нѣтъ. Говоря абстрактно, по отношенію къ системѣ (вагонъ), движущейся равномѣрно относительно нѣкоторой начальной системы координатъ (поверхность земли), законы явленій таковы же, какъ относительно начальной системы (поверхность земли). Это предложеніе мы называемъ принципомъ относительности равномѣрнаго движенія. Иначе, конечно, обстоитъ дѣло, если вагонъ движется неравномѣрно. Когда вагонъ мѣняетъ свою скорость, то пассажиръ получаетъ толчокъ, который даетъ ему почувствовать ускореніе вагона. Отвлеченно говоря: не существуетъ принципа относительности неравномѣрнаго движенія. Такое заключеніе было бы, однако, не вполнѣ безупречно, такъ какъ не обязательно, вѣдь, чтобы сидящій въ вагонѣ непремѣнно приписывалъ испытываемый имъ толчекъ ускоренію вагона. Что такое заключеніе преждевременно, можно понять изъ слѣдующаго примѣра: два физика A и B, пробудившись отъ наркотическаго сна, замѣчаютъ, что они со всѣми своими инструментами находятся въ закрытомъ ящикѣ съ непрозрачными стѣнками. Они совершенно не знаютъ, гдѣ расположенъ ящикъ, движется ли онъ и каково его движеніе. Они видятъ, что тѣла, которыя они выпускаютъ въ серединѣ ящика, всѣ падаютъ по одному и тому же направленію — скажемъ, внизъ — и съ одинаковымъ ускореніемъ. Какое заключеніе могутъ изъ этого сдѣлать физики? Физикъ A заключаетъ, что ящикъ находится въ покоѣ на нѣкоторомъ небесномъ тѣлѣ, и что направленіе «внизъ» есть направленіе къ центру небеснаго тѣла, если оно шарообразно. Другой же физикъ полагаетъ, что ящикъ, можетъ быть, движется равномѣрно-ускоренно «вверхъ» подъ дѣйствіемъ приложенной къ нему внѣшней силы, и что небеснаго тѣла вблизи можетъ и не быть. Существуетъ ли критерій, по которому физики могли бы рѣшить, кто изъ нихъ правъ? Мы не знаемъ такого критерія, и есть основаніе полагать, что такого критерія не существуетъ. Но если наши воображаемые физики дѣйствительно не могутъ рѣшить принципіально, какая изъ двухъ точекъ зрѣнія вѣрна, то и ускореніе, подобно скорости, не имѣетъ абсолютнаго физическаго значенія. Объ одной и той же системѣ координатъ можно съ одинаковымъ правомъ сказать, что она обладаетъ ускореніемъ или не обладаетъ; но въ зависимости отъ выбранной точки зрѣнія придется принять существованіе гравитаціоннаго поля, которое вмѣстѣ съ предполагаемымъ состояніемъ ускоренія системы опредѣляетъ движеніе свободно движущихся тѣлъ относительно системы координатъ. То обстоятельство, что въ системѣ координатъ, которая съ нашей точки зрѣнія не имѣетъ ускоренія, тѣла при наличіи поля тяжести ведутъ себя точно такъ же, какъ если бы система имѣла ускореніе, принуждаетъ насъ попытаться распространить принципъ относительности на случай координатныхъ системъ, обладающихъ ускореніемъ.

Вмѣстѣ съ Гроссманномъ (Grossmann) референтъ обобщилъ теорію относительности въ указанномъ направленіи и въ связи съ этимъ далъ расширенную теорію тяготѣнія Ньютона и подробно изложилъ ея математическіе основы. По этой теоріи скопленіе массъ въ окрестности покоющейся матеріальной точки влечетъ за собой увеличеніе ея инерціи. Этотъ результатъ представляетъ высокій теоретическій интересъ; въ самомъ дѣлѣ, если инерція тѣла можетъ увеличиться отъ скопленія массъ въ его окрестности, то мы вынуждены принять, что инерція точки зависитъ отъ существованія остальныхъ массъ. Оказывается такимъ образомъ, что инерція обусловливается нѣкоторымъ взаимодѣйствіемъ матеріальной точки, которой сообщаютъ ускореніе со всѣми другими матеріальными точками. Этотъ результатъ представляется весьма удовлетворительнымъ, если принять во вниманіе слѣдующее: понятіе о движеніи или ускореніи тѣла, взятаго само по себѣ, лишено смысла; можно лишь говорить о движеніи или ускореніи тѣла относительно другихъ тѣлъ. То же самое должно относиться и къ сопротивленію инерціи, которое тѣло оказываетъ ускоренію; можно ожидать a priori, — хотя логически это и не представляетея необходимымъ, — что сопротивленіе инерціи есть не что иное, какъ сопротивленіе ускоренію разсматриваемаго тѣла относительно совокупности всѣхъ прочихъ.

Очерченное здѣсь расширеніе теоріи относительности приводитъ, правда, къ весьма сложнымъ уравненіямъ; но они выводятся изъ основъ посредствомъ поразительно малаго числа гипотезъ, и имѣютъ, повидимому, преимущество предъ теоріей Нордштрёма, удовлетворяя воззрѣнію объ относительности инерціи. Однако, при современномъ состояніи опытной науки нельзя, конечно, сказать, какая изъ двухъ теорій лучше согласуется съ природой. Этотъ вопросъ рѣшатъ фотографическіе снимки звѣздъ, появляющихся около солнца во время солнечныхъ затменій. Нужно надѣяться, что солнечное затменіе въ 1914 году принесетъ съ собою важное для насъ рѣшеніе.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Оптофонъ (свѣтъ въ звукахъ). Давно уже люди стремятся облегчить печальную участь несчастныхъ, лишенныхъ зрѣнія; въ этомъ направленіи недавно достигнутъ большой успѣхъ. Профессору Бирмингамскаго университета Фурнье-Д'Альбу (E. E. Fournier-d'Albe) удалось послѣ многолѣтнихъ трудовъ построить аппаратъ, который даетъ возможность лишеннымъ зрѣнія воспринимать слухомъ различія въ яркости свѣта. Опишемъ вкратцѣ этотъ приборъ, который изобрѣтатель назвалъ оптофономъ.

Этотъ аппаратъ основанъ на извѣстномъ свойствѣ селена измѣнять свое электрическое сопротивленіе въ зависимости отъ яркости освѣщенія; какъ извѣстно, это свойство нашло себѣ примѣненіе, между прочимъ, и въ электрической передачѣ изображеній — такъ называемой телефотографіи.

Въ одну изъ четырехъ вѣтвей (рис. 1) Витстонова мостика включенъ «селеновый элементъ» или, примѣняя болѣе новый и подходящій терминъ, «селеновый мостъ». Сопротивленія трехъ прочихъ вѣтвей регулируютъ такимъ образомъ, чтобы стрѣлка включеннаго въ мостъ гальванометра оставалась въ покоѣ; вмѣсто гальванометра можно включить телефонъ, который при такомъ распредѣленіи сопротивленій будетъ молчать. Предполагается, что и въ томъ и въ другомъ случаѣ во время опыта не измѣняется яркость свѣта, падающаго на селеновый мостъ. При всякомъ измѣненіи освѣщенія, т. е. при всякомъ усиленіи его или ослабленіи, нарушается состояніе равновѣсія въ Витстоновомъ мостѣ, и стрѣлка гальванометра отклоняется или телефонъ издаетъ звукъ. Такимъ путемъ слѣпой, прислушиваясь къ телефону, въ состояніи сказать намъ, измѣнилась ли яркость освѣщенія селеноваго моста или нѣтъ. Мы можемъ, далѣе, регулировать сопротивленіе такимъ образомъ, чтобы телефонъ былъ въ покоѣ, когда селенъ находится въ темнотѣ; при начальной установкѣ на темноту можно будетъ также знать опредѣленно, въ какую сторону измѣняется яркость освѣщенія (т. е. усиливается ли она или уменьшается).

Но въ этой сравнительно простой формѣ аппаратъ недостаточно чувствителенъ. Чтобы повысить его чувствительность, Фурнье-Д'Альбъ примѣняетъ такъ называемый дифференціальный способъ, представленный схематически на рис. 1. На рисункѣ черезъ Se, Se обозначены два селеновыхъ мостика, C, C — два графитовыхъ сопротивленія, M — реостатъ изъ манганиновой проволоки и K — скользящій контактъ, который можетъ быть передвигаемъ по этой проволокѣ. Этотъ Витстоновъ мостъ содержитъ батарею B и телефонъ Te. Прерыватель R, который представляетъ собою зубчатое колесо, приводимое въ движеніе часовымъ механизмомъ, преобразуетъ постоянный токъ, доставляемый батареей, въ прерывистый (прерывая его около 10 разъ въ секунду), и позволяетъ такимъ образомъ примѣнять вмѣсто гальванометра телефонъ. Когда на одинъ изъ селеновыхъ элементовъ падаетъ свѣтъ, то въ телефонѣ слышится гудѣніе, по силѣ котораго можно судить о яркости свѣта. То же самое происходило бы, если бы темный селеновый элементъ былъ замѣненъ постояннымъ сопротивленіемъ. Но дифференціальный способъ имѣетъ то преимущество, что инструментъ остается чувствительнымъ къ свѣтовымъ контрастамъ также и при измѣненіи полнаго освѣщенія, и для этого не требуется новой установки реостата.

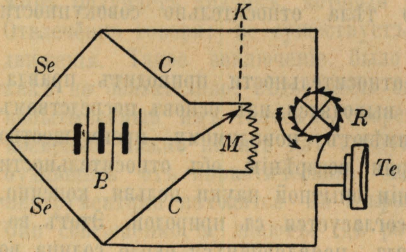

Рис. 1.

Въ описанной здѣсь конструкціи сопротивленіе каждаго селеноваго мостика составляетъ отъ 1000 до 2000 омовъ. Телефонъ имѣетъ форму, употребительную въ безпроволочномъ телеграфѣ. Батарея можетъ имѣть лишь незначительную электродвижущую силу. Фурнье Д'Альбъ употребляетъ маленькія батареи въ 4 вольта, которыя примѣняются въ повсемѣстно распространенныхъ теперь карманныхъ электрическихъ фонаряхъ и цѣнятся очень дешево. О чувствительности, достигаемой при такомъ устройствѣ прибора, Фурнье Д'Альбъ говоритъ въ цитированномъ выше сообщеніи слѣдующее: «Телефонный токъ въ среднемъ (англійскомъ) дневномъ свѣтѣ составляетъ около 0,1 миллиампера, и такъ какъ телефонъ достаточно чувствителенъ, чтобы дѣлать слышнымъ токъ въ 0,1 микроампера, то чувствительность оптофона вполнѣ достаточна для того, чтобы позволять уху воспринимать наиболѣе яркіе свѣтовые контрасты предметовъ при дневномъ освѣщеніи; ночью же слѣпые могутъ съ увѣренностью опредѣлять мѣсто пламени свѣчи и газовой или керосиновой лампы даже на разстояніи 20 метровъ».

Оптофонъ имѣетъ весьма удобную форму. Всѣ части аппарата, за исключеніемъ телефона, находятся въ прямоугольномъ ящикѣ, наибольшее измѣреніе котораго составляетъ около 25 *см.* Какъ показываетъ рис. 2, весь аппаратъ со своей діафрагмой, образуемой селеновыми мостиками, напоминаетъ фотографическую камеру. Телефонъ прикрѣпленъ къ пружинящему обручу, который одѣвается на голову, какъ то обычно дѣлается телефонистками.

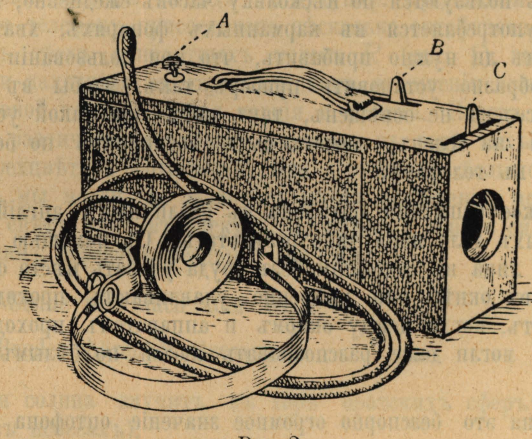

Рис. 2.

Какъ видно на рис. 2, изъ ящика выдаются наружу три части: ключъ A для завода часового механизма, рычагъ B, съ помощью котораго передвигаютъ скользящій контактъ K (рис. 1), и рычагъ C, посредствомъ котораго можно расширять и суживать отверстіе діафрагмы.

Конструкторъ оптофона Бэли (R. Bailey, 14 and 15 Bennett's Hill, Бирмингамъ), оптикъ глазной клиники, даетъ въ краткомъ проспектѣ слѣдующія указанія относительно употребленія прибора. Посредствомъ головного обруча телефонъ укрѣпляютъ передъ ухомъ; обручъ долженъ сидѣть плотно, чтобы руки оставались свободными. Затѣмъ съ помощью ключа A (рис. 2) заводятъ часовой механизмъ и передвигаютъ рычагъ B до тѣхъ поръ, пока въ телефонѣ не услышатъ гудѣнія, послѣ чего уменьшаютъ, насколько возможно, отверстіе діафрагмы и устанавливаютъ оптофонъ, подобно фотографической камерѣ, на открытое небо, но не на солнце. Затѣмъ передвигаютъ рычагъ B, пока гудѣніе въ телефонѣ не сдѣлается возможно слабѣе. Если этимъ способомъ нельзя заставить телефонъ утихнуть, то необходимо открыть крышку оптофона и нѣсколько передвинуть контактный рычагъ K (рис. 1). При описанной сейчасъ установкѣ аппаратъ имѣетъ наивысшую чувствительность. Если передвигать мимо отверстія діафрагмы руку или какой-либо другой непрозрачный предметъ, то телефонъ даетъ объ этомъ знать своимъ гудѣніемъ. При этомъ наиболѣе громкій звукъ соотвѣтствуетъ прохожденію реберъ или краевъ, такъ какъ въ этихъ мѣстахъ наиболѣе велики различія въ яркости освѣщенія. Полную дѣятельность оптофонъ развиваетъ лишь спустя нѣсколько секундъ послѣ начала; по этой причинѣ медленныя движенія улавливаются имъ легче, чѣмъ быстрыя. Однако, въ яркомъ свѣтѣ черезъ аппаратъ можно уловить даже быстролетныя тѣни. Въ слабомъ свѣтѣ рекомендуется раскрывать діафрагму возможно шире. Продолжительная экспозиція на яркомъ свѣтѣ «ослѣпляетъ» оптофонъ совершенно такъ же, какъ человѣческій глазъ, и потому послѣ такой экспозиціи оптофонъ требуетъ нѣкотораго отдыха, чтобы возстановить свою чувствительность къ слабому свѣту. Послѣ употребленія рычагъ B передвигаютъ назадъ до конца и зажимаютъ; этимъ способомъ выключаютъ токъ, благодаря чему достигается экономія на батареѣ. Если аппаратомъ пользуются по нѣскольку часовъ ежедневно, то обыкновенной батареи, какая употребляется въ карманныхъ фонаряхъ, хватаетъ примѣрно на мѣсяцъ. Врядъ ли нужно прибавить, что при пользованіи оптофономъ въ темнотѣ цѣлесообразно установить приборъ такъ, чтобы въ телефонѣ была тишина, когда селенъ не освѣщенъ, такъ какъ при такой установкѣ всякій свѣтъ, падающій на селенъ, можетъ быть воспринятъ по болѣе или менѣе громкому звуку въ телефонѣ.

Практическое испытаніе оптофона въ различныхъ англійскихъ учрежденіяхъ для слѣпыхъ дало наилучшіе результаты. Съ помощью оптофона совершенно ослѣпшія лица въ состояніи безъ труда указать мѣсто окна въ комнатѣ и перекладины въ окнѣ; они увѣренно улавливаютъ проходящія облака и вѣрно указываютъ, когда между окномъ и аппаратомъ проходятъ люди. Нѣкоторые слѣпые могли даже разспознавать людей по бѣлымъ передникамъ и манишкамъ.

Несмотря на это безспорно огромное значеніе оптофона для совершенно слѣпыхъ людей, изобрѣтатель весьма опредѣленно указываетъ, что не слѣдуетъ слишкомъ переоцѣнивать значеніе аппарата для не вполнѣ лишенныхъ зрѣнія, такъ какъ въ своемъ теперешнемъ видѣ оптофонъ можетъ сообщать нашему слуху только о различіяхъ въ яркости, каковыя человѣкъ, не вполнѣ слѣпой, въ состояніи распознавать также и безъ спеціальныхъ аппаратовъ. Профессоръ Фурнье Д'Альбъ работаетъ, однако, надъ дальнѣйшимъ усовершенствованіемъ своего аппарата, и нужно надѣяться, что его усилія увѣнчаются успѣхомъ.

Читатели, знакомые съ фотофономъ, изобрѣтеннымъ въ 1878 г. Грэмомъ Беллемъ (Graham Bell), захотятъ, можетъ быть, примѣнить къ изобрѣтенію Фурнье Д'Альба изреченіе Екклезіаста: «нѣтъ ничего новаго подъ солнцемъ». Но въ данномъ случаѣ это было бы несправедливо. Въ самомъ дѣлѣ, назначеніе фотофона — передавать черезъ посредство свѣта звуковыя колебанія телефона или микрофона другому отдаленному телефону. Для этой цѣли мембрана аппарата на станціи отправленія снабжена зеркаломъ, на которое падаютъ лучи отъ очень яркаго источника свѣта (солнце или дуговая лампа). Свѣтъ, отраженный зеркаломъ, падаетъ на селеновый элементъ, находящійся въ цѣпи отдаленной станціи назначенія (при достаточно чувствительныхъ аппаратахъ разстояніе между станціями можетъ достигать 1 *км.*). Колебанія мембраны на подающей станціи вызываютъ соотвѣтственныя колебанія въ освѣщеніи селеноваго элемента и, въ связи съ этимъ, колебанія въ силѣ телефоннаго тока на станціи полученія.

Такимъ образомъ, въ фотофонѣ звуки превращаются въ свѣтъ, а этотъ послѣдній обратно въ звуки. Съ перваго взгляда эта задача можетъ показаться болѣе сложной, чѣмъ одно только превращеніе свѣта въ звукъ, которое удалось осуществить въ оптофонѣ цѣною многолѣтнихъ трудовъ, болѣе чѣмъ тридцать лѣтъ спустя послѣ рѣшенія первой задачи. Однако, при ближайшемъ разсмотрѣніи задача, нашедшая свое рѣшеніе въ фотофонѣ, оказывается болѣе простой. Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь все сводится къ тому, чтобы ритмъ колебаній одной мембраны передать другой мембранѣ, и для этой цѣли прибѣгаютъ къ дѣйствію яркаго свѣта. Оптофонъ же даетъ возможность воспринимать слухомъ очень слабыя колебанія яркости, — напримѣръ, вызываемыя въ комнатѣ прохожденіемъ облака по пасмурному небу.

Въ заключеніе бросимъ взглядъ на будущее. Представимъ себѣ, что къ одному и тому же телефону присоединено нѣсколько оптофоновъ, напримѣръ, 3. Числа перерывовъ трехъ контактныхъ колесъ R (рис. 1) выбраны такимъ образомъ, что они находятся въ гармоническомъ отношеніи между собой, — скажемъ, какъ основной тонъ, большая терція и квинта. Передъ тремя діафрагмами помѣщены различные свѣтовые фильтры въ родѣ тѣхъ, которые употребляются въ трехцвѣтной фотографіи. При достаточно большой чувствительности аппаратовъ мы могли бы различать цвѣтъ освѣщенія, могли бы также разлагать бѣлый свѣтъ, какъ въ спектрѣ. Прекрасный образъ симфоніи цвѣтовъ получилъ бы такимъ образомъ реальное значеніе:

«Die Sonne tönt nach aller Weise
In Brudersphären Wettgesang».

(«Древняя мелодія солнца звучитъ въ хорѣ братскихъ сферъ». Гёте, «Фаустъ», прологъ въ небесахъ).

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Д-ръ Германъ Ганкель. *Теорія комплексныхъ числовыхъ системъ, преимущественно обыкновенныхъ мнимыхъ чиселъ и кватерніоновъ Гамильтона вмѣстѣ съ ихъ геометрическимъ толкованіемъ.* Переводъ съ нѣмецкаго студентовъ Математическаго Кружка при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Подъ редакціей и съ добавленіями прив.-доц. Императорскаго Казанскаго Университета Н. Н. Парфентьева. Казань, 1912. Стр. XVI + 242 + III.

Оригиналъ сочиненія, переводъ котораго въ настоящее время изданъ подъ редакціей и по иниціативѣ проф. Н. Н. Парфентьева, вышелъ въ свѣтъ въ 1867 году, т. е. почти полвѣка тому назадъ. Книга посвящена обоснованію ариѳметики, главнымъ образомъ, формальной теоріи комплексныхъ чиселъ въ широкомъ смыслѣ этого слова, т. е. включая сюда и высшія комплексныя числа.

Изданіе книги въ переводѣ черезъ 50 лѣтъ послѣ появленія въ свѣтъ оригинала есть явленіе весьма рѣдкое. Естественно поэтому, что надъ вопросомъ о томъ, заслуживаетъ ли этого сочиненіе, прежде всего задумался г. Парфентьевъ, взявъ на себя иниціативу этого изданія, задумался и пишущій эти строки, составляя о ней отзывъ. Мы представляемъ себѣ изданіе старой книги цѣлесообразнымъ въ двухъ случаяхъ: либо если книга еще не потеряла своего интереса, либо же если историческое ея значеніе настолько велико, что она можетъ быть признана классическимъ сочиненіемъ, переживающимъ столѣтія. Къ послѣднимъ сочиненіямъ книга Ганкеля, конечно, не принадлежитъ: хотя она и сыграла въ свое время видную роль, но это была уже роль комментатора и популяризатора, а не провозвѣстника новыхъ идей. Остается поэтому опредѣленно отвѣтить на вопросъ, сохранила ли книга Ганкеля не историческій, а живой, актуальный интересъ. Г. Парфентьевъ отвѣчаетъ на этотъ вопросъ утвердительно, очень настойчиво, даже съ энтузіазмомъ. Можно ли безъ оговорокъ присоединиться къ этому взгляду?

Если мы, желая отвѣтить на этотъ вопросъ, спросимъ себя, стоитъ ли книга все еще на высотѣ современной науки, то на этотъ вопросъ мы, конечно, должны будемъ отвѣтить отрицательно. Послѣ появленія книги Ганкеля появилась и получила развитіе (въ примѣненіи къ основамъ ариѳметики) идея о группѣ сопряженій. Хотя г. Парфентьевъ въ одномъ изъ своихъ примѣчаній указываетъ, что идея Ганкеля о замкнутой системѣ, по существу, совпадаетъ съ идеей о группѣ, но это, конечно, только зародышъ этой идеи. Послѣ книги Ганкеля появились работы Дедекинда и Кантора о непрерывности числового ряда, — работы, положившія на ученіе о числовомъ рядѣ совершенно неизгладимый отпечатокъ, — и это кореннымъ образомъ вліяетъ на самое сочиненіе: общей теоріи ирраціональныхъ чиселъ въ книгѣ Ганкеля нѣтъ и не можетъ быть, такъ какъ безъ принципа Дедекинда, Кантора или эквивалентнаго постулата эта теорія построена быть не можетъ. «Само собою разумѣется», — пишетъ авторъ по поводу своей теоріи вещественныхъ чиселъ, — „при этомъ приходилось входить въ соображенія, по характеру относящіяся къ «метафизикѣ счисленія», которая по своей формѣ нѣсколько отличается отъ чисто математической дедукціи, — но это было неизбѣжно“. Современные авторы категорически порываютъ со всякой метафизикой и дѣйствительно имѣютъ возможность это выполнить. Послѣ сочиненія Ганкеля вылился въ опредѣленную форму вопросъ о системѣ независимыхъ и достаточныхъ постулатовъ для формальнаго обоснованія дисциплины. Послѣ книги Ганкеля выросъ, по выраженію Ресселя, цѣлый міръ математическихъ идей въ видѣ логики предложеній, логики классовъ и логики отношеній, и эти идеи кореннымъ образомъ вліяютъ на обоснованіе ариѳметики. Такимъ образомъ, отъ современнаго состоянія вопроса книга Ганкеля необычайно далека.

И при всемъ томъ я рѣшительно не вижу возможности отказать книгѣ Ганкеля въ глубокомъ интересѣ и привѣтствовать ея появленіе на русскомъ языкѣ.

Ганкель — ученикъ, комментаторъ и интерпретаторъ двухъ геніальныхъ творцовъ формальной ариѳметики — Грассмана и Гамильтона. Эти два геніальные математика независимо другъ отъ друга развили общую теорію комплексныхъ чиселъ, составленныхъ изъ произвольнаго числа независимыхъ единицъ, на строго формальныхъ основаніяхъ. Но работы эти трудны, мало доступны и, какъ извѣстно, долго не получали признанія: они нуждались въ интерпретаціи, въ обработкѣ. Ганкелю принадлежитъ лучшая изъ этихъ обработокъ. Первая заслуга сочиненія заключается въ томъ, что она дѣйствительно отчетливо выясняетъ, что, собственно, такое формальная точка зрѣнія на числа и на операціи надъ ними. Во-вторыхъ, здѣсь съ большою отчетливостью выдвинута идея, получившая у Ганкеля наименованіе «закона перманентности» и дѣйствительно имѣющая руководящее значеніе въ дѣлѣ развитія понятія «число». Какъ мы уже упомянули, теорія вещественныхъ чиселъ у Ганкеля очень слаба. Оно и понятно: какъ уже было сказано, Ганкель не имѣетъ, на что въ этомъ дѣлѣ опереться; онъ остается на границѣ метафизики. Однако, крупный умъ сказывается уже въ томъ, что онъ не скрываетъ этого ни отъ себя ни отъ своего читателя. Но когда авторъ переходитъ къ комплекснымъ числамъ, то дѣло обстоитъ иначе: теперь необходимая база уже есть; это — хорошо ли, худо ли, но во всякомъ случаѣ уже установленная — теорія вещественныхъ чиселъ. Располагая этимъ фундаментомъ, Ганкель строитъ Грассмано-Гамильтоновскую теорію высшихъ комплексныхъ чиселъ съ большой простотой и ясностью; онъ иллюстрируетъ ее многочисленными примѣрами, системами осуществленія этихъ формальныхъ дисциплинъ; вообще, книга даетъ ясное представленіе о предметѣ и оставляетъ цѣльное впечатлѣніе; она содержитъ въ себѣ большое число историческихъ указаній и справокъ.

Мы сказали выше, что книга Ганкеля далеко отстала отъ современной науки; но если бы насъ спросили, какое же сочиненіе можетъ дать такую же отчетливую картину современнаго состоянія вопроса, какая изображена въ книгѣ Ганкеля, то мы затруднились бы на это отвѣтить: не указать же трехтомное (пока) сочиненіе Рёсселя и Уайтегида*), написанное на символическомъ языкѣ, доступномъ немногимъ избраннымъ! А помимо этого мы имѣемъ лишь отдѣльные мемуары и популярныя статьи, дающіе очень смутное понятіе о сущности дѣла. Эти статьи оставляютъ обыкновенно въ читателѣ тяжелый осадокъ неудовлетворенности и сомнѣнія. Современная теорія ждетъ еще своего Ганкеля, своего интерпретатора. А пока онъ появится, скажемъ г. Парфентьеву спасибо за то, что онъ выпустилъ книгу, которая вводитъ читателя въ кругъ идей 60-хъ годовъ, но дѣлаетъ это отчетливо и хорошо. Мы совершенно убѣждены, что ни одинъ читатель, который затратитъ довольно большой трудъ, необходимый для усвоенія этой книги, объ этомъ не пожалѣетъ. Но онъ долженъ помнить, что онъ усваиваетъ идеи 60-хъ годовъ.

В. Каганъ.

---

*) Russel and Whitehead—Principia mathematica.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Э. Гримзель, проф. *Дидактика и методика физики въ средней школѣ*. Перевелъ І. В. Яшунскій. С.-Петербургъ, 1913. Книгоиздательство «Физика» («Библіотека для учителей», III). Стр. 166 + VIII.

Книга, подобно первому выпуску «Библіотеки для учителей» («Дидактика и методика математики» М. Симона), представляетъ переводъ сочиненія, входящаго въ составъ энциклопедіи А. Баумейстера «Handbuch der Erziehungs und Unterrichtslehre für höhere Schulen». Въ числѣ приложеній къ переводу данъ полный текстъ «Меранской» программы по физикѣ.

І. Я.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 146 (6 сер.). Найти остатокъ отъ дѣленія на p^2 числа

$$a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + \cdots + a_k^{p-1}$$

въ двухъ случаяхъ: 1) если p — простое число вида $2^n - 1$ и если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — цѣлыя числа, произведеніе которыхъ равно $2^n + 1$; 2) если p — простое число вида $2^n + 1$ и если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ — цѣлыя числа, произведеніе которыхъ равно $2^n - 1$.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 147 (6 сер.). Между двумя данными концентрическими окружностями построить отрѣзокъ, равный и параллельный данному отрѣзку AB.

И. Александровъ (Москва).

№ 148 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 149 (6 сер). Рѣшить уравненіе

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = a.$$

(Заимств. изъ *Časopis*).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

ОТДѢЛЪ I.

№ 101 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$16x^4 - 32x^3 + 16x + 3 = 0.$$

Представивъ лѣвую часть даннаго уравненія послѣдовательно въ видѣ:

$$16x^4 - 32x^3 + 16x^2 - 16x^2 + 16x + 3 = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) - 16(x^2 - x) + 3 =$$

$$= 16(x^2 - x)^2 - 16(x^2 - x) + 3,$$

замѣнимъ его тожественнымъ уравненіемъ

(1) $$16(x^2 - x)^2 - 16(x^2 - x) + 3 = 0.$$

Рѣшая уравненіе (1) относительно $x^2 - x$, получимъ, что

(2) $$x^2 - x = \frac{3}{4}$$

или

(3) $$x^2 - x = \frac{1}{4}\cdot$$

Записавъ уравненія (2) и (3) въ видѣ $4x^2 - 4x - 3 = 0$ и $4x^2 - 4x - 1 = 0$ и рѣшая каждое изъ нихъ, находимъ четыре корня:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

В. Кованько (ст. Струнино); *И. Зюзинъ* (Стерлитамакъ); *П Волохинъ* (Ялта); *N. N.*; *А. Сердобинскій* (Чита); *С. Конюховъ* (Томскъ); *Б. Гершоновичъ* (Самара); *Флавіанъ Д.* (Петербургъ); *П. Войковъ* (Женева); *П. Гольманъ* (ст. Кобеляки).

№ 106 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^5 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^5.$$

Полагая

(1) $$y = \frac{1+x}{1-x},$$

можно записать данное уравненіе въ видѣ:

$$x^5 + y^5 = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5}, \quad \text{или} \quad x^5y^5(x^5+y^5) = (x^5+y^5), \quad \text{т. е.} \quad (x^5+y^5)(x^5y^5-1)=0,$$

а потому должно имѣть мѣсто одно изъ уравненій:

(2) $$x^5 + y^5 = 0$$

или

(3) $$x^5y^5 - 1 = 0.$$

Изъ уравненія (2) находимъ, что $x^5 = -y^5$, откуда $x = -ay$, гдѣ a — одно изъ пяти значеній корня пятой степени изъ единицы, или же [см. (1)]:

$$x = -\frac{a(1+x)}{1-x},$$

откуда

(4) $$x^2 - (1+a)x - a = 0.$$

Подобнымъ же образомъ изъ уравненія (3) получаемъ послѣдовательно:

$$x^5y^5 = 1, \quad xy = a, \quad \frac{x(1+x)}{1-x} = a,$$

откуда

(5) $$x^2 + (1+a)x - a = 0,$$

гдѣ a опять можетъ имѣть одно изъ пяти указанныхъ выше значеній. Такимъ образомъ, данное уравненіе распадается на десять квадратныхъ уравненій, а именно пять уравненій (4), отвѣчающихъ пяти значеніямъ a, и пять уравненій (5). Рѣшая уравненія (4) и (5), получимъ двадцать корней даннаго уравненія, а именно:

(6) $$x_{1,2,\cdots,10} = \frac{1+a \pm \sqrt{1+6a+a^2}}{2},$$

(7) $$x_{11,12,\cdots,20} = \frac{-(1+a) \pm \sqrt{1+6a+a^2}}{2}.$$

Каждая изъ формулъ (6) и (7) даетъ по десяти корней, такъ какъ знаки $\pm$ передъ радикаломъ можно комбинировать съ любымъ изъ пяти значеній a. Полагая $a=1$, получаемъ изъ формулъ (6) и (7) четыре дѣйствительныхъ корня, а именно (при надлежащемъ нумерованіи корней):

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x_{11,12} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Замѣчанія. 1°. Пять значеній a суть: $a\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ при $k=1, 2, 3, 4, 5$, $i=\sqrt{-1}$.

2°. Преобразованіе даннаго уравненія къ виду $x^5+y^5=\frac{1}{x^5}+\frac{1}{y^5}$ и освобожденіе уравненій (2) и (3) [см. (1)] отъ знаменателя не приводитъ къ особымъ случаямъ. такъ какъ ни одинъ изъ корней не обращаетъ двучленовъ $1-x$ и $1+x$ въ нуль, ибо ни одинъ изъ корней не равенъ 1 или (-1).

N. N.; *В. Кованько* (ст. Струнино); *А. Суринъ* (Астрахань); *С. Конюховъ* (Томскъ); ***Флавіанъ Д.*** (Петербургъ).

№ 109 (6 сер). *Рѣшить уравненіе*

$$\sin 2x-\frac{40(\sin^3 x+\cos^3 x)}{16\sin x+25\cos x}=0.$$

Замѣняя $\sin 2x$ черезъ $2\sin x\cos x$, освобождая уравненіе отъ знаменателя и сокращая на 2, получимъ послѣдовательно:

$$16\sin^2 x\cos x+25\sin x\cos^2 x-20\sin^3 x-20\cos^3 x=0,$$

$$(16\sin^2 x\cos x-20\sin^3 x)-(20\cos^3 x-25\sin x\cos^2 x)=0,$$

$$4\sin^2 x(4\cos x-5\sin x)-5\cos^2 x(4\cos x-5\sin x)=$$

$$=(4\sin^2 x-5\cos^2 x)(4\cos x-5\sin x)=0,$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$4\sin^2 x-5\cos^2 x=0 \quad \text{и} \quad 4\cos x-5\sin x=0,$$

или

(1) $$\operatorname{tg}^2 x=\frac{5}{4},$$

(2) $$\operatorname{tg} x=\frac{4}{5}.$$

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

(3) $$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Рѣшая уравненія (2) и (3) при помощи таблицъ, находимъ слѣдующія (приближенныя) значенія угла x:

$$x_1=38^\circ 39' 37''+k.180^\circ,\quad x_{2,3}=\pm 48^\circ 11' 23''+k.180^\circ,$$

гдѣ k — произвольное цѣлое число.

В. Павловъ (с. Ворсма); ***Флавіанъ Д.*** (Петербургъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Д. А. Крыжановскій, прив.-доц. Императорскаго Новороссійскаго Университета. *О максимальныхъ и минимальныхъ свойствахъ плоскихъ фигуръ.* Одесса, 1913. Стр. I + 99. Ц. 50 к.

Е. И. Игнатьевъ. *Начатки ариѳметики.* Часть I. Изд. т-ва А. С. Суворина. С.-Петербургъ, 1914. Стр. 216.

Н. Гернетъ. *Объ основной простѣйшей задачѣ варіаціоннаго исчисленія.* С.-Петербургъ, 1913. Стр. 151.

И. Александровъ, преподаватель гимназіи Поливанова въ Москвѣ. *Основанія ариѳметики соизмѣримыхъ чиселъ.* Изданіе 3-е, исправленное и дополненное. Москва, 1913. Ц. 25 к.

Дж. Б. Педлъ, проф. машиностроенія въ Rose Polytechnic Institute (Соединенные Штаты Сѣв. Америки). *Построеніе и примѣненіе номограммъ.* Разрѣшенный авторомъ переводъ съ англійскаго Е. П. Куколевской, подъ редакціей преподавателя Императорскаго Московскаго Техническаго училища Р. В. Полякова. Москва, 1913. Стр. 182. Ц. 2 р. 25 к.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Настоящимъ семестромъ заканчивается двадцатипятилѣтіе существованія „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Редакція обратилась къ ученымъ, не отказывавшимъ „Вѣстнику" въ эту четверть вѣка въ своемъ содѣйствіи, съ просьбою украсить заключительный номеръ своими статьями. Эта просьба встрѣтила сочувствіе и матеріалы въ настоящее время поступаютъ. Въ зависимости отъ ихъ размѣровъ либо остающіеся четыре номера текущаго семестра будутъ соединены въ одинъ, который выйдетъ въ серединѣ января, либо въ декабрѣ будетъ еще выпущенъ девятый номеръ, а остальные будутъ соединены въ одинъ.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, №

Обложка
ищется

Обложка
ищется