Обложка
ищется

Обложка
ищется

L Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 592.

Этюды по элементарной алгебрѣ.

Н. Ниноса.

*(Дополненіе *).*

X. Доказательство неравенства $\omega_2 < 0$ (§ VII). Слѣдствія.

Въ § I (стр. 114) мы отмѣтили, что неравенства $x > a$ и $x^n > a^n$ существуютъ совмѣстно, такъ что по одному изъ нихъ необходимо заключить о существованіи другого. Вообще, если $F(x)$ представляетъ выраженіе, зависящее отъ положительнаго числа x, и значенія этого выраженія возрастаютъ при возрастаніи x, то неравенства $x > a$ и $F(x) > F(a)$ будутъ совмѣстны, и изъ существованія одного изъ нихъ необходимо заключить о существованіи другого. Такъ, неравенство $x > a$ должно существовать, если извѣстно, что $E(x) > E(a)$, или $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{a}$, или $L(x) > L(a)$ и т. п.

Мы знаемъ (§ VI, стр. 153), что

$$E(z) > S_3 = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{1.2.3}, \qquad z > 0,$$

*) См. № 586 „Вѣстника“. Ссылки указываютъ страницы XLIX-го семестра.

откуда, вычитая изъ обѣихъ частей по $1+z^2$, получимъ:

$$E(z)-(1+z^2)>z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}=\frac{z}{6}\left[\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]>0,$$

т. е. $E(z)>1+z^2$ при $z>0$. Принимая здѣсь $z=\sqrt{n-1}$, гдѣ $n>1$, будемъ имѣть: $E(\sqrt{n-1})>n=E[L(n)]$, откуда заключаемъ, что

$$L(n)<\sqrt{n-1}, \quad \text{или} \quad \frac{L(n)}{\sqrt{n-1}}<1 \qquad \text{при } n>1.$$

Обращаясь теперь къ выраженію (стр. 201):

$$\omega_2=\frac{n+1}{n}\sqrt[2n+2]{\frac{n}{n+1}}\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n+1}}+\frac{n}{n+1}\sqrt[2n-2]{\frac{n}{n+1}}\sqrt[2n(n-1)]{n+1}-2,$$

мы замѣтимъ, что

$$\sqrt[2n+2]{\frac{1}{n+1}}\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n+1}}=\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{(n+1)^n}}\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n+1}}=\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}=\sqrt[2n]{\frac{1}{n+1}},$$

$$\sqrt[2n-2]{\frac{1}{n+1}}\sqrt[2n(n-1)]{n+1}=\sqrt[2n(n-1)]{\frac{1}{(n+1)^n}}\sqrt[2n(n-1)]{n+1}=\sqrt[2n(n-1)]{\frac{1}{(n+1)^{n-1}}}=\sqrt[2n]{\frac{1}{n+1}},$$

вслѣдствіе чего получимъ, по умноженіи ω_2 на $-\sqrt[2n]{\frac{n+1}{n}}$:

$$-\sqrt[2n]{\frac{n+1}{n}}\,\omega_2=2\sqrt[2n]{\frac{n+1}{n}}-\frac{n+1}{n}\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n}}-\frac{n}{n+1}\sqrt[2n(n-1)]{n}=\omega'.$$

Мы докажемъ, что вторая часть этого равенства, которую мы обозначили ω', положительна при $n>5$, откуда $\omega_2<0$.

Въ § III (стр. 130) было выведено неравенство, которое, послѣ подстановки $2n$ вмѣсто n, принимаетъ видъ:

$$x-a>2a\,\frac{x^{2n}-a^{2n}}{(2n-1)\,x^{2n}+(2n+1)\,a^{2n}}, \qquad x>a>0.$$

Полагая здѣсь $a=1$, $x=\sqrt[2n]{\frac{n+1}{n}}$, получимъ:

$$\sqrt[2n]{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{2}{4n^2+2n-1}. \tag{75}$$

Замѣтимъ теперь, что изъ общей формулы § VI (стр. 157) при $k=2$ слѣдуетъ:

$$E(z) < S_2 + \frac{z^2}{2!}\frac{z}{3-z} = 1 + z + \frac{z^2}{2}\frac{3}{3-z}, \qquad z<3,$$

откуда находимъ:

$$\begin{aligned} \sqrt[2n(n-1)]{n} &= E\left[L\left(\sqrt[2n(n-1)]{n}\right)\right] \\ &= E\left[\frac{L(n)}{2n(n-1)}\right] < 1 + \frac{L(n)}{2n(n-1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{L(n)}{2n(n-1)}\right]^2 \frac{3}{3-\frac{L(n)}{2n(n-1)}}, \end{aligned} \tag{76}$$

гдѣ (см. стр. 90)

$$\frac{L(n)}{2n(n-1)} = \frac{1}{2n\sqrt{n-1}}\cdot\frac{L(n)}{\sqrt{n-1}} < \frac{1}{2n\sqrt{n-1}} \leqq \frac{1}{20} \quad \text{при } n \geqq 5;$$

поэтому послѣднее неравенство и подавно сохранится при $n>5$, когда во второй части знаменатель послѣдняго члена замѣнимъ числомъ $3-\frac{1}{20}$.

Разложеніе $E(-z)$ можно представить въ видѣ:

$$E(-z) = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!}\left(1-\frac{z}{4}\right) - \cdots - \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(1-\frac{z}{2k}\right) - \ldots, \qquad z>0$$

откуда видно, что $E(-z) < 1 - z + \frac{z^2}{2}$ при $0<z<4$. Въ силу этого будемъ имѣть:

$$\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n}} = E\left[-\frac{L(n)}{2n(n+1)}\right] < 1 - \frac{L(n)}{2n(n+1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{L(n)}{2n(n+1)}\right]^2. \tag{77}$$

На основаніи неравенствъ (75), (76) и (77) заключимъ, что

$$\omega' > 2 + \frac{4}{4n^2+2n-1} - \frac{n+1}{n}\left\{1 - \frac{L(n)}{2n(n+1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{L(n)}{2n(n+1)}\right]^2\right\}$$

$$-\frac{n}{n+1}\left\{1 + \frac{L(n)}{2n(n-1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{L(n)}{2n(n-1)}\right]^2\cdot\frac{60}{59}\right\},$$

откуда, раскрывая скобки и дѣлая приведенiе, получимъ:

$$\omega' > \frac{2n+1}{n(n+1)(4n^2+2n-1)} - \frac{L(n)}{2n^2(n^2-1)} - \frac{[L(n)]^2}{8n(n+1)}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{60}{59(n-1)^2}\right\}.$$

Это неравенство и подавно сохранится, если уменьшимъ первый членъ, откинувъ -1 въ послѣднемъ множителѣ знаменателя, а въ отрицательныхъ членахъ вставимъ $\sqrt{n-1}$ вмѣсто $L(n)$, такъ что будетъ:

$$\omega' > \frac{1}{2n^2(n+1)}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{4}\left[\frac{n-1}{n}+\frac{60n}{59(n-1)}\right]\right\},$$

гдѣ выраженiе:

$$\frac{n-1}{n}+\frac{60n}{59(n-1)} = 2\frac{1}{59}+\frac{1}{59(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)},$$

очевидно, убываетъ при возрастанiи n. Но при $n=6$ будемъ имѣть:

$$\omega' > \frac{1}{504}\left[1-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{727}{1416}\right] > \frac{1}{504}\cdot 0{,}038 > 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\omega_2 < 0$ при $n > 5$, а что $\omega_2 < 0$ при $n = 2, 3, 4, 5$ — въ этомъ можно убѣдиться непосредственно.

Итакъ, доказано, что значенiя положительной разности $z_{n+1} - z_n$ убываютъ при возрастанiи n. Отсюда можно сдѣлать заключенiе, что эта разность при безграничномъ возрастанiи n стремится къ опредѣленному предѣлу, который, какъ мы видѣли (стр. 186), будетъ болѣе $\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{e}$.

Вообще, когда значенiя нѣкотораго выраженiя U_n, зависящаго отъ натуральнаго числа n, убываютъ при возрастанiи n, но остаются болѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа D, то это выраженiе при безграничномъ возрастанiи n стремится къ опредѣленному предѣлу, который болѣе или равенъ D. Въ частномъ случаѣ, когда $U_n = n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$, намъ удалось (§ VIII), пользуясь особыми свойствами этого выраженiя, составить послѣдовательность возрастающихъ чиселъ и опредѣлить $L(A)$, какъ общiй предѣлъ двухъ послѣдовательностей; но и тогда мы отмѣтили, что, собственно говоря, существенной надобности въ составленiи возрастающей послѣдовательности нѣтъ. Въ общемъ случаѣ не можетъ быть и рѣчи о составленiи возрастающей послѣдовательности къ данной убывающей послѣдовательности

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,U_m,\ U_{m+1},\ \ldots,U_{m_1},\ \ldots,U_{m_2},\ \ldots,U_{m_k},\ \ldots,$$

а достаточно доказать, что въ этой послѣдней послѣдовательности можно найти такой членъ U_m, отъ котораго всѣ слѣдующіе за нимъ члены отличаются на числа, меньшія произвольно малаго числа ε; этотъ членъ U_m или любой изъ слѣдующихъ за нимъ представитъ собою и значеніе предѣла съ погрѣшностью, меньшею произвольно малаго числа ε. Но все, чего мы можемъ достигнуть по отношенію къ ирраціональнымъ числамъ, заключается именно въ возможности вычислять ихъ съ произвольною степенью точности.

Такимъ образомъ, намъ нужно доказать, что предположеніе, что всѣ члены вышенаписанной убывающей послѣдовательности остаются болѣе нѣкотораго числа D, неизбѣжно приводитъ къ заключенію о существованіи выше охарактеризованнаго числа U_m. Правильность такого заключенія мы докажемъ, обнаруживъ, что, отвергая это заключеніе, мы вступимъ въ противорѣчіе съ условіемъ, что всѣ члены послѣдовательности болѣе числа D. Но отвергнуть это заключеніе значитъ утверждать, что нельзя найти такого числа m, чтобы всѣ слѣдующія за U_m числа послѣдовательности отличались отъ U_m на числа, меньшія произвольно малаго числа ε. Если отрицательную форму такого утвержденія замѣнить положительною, то придется сказать, что, какъ бы мы ни выбирали число m, всегда можно найти такое большее число m_1, что разность $U_m - U_{m_1}$ будетъ болѣе нѣкотораго весьма малаго, но опредѣленнаго числа δ,—напримѣръ, единицы, стоящей на милліонномъ десятичномъ мѣстѣ ($10^{-1000000}$). Отсюда будетъ слѣдовать, что для числа m_1 можно найти большее число m_2, такъ что $U_{m_1} - U_{m_2} > \delta$, и т. д. Написавъ неравенства:

$$U_m - U_{m_1} > \delta,\ U_{m_1} - U_{m_2} > \delta,\ \ldots,\ U_{m_{k-1}} - U_{m_k} > \delta$$

и сложивъ ихъ, получимъ $U_m - U_{m_k} > k\delta$, откуда $U_{m_k} < U_m - k\delta$ и подавно $U_{m_k} < U_1 - k\delta$. Но выраженіе $U_1 - k\delta$ будетъ $< D$, если возьмемъ $k > \frac{U_1 - D}{\delta}$; слѣдовательно, будетъ $U_{m_k} < D$, что противорѣчитъ нашему условію, что всѣ члены послѣдовательности $U_n > D$.

Въ примѣненіи къ нашему частному случаю, когда $U_n = z_{n+1} - z_n$, $D = 0$, заключаемъ, что существуетъ предѣлъ разности $z_{n+1} - z_n$, который, какъ мы нашли изъ другихъ соображеній, не менѣе $\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{e}$. Обозначимъ этотъ предѣлъ буквою f, такъ что будемъ имѣть:

$$f < z_{m+1} - z_m < f + \varepsilon,$$

$$f < z_{m+2} - z_{m+1} < f + \varepsilon,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f < z_{m+k} - z_{m+k-1} < f + \varepsilon.$$

Складывая этотъ рядъ неравенствъ, получимъ:

$$kf < z_{m+k} - z_m < k(f+\varepsilon),$$

или

$$(m+k+1)f - (m+1)f < z_{m+k} - z_m < (m+k+1)(f+\varepsilon) - (m+1)(f+\varepsilon),$$

откуда слѣдуетъ:

$$f - \frac{(m+1)f - z_m}{m+k+1} < \frac{z_{m+k}}{m+k+1} < f + \varepsilon - \frac{(m+1)(f+\varepsilon) - z_m}{m+k+1}.$$

Если будемъ здѣсь безгранично увеличивать число k, то $\frac{z_{m+k}}{m+k+1}$ будетъ стремиться къ своему предѣлу, равному, какъ мы знаемъ (стр. 194), $\frac{1}{e}$, и предыдущее неравенство доставитъ $f < \frac{1}{e} < f + \varepsilon$, такъ что положительная разность двухъ опредѣленныхъ чиселъ $\frac{1}{e} - f$ будетъ менѣе произвольно малаго числа ε, а это значитъ, что $f = \frac{1}{e}$, т. е. предѣлъ $z_{n+1} - z_n$ при безграничномъ возрастанiи n равенъ $\frac{1}{e}$. Мы имѣемъ здѣсь примѣненiе къ частному случаю замѣчательной теоремы знаменитаго математика прошлаго вѣка Коши (Augustin Cauchy. Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1821, p. 48—50*).

Такъ какъ разность $z_{n+1} - z_n$ стремится къ предѣлу $\frac{1}{e}$, постоянно убывая, то отсюда слѣдуетъ, что

$$z_{n+1} - z_n > \frac{1}{e}, \quad \text{или} \quad ez_{n+1} - ez_n > 1;$$

а это неравенство приводится къ виду

$$ez_{n+1} - (n+1) > ez_n - n$$

и выражаетъ, что $ez_n - n$ возрастаетъ при возрастанiи n, такъ что будемъ имѣть:

$$ez_n - n > ez_m - m \quad \text{при} \quad n > m.$$

---

*) Существуетъ русскiй переводъ Ѳ. Эвальда, В. Григорьева и А. Ильина, изданный въ 1864 г. въ Лейпцигѣ подъ названiемъ: „Алгебрическiй анализъ", стр. 564, съ примѣчанiями и приложенiями А. Ильина на 250 страницахъ въ концѣ книги.

При $m = 2$ вторая часть представитъ число $e\sqrt{2} - 2$, которое мы обозначили (стр. 196) буквою a, такъ что теперь неравенство $n < ez_n - a$ представляется строго доказаннымъ.

При $m = 100$ будемъ имѣть $\lg z_{100} = 1{,}57970\,00365\,47$ и найдемъ $ez_{100} - 100 = 3{,}27484 = a_1$, такъ что

$$n < ez_n - a_1 \quad \text{при} \quad n > 100.$$

Замѣтимъ въ заключенiе, что неравенство (стр. 198)

$$\frac{z_{n+1} + z_{n-1}}{z_n} - 2 < 0$$

обусловливается тѣмъ, что дробь $\dfrac{z_{n+1} + z_{n-1}}{z_n}$ возрастаетъ при возрастанiи n, приближаясь къ числу 2, какъ къ предѣлу, т. е. что

$$\frac{z_{n+1} + z_{n-1}}{z_n} < \frac{z_{n+2} + z_n}{z_{n+1}}.$$

Это неравенство легко приводится къ виду:

$$z_{n+1}^2 - z_{n+2}z_n < z_n^2 - z_{n+1}z_{n-1},$$

выражающему, что $z_n^2 - z_{n+1}z_{n-1}$ убываетъ при возрастанiи n; а что это выраженiе положительно, видно изъ найденнаго нами ранѣе (стр. 186) неравенства $\dfrac{z_n}{z_{n-1}} > \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$.

XI. Изслѣдованiе выраженiя $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{sn+r}$, гдѣ r и s — натуральныя числа. Новое неравенство для z_n.

Примѣняя формулу бинома съ остаточнымъ членомъ, мы нашли въ § VII, что выраженiе $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n+1}$ убываетъ (стр. 180), а $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n+1}$ возрастаетъ (стр. 182) при возрастанiи n. Но разрѣшенiе вопроса о характерѣ измѣненiй общаго выраженiя, приведеннаго въ заглавiи, не можетъ быть выполнено при посредствѣ формулы бинома, но производится довольно легко при помощи логариѳмовъ.

Если предположимъ, что разсматриваемое выраженіе получаетъ возрастающія значенія при возрастаніи n, то будемъ имѣть:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{sn-s+r}, \qquad n > 1,$$

и такое же неравенство будетъ имѣть мѣсто между логариѳмами обѣихъ частей, т. е.

$$(sn+r)\,L\left(\frac{n+1}{n}\right) > (sn-s+r)\,L\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

откуда слѣдуетъ:

$$s\left[nL\left(\frac{n+1}{n}\right)-(n-1)\,L\left(\frac{n}{n-1}\right)\right] > r\left[L\left(\frac{n}{n-1}\right)-L\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = r\,L\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right). \quad (78)$$

Въ коэффиціентѣ при s вставимъ $\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ вмѣсто множителя n и $\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$ вмѣсто множителя $n-1$ и приведемъ этотъ коэффиціентъ къ виду:

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[L\left(\frac{n+1}{n}\right)-L\left(\frac{n}{n-1}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[L\left(\frac{n+1}{n}\right)+L\left(\frac{n}{n-1}\right)\right],$$

или окончательно къ виду:

$$\frac{1}{2}L\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)-\left[nL\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)-\frac{1}{2}L\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right],$$

послѣ чего предыдущее неравенство доставитъ:

$$\frac{r}{s} < \frac{1}{2}-\left[nL\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)-\frac{1}{2}L\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right] : L\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right).$$

Обозначимъ вычитаемое во второй части черезъ H_n, такъ что будетъ $\frac{r}{s} < \frac{1}{2} - H_n$, и вставимъ разложенія [см. формулы (65) и (67) на стр. 280 и 281]:

$$L\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = -L\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\cdots+\frac{1}{kn^{2k}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}L\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{1}{2}L\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\,n^{2k-1}}+\cdots$$

Такимъ образомъ найдемъ:

$$H_n = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{n^5}+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k-1}\right)\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\cdots+\frac{1}{kn^{2k}}+\cdots},$$

или

$$H_n = \frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{15n^2}+\cdots+\frac{k-1}{k(2k-1)n^{2k-4}}+\cdots}{n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)n^{2k-4}}+\frac{1}{kn^{2k-2}}+\cdots\right)}. \tag{79}$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по $\frac{1}{6n}$, получимъ:

$$H_n - \frac{1}{6n} = \frac{\frac{1}{20}+\cdots+\frac{(k-2)(4k-3)}{6(k-1)k(2k-1)n^{2k-6}}+\cdots}{n^3\left(1+\frac{1}{2n^2}+\cdots+\frac{1}{kn^{2k-2}}+\cdots\right)}.$$

Такъ какъ всѣ коэффиціенты во второй части положительны, то заключаемъ, что $H_n > \frac{1}{6n}\cdot$ Коэффиціенты въ числителѣ формулы (79) положительны и постоянно убываютъ, ибо разность

$$\frac{k-1}{k(2k-1)} - \frac{k}{(k+1)(2k+1)} = \frac{2k(k-1)-1}{k(k+1)(4k^2-1)} > 0 \quad \text{при} \quad k > 1;$$

поэтому числитель $< \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\cdots+\frac{1}{n^{2k-4}}+\cdots\right) = \frac{n^2}{6(n^2-1)}$.
А если въ рядѣ знаменателя опустимъ всѣ члены, кромѣ 1, то получимъ:

$$H_n < \frac{n}{6(n^2-1)} = \frac{1}{6n} + \frac{1}{6(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{6(n-1)}\cdot\frac{n}{n+1} < \frac{1}{6(n-1)}.$$

Сложивъ съ двойнымъ неравенствомъ

$$\frac{1}{6n} < H_n < \frac{1}{6n} + \frac{1}{6(n-1)n(n+1)} < \frac{1}{6(n-1)} \tag{80}$$

получающееся изъ него черезъ подстановку $n+1$ вмѣсто n и перемѣну знака неравенство

$$-\frac{1}{6n} < -\frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6n(n+1)(n+2)} < -H_{n+1} < -\frac{1}{6(n+1)},$$

найдемъ:

$$0 < \frac{1}{6n(n+2)} < H_n - H_{n+1} < \frac{1}{6(n^2-1)},$$

откуда слѣдуетъ, что $H_n > H_{n+1}$, т. е. значенія H_n убываютъ при возрастаніи n. Это значитъ, что если числа r и s удовлетворяютъ условію $\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{2} - H_m$, то неравенство $\frac{r}{s} < \frac{1}{2} - H_n$ и подавно будетъ удовлетворено при $n > m$, т. е будемъ имѣть:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{s(n-1)+r}, \qquad n > m, \tag{81}$$

или, извлекая s-ый корень,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \sqrt[s]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{r}} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sqrt[s]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{r}}, \qquad n > m. \tag{81'}$$

Неравенство $H_n < \frac{1}{6(n-1)}$ обнаруживаетъ, что при достаточно большомъ значеніи n число H_n можетъ сдѣлаться менѣе произвольно малаго числа ε $\left(\text{если возьмемъ } n > 1 + \frac{1}{6\varepsilon}\right)$, откуда слѣдуетъ, что при $\frac{r}{s} < \frac{1}{2}$ всегда будетъ существовать такое число m, что неравенство (81) будетъ имѣть мѣсто при $n > m$.

Если бы мы предположили, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r}$ получаетъ убывающія значенія при возрастаніи n, то всѣ предыдущія неравенства для $\frac{r}{s}$ получились бы съ обратнымъ знакомъ ($>$) и въ частности $\frac{r}{s} > \frac{1}{2} - H_n$; это послѣднее неравенство будетъ удовлетворено при всякомъ значеніи n, если $\frac{r}{s} \geqq \frac{1}{2}$. Изъ этого видно, что неравенство

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

представляется наилучшимъ изъ неравенствъ такого типа*).

Примѣнимъ неравенство (81) къ выводу новаго неравенства для z_n, предполагая $\frac{r}{s} < \frac{1}{2} - H_m$.

Возвысивъ неравенство (81) въ $(n-p-1)$-ую степень, гдѣ $p < n-1$, раздѣливъ результатъ на n^{sn+r} и умноживъ его на равенство

*) Предлагаемъ читателю изслѣдовать выраженіе $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{r}{s}}$ по правиламъ дифференціальнаго исчисленія, предполагая, что n представляетъ непрерывное перемѣнное число.

$z_n^{sn} = n^s z_{n-1}^{s(n-1)}$ (стр. 182), получимъ неравенство, приводящееся къ виду:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r}\left(\frac{z_n}{n+1}\right)^{s}\right]^{n}\frac{1}{(n+1)^r}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(sn+r)p}$$

$$> \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{s(n-1)+r}\left(\frac{z_{n-1}}{n}\right)^{s}\right]^{n-1}\frac{1}{n^r}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(sn-s+r)p}$$

и показывающее, что значенія выраженія въ первой части возрастаютъ при возрастаніи n. На этомъ основаніи можемъ написать при $n > m$, $p \leqq m-1$:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r}\left(\frac{z_n}{n+1}\right)^{s}\right]^{n}\frac{1}{(n+1)^r}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(sn+r)p}$$

$$> \left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{sm+r}\left(\frac{z_m}{m+1}\right)^{s}\right]^{m}\frac{1}{(m+1)^r}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{(sm+r)p},$$

откуда, умножая на $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(sn+r)p}$, получимъ:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r}\left(\frac{z_n}{n+1}\right)^{s}\right]^{n}\frac{1}{(n+1)^r}$$

$$> \left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{sm+r}\left(\frac{z_m}{m+1}\right)^{s}\right]^{m}\frac{1}{(m+1)^r}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{sn+r} : \left(\frac{m+1}{m}\right)^{sm+r}\right]^{p}. \quad (82)$$

Послѣдній множитель во второй части, представленный p-ою степенью, болѣе 1 въ силу неравенства (81); поэтому неравенство (82) будетъ наивыгоднѣйшимъ, когда число p получитъ наибольшее возможное для него значеніе, т. е. будетъ принято $= m-1$. Принимая для простоты $p = 0$ и извлекая sn-ый корень, получимъ при $n > m$:

$$z_n > (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\sqrt[s]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{r}}\sqrt[sn]{(n+1)^r}\cdot\sqrt[sn]{\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{sm+r}\left(\frac{z_m}{m+1}\right)^{s}\right]^{m}\frac{1}{(m+1)^r}}. \quad (83)$$

Отсюда при $m = 1$ найдемъ:

$$z_n > (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\sqrt[s]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{r}}\sqrt[sn]{(n+1)^r}, \qquad n > 1. \quad (84)$$

При примѣненіи этихъ формулъ, которыя всѣ удобны для логариѳмическихъ вычисленій, вмѣсто неравенства $\frac{r}{s} < \frac{1}{2} - H_m$ мы напишемъ на основаніи неравенства (78) при $n = m$:

$$\frac{r}{s} < \frac{mL\left(\dfrac{m+1}{m}\right) - (m-1)\,L\left(\dfrac{m}{m-1}\right)}{L\,(m^2) - L\,(m^2-1)}, \quad (85)$$

гдѣ, по раздѣленіи числителя и знаменателя на $L(10)$, можно натуральные логариѳмы замѣнить обыкновенными.

Для примѣненія формулы (84) нужно въ формулѣ (85) принять $m=2$, и тогда получимъ:

$$\frac{r}{s}<\frac{2L(3)-3L(2)}{L(4)-L(3)}=\frac{\lg 9-\lg 8}{\lg 4-\lg 3}=\frac{0{,}05115252}{0{,}12493874}=0{,}4094\ldots,$$

такъ что можемъ принять $\frac{r}{s}=0{,}4$, откуда $r=2$, $s=5$. При этихъ значеніяхъ формула (84) доставитъ:

$$\lg z_n>\left(0{,}6+\frac{0{,}4}{n}\right)\lg(n+1)+0{,}4\lg(n)-n[\lg(n+1)-\lg(n)],$$

а изъ формулы (46) (стр. 193) получимъ:

$$\lg z_n<\left(0{,}5+\frac{0{,}5}{n}\right)\lg(n+1)+0{,}5\lg(n)-n[\lg(n+1)-\lg(n)],$$

и разность чиселъ, между которыми содержится $\lg z_n$, будетъ $0{,}1\left[\frac{\lg(n+1)}{n}-\lg\frac{n+1}{n}\right]$. При $n=300$ послѣдняя разность будетъ 0,0006817, и мы получимъ $301{,}556<ez_n-a<302{,}033$ (стр. 196), $300{,}125<ez_n-a_1<300{,}602$ (стр. 94).

Полагая $m=25$, получимъ изъ формулы (85) $\frac{r}{s}<0{,}493\ldots$, такъ что можемъ принять $r=493$, $s=1000$. Въ формулахъ (82) и (83) будетъ:

$$\lg\sqrt[s]{\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{sm+r}\left(\frac{z_m}{m+1}\right)^{s}\right]^m\frac{1}{(m+1)^r}}=-0{,}0254969,$$

и мы получимъ изъ формулы (83) при $n=300$: $ez_n-a>301{,}94$. Разность $302{,}033-301{,}94<0{,}1$, и хотя на основаніи этихъ результатовъ мы не можемъ установить, будетъ ли цѣлая часть разности ez_n-a-n при $n=300$ равна 1 или 2, но это происходитъ оттого, что вблизи $n=300$ разсматриваемая разность переходитъ съ 1 на 2. При $n=350$ будетъ $352{,}013<ez_n-a<352{,}107$.

Прибавимъ, что при вычисленіяхъ неравенствъ для $\lg z_n$ нужно въ выраженіи $n[\lg(n+1)-\lg n]$ и подобныхъ, когда множитель n очень великъ, брать $\lg(n+1)-\lg n$ съ довольно большимъ числомъ знаковъ, для чего можетъ служить книга Callet — „Tables portatives de logarithmes“ 1795 (Tirage 1906), гдѣ логариѳмы — какъ обыкновенные, такъ и натуральные — чиселъ отъ 2 до 1200 помѣщены съ 20 десятичными знаками.

Метеорологія, какъ точная наука.

Проф. В. Бьеркнеса.

Вступительная лекція, читанная 8 января 1913 г. въ Лейпцигскомъ университетѣ.

Наша земля есть часть вселенной, и потому геофизику можно разсматривать, какъ часть космической физики. Она дѣлится на три отрасли — на физику атмосферы, гидросферы и твердой земли, — и содержаніе ея поэтому чрезвычайно обширно и разнообразно. Рѣдко кто въ состояніи владѣть одновременно всѣми этими отраслями; лично я надѣюсь выполнить возложенную на меня задачу, посвятивъ свою дѣятельность, въ качествѣ изслѣдователя и преподавателя, преимущественно двумъ первымъ отраслямъ. Въ виду ихъ родственной связи я на первой изъ нихъ, физикѣ атмосферы, могу выяснить тѣ пункты, которые я желалъ бы выдвинуть на передній планъ.

Физика атмосферы разрабатываетъ тотъ же предметъ, что и метеорологія; но это не даетъ намъ права отождествлять эти двѣ науки. Разница состоитъ въ томъ, что физика относится къ такъ называемымъ точнымъ наукамъ, тогда какъ метеорологію можно считать образцомъ неточной науки. Метеорологія становится точной лишь постольку, поскольку она развивается въ физику атмосферы. Ходъ этого развитія я и разсмотрю въ настоящей лекціи.

Во всѣ времена люди питали живой интересъ къ погодѣ и явленіямъ, совершающимся въ воздушномъ океанѣ. Это былъ любимый предметъ размышленія уже въ самомъ началѣ научной мысли, въ чемъ мы можемъ одинаково убѣдиться какъ по серьезнымъ твореніямъ Аристотеля, такъ и по фривольнымъ комедіямъ Аристофана. Начало метеорологіи заложено уже древними, которые въ извѣстной мѣрѣ изучили не только метеорологическія явленія своей страны, но и нѣкоторыя величавыя въ своей простотѣ и строго закономѣрныя явленія на тропикахъ, какъ, напримѣръ, индійскій вѣтеръ муссонъ. Они имѣли также немало свѣдѣній по физикѣ. Такъ, Архимедъ далъ строго обоснованную гидростатику. Далѣе, древнимъ было извѣстно свойство воздуха расширяться при нагрѣваніи, на чемъ основаны остроумные приборы Герона. Но древніе не сумѣли сочетать воедино эти разнообразныя знанія, чтобы объяснить, напримѣръ, происхожденіе муссона или происхожденіе вѣтровъ вообще. Поэтому физика атмосферы и вообще геофизика древнимъ была совершенно неизвѣстна.

Въ эпоху великихъ географическихъ открытій расширились также и метеорологическія знанія, въ особенности относительно явленій на тропикахъ. Еще правильнѣе, чѣмъ муссонъ, дуютъ пассаты, открытые Колумбомъ въ его путешествіи. При дальнѣйшихъ путешествіяхъ были открыты также пассаты въ южномъ полушаріи и возобновлено знакомство съ муссономъ.

Одновременно и физика начала развиваться въ систематическую науку. Къ концу эпохи Возрожденія была основана динамика, вновь открыты основные законы гидростатики и точнѣе изслѣдовано вліяніе нагрѣванія на тѣла. При создавшейся такимъ образомъ ситуаціи изслѣдователямъ раньше или позже должна была открыться связь между тропическими вѣтрами и нарушеніемъ равновѣсія вслѣдствіе нагрѣванія. Первый высказалъ эту счастливую мысль Галлей (Halley), другъ и ученикъ Ньютона, когда онъ въ 1686 г. возвратился изъ двухлѣтняго путешествія къ тропикамъ. Онъ разсуждалъ такъ. Нагрѣтый воздухъ легче холоднаго и долженъ поэтому подыматься вверхъ, а внизу на его мѣсто притекаетъ воздухъ сбоку. Такимъ образомъ, на термическомъ экваторѣ образуется восходящее теченіе воздуха, питаемое двумя воздушными теченіями, которыя дуютъ вдоль поверхности земли къ экватору, — пассатами сѣвернаго и южнаго полушарія. Подобнымъ же образомъ объясняется и происхожденіе индійскаго муссона. Въ этомъ случаѣ наиболѣе нагрѣтымъ мѣстомъ, надъ которымъ образуется восходящее воздушное теченіе, является, смотря по времени года, азіатскій материкъ или Индійскій океанъ. Этимъ обусловливается зависимость муссона отъ времени года.

Предложенная Галлеемъ теорія происхожденія пассатовъ и муссоновъ оказалась вполнѣ правильной. Но онъ невѣрно объяснялъ то явленіе, что пассаты дуютъ не перпендикулярно къ экватору, но имѣютъ еще слагающую въ направленіи экватора. Въ этомъ пунктѣ теорія Галлея была спустя приблизительно 50 лѣтъ исправлена и дополнена другимъ англійскимъ астрономомъ — Гэдли (Hadley). Посредствомъ извѣстнаго элементарнаго разсужденія, которое можно найти во многихъ учебникахъ географіи, Гэдли показалъ, что вѣтеръ получаетъ кажущееся, но не дѣйствительное, отклоненіе вслѣдствіе того, что наблюдатель участвуетъ во вращательномъ движеніи земли.

Благодаря трудамъ двухъ названныхъ англійскихъ астрономовъ метеорологія впервые встрѣтилась съ физикой, и первый шагъ къ развитію физики атмосферы былъ сдѣланъ. Въ этомъ отношеніи представляется поучительнымъ сравненіе съ произошедшимъ незадолго передъ тѣмъ великимъ переворотомъ въ области астрономіи. Ньютонъ примѣнилъ къ небеснымъ явленіямъ теоремы динамики, т. е. истины, полученныя изъ источника, отличнаго отъ астрономіи, и этимъ способомъ объяснилъ движенія свѣтилъ. Точно такъ же Галлей и Гэдли примѣнили ученіе о теплотѣ, гидростатику и динамику, т. е. истины неметеорологическаго происхожденія, къ явленіямъ воздушнаго океана и этимъ путемъ объяснили грандіозныя движенія воздушныхъ массъ. Результаты были одинаковы въ обѣихъ наукахъ: всѣ послѣдующія открытія относительно движеній въ нашей солнечной системѣ могутъ быть объяснены на основаніи Ньютоновыхъ принциповъ, и точно такъ же всѣ постепенно изученныя движенія воздуха удалось объяснить при помощи принциповъ Галлея-Гэдли. Всѣ эти воздушныя теченія имѣютъ прямо или косвенно термическое происхожденіе, и всѣ они, если не считать чисто мѣстныхъ вѣтровъ, обнаруживаютъ отклоненіе, вытекающее изъ принципа Гэдли. Но между метеорологіей и астрономіей была огромная разница. Тогда какъ воздушныя теченія изучались только съ качественной стороны, движенія свѣтилъ, напротивъ, были подвергнуты также количественному изученію; а именно, зная положеніе свѣтила въ опредѣленный моментъ времени, можно было напередъ высчитать положеніе его въ очень далекомъ будущемъ. Астрономія сразу сдѣлалась точной наукой, тогда какъ метеорологія сдѣлала въ этомъ направленіи лишь первый шагъ.

Причину этого нетрудно понять. Астрономическія наблюденія доставляли всѣ необходимыя для предсказаній данныя о положеніи звѣзды въ извѣстный моментъ. Напротивъ, метеорологическія наблюденія въ то время совершенно не могли дать аналогичныхъ свѣдѣній о состояніи атмосферы, которыя можно было бы положить въ основу вычисленій. Далѣе, въ астрономическихъ вычисленіяхъ небесныя тѣла можно было разсматривать, какъ отдѣльныя точки, движущіяся благодаря взаимодѣйствіямъ простѣйшаго рода; Ньютонова механика была прямо приспособлена именно къ подобнымъ задачамъ, но не къ разработкѣ движенія континуума, какимъ является воздухъ. Кромѣ того, еще не были открыты количественные законы взаимодѣйствія механическихъ и термическихъ процессовъ. Такимъ образомъ, для дальнѣйшаго превращенія метеорологіи въ точную науку требовалось дальнѣйшее широкое развитіе физики, съ одной стороны, и наблюдательной метеорологіи, съ другой.

Намъ пришлось бы зайти слишкомъ далеко, если бы мы пожелали прослѣдить параллельное развитіе обѣихъ наукъ въ подробныхъ чертахъ. Мы ограничимся поэтому нѣсколькими основными моментами.

Галлей и его ученики построили первый термометръ, а Торричели — первый барометръ. Благодаря этимъ инструментамъ метеорологія достигла точности, которой ей недоставало до того времени. Постепенно стали понимать, что особенно плодотворнымъ должно оказаться изученіе одновременныхъ наблюденій. Цѣной чрезвычайныхъ усилій отдѣльные ученые начали собирать такія наблюденія и представлять результаты посредствомъ синоптическихъ картъ. Въ этомъ направленіи наиболѣе важное значеніе имѣли работы, изданныя въ 1820 и 1826 гг. Г. В. Брандесомъ (H. W. Brandes) въ Лейпцигѣ (вторая — въ качествѣ представленной университету диссертаціи), хотя онѣ и не сразу нашли признаніе, котораго они заслуживаютъ. Приблизительно въ то же время Редфильдъ (Redfield) въ Америкѣ началъ чертить свои синоптическія карты. Наконецъ, буря, разыгравшаяся 14-го ноября 1854 г. на Черномъ морѣ и причинившая огромный уронъ союзному флоту западно-европейскихъ державъ, дала толчокъ къ болѣе быстрому развитію науки. Знаменитому астроному Леверрье (Leverrier) было офиціально поручено изучить этотъ случай въ связи съ вопросами о предсказаніи подобныхъ явленій и объ устройствѣ бюро для предупрежденія ихъ. На этой основѣ выросла современная международная организація телеграфной метеорологической сѣти.

Хотя такимъ образомъ былъ сдѣланъ огромный шагъ впередъ, однако, эта сѣть метеорологическихъ обсерваторій не была въ состоянiи удовлетворить тѣ слишкомъ большiя надежды, которыя на нее первоначально возлагались. Существенную причину этого обстоятельства справедливо искали въ недостаточной системѣ наблюденiя. Дѣйствительно, всѣ наблюденiя, какiя имѣлись въ распоряженiи изслѣдователей, относились къ нижней границѣ воздушнаго океана, о свободной же атмосферѣ почти ничего не было извѣстно. И только послѣ изобрѣтенiя воздушнаго шара стали предприниматься время отъ времени полеты съ цѣлью метеорологическихъ наблюденiй. Особеннаго вниманiя заслуживаютъ полеты англичанина Глэшера (Glaisher), хотя онъ еще не имѣлъ въ своемъ распоряженiи удовлетворительныхъ инструментовъ. Болѣе строгую методику метеорологическихъ наблюденiй при этихъ новыхъ условiяхъ впервые развилъ лишь Асманъ (Assmann) въ великолѣпномъ рядѣ берлинскихъ полетовъ за послѣднiя десятилѣтiя прошлаго столѣтiя. Немного спустя были также изобрѣтены методы для производства наблюденiй въ открытой атмосферѣ безъ присутствiя изслѣдователя.

Первымъ шагомъ въ развитiи этихъ „аэрологическихъ" методовъ наблюденiя мы обязаны умершему въ прошломъ году американцу А. Лауренсу Ротчу (A. Lawrence Rotch). Изъ своей обсерваторiи въ Blue Hill близъ Бостона онъ при помощи змѣевъ выпускалъ въ атмосферу саморегистрирующiе инструменты. Позже Л. Тейссеранъ де-Боръ (L. Teisserenc de Bort) во Францiи для этой же цѣли пользовался небольшими шарами, которые подымались безъ пассажира и по окончанiи полета опускались гдѣ-либо по волѣ случая; большей частью, ихъ удавалось отыскать и отослать по назначенiю. Бумажные шары Тессерана де Бора Ассманнъ замѣнилъ закрытыми резиновыми шарами, которые на извѣстной высотѣ лопались, при чемъ изъ нихъ выпадалъ парашютъ съ инструментами. Этимъ путемъ весь полетъ совершается гораздо быстрѣе, и легче найти упавшiе инструменты. Кромѣ змѣевъ и саморегистрирующихъ шаровъ, пользуются еще и малыми шарами на привязи. Наконецъ, когда требуется наблюдать лишь движенiя воздуха, то прибѣгаютъ къ малымъ шарамъ безъ инструментовъ — къ такъ называемымъ пилотскимъ шарамъ, наблюдаемымъ при помощи теодолита.

Съ помощью этихъ аппаратовъ въ настоящее время работаетъ цѣлый рядъ аэрологическихъ обсерваторiй, между которыми первое мѣсто по величинѣ занимаетъ основанная Ассманномъ Королевская Прусская Аэрологическая Обсерваторiя Линденбергъ близъ Берлина. Благодаря въ особенности инициативѣ Гергезелля (Hergesell) въ настоящее время организовалось международное сотрудничество аэрологическихъ обсерваторiй и, кромѣ того, цѣлаго ряда другихъ учрежденiй, которыя въ извѣстныхъ случаяхъ оказываютъ свое содѣйствiе. Въ опредѣленные — напередъ условленные — дни подвергается изслѣдованiю обширная область открытой атмосферы, простирающаяся отъ западнаго берега Европы черезъ всю среднюю Европу далеко вглубь Россiи. Эта область съ каждымъ годомъ все болѣе расширяется и все гуще покрывается станцiями. Атмосфера надъ всей этой областью зондируется до высоты въ 15 *км.* или даже выше 20 *км.* Такъ какъ на этихъ высотахъ давленіе падаетъ до $^1/_{10}$ — $^1/_{20}$ части своего значенія на уровнѣ моря, то изслѣдованіе охватываетъ, такимъ образомъ, $^9/_{10}$ или болѣе воздушной массы, лежащей надъ этой огромной областью. Изслѣдованіе прямо или косвенно обнимаетъ всѣ такъ называемые метеорологическіе элементы, опредѣляющіе состояніе атмосферы, а именно слѣдующія семь величинъ: три слагающія скорости, давленіе воздуха, его плотность, температуру и влажность. Въ дни наблюденій опредѣляютъ значенія всѣхъ этихъ элементовъ, сперва въ наблюдательныхъ пунктахъ, а затѣмъ — при помощи извѣстныхъ методовъ интерполяціи — во всѣхъ пунктахъ наблюдаемой области.

Этимъ наблюдательная метеорологія въ принципѣ рѣшила свою задачу, хотя, конечно, остается еще обширный просторъ для дальнѣйшихъ успѣховъ въ техникѣ и организаціи дѣла.

Параллельно съ этимъ развитіемъ метеорологіи идетъ величественное развитіе опытной и теоретической физики отъ эпохи Возрожденія до нашихъ дней. Я отмѣчу лишь тѣ пункты, которые имѣютъ наиболѣе важное значеніе для нашего предмета.

На основахъ, заложенныхъ Галилеемъ и Ньютономъ, развилась аналитическая механика. Около средины восемнадцатаго столѣтія Клеро (Clairaut) вывелъ уравненія гидростатики, а Эйлеръ — уравненія гидродинамики. Около 1820 г. Навье (Navier) дополнилъ эти уравненія членами, выражающими вліяніе внутренняго тренія. Въ 1835 г., ровно сто лѣтъ спустя послѣ того, какъ Гэдли положилъ начало новой эпохѣ въ метеорологіи, Коріолисъ (Coriolis) далъ свою знаменитую теорему, съ помощью которой теперь въ динамическихъ проблемахъ принимается въ расчетъ движеніе земли.

Изобрѣтеніе барометра и термометра дало возможность изслѣдовать законы, которымъ подчиняются газы, и постепенно былъ установленъ полностью законъ Бойля-Гэ-Люссака. Физики стали отличать понятіе температуры отъ количества теплоты и изучили законы плавленія и замерзанія, парообразованія и сгущенія. Далѣе, благодаря геніальнымъ идеямъ Сади Карно (Sadi Carnot) и Роберта Майера (Robert Mayer) въ первую половину прошлаго столѣтія на этой основѣ было воздвигнуто зданіе термодинамики; разработкой этой отрасли мы обязаны, главнымъ образомъ, Гельмгольцу (Helmholtz), лорду Кельвину (Kelvin) и Клаузіусу (Clausius).

Такимъ образомъ, физика съ своей стороны совершила то, что отъ нея требовалось. Я упомянулъ выше о семи перемѣнныхъ, которыя мы называемъ метеорологическими элементами. Благодаря достигнутымъ успѣхамъ физика теперь въ состояніи установить семь соотвѣтственныхъ уравненій, а именно три гидродинамическихъ уравненія движенія, уравненіе, выражающее начало сохраненія массы („уравненіе неразрывности“), уравненіе состоянія газа и два уравненія, вытекающія изъ двухъ главныхъ началъ термодинамики. Благодаря этимъ уравненіямъ, въ связи съ необходимыми предѣльными условіями на поверхности и данными о внѣшнихъ вліяніяхъ, проблемы динамической метеорологіи получаютъ характеръ математически опредѣленныхъ задачъ, которыя съ теоретической стороны допускаютъ успѣшную разработку не только качественную, но и количественную.

И дѣйствительно, параллельно съ развитіемъ наблюдательной метеорологіи и теоретической физики шла также теоретическая разработка метеорологическихъ проблемъ. Сперва изслѣдователи разрабатывали идеализированныя явленія. Путемъ надлежащихъ допущеній можно исключить изъ задачи одну или нѣсколько перемѣнныхъ и такимъ образомъ свести вопросъ къ задачѣ либо чисто гидродинамической, либо же чисто термодинамической. Благодаря дальнѣйшимъ упрощающимъ допущеніямъ соотвѣтственныя болѣе простыя системы уравненій становятся интегрируемыми, и этимъ путемъ получаются рѣшенія, существенно способствующія пониманію различныхъ метеорологическихъ явленій. Цѣнными работами этого рода мы обязаны Феррелю (Ferrell), Гульдбергу (Guldberg) и Мону (Mohn), Гельмгольцу, Герцу (Hertz), Бецольду (v. Bezold) и др. Сюда отчасти относятся также теоретическіе труды Ганна (Hann), которые имѣютъ своей цѣлью болѣе точную обработку общихъ элементарныхъ объясненій метеорологическихъ явленій.

Всѣ эти работы относятся еще къ эпохѣ до основанія современной аэрологіи. Въ настоящее же время, когда систематически публикуются полныя наблюденія надъ обширной областью атмосферы, возникаетъ огромная задача, рѣшеніе которой не можетъ быть отложено надолго. Необходимо примѣнить уравненія теоретической физики не только къ идеальнымъ случаямъ, но и къ дѣйствительнымъ состояніямъ атмосферы, которыя открываетъ намъ наблюденіе. Наши уравненія содержатъ законы, по которымъ послѣдующія состоянія атмосферы развиваются изъ предыдущихъ. Мы должны изыскать пути къ тому, чтобы знаніе, заключающееся въ уравненіяхъ, сдѣлать также практически цѣннымъ. Изъ состояній, опредѣляемыхъ наблюденіями, мы должны умѣть вычислять послѣдующія состоянія. Задачу точнаго предсказыванія явленій астрономія разрѣшила уже сотни лѣтъ тому назадъ. Теперь и метеорологія должна энергично приступить къ той же задачѣ.

Размѣры этой проблемы необозримы, и рѣшеніе ея можетъ явиться лишь результатомъ продолжительнаго развитія. Отдѣльный изслѣдователь даже при величайшемъ напряженіи силъ мало можетъ здѣсь сдѣлать. Тѣмъ не менѣе я убѣжденъ, что наступила пора поставить рѣшеніе этой проблемы, какъ цѣль изслѣдованія. Можно вѣдь поставить себѣ цѣль, даже не имѣя надежды на близкое ея осуществленіе. Мореплаватель съ увѣренностью направляетъ свой руль, когда онъ плыветъ именно къ далекой цѣли. Такъ, и въ нашемъ случаѣ далекая цѣль даетъ намъ неоцѣнимый планъ работы и изслѣдованія.

Здѣсь я позволю себѣ сослаться и на мой личный опытъ. Уже много лѣтъ я занимаюсь вопросомъ о примѣненіи теоремъ гидродинамики къ движеніямъ воздуха, и мнѣ удалось получить много весьма интересныхъ результатовъ. Но каждый разъ я неизбѣжно возвращался къ вопросу: чего я собственно хочу? къ чему стремлюсь? Меня неотступно преслѣдуетъ мысль, что, въ концѣ концовъ, существуетъ лишь одна задача, достойная нашихъ усилій: вычислять напередъ будущія состоянія. Когда же мнѣ удалось также найти молодыхъ сотрудниковъ, которые имѣли мужество послѣдовать за мной и съ воодушевленіемъ приступили къ работѣ, то во мнѣ окончательно созрѣло рѣшеніе — неуклонно идти къ этой далекой цѣли.

Въ этомъ рѣшеніи намъ ни разу не приходилось раскаиваться. Правда, то, что мы успѣли сдѣлать, лишь яснѣе еще показываетъ, какъ мы далеки отъ нашей настоящей цѣли. Но при всемъ томъ наша работа всегда была плодотворной. Именно потому, что мы ясно сознавали свою цѣль, намъ удалось отчетливо намѣтить цѣлый рядъ отдѣльныхъ подготовительныхъ задачъ и рѣшить ихъ одну за другой. Я не могу, конечно, входить здѣсь въ подробности и потому приведу лишь одинъ примѣръ.

Очевидно, что при подобнаго рода задачахъ невозможно ограничиться обыкновенными математическими методами. О томъ, чтобы аналитически представить результаты наблюденій и затѣмъ аналитически проинтегрировать уравненія, здѣсь не можетъ быть и рѣчи. Какъ мы наблюденія представляемъ посредствомъ картъ, такъ и всѣ математическія вычисленія здѣсь должны быть преобразованы въ графическія операціи съ картами. Мы развили такимъ образомъ начальныя основы своего рода графической математики, съ помощью которой мы въ состояніи изъ одной карты вывести другую совершенно такъ же, какъ при вычисленіи одно уравненіе выводится изъ другого. Вслѣдствіе новизны проблемъ намъ приходится постоянно совершенствовать методы, что придаетъ нашей работѣ своеобразную незамѣнимую прелесть. Я надѣюсь, что мнѣ въ Лейпцигскомъ университетѣ удастся найти много молодыхъ сотрудниковъ, которые заинтересуются проблемами, въ большомъ изобиліи возникающими на этомъ пути.

Въ заключеніе я долженъ коснуться одного возраженія, которое обыкновенно дѣлаютъ противъ нашей рабсты. Задача состоитъ собственно въ вычисленіи предстоящей погоды. Но, спросятъ, можетъ ли это помочь? Вычисленія потребуютъ колоссальной затраты времени. Господа ученые, можетъ быть, вычислятъ, въ лучшемъ случаѣ, за три мѣсяца, какая погода будетъ черезъ три часа. Что за радость, если для того, чтобы предсказать завтрашнюю погоду, придется вычислять цѣлый годъ!

На это я отвѣчу: я почти не надѣюсь даже на такой успѣхъ. Но я былъ бы безмѣрно радъ, если бы мнѣ удалось дойти до того, чтобы быть въ состояніи цѣною хотя бы лѣтъ работы вычислить погоду только съ одного дня на другой. Лишь бы вычисленіе подтвердилось, и побѣда уже была бы за нами! Метеорологія превратилась бы тогда въ точную науку, стала бы дѣйствительно физикой атмосферы. И если бы только это было достигнуто, то и практическія послѣдствія не заставили бы себя долго ждать.

Чтобы прорыть туннель черезъ гору, иногда требуются годы. Не всѣ работники доживутъ до того дня, когда туннель будетъ прорытъ. Но это не помѣшаетъ позже другимъ мчаться черезъ него со скоростью курьерскаго поѣзда!

Подготовительныя работы къ устройству 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

Съ наступленіемъ учебнаго времени возобновилась дѣятельность Организаціоннаго Комитета 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики, который долженъ состояться въ Москвѣ на предстоящихъ рождественскихъ вакаціяхъ (адресъ бюро Комитета: Москва, М.-Знаменскій пер., реальное училище К. К. Мазинга).

Какъ извѣстно, этотъ Съѣздъ, подобно 1-му, происходившему два года назадъ въ С.-Петербургѣ, имѣетъ своею задачею широкое объединеніе преподавателей математики съ цѣлью обсужденія вопроса о необходимыхъ реформахъ въ современной обстановкѣ преподаванія математики и соприкасающихся съ нею наукъ, каковы физика, космографія, механика и проч. Въ настоящее время Комитетомъ закончена разработка ряда вопросовъ организаціоннаго характера. Такъ, получено согласіе Директора Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ на устройство засѣданій Съѣзда въ новомъ аудиторномъ зданіи этихъ Курсовъ (на Дѣвичьемъ Полѣ). Въ томъ же зданіи будетъ устроена выставка книгъ и учебныхъ пособій по математикѣ, организуемая при Съѣздѣ особою Выставочною Комиссіею. Отъ начальства нѣсколькихъ московскихъ учебныхъ заведеній получено согласіе на предоставленіе даровыхъ или удешевленныхъ помѣщеній, гдѣ пріѣзжіе члены Съѣзда могли бы жить во время его, а частью имѣть и столъ. Постановлено въ непродолжительномъ времени приступить къ печатанію «Бюллетеней» Съѣзда, первые номера которыхъ должны выйти еще до открытія и будутъ содержать предварительныя и справочныя свѣдѣнія о Съѣздѣ.

Для освѣдомленія интересующихся лицъ о 2-мъ Съѣздѣ преподавателей математики «Положеніе» о немъ напечатано въ нѣсколькихъ періодическихъ изданіяхъ, каковы журналы: «Вѣстникъ Опытной Физики», «Педагогическій Сборникъ», «Педагогическій Вѣстникъ Московскаго Учебнаго Округа», «Педагогическій Листокъ», «Для народнаго учителя», «Математическое Образованіе» и др. Кромѣ того, по ходатайству Организаціоннаго Комитета Министерство Народнаго Просвѣщенія циркулярно сообщило свѣдѣнія о Съѣздѣ попечителямъ учебныхъ округовъ для рекомендаціи педагогическому персоналу подвѣдомственныхъ имъ учебныхъ заведеній.

Съ цѣлью наилучшаго освѣщенія подлежащихъ обсужденію вопросовъ, Организаціонный Комитетъ обратился къ нѣкоторымъ профессорамъ и извѣстнымъ педагогамъ съ предложеніемъ прочитать доклады на темы, соотвѣтствующія задачамъ Съѣзда, и отъ нѣкоторыхъ изъ нихъ уже получены отвѣты о согласіи сдѣлать сообщенія. Въ послѣднее время стали также поступать заявленія о желаніи прочесть рефераты на Съѣздѣ отъ преподавателей и любителей математики. Изъ числа заявленныхъ, а частью и доставленныхъ уже сообщеній назовемъ: В. В. Бобынинъ — «Объ указаніяхъ, получаемыхъ преподаваніемъ математики отъ ея исторіи», Д. М. Синцовъ — 1) «О дѣятельности Международной Комиссіи по реформѣ преподаванія математики», 2) «О преподаваніи аналитической геометріи въ VII классѣ реальныхъ училищъ», П. А. Некрасовъ — «Промежуточная лицейская ступень между средней и высшей школами», К. Ѳ. Лебединцевъ — 1) «Несоизмѣримыя величины и теорія предѣловъ въ курсѣ геометріи», 2) «О способахъ контроля и провѣрки знаній учащихся по математикѣ», Н. Г. Плеханова — «Письменные отвѣты по математикѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ», С. Н. Поляковъ — «Вопросъ о реформѣ школьной математики съ методологической точки зрѣнія», Р. В. Невядомскій — «Новый методъ разложенія чиселъ на первоначальные множители», В. Э. Фриденбергъ — «Организація внѣклассныхъ занятій по математикѣ», Н. А. Извольскій — 1) «Комбинаціонная работа, какъ основа преподаванія математики», 2) «Вопросъ объ опредѣленіи длины окружности», І. И. Чистяковъ — «О журналахъ по элементарной математикѣ», Д. Д. Мордухай-Болтовской — 1) «Эволюція геометрическаго учебника», 2) «Объ организаціи математическаго кабинета», М. Д. Осинскій — «Направляющіе элементы математическаго изслѣдованія и математическаго творчества», Н. В. Бодаревскій — «Психологическія основанія въ математическихъ ошибкахъ учениковъ», Р. В. Цеслевскій — «Методъ рѣшенія и изслѣдованія геометрическихъ задачъ», И. Т. Лоховъ — «Исторія математики въ средней школѣ», М. Г. Попруженко — «О курсѣ анализа въ средней школѣ».

Къ реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ.

Учебныя пособія по математикѣ.

Г. Дресслера.

(Продолженіе).*

3. Отдѣльныя математическія учебныя пособія для среднихъ школъ.

При разсмотрѣніи моделей, предназначенныхъ для среднихъ школъ, мы будемъ говорить сперва объ отдѣльныхъ моделяхъ, а затѣмъ перейдемъ къ многочисленнымъ коллекціямъ, состоящимъ изъ различныхъ группъ моделей.

При этомъ самымъ подходящимъ и самымъ удобнымъ для обозрѣнія будетъ, повидимому, распредѣленіе отдѣльныхъ моделей по отдѣламъ математики. Такимъ образомъ, слѣдующая классификація представляется подходящей: 1. числовой счетъ (обыкновенная ариѳметика); 2. буквенный счетъ (общая ариѳметика и алгебра); 3. планиметрія; 4. тригонометрія; 5. стереометрія: a) ученіе о линіяхъ и поверхностяхъ, b) ученіе о тѣлахъ; 6. начертательная геометрія. Собственно черченіемъ мы заниматься не будемъ.

*) См. „Вѣстникъ“, № 590.

1. Для первоначальнаго обученія счету употребляются, главнымъ образомъ, естественныя наглядныя средства: сперва пальцы, затѣмъ камешки, бобы, палочки, шарики, монеты, части тѣла человѣка и животныхъ, предметы классной комнаты и т. п. Для изображенія служатъ черточки, точки, крестики, кружки и т. п. Учитель чертитъ тѣ или иные изъ нихъ на доскѣ и затѣмъ заставляетъ учениковъ перечерчивать ихъ вновь на той же классной доскѣ, или на аспидныхъ доскахъ, или же карандашемъ въ тетрадяхъ. Среди искусственныхъ наглядныхъ пособій первое мѣсто занимаютъ счетные аппараты, выполняющіе вычисленіе не только надъ цѣлыми числами, но и надъ дробями. Число находящихся въ употребленіи этого рода приборовъ чрезвычайно велико. C. Schröder въ своемъ сочиненіи «Die Rechenapparate der Gegenwart» («Современные счетные аппараты», Magdeburg, Friese & Fuhrmann) даетъ свѣдѣнія о 200 аппаратахъ, имѣющихъ примѣненіе въ школѣ, изъ которыхъ 188 онъ описываетъ подробно. Кромѣ того, онъ упоминаетъ о 12 аппаратахъ, которыми могутъ пользоваться дѣти. Къ тому же безпрерывно появляются все новые счетные аппараты. Мы не имѣемъ поэтому возможности подробнѣе остановиться на этомъ вопросѣ и вынуждены ограничиться ссылкой на книгу Lietzmann'а «Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland» (IMUK - Abhandlungen, Bd. V, Heft 1).

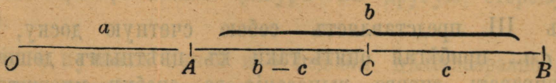
Учебными пособіями для задачъ и упражненій служатъ отчасти приборы, отчасти стѣнныя таблицы (не въ прежнемъ смыслѣ!). Изъ приборовъ мы назовемъ лишь цифровыя палочки Goltzsch'а, полоски для задачъ Kohlstock'а, аппаратъ для задачъ на вычисленіе Metzner'а, подвижную таблицу цифръ Dürre, счетные часы Götsch'а, служащіе для перваго ознакомленія съ четырьмя основными дѣйствіями ариѳметики и усвоенія ихъ путемъ устнаго счета.

Стѣнныя таблицы неоднократно называются стѣнными учебниками ариѳметики. Онѣ обыкновенно составляются для чиселъ отъ 1 до 100 и содержатъ въ себѣ многочисленныя группы задачъ. Подобныя стѣнныя таблицы имѣются, напримѣръ, въ изданіи Böhme, Büttner'а, Magnus'а, Scheerer'а.

Neumann издалъ для употребленія въ школѣ образцы процентныхъ бумагъ, въ натуральную величину и безъ сокращенія текста, имѣющіе видъ 5 таблицъ, наклеенныхъ на полотно или на картонъ (Eberswalde, частное изданіе учителя R. Neumann'а); содержаніе таблицъ слѣдующее: № 1. государственный кредитный билетъ съ талономъ и процентными купонами; № 2. акція съ талономъ и свидѣтельствомъ на полученіе дивиденда; № 3. банковый билетъ съ талономъ и процентными билетами; № 4. закладной билетъ съ возобновительными свидѣтельствами и процентными билетами; № 5. бумаги городского кредита съ обезпеченіемъ и процентными билетами.

2. При изложеніи первоначальныхъ предложеній буквеннаго исчисленія, — напримѣръ, при отысканіи суммы или разности отдѣльныхъ величинъ, — преподавателю, въ цѣляхъ наглядности, приходится пользоваться чертежами на стѣнной доскѣ, представляющими данныя величины въ видѣ отрѣзковъ. Отвѣчающаго этой цѣли учебнаго пособія мы не знаемъ; но мы полагаемъ, что такого рода пособіе окажется безполезнымъ, если только пре-

подаватель правильно истолкуетъ ученикамъ смыслъ начерченныхъ отрѣзковъ. Слѣдующій примѣръ въ достаточной мѣрѣ пояснитъ нашу мысль.



$$OA + AC = OB - BC$$

обозначаетъ:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Съ большимъ удобствомъ можно было бы примѣнить для этой цѣли линейку съ подвижнымъ указателемъ, который позволялъ бы отмѣчать концы отрѣзка (предложено Schimmak'омъ).

Для иллюстраціи формулы для $(a+b)^2$ имѣется, правда, деревянная модель, состоящая изъ 4 частей; но она оказывается излишней, такъ какъ черченіе, дающее возможность проще разбивать фигуру на части, позволяетъ достигнуть не только тѣхъ же, но даже лучшихъ результатовъ.

Напротивъ того, модель для $(a+b)^3$ весьма полезна. Въ то время, какъ формула для $(a+b)^2$ можетъ быть представлена чертежомъ, формула для $(a+b)^3$ можетъ быть иллюстрирована только пространственной моделью. Послѣдняя представляетъ собою кубъ, разлагающійся на восемь частей: на два куба a^3 и b^3, на три прямоугольныхъ параллелепипеда a^2b и еще на три прямоугольные параллелепипеда ab^2. Эта модель принадлежитъ Hestermann'овой коллекціи стереометрическихъ тѣлъ. Она можетъ, конечно, служить также для объясненія формулы извлеченія кубическаго корня.

Весьма цѣлесообразно пользоваться моделью при разсмотрѣніи общаго случая $(a \pm b)(a \pm b)$. Такою моделью можетъ служить приборъ для буквеннаго счисленія H. Dressler'a (изготовленіе фирмы F. Neustadt'a, Niederlössnitz-Dresden). Этотъ приборъ состоитъ изъ трехъ квадратныхъ и четырехъ прямоугольныхъ деревянныхъ дощечекъ, стороны которыхъ (15 *см.*, 5 *см.*, 10 *см.*) даютъ пространственное представленіе величинъ a, b, $a-b$. Дощечки могутъ быть скрѣплены посредствомъ штифтовъ и на каждой дощечкѣ обозначена ея площадь: на большомъ квадратѣ имѣется надпись a^2, на маломъ b^2, на среднемъ $(a-b)^2$, на обоихъ большихъ прямоугольникахъ ab, на обоихъ малыхъ прямоугольникахъ $b(a-b)$. Такое устройство прибора позволяетъ наглядно иллюстрировать преобразованіе выраженій $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.

Сюда же относятся также новые аритмосъ-модели Brücher'a (изданіе мюнхенской фирмы Kindl-Baukasten-Gesellschaft). Аритмосъ I представляетъ собою соединеніе складного ящика и счетнаго ящика, при чемъ кубики и брусочки окрашены въ семь различныхъ цвѣтовъ. Каждый брусочекъ является какимъ-нибудь кратнымъ нѣкотораго основного кубика, какъ въ счетномъ ящикѣ Tillich'a; кромѣ того, имѣются половины основного кубика и половины брусочковъ, соотвѣтствующія дощечкамъ въ строительномъ ящикѣ. Единица представлена половиной кубика, каждое ребро котораго равно 3 *см.* Выборъ цвѣтовъ сдѣланъ такъ, чтобы отмѣтить простыя числа. Складывая кубики и брусочки въ трехъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ (такъ называемыя «стѣны» складного ящика), можно наглядно выяснить учащемуся производство четырехъ основныхъ дѣйствій въ области цѣлыхъ чиселъ.

Аритмосъ III представляетъ собою счетную доску, площадью въ 40×40 *кв. см.*; прибѣгая опять-таки къ цвѣтнымъ дощечкамъ, на ней можно иллюстрировать сперва вынесеніе за скобку множителей, — напримѣръ, при помощи формулы $ab + b^2 = b(a + b)$, затѣмъ выводъ формулы $(a \pm b)(a \pm b)$ и, наконецъ, различныя преобразованія, какъ, напримѣръ, такое: $(a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2 = a^2$. Обѣ стороны послѣдней формулы получаются изъ однихъ и тѣхъ же кубиковъ и дощечекъ, но только различнымъ образомъ сложенныхъ (Аритмосъ II служитъ для иллюстрированія дѣйствій надъ дробями).

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ въ качествѣ нагляднаго пособія вполнѣ можно удовлетвориться составными частями строительнаго ящика. Но здѣсь нѣтъ возможности скрѣплять на время отдѣльныя части подобно тому, какъ это дѣлается, когда мы имѣемъ дощечки, соединяемыя между собою штифтами.

Для изложенія теоріи соединеній служатъ изобрѣтенные H. Hartl'емъ разноцвѣтные картонные диски, имѣющіе со стороны, обращенной къ ученику, буквы; они снабжены ручкой и прикрѣпляются къ классной доскѣ иглами. Полный комплектъ такихъ дисковъ состоитъ изъ пяти красныхъ, трехъ зеленыхъ, двухъ бѣлыхъ, двухъ желтыхъ, одного голубого, одного фіолетоваго, одного оранжеваго, одного сѣраго и одного коричневаго (изготовленіе фирмы A. Pichlers Witwe & Sohn въ Вѣнѣ).

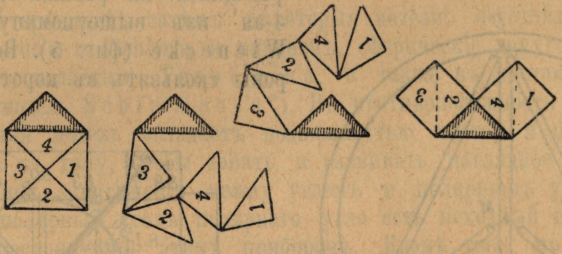
Приложеніе ученія о функціи къ практической жизни иллюстрируется графическими расписаніями поѣздовъ; учрежденія, пользующіяся ими, охотно предоставляютъ для указанной цѣли свои старыя расписанія. Для изслѣдованія рѣшенія квадратныхъ уравненій имѣется модель параболы $y = x^2$, вычерченная примѣнительно къ размѣрамъ классной доски, между тѣмъ какъ въ учебникахъ даются малыя модели; таковы, напримѣръ, алюминіевая модель Noodt'a (изготовленіе фирмы Velhagen & Klasing).

3. Въ области планиметріи точно такъ же, какъ и въ области стереометріи, въ цѣляхъ облегченія пониманія пользуются многочисленными пособіями. Мы ограничимся здѣсь лишь тѣми изъ нихъ, которыми должна располагать каждая школа. При изложеніи первыхъ теоремъ ученія о треугольникѣ можно пользоваться моделями плоскихъ фигуръ Klodt'a во Франкфуртѣ на Майнѣ или Ehrhardt'a въ Бенсгеймѣ.

Подвижныя геометрическія фигуры Wienecke позволяютъ дать ученикамъ чисто наглядное представленіе о замѣнѣ однихъ частей фигуръ другими и о связанномъ съ этимъ измѣненіи величины и положенія составленныхъ этими частями образовъ; вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ приборъ наглядно иллюстрируетъ функціональную зависимость. Эти модели, первоначально предназначавшіяся скорѣе для народныхъ школъ, преподаватель геометріи можетъ съ успѣхомъ примѣнять также и въ средней школѣ. Онѣ освобождаютъ его отъ необходимости возобновлять чертежъ для отдѣльныхъ случаевъ и позволяютъ ему самымъ нагляднымъ образомъ выяснить ученику весь процессъ измѣненія величины. Четыре изъ этихъ моделей предназначены для изученія равнобедреннаго треугольника, квадрата, прямоугольника и круга (о послѣднемъ см. ниже). Они допускаютъ сдвиганіе однихъ частей фигуръ относительно другихъ, а также переворачиваніе фигуръ на другую сторону (изготовленіе Winckelmann'а).

Въ ученіи о пучкахъ лучей и о подобіи цѣлесообразно демонстрировать пантографы, какъ примѣры практическаго осуществленія относящихся сюда теоремъ.

Доказательство Пиѳагоровой теоремы наглядно иллюстрируется нѣсколькими деревянными моделями. Модель Koepp'а, употребляемая при изученіи равенства площадей, имѣетъ видъ квадрата, распадающагося на пять частей, изъ которыхъ можно составить оба квадрата, построенные на катетахъ (изготовленіе Ehrhardt'а). Той же цѣли служатъ двѣ большихъ модели Barbisch'а, построенныя на шарнирахъ (изготовленіе Pichler'а). Одна изъ нихъ складывается изъ частей, а въ другой нѣкоторыя части также вращаются на шарнирахъ. Послѣдняя модель предназначена для демонстрированія того доказательства теоремы Пиѳагора, которое извѣстно подъ названіемъ



Фиг. 4.

«стула невѣсты» и основано на томъ, что нѣкоторый пятиугольникъ дополняется двумя конгруэнтными треугольниками одинъ разъ до квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, а другой разъ — до обоихъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ. Модель, изготовленная F. Neustadt'омъ, допускаетъ переворачиваніе нѣкоторыхъ частей на другую сторону. Квадратъ, построенный на одномъ изъ катетовъ, перегибается около своего катета такъ, что онъ падаетъ на треугольникъ и на квадратъ, построенный на гипотенузѣ. Затѣмъ квадратъ, построенный на другомъ катетѣ, и нѣкоторый треугольникъ отдѣляются отъ модели и присоединяются къ ней вновь уже въ другомъ мѣстѣ.

Изъ моделей, появившихся въ самое послѣднее время, тѣмъ же вопросамъ посвящены многочисленныя подвижныя модели изъ коллекціи Treutlein'а (см. ниже). Они иллюстрируютъ доказательство теоремы Пиѳагора (фиг. 4), преобразованіе параллелограммовъ и др. (изготовленіе B. G. Teubner'а).

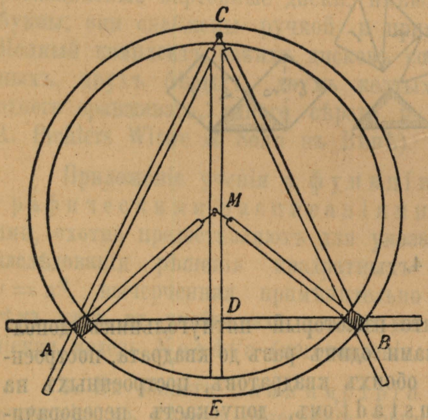
Весьма поучительнымъ представляется намъ приборъ для вычисленія длины дуги. При нѣкоторой привычкѣ учащихся къ нагляднымъ представленіямъ, приборъ Feuerstein'а можно примѣнять съ такимъ же успѣхомъ, какъ приборъ для разложенія площадей на части, служащій той же цѣли. Дуга круга осуществляется съ помощью стальной полосы, которая посерединѣ неподвижно скрѣплена съ линейкой и концы которой снабжены отверстіями;

на другой линейкѣ, расположенной перпендикулярно къ первой, имѣются въ различныхъ мѣстахъ пуговки; если согнуть стальную полосу и надѣть ее за концы на пуговки, то она приметъ форму дуги круга. Кромѣ того, два резиновыхъ шнурка служатъ для того, чтобы отмѣчать тѣ треугольники, въ которые превращаются круговые секторы при обратномъ спрямленіи полосы (изготовленіе Ehrhardt'a).

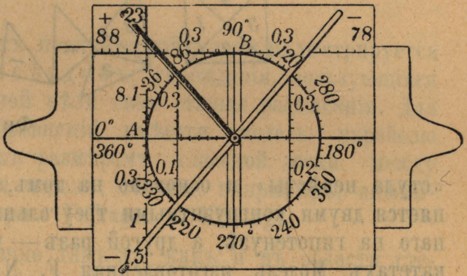
Той же цѣли служитъ приборъ для вычисленія площади круга Braun'a. Онъ представляетъ собою дискъ, разрѣзанный по радіусамъ на секторы, такъ что при разворачиваніи онъ распадается на треугольники (изготовленіе изобрѣтателя; изготовляется также фирмами Günzel'я и F. Neustadt'a).

Немного большую модель для вычисленія площади круга построилъ G. Koepp (изготовленіе Ehrhardt'a); она представляетъ собою кругъ, распадающійся на 24 треугольника, которые, будучи сложены въ другомъ порядкѣ, даютъ приблизительно прямоугольникъ.

Для изученія центральныхъ и вписанныхъ угловъ, опирающихся на равныя дуги, служитъ 4-ая изъ вышеупомянутыхъ моделей Wienecke (фиг. 5). Всѣ четыре стороны скользятъ въ короткихъ трубкахъ



Фиг. 5.



Фиг. 6.

и попарно вращаются вокругъ общей вершины, такъ что движеніе частей вполнѣ опредѣляется этими связями.

Въ папкѣ экспериментальныхъ пособій Noodt'a (см. ниже стр. 118) имѣются приспособленія, позволяющія сдѣлать прямую подвижной; это необходимо, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда желаютъ демонстрировать переходъ прямой изъ положенія сѣкущей въ положеніе касательной.

4. Изъ приборовъ, предназначенныхъ для плоской тригонометріи, лишь одинъ представляется намъ безусловно необходимымъ. Всѣ прочіе являются, конечно, хорошими и полезными учебными пособіями, но едва ли ихъ можно признать необходимыми. Этотъ приборъ носитъ названіе указателя функцій. Подвижная прямая служитъ синусомъ или секансомъ (смотря по

способу употребленія), между тѣмъ какъ на другой прямой появляются перемѣнные косинусъ, тангенсъ и котангенсъ.

Приборъ Koepp'a извѣстенъ подъ названіемъ «приборъ съ подвижнымъ синусомъ». Онъ изготовленъ изъ крѣпкой желѣзной проволоки. Діаметръ его окружности равенъ 15 *см.* Ту же цѣль преслѣдуетъ указатель функцій Wienecke. Онъ также состоитъ изъ крѣпкаго мѣднаго кольца съ двумя взаимно перпендикулярными діаметрами, на которыхъ нанесены дѣленія (въ приборѣ Koepp'a этихъ дѣленій нѣтъ). Вращая стрѣлку, слѣдятъ за соотвѣтствующимъ измѣненіемъ функцій (изготовленіе Winckelmann'a). Другіе приборы того же рода изобрѣтены Lücke, Grimsehl'емъ, Lampert'омъ и Hartl'емъ. Послѣдній выпустилъ въ свѣтъ свой приборъ также въ уменьшенномъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ весьма удобномъ и дешевомъ изданіи, приспособленномъ для учениковъ (фиг. 6). Весьма употребительно и еще болѣе дешево школьное изданіе транспортира для угловъ и угловыхъ функцій Kreuschmer'a (изготовленіе Ehrhardt'a).

Изъ моделей, предназначенныхъ для сферической тригонометріи, слѣдуетъ рекомендовать модели проф. Schoubye (собственное изготовленіе въ Гроссъ-Лихтерфельдѣ), затѣмъ нѣкоторыя модели, изготовленныя фирмами Hilger'a, Ehrhardt'a и Pichler'a, и, наконецъ, сферическіе двуугольники и трехугольники изъ коллекціи Treutlein'a, а также въ настоящее время еще строющуюся модель Schimmack'a*). Въ противоположность твердымъ моделямъ послѣдняя модель обладаетъ подвижностью частей и поэтому особенно приспособлена къ тому, чтобы давать и развивать наглядное представленіе о «функціональной зависимости между угломъ и полярнымъ угломъ». Теорема о томъ, что полярный уголъ полярнаго угла есть исходный полярный уголъ, наглядно иллюстрируется этимъ приборомъ. Кромѣ того, по модели можно, такъ сказать, прочесть, что стороны угловъ и углы полярнаго угла служатъ дополненіями одни для другихъ.

Наконецъ, Witting (Дрезденъ) издалъ недавно комплектъ сложныхъ моделей для иллюстраціи теоріи трехграннаго угла, которыя онъ демонстрировалъ на съѣздѣ естествоиспытателей въ 1912 г. въ Мюнстерѣ.

5a. Относительно взаимнаго расположенія прямыхъ и плоскостей можно сказать слѣдующее. Въ противоположность замкнутымъ формамъ тѣлъ, съ которыми приходится имѣть дѣло позже, при разсмотрѣніи взаимнаго расположенія прямыхъ и плоскостей весьма большія затрудненія встрѣчаетъ у учениковъ необходимость представлять себѣ прямыя, безконечно простирающіяся въ длину, и плоскости, безконечно простирающіяся въ длину и ширину. Относительно простыхъ соотношеній ученикамъ очень трудно внушить, что теоремы, которыя представляются имъ «самоочевидными», все же подлежатъ доказательству. Въ особенности слѣдуетъ каждый разъ вновь указывать на то, что нельзя пользоваться при доказательствѣ теоремами планиметріи или при построеніи конструктивными средствами планиметріи безъ того, чтобы предварительно не создать себѣ для этого необходимыя плоскости. Именно эти условія наглядности, удовлетворяющія вышеуказаннымъ соображеніямъ, приняты

---

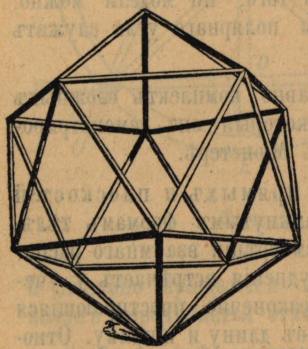
*) R. Schimmack — „Ein bewegliches Polareckenmodell". Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 44 (1913), стр. 18 и сл.

во вниманіе при созданіи многочисленныхъ коллекцій, посвященныхъ этимъ вопросамъ. (См. ниже § 4).

5b. Изъ отдѣльныхъ моделей, посвященныхъ стереометріи, желательно имѣть прямой круговой конусъ съ четырьмя сѣченіями. Онъ включенъ во всѣ коллекціи, но его всегда можно пріобрѣсти также и отдѣльно. Кромѣ разборныхъ деревянныхъ конусовъ, на которыхъ можно демонстрировать всѣ четыре сѣченія, весьма употребительна также большая разноцвѣтная проволочная модель двойного конуса съ шарами Dandelin'а и принадлежащими сюда касательными кругами и кривыми коническихъ сѣченій (изготовленіе F. Neustadt'а).

Чрезвычайно наглядную модель для иллюстрированія коническихъ сѣченій представляетъ собою стекляной конусъ о двухъ полахъ проф. J. Schram'а. Оба конуса соединены между собою; если ихъ наполнить окрашенной водой, то можно видѣть, какъ по мѣрѣ измѣненія наклона уровня воды одно сѣченіе конуса переходитъ въ другое.

Точно такъ же весьма полезны имѣющіеся въ отдѣльной продажѣ приборы для объясненія принципа Кавальери, допускающіе сдвигъ однихъ частей относительно другихъ. Koepp, Pichler, Schwering и Hartl изобрѣли модели, состоящія изъ пластинокъ одинаковой толщины, скрѣпленныхъ между собою подвижной осью или боковыми связями; эти пластинки можно располагать въ различномъ порядкѣ, не измѣняя занимаемаго тѣломъ объема. Если же совершенно разобрать эту модель на составныя части, то изъ нихъ можно составить сколько угодно тѣлъ, имѣющихъ тотъ же объемъ, что и основное тѣло.



Фиг. 7.

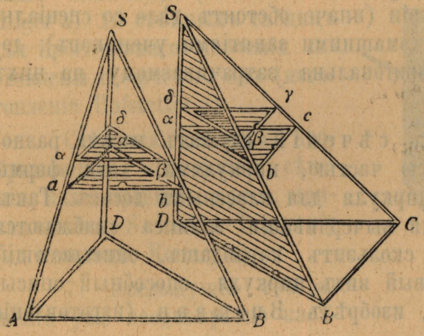
Сюда относится также модель Hill'я (Лондонъ), представляющая объемъ тетраэдра, какъ предѣлъ входящихъ и выходящихъ въ видѣ лѣстницы призмъ (см. выставочный каталогъ Dyck'а).

Весьма способствуютъ наглядности, наряду со сплошными моделями тѣлъ, также модели изъ проволоки или палочекъ (фиг. 7). Сюда относятся модели пяти платоновыхъ (правильныхъ) тѣлъ, на которыхъ легко подсчитать число реберъ и вершинъ, такъ что на нихъ весьма удобно провѣрить теорему Эйлера. Діагонали и сѣченія обозначаются на нихъ при помощи палочекъ и картонныхъ пластинокъ, что даетъ возможность подготовить учениковъ къ рѣшенію стереометрическихъ задачъ на построеніе.

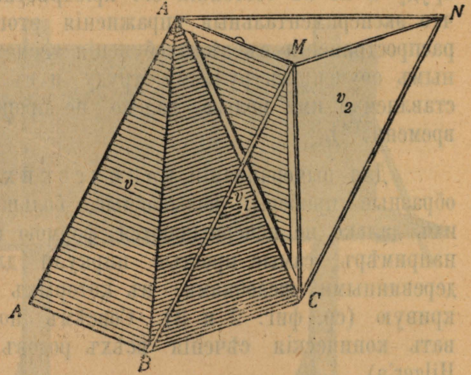
Другія проволочныя модели, имѣющія бо́льшія размѣры, предназначены скорѣе для рисованія; таковы у Pichler'а: кубъ съ высотою въ 40 *см.*, четырехгранная призма — въ 56 *см.*, цилиндръ — въ 50 *см.*, четырехгранная пирамида — въ 56 *см.* и конусъ въ 55 *см.*, а также шаръ съ двумя меридіанами и тремя параллельными кругами, имѣющій 60 *см.* въ діаметрѣ.

Весьма простымъ устройствомъ отличается комбинація трехъ полыхъ тѣлъ — шара, конуса и цилиндра; измѣряя объемъ этихъ тѣлъ пескомъ или водою, а еще лучше — зерномъ, можно получить извѣстныя числа, выражающія отношенія между объемами этихъ тѣлъ. Сюда относятся также три модели Hensing'a, служащія для доказательства теоремы Архимеда (изготовленіе Ehrhardt'a).

Слѣдуетъ еще упомянуть о моделяхъ коллекціи Bochow'a, изъ которыхъ мы отдѣльно укажемъ на разборный параллелепипедъ, названный имъ «епипедомъ» (изготовленіе Rausch'a); затѣмъ объ «остаточномъ тѣлѣ» Neumann'a, служащемъ для опредѣленія объема шара (изготовленіе Schotte). Модели Hartl'я относятся къ пирамидамъ и позволяютъ иллюстрировать теоремы о параллельныхъ сѣченіяхъ ихъ (фиг. 8) и объ объемѣ ихъ (фиг. 9) (изготовленіе Pichler).



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Большой извѣстностью пользуется модель вращенія, извѣстная подъ названіемъ цилиндра Wittstein'a; она состоитъ изъ двухъ параллельно расположенныхъ металлическихъ кружковъ; черезъ отверстія, продѣланныя по краямъ этихъ кружковъ, продѣты металлическія палочки, которыя въ нормальномъ положеніи играютъ роль образующихъ боковой поверхности прямого кругового цилиндра; но при вращеніи верхняго кружка вокругъ неподвижной, закрѣпленной металлической оси всей модели палочки занимаютъ положеніе прямыхъ, лежащихъ на поверхности однополаго гиперболоида. При дальнѣйшемъ вращеніи палочки переходятъ, наконецъ, въ образующія двойного конуса. По образцу этой модели устроены болѣе дешевыя модели, изготовленныя изъ картонныхъ пластинокъ и нитей; но послѣднія значительно уступаютъ первой въ прочности (изготовленіе Ehrhardt'a).

Уже давно высказывается пожеланіе, чтобы ученики самостоятельно изготовляли картонныя модели. Идея введенія въ школу занятій ручнымъ трудомъ, которыя преслѣдовали бы исключительно цѣли обученія, но въ то же время далеко не ограничивались бы одной математикой, а въ математикѣ — одной стереометріей, пріобрѣла себѣ много приверженцевъ; я назову лишь Böttger'a въ Лейпцигѣ и Kuhse въ Данцигѣ. Тамъ, гдѣ можно удѣлить этому время, въ особенности тамъ, гдѣ введено практическое обученіе ремеслу, окажется далеко не безполезнымъ примѣненіе математической папки для экспериментовъ Noodt'а, изготовленной B. G. Teubner'омъ. Содержаніе папки таково: 4 листа изъ картона средней толщины, какой употребляется для изготовленія моделей кристалловъ, съ сѣтками на нихъ; 5 одинаковыхъ по величинѣ листовъ плотнаго картона въ 1 *мм.* толщины, съ фигурами на нихъ для изготовленія математическихъ моделей вращенія, одинъ чистый листъ бѣлаго картона 1-го сорта, 4 такихъ же листа 2-го сорта, окрашенныхъ въ сѣрый, красный, синій и черный цвѣта, буравчикъ, трубка съ металлическими кольцами и готовая модель для образца.

Конечно, нельзя обойти молчаніемъ тотъ фактъ, что все еще встрѣчаются противники подобнаго рода работъ, которые указываютъ на то, что нѣкоторые ученики не питаютъ рѣшительно никакого расположенія къ ручному труду и не въ состояніи его пріобрѣсти. «Во всякомъ случаѣ справедливо то, что экспериментальныя упражненія этого рода никогда не получали большого распространенія въ дѣлѣ обученія геометріи (иначе обстоитъ дѣло со спеціальнымъ обученіемъ ручному труду и съ домашними занятіями учениковъ); доставляемая ими польза далеко не пропорціональна затрачиваемому на нихъ времени» *).

Для вычерчиванія коническихъ сѣченій служатъ весьма разнообразные приборы, называемые, большею частью, циркулями, хотя формы ихъ далеко не исчерпываются формою циркуля для классныхъ досокъ. Такъ, напримѣръ, самые простые циркули для вычерчиванія эллипса снабжаются деревянными желобками, въ которыхъ скользитъ карандашъ, описывающій кривую (ср. фиг. 2 и 3). Совсѣмъ новый видъ циркуля, способный описывать коническія сѣченія всѣхъ родовъ, изобрѣлъ Busmann (изготовленіе Hilger'а).

Таблицы для обученія стереометріи Zahn'а изготовляетъ фирма Brügel'я въ Ансбахѣ, а чертежи для стереоскопа — фирма Schlotke въ Гамбургѣ.

Образцы коническихъ сѣченій, которыми пользуются при черченіи на классной доскѣ, находятся въ коллекціи Treutlein'а. Фокусы и центры обозначены отверстіями, а положеніе асимптотъ — нарѣзами на краяхъ. Имѣются образцы эллипса, параболы и гиперболы достаточной величины.

6. Начертательная геометрія. Здѣсь встрѣчается необходимость, большею частью, въ сложныхъ приборахъ. Большою извѣстностью пользуются модели тѣлъ съ плоскими сѣченіями изъ целлулоида, отличающіяся замѣчательной наглядностью (изготовленіе фирмы Bergh & Co.).

Фирма Schilling'а предлагаетъ большую проекціонную доску (фиг. 10). Къ ней относятся еще двѣ вспомогательныя доски, восемь стальныхъ стержней (четыре съ латунными шарами, а четыре заостренные съ обоихъ концовъ) и восемь пробковыхъ шаровъ, а также устойчивая подставка для навѣшиванія досокъ. Малая проекціонная доска сдѣлана изъ картона и покрыта аспидной бумагой.

---

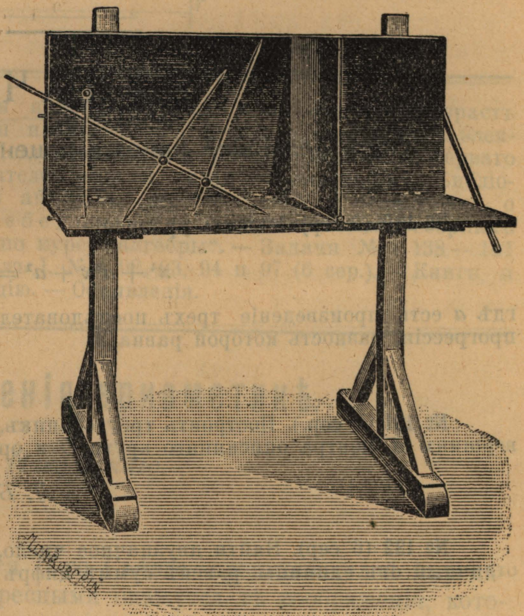
*) O. Hesse, — Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 10 (1913), стр. 8.

Фирма Pichler'a выпустила въ свѣтъ перспективный приборъ для опытовъ со стеклянною доской и палочками, затѣмъ шесть малыхъ перспективныхъ наглядныхъ приборовъ, параллельныя прямыя и положеніе ихъ по отношенію къ плоскостямъ проекцій, далѣе — 21 малую деревянную модель для частнаго обученія перспективному рисованію съ руки. Малый проекціонный аппаратъ Ullmann'a разсчитанъ на учениковъ и отличается дешевой цѣной (изготовленіе Pichler'a).

Приборъ Blencke (въ Гаммѣ), демонстрирующій сѣченія цилиндра, служитъ для того, чтобы установить проективныя соотношенія между кругомъ и эллипсомъ (изготовленіе Hilger'a въ Боннѣ). Тому же Blencke принадлежитъ также проекціонный столъ съ желобками, на которомъ работаютъ съ помощью стеклянныхъ дощечекъ и деревянныхъ палочекъ (изготовленіе Hilger'a). 15 стѣнныхъ таблицъ для проективнаго черченія составлены Henning'омъ (изготовленіе Hofstetter'a).

Стѣнныя таблицы, изображающія коническія сѣченія, какъ проекціи круга, принадлежатъ Schulte-Tigges'у (изготовленіе Reimer'a).

7. Предыдущія соображенія уже неоднократно касались черченія и, въ частности, землемѣрія. Въ самомъ началѣ мы уже указывали общіе вспомогательные приборы черченія, а при разсмотрѣніи приборовъ, употребляемыхъ въ планиметріи, — мы упоминали пантографъ.



Фиг. 10.

Различные снаряды для измѣренія угловъ и высотъ либо имѣютъ весьма простое устройство, — какъ, напримѣръ, приборъ для измѣренія высоты фирмы Winckelmann'a, угломѣръ Frischauf'a, изготовленный фирмой Leykam'a, приборъ для измѣренія высоты деревьевъ фирмы Apel'я, — либо же изготовляются болѣе тонко и служатъ для болѣе точныхъ измѣреній; таковы, напримѣръ: землемѣрный угломѣръ Ohmann'a (изготовленіе Muencke), измѣритель высоты солнца надъ горизонтомъ Willig'a (изготовленіе Ackermann'a), усовершенствованный Kassner'омъ посохъ Якова, служащій карманнымъ угломѣромъ (изготовленіе Dennert & Pape); универсальный угломѣръ Kreuschmer'a (изготовленіе F. Hirt'a); этотъ перечень восходитъ до теодолита и инструмента для нивеллированія. (См. также W. Lietzmann, IMUK-Abhandlungen, Bd. I, Heft 2, стр. 41).

Изъ всего вышеизложеннаго мы имѣемъ уже возможность заключить не только то, что въ распоряженіи преподавателя математики имѣются многочисленныя отдѣльныя учебныя пособія, но также и то, что, большею частью, ему представляется сдѣлать выборъ изъ учебныхъ пособій, служащихъ одинаковой цѣли,

Мы и не задавались здѣсь цѣлью давать полныя и подробныя свѣдѣнія объ учебныхъ пособіяхъ; мы отсылаемъ читателя, интересующагося подробными описаніями пособій, во-первыхъ, къ рефератамъ автора настоящей статьи, регулярно появляющимся съ 1900 г. въ журналѣ «Zeitschrift für mathematischen und naturvissenschaftlichen Unterricht», а во-вторыхъ—къ статьѣ о подвижныхъ моделяхъ въ 1-ой тетради журнала «Unterrichtsblättern» за 1908 г.

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

№ 130 (6 сер). Рѣшить уравненіе

$$x^4 + a^2x + a^2 = 0,$$

гдѣ a есть произведеніе трехъ послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи, разность которой равна 2.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 131 (6 сер.). Построить треугольникъ, зная положеніе одной изъ его вершинъ A, центра описаннаго круга O и ортоцентра H.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 132 (6 сер). Найти двузначное число, наименьшій дѣлитель котораго, отличный отъ единицы, равенъ суммѣ цифръ искомаго числа.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 133 (6 сер.) Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2 + 2x - 7}{\sqrt{x-2}} = 4\,(x-1).$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

Опечатка: Въ № 591 „Вѣстника", въ статьѣ проф. Д. М. Синцова „XIII-й Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ", на стр. 77, стр. 3 сверху, напечатано „комплексы", а должно быть „коннексы".

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется