Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLIX Сем. № 7—8.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 583—584.

При этомъ номерѣ разсылается проспектъ о книгѣ А. В. Цингеръ: „Задачи и вопросы по физикѣ".

Этюды по элементарной алгебрѣ.

Н. Ниноса.

(Продолженіе).

VII. Опредѣленіе натуральнаго числа n изъ условія $\frac{z^n}{n!} < 1$.

Обращаясь къ разсмотрѣнію наименьшаго цѣлаго числа σ, для котораго $\frac{z^\sigma}{\sigma!} \leqq 1$, выведемъ прежде нѣкоторыя неравенства.

Полагая $z > 0$, получимъ по формулѣ (4):

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{n+1} < (n+1)\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} \frac{z}{n(n+1)}$$

откуда найдемъ, перенося выраженіе, стоящее во второй части, въ первую и соединяя его съ первымъ членомъ:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{n+1}.$$

*) См. „Вѣстникъ", № 582.

http://vofem.ru

Точно такъ же будемъ имѣть при $z < n$

$$\left(1-\frac{z}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n+1} > (n+1)\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n}\frac{z}{n\,(n+1)},$$

откуда получимъ:

$$\left(1-\frac{z}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1-\frac{z}{n}\right)^{n}.$$

Оба эти неравенства мы можемъ выразить словами, сказавъ, что $\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$ возрастаетъ при возрастаніи n, независимо отъ знака z, если только $1+\frac{z}{n} > 0$. Предѣлъ, къ которому стремится $\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$ при безграничномъ возрастаніи n будетъ $E(z)$, такъ что можемъ написать:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} < E(z), \quad 1+\frac{z}{n} > 0.$$

При $z = 1$ мы получаемъ выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$, которое возрастаетъ при возрастаніи n, т. е. получаемъ послѣдовательность возрастающихъ чиселъ:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{1},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ldots,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1},\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n},\ldots,\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n},\ldots,\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2-1},\ldots \quad (34)$$

При $z = -1$ мы получимъ возрастающее вмѣстѣ съ n выраженіе $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$; значитъ, обратное выраженіе $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ будетъ убывать при возрастаніи n; такимъ образомъ мы получаемъ послѣдовательность убывающихъ чиселъ:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3},\ldots,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n},\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},\ldots,\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1},\ldots,\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2},\ldots\text{*)}.$$

---

*) Достойно замѣчанія, что эта послѣдовательность получается изъ предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущей послѣдовательности усматриваемъ, что $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2-1}$; извлекая $(n-1)$-ый корень, получаемъ, что $\frac{n}{n-1} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}$, или $\frac{n}{n-1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$; отсюда слѣдуетъ, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$, т. е. что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ убываетъ при возрастаніи n.

http://vofem.ru

Числа возрастающей послѣдовательности начинаются числомъ 2, убывающей — числомъ 4. Разность чиселъ, стоящихъ на n-омъ мѣстѣ въ обѣихъ послѣдовательностяхъ, равна $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ и можетъ быть представлена или въ видѣ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n}>\frac{2}{n},$$

или въ видѣ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}<\frac{4}{n+1};$$

отсюда видно, что эта разность стремится къ нулю при безграничномъ возрастанiи n. Въ силу этого двѣ разсматриваемыя послѣдовательности имѣютъ общiй предѣлъ, и именно число e, такъ какъ предѣлъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ равенъ $E(1)$.

Неравенствамъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1},\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

можно дать болѣе общiй видъ, примѣняя очевидное неравенство $\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n^2-1}{n^2}<1$, изъ котораго вытекаетъ, что $\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n-1}$; въ самомъ дѣлѣ, отсюда слѣдуетъ, что при $s>0$ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{s}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{s}$ и, значитъ, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{s}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s}$; но, перемножая неравенства $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ и $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{s}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s}$, а также неравенства $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$ и $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{s}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{s}$, получимъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-s}>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-s-1},\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+s+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+s}.$$

Если примемъ въ первомъ неравенствѣ $n-s=m$, то условiе $s>0$ дастъ $m<n$; а полагая во второмъ неравенствѣ $n+s+1=m$, получимъ $m>n+1$. Поэтому будемъ имѣть:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m}>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1}\ \text{при}\ m\leqq n,\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{m}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1}\ \text{при}\ m\geqq n+1.$$

Мы выведемъ еще одно неравенство, примѣняя формулу бинома съ остаточнымъ членомъ къ выраженію:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}.$$

Написавъ пять членовъ этой формулы и остатокъ, будемъ имѣть:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n+1} = 1 - \frac{2n+1}{n^2} + \frac{(2n+1)\,2n}{2n^4} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{2\,.\,3\,.\,n^6} + \\ + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,n^8} - R,$$

гдѣ остаточный членъ обозначенъ черезъ $-R$ и равенъ:

$$-\frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,n^{10}}\,X,$$

а X заключается между 1 и $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$; впрочемъ, для насъ достаточно замѣтить, что этотъ остаточный членъ отрицателенъ при $n > 1$.

Три первые члена приводятся къ $1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^3}$, четвертый членъ дастъ $-\frac{4}{3n^3} + \frac{1}{3n^5}$, что, въ соединеніи съ $\frac{1}{n^3}$, доставитъ $-\frac{n^2-1}{3n^5} = -\frac{2n^3+2n^2}{6n^7}(n-1)$; присоединяя же къ этому выраженію пятый членъ, равный $\frac{4n^2-1}{6n^7}(n-1)$, получимъ: $-\frac{2n^3-2n^2+1}{6n^7}(n-1)$, что, очевидно, меньше 0 при $n > 1$. Отсюда видимъ, что при $n > 1$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+1} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2;$$

умножая на $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n+1}$, получимъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1},$$

а извлекая изъ этого неравенства квадратный корень, найдемъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \qquad (35)$$

http://vofem.ru

Это неравенство выражаетъ, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ убываетъ при возрастанiи n и, слѣдовательно, остается всегда менѣе своего значенiя при $n=1$, которое равно $2\sqrt{2}$.

Мы получаемъ отсюда послѣдовательность убывающихъ иррацiональныхъ чиселъ:

$$2\sqrt{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\frac{3}{2}},\ldots,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}},\ldots,$$

и, такъ какъ $1<\sqrt{\frac{n+1}{n}}<1+\frac{1}{2n}$, то разность

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

будетъ положительна, но менѣе $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{2n}<\frac{e}{2n}$ и стремится къ нулю при безграничномъ возрастанiи n, такъ что предѣлъ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ равенъ e.

Нетрудно убѣдиться, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+1}$ возрастаетъ при возрастанiи n, т. е. что $2^4<\left(\frac{3}{2}\right)^7<\left(\frac{4}{3}\right)^{10}<\ldots$ Первое изъ этихъ неравенствъ удовлетворяется потому, что $2^{11}=2048<3^7=2187$, второе потому, что $3^{17}=129\,140\,163<2^{27}=134\,217\,728$. Взявъ теперь въ формулѣ бинома для $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n+1}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{3n+1}$ четыре члена, увидимъ, что остатокъ будетъ положителенъ, и потому получимъ неравенство:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n+1}>1-\frac{3n+1}{n^2}+\frac{(3n+1)\,3n}{2n^4}-\frac{(3n+1)\,3n\,(3n-1)}{2\,.\,3\,.\,n^6},$$

которое нетрудно привести къ виду:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n+1}>1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{n^2(n-4)+1}{2n^5}$$

или

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3n+1}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\frac{n^2(n-4)+1}{2n^5}.$$

Но второй членъ второй части, очевидно, будетъ положителенъ при $n\geqq 4$, т. е. при $n>3$; поэтому неравенство и подавно сохра-

http://vofem.ru

нится, когда этотъ членъ откинемъ; но тогда неравенство, по умножении на $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n+1}$, приметъ видъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+1} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n-2},$$

и хотя теперь оно доказано только для $n > 3$, но раньше мы замѣтили, что оно существуетъ при $n = 2$ и $n = 3$, такъ что дѣйствительно $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+1}$ возрастаетъ при возрастанiи n. Извлекая кубичный корень изъ этого выраженiя, увидимъ, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}$ возрастаетъ съ возрастанiемъ n отъ своего начальнаго значенiя $2\sqrt[3]{2}$ при $n = 1$ до числа e, являющагося предѣломъ этого выраженiя при безграничномъ возрастанiи n.

Выраженiе $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}$ убываетъ при возрастанiи n, потому что оно представляетъ произведенiе двухъ убывающихъ выраженiй $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

Переходя къ вопросу объ опредѣленiи наименьшаго значенiя σ, при которомъ $\frac{z^{\sigma}}{\sigma!} \leqq 1$, разсмотримъ равенство $\frac{z^n}{n!} = 1$, изъ котораго находимъ $z = \sqrt[n]{n!}$. Это значенiе z вполнѣ опредѣляется по значенiю натуральнаго числа n и измѣняется при измѣненiи n; поэтому мы обозначимъ его z_n, такъ что $z_n = \sqrt[n]{n!}$ и отсюда $z_1 = 1$, $z_2 = \sqrt{2}$, $z_3 = \sqrt[3]{6}$, $z_4 = \sqrt[4]{24}$, ... Ясно, что, если $z < z_n$, то $z^n < z_n^n$ и, по раздѣленiи на $n!$, $\frac{z^n}{n!} < 1$.

Равенства

$$z_n^n = n! = 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)\, n = (n-1)!\, n, \qquad z_{n-1}^{n-1} = (n-1)!$$

доставляютъ новое равенство

$$z_n^n = n z_{n-1}^{n-1};$$

но это послѣднее получилось бы и изъ равенствъ такого вида:

$$z_n^n = n!\, C, \quad z_{n-1}^{n-1} = (n-1)!\, C,$$

гдѣ C обозначаетъ совершенно произвольное число, не зависящее отъ n. Наоборотъ, равенство $z_n^n = n z_{n-1}^{n-1}$ доставляетъ значенiе z_n^n съ произ-

http://vofem.ru

вольнымъ множителемъ C, ибо, вставивъ въ этомъ равенствѣ вмѣсто n послѣдовательно $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2 и перемноживъ результаты, получимъ:

$$z_n^n \cdot z_{n-1}^{n-1} \ldots z_3^3 \cdot z_2^2 = n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot z_{n-1}^{n-1} \cdot z_{n-2}^{n-2} \ldots z_2^2 \cdot z_1,$$

откуда, отбрасывая общіе обѣимъ частямъ множители $z_{n-1}^{n-1} \cdots z_2^2$, найдемъ:

$$z_n^n = n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot z_1 = n! \cdot z_1;$$

для опредѣленія же z_1 равенство $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$ не доставляетъ никакихъ средствъ, т. е. оставляетъ z_1 произвольнымъ числомъ, которое ранѣе было обозначено черезъ C. Но если примемъ дополнительно, что $z_1 = 1$, то мы будемъ имѣть право утверждать, что явное выраженіе z_n черезъ n $\left(\text{т. е. } z_n = \sqrt[n]{n!}\right)$ можно замѣнить равенствомъ $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$ съ дополнительнымъ условіемъ $z_1 = 1$.

Сейчасъ же мы покажемъ, что изъ такой замѣны первоначальнаго опредѣленія z_n новымъ опредѣленіемъ можно извлечь большую пользу для ближайшаго изученія числа z_n.

Мы видѣли, что выраженіе $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ возрастаетъ при возрастаніи n отъ значенія 2 при $n = 1$ до предѣла $e = 2{,}71\,828\ldots$ Поэтому можемъ написать:

$$2 \leqq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e,$$

и это двойное неравенство можемъ представить въ видѣ слѣдующихъ двухъ неравенствъ:

$$\left(\frac{2}{n+1}\right)^n \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1}, \quad \left(\frac{e}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n}\left(\frac{e}{n}\right)^{n-1}.$$

Умножая эти неравенства на равенство $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$, получимъ неравенства:

$$\left(\frac{2z_n}{n+1}\right)^n < \left(\frac{2z_{n-1}}{n}\right)^{n-1}, \quad \left(\frac{ez_n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{ez_{n-1}}{n}\right)^{n-1},$$

выражающія, что $\left(\frac{2z_n}{n+1}\right)^n$ убываетъ, а $\left(\frac{ez_n}{n+1}\right)^n$ возрастаетъ при возрастаніи n, такъ что выраженіе $\left(\frac{2z_n}{n+1}\right)^n$ остается менѣе своего значенія при $n = 1$, равнаго $\frac{2z_1}{2} = 1$, а выраженіе $\left(\frac{ez_n}{n+1}\right)^n$ остается болѣе своего значенія при $n = 1$, равнаго $\frac{ez_1}{2} = \frac{e}{2}$, т. е.

$$\left(\frac{2z_n}{n+1}\right)^n < 1, \quad \left(\frac{ez_n}{n+1}\right)^n > \frac{e}{2},$$

http://rcin.org.pl

а отсюда слѣдуетъ, по извлеченіи n-аго корня:

$$\frac{2z_n}{n+1} < 1, \quad \frac{ez_n}{n+1} > \sqrt[n]{\frac{e}{2}}.$$

Замѣтивъ, что по формулѣ, доказанной въ § I (стр. 120, внизу),

$$\sqrt[n]{\frac{e}{2}} = \sqrt[n]{1 + \frac{e-2}{2}} > 1 + \frac{\frac{e-2}{2}}{\frac{en}{2} - \frac{e-2}{2}} = \frac{en}{en-e+2},$$

и вставляя вмѣсто $\sqrt[n]{\frac{e}{2}}$ меньшее число $\frac{en}{en-e+2}$, получимъ изъ найденныхъ неравенствъ:

$$\frac{n+1}{2} > z_n > \frac{(n+1)n}{en-e+2},$$

что можно представить въ видѣ:

$$2 < \frac{n+1}{z_n} < e - \frac{e-2}{n}, \tag{36}$$

или, вставляя $n-1$ вмѣсто n:

$$2 < \frac{n}{z_{n-1}} < e - \frac{e-2}{n-1}. \tag{37}$$

Неравенство $z_n < \frac{n+1}{2}$ не представляется новымъ, ибо мы видѣли (стр. 154), что $\frac{z^n}{n!} > \left(\frac{2z}{n+1}\right)^n$, откуда, вставляя z_n вмѣсто z и 1 вмѣсто $\frac{z_n^n}{n!}$, получили бы $\frac{2z_n}{n+1} < 1$, т. е. $z_n < \frac{n+1}{2}$; но второе неравенство новое. Совокупность этихъ неравенствъ обнаруживаетъ, что предѣлъ отношенія $\frac{n+1}{z_n}$ $\left(\text{а также } \frac{n}{z_{n-1}}\right)$ при безгранично возрастающемъ n будетъ болѣе 2, но не превзойдетъ e; вскорѣ мы увидимъ, что онъ будетъ равенъ e, такъ что предѣлъ обратнаго отношенія $\frac{z_{n-1}}{n}$ равенъ $\frac{1}{e} = 0{,}3\,678\,794$.

Равенство $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$, по раздѣленіи на z_{n-1}^n, даетъ:

$$\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^n = \frac{n}{z_{n-1}}, \tag{38}$$

http://vofem.ru

такъ что изъ только-что написаннаго двойного неравенства (37), найдемъ:

$$2 < \left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^n < e - \frac{e-2}{n-1},$$

откуда, извлекая n-ый корень, получимъ:

$$\sqrt[n]{2} < \frac{z_n}{z_{n-1}} < \sqrt[n]{e - \frac{e-2}{n-1}} < \sqrt[n]{e}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{z_n}{z_{n-1}} > 1$, или что $z_n > z_{n-1}$, т. е. z_n возрастаетъ при возрастаніи n; предѣлъ же отношенія $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ при безграничномъ возрастаніи n равенъ 1, ибо предѣлъ $\sqrt[n]{2}$ и $\sqrt[n]{e}$ при безграничномъ возрастаніи n равенъ 1.

Вышенаписанное равенство (38)

$$\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^n = \frac{n}{z_{n-1}}$$

даетъ

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{n}{z_{n-1}}} = \sqrt[n]{1 + \frac{n - z_{n-1}}{z_{n-1}}};$$

и потому на основаніи указанныхъ выше формулъ § I-го (стр. 120) будемъ имѣть:

$$1 + \frac{n - z_{n-1}}{n^2 - n + z_{n-1}} < \frac{z_n}{z_{n-1}} < 1 + \frac{n - z_{n-1}}{n z_{n-1}},$$

или, умножая на z_{n-1} и перенося членъ z_{n-1}:

$$\frac{n - z_{n-1}}{n^2 - n + z_{n-1}} z_{n-1} < z_n - z_{n-1} < 1 - \frac{z_{n-1}}{n}. \qquad (39)$$

Раздѣливъ числитель и знаменатель перваго выраженія на n^2, приведемъ это выраженіе къ виду $\left(1 - \frac{z_{n-1}}{n}\right)\frac{z_{n-1}}{n} : \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{z_{n-1}}{n^2}\right)$, гдѣ $\frac{z_{n-1}}{n^2} < \frac{1}{2n}$, какъ это слѣдуетъ изъ перваго неравенства (37), и въ предѣлѣ приведется къ нулю, такъ же, какъ $\frac{1}{n}$; поэтому неравенство (39) обнаруживаетъ, что, если разность $z_n - z_{n-1}$ при безграничномъ возрастанiи n стремится къ предѣлу, то онъ будетъ болѣе $\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{e}$, но менѣе $1-\frac{1}{e}$.

Докажемъ еще, что $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ убываетъ при возрастанiи n. Въ самомъ дѣлѣ, $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$, $z_{n+1}^{n+1} = (n+1)z_n^n$, откуда находимъ:

$$\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^{n-1} = \frac{n}{z_n}, \quad \left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{z_n}.$$

Возвышая первое равенство въ степень $n+1$, а второе въ степень $n-1$ и вычитая результаты, получимъ:

$$\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^{n^2-1} - \left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^{n^2-1} = \left(\frac{n}{z_n}\right)^{n+1}\left\{1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{z_n}{n+1}\right)^2\right\};$$

но такъ какъ, въ силу перваго изъ неравенствъ (36), $\frac{z_n}{n+1} < \frac{1}{2}$, такъ что $\left(\frac{z_n}{n+1}\right)^2 < \frac{1}{4}$, а $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ остается всегда менѣе 4, то вторая часть равенства будетъ положительна, а потому $\frac{z_n}{z_{n-1}} > \frac{z_{n+1}}{z_n}$, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь къ неравенству $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ (см. последовательность (34) на стр. 178) и возвысимъ обѣ его части въ степень $n-s-1$, которая пусть будетъ >0, при чемъ s представляетъ нѣкоторое число, не зависящее отъ n. Получающееся такимъ образомъ неравенство:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n-s-1)} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)(n-s-1)}$$

представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-s}\frac{1}{n+1}\right]^n > \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-s-1}\frac{1}{n}\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

и умножимъ его на равенство $z_n^n = nz_{n-1}^{n-1}$, что доставитъ неравенство:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-s}\frac{z_n}{n+1}\right]^n > \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-s}\frac{z_{n-1}}{n}\right]^{n-1},$$

показывающее, что выраженiе

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-s}\frac{z_n}{n+1}\right]^n$$

http://vofem.ru

возрастаетъ при возрастаніи n, такъ что, слѣдовательно, при $n > m$ будемъ имѣть:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-s}\frac{z_n}{n+1}\right]^n > \left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m-s}\frac{z_m}{m+1}\right]^m, \quad n > m, \quad m-s-1 \geqq 0,$$

или, извлекая n-ый корень,

$$\frac{z_n}{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt[n]{\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)^m \frac{z_m}{m+1}\right]^m} \left(\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{m}{m+1}\right)^m}\right)^s, \quad n > m \geqq s+1.$$

Принимая во вниманіе, что при $n > m$

$$\left(\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{m}{m+1}\right)^m}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n : \left(\frac{m+1}{m}\right)^m > 1,$$

откуда слѣдуетъ, что $\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{m}{m+1}\right)^m} > 1$, мы должны взять для s возможно большое значеніе, именно $s = m - 1$, для того, чтобы формула представлялась наиболѣе выгодною. Такимъ образомъ, получимъ:

$$\frac{z_n}{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-m+1} \sqrt[n]{\left(\frac{z_m}{m}\right)^m}$$

и, въ частности, при $m = 1$ и $m = 2$:

$$\frac{z_n}{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \frac{z_n}{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}; \tag{40}$$

первое изъ этихъ частныхъ неравенствъ обращается въ равенство при $n = 1$, а второе — при $n = 1$ и $n = 2$; первое неравенство показываетъ, что

$$z_n > (n+1) : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \frac{n+1}{e}. \tag{41}$$

Полученное нами неравенство (41) легко приводитъ къ заключенію, что $\frac{z_n}{n+1}$ убываетъ при возрастаніи n. Чтобы это доказать, докажемъ, что отношеніе $\frac{z_n}{n+1} : \frac{z_{n-1}}{n} < 1$; а такое заключеніе мы сдѣлаемъ изъ того, что $(n-1)$-ая степень этого отношенія, равная $\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$, менѣе единицы. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $z_n^n = n z_{n-1}^{n-1}$ доставляетъ:

$$\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^{n-1} = \frac{n}{z_n},$$

вслѣдствіе чего разсматриваемая $(n-1)$-ая степень принимаетъ видъ:

$$\frac{n}{z_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{z_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

и оказывается дѣйствительно менѣе 1 на основаніи только-что найденнаго неравенства (41) для z_n. Итакъ, $\frac{z_n}{n+1}<\frac{z_{n-1}}{n}$, или $\frac{z_n}{z_{n-1}}<1+\frac{1}{n}$, откуда, умножая на z_{n-1}, находимъ, что $z_n-z_{n-1}<\frac{z_{n-1}}{n}\cdot$ Если сложимъ это послѣднее неравенство съ выведеннымъ ранѣе неравенствомъ [ср. (39)] $z_n-z_{n-1}<1-\frac{z_{n-1}}{n}$, то получимъ $z_n-z_{n-1}<\frac{1}{2}\cdot$ Если въ этомъ послѣднемъ неравенствѣ вставимъ вмѣсто n послѣдовательно $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2$ и результаты сложимъ, то получимъ: $z_n-z_1<\frac{n-1}{2}$ и, вставляя здѣсь $z_1=1$, найдемъ $z_n<\frac{n+1}{2}\cdot$ Это неравенство намъ давно извѣстно, но теперь оно является въ новомъ освѣщеніи, являясь выводомъ изъ неравенства $z_n-z_{n-1}<\frac{1}{2}\cdot$

Мы выведемъ еще одно неравенство для z_n, исходя изъ замѣчательнаго неравенства, получающагося изъ слѣдующихъ простыхъ соображеній. По основному неравенству (4) § I-го имѣемъ:

$$1^n-\left[1-\frac{1}{(n+a)^2}\right]^n<\frac{n}{(n+a)^2},$$

откуда вытекаетъ неравенство

$$\left[1-\frac{1}{(n+a)^2}\right]^n=\left(\frac{n+a+1}{n+a}\cdot\frac{n+a-1}{n+a}\right)^n>1-\frac{n}{(n+a)^2}. \qquad (42)$$

Замѣтимъ теперь, что

$$(n+a)^2\,(n+1-a)-n^2(n+1+a)=a\,[(2-a)\,n-a\,(a-1)], \qquad (43)$$

гдѣ при $0<a<2$ вторая часть будетъ положительна, если $n>\frac{a(a-1)}{2-a}\cdot$ Дробь $\frac{a\,(a-1)}{2-a}$ отрицательна при $a<1$, обращается въ нуль при $a=1$, положительна и возрастаетъ при возрастаніи a отъ значенія $a=1$, такъ какъ числитель ея возрастаетъ, а знаменатель убываетъ; при $a=\sqrt{2}$ дробь $=1$; поэтому неравенство $n>\frac{a\,(a-1)}{2-a}$ не налагаетъ ограниченія на n, если $a\leqq\sqrt{2}$, но, напримѣръ, при $a=\frac{5}{3}$ оно требуетъ $n>3$; при приближеніи же a къ 2 дробь безгранично возрастаетъ. Умноживъ разсматриваемое неравен-

http://vofem.ru

ство на $2-a$, представимъ его въ видѣ: $a^2+(n-1)a<2n$, или, прибавляя къ обѣимъ частямъ по $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$,

$$\left(a+\frac{n-1}{2}\right)^2<\frac{n^2+6n+1}{4},$$

откуда получается равносильное съ $n>\frac{a(a-1)}{2-a}$ неравенство

$$a<\frac{1}{2}\left[\sqrt{n^2+6n+1}-(n-1)\right]. \tag{44}$$

Нетрудно убѣдиться, что значенія второй части этого неравенства возрастаютъ при возрастаніи n, ибо, если вставимъ $n+\delta$ вмѣсто n, то разность между новымъ и прежнимъ значеніями второй части будетъ $\frac{1}{2}\left[\sqrt{n^2+6n+1+2(n+3)\delta+\delta^2}-(\sqrt{n^2+6n+1}+\delta)\right]$, и знакъ стоящей въ скобкахъ разности будетъ такой же, какъ знакъ разности квадратовъ, которая приводится къ выраженію

$$2\delta\left(n+3-\sqrt{n^2+6n+1}\right)=2\delta\left(\sqrt{n^2+6n+9}-\sqrt{n^2+6n+1}\right)>0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если неравенство (44) удовлетворяется или превращается въ равенство при какомъ-нибудь опредѣленномъ значеніи $n=p$, то оно и подавно будетъ удовлетворено при $n>p$.

Умноживъ и раздѣливъ вторую часть неравенства (44) на $\sqrt{n^2+6n+1}+(n-1)$, получимъ:

$$a<\frac{4n}{\sqrt{n^2+6n+1}+n-1},$$

гдѣ $\sqrt{n^2+6n+1}>n+1$, а потому вторая часть $<\frac{4n}{n+1+n-1}=2$ при всякомъ n.

Предполагая условіе $n>\frac{a(a-1)}{2-a}$ или (44) выполненнымъ, будемъ имѣть:

$$(n+a)^2(n+1-a)>n^2(n+1+a),$$

откуда слѣдуетъ

$$\frac{n}{(n+a)^2}<\frac{n+1-a}{n(n+1+a)},$$

такъ что

$$1-\frac{n}{(n+a)^2}>1-\frac{n+1-a}{n(n+1+a)}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+a-1}{n+a+1},$$

http://vofem.ru

а потому (см. неравенство (42))

$$\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^n\left(\frac{n+a-1}{n+a}\right)^n>\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+a-1}{n+a+1};$$

по умноженіи этого неравенства на $\frac{n+a+1}{n+a}\left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^n$ получимъ:

$$\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1}>\frac{n+1}{n}\left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^{n-1}. \qquad (45)$$

Раздѣливъ это неравенство на $n+1$ и возвысивъ въ n-ую степень, найдемъ:

$$\left[\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right]^n>\left[\left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)\frac{1}{n}\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{n},$$

откуда, умножая на $z_n^n=nz_{n-1}^{n-1}$, получимъ:

$$\left[\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1}\frac{z_n}{n+1}\right]^n>\left[\left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^n\frac{z_{n-1}}{n}\right]^{n-1}, \quad n>\frac{a(a-1)}{2-a}.$$

Это значитъ, что при $n>\frac{a(a-1)}{2-a}$ значенія выраженія

$$\left[\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1}\frac{z_n}{n+1}\right]^n$$

возрастаютъ при возрастаніи n. Полагая $a=\sqrt{2}$, заключимъ отсюда, что всѣ значенія этого выраженія болѣе того значенія, которое оно имѣетъ при $n=1$, т. е. 1, откуда выводимъ:

$$\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1}\frac{z_n}{n+1}>1, \quad a=\sqrt{2}.$$

Вставляя $n-1$ вмѣсто n, отсюда найдемъ:

$$\left(\frac{n+a-1}{n+a}\right)^n\frac{n}{z_{n-1}}<1, \quad a=\sqrt{2},$$

а это неравенство приведетъ къ заключенію, что $\frac{z_n}{n+\sqrt{2}}$ убываетъ при возрастаніи n, ибо, возвысивъ въ n-ую степень отношеніе

$$\frac{z_n}{n+\sqrt{2}}:\frac{z_{n-1}}{n-1+\sqrt{2}}=\frac{z_n}{z_{n-1}}\,\frac{n-1+\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}},$$

получимъ, вставляя nz_{n-1}^{n-1} вмѣсто z_n^n:

$$\frac{z_n^n}{z_{n-1}^n}\left(\frac{n+\sqrt{2}-1}{n+\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{n+a-1}{n+a}\right)^n\frac{n}{z_{n-1}}<1, \quad a=\sqrt{2}.$$

http://vofem.ru

Итакъ, при $a = \sqrt{2}$

$$\frac{z_n}{n+a} < \frac{z_{n-1}}{n-1+a} < \ldots < \frac{z_2}{2+a} = \frac{z_1}{1+a} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Отсюда получается:

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} < 1 + \frac{1}{n+a-1}, \quad z_n - z_{n-1} < \frac{z_{n-1}}{n+a-1}$$

и, складывая послѣднее неравенство съ неравенствомъ (39) $z_n - z_{n-1} < 1 - \frac{z_{n-1}}{n}$, полученнымъ ранѣе, будемъ имѣть:

$$z_n - z_{n-1} < \frac{1}{2} - \frac{a-1}{n+a-1}\frac{z_{n-1}}{2n} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\frac{\sqrt{2}-1}{n+\sqrt{2}-1},$$

гдѣ $\frac{z_{n-1}}{n}$ замѣнено меньшимъ числомъ $\frac{1}{e}$ (стр. 184).

Изъ неравенства

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} < \frac{n+a}{n+a-1}$$

получается по возвышенiи въ $(n-1)$-ую степень:

$$\frac{z_n^{n-1}}{z_{n-1}^{n-1}} = \frac{n}{z_n} < \left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^{n-1},$$

откуда выводимъ самое выгодное по сравненiю съ предыдущими неравенствами:

$$z_n > n\left(\frac{n+a-1}{n+a}\right)^{n-1}, \quad a = \sqrt{2}.$$

Оно обращается въ равенство при $n = 1$ и $n = 2$.

Мы должны были принять $a < 2$. Полагая $a \geqq 2$, разсмотримъ разность

$$\left[\frac{(n+a)^2}{(n+a)^2-1}\right]^n - \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+a+1}{n+a-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{(n+a+1)(n+a-1)}\right]^n - \left[1 + \frac{n-a+1}{(n+1)(n+a-1)}\right]$$

и, примѣняя къ первому члену ея формулу бинома, получимъ ея выраженiе въ видѣ:

$$\frac{1}{(n+a+1)(n+a-1)} \times$$

$$\times\left[\frac{a^2-1-n}{n+1} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n+a+1)(n+a-1)} + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{(n+a+1)(n+a-1)}\right)^2 + \ldots\right].$$

Ясно, что при $n < a^2 - 1$ она будетъ положительна.

http://vofem.ru

Взявъ два первыхъ члена въ скобкахъ, убѣдимся, что ихъ сумма будетъ положительна при $n \leqq 2a^2 - 2a - 1$, но отрицательна при $n = 2a^2 - 2a$ и т. д.*). Отсюда слѣдуетъ, что навѣрное

$$\left(\frac{n+a}{n+a+1}\right)^n \left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^n > \frac{n}{n+1}\,\frac{n+a+1}{n+a-1} \quad \text{при } n \leqq 2a^2 - 2a - 1,$$

или

$$\left(\frac{n+a+1}{n+a}\right)^{n+1} < \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+a}{n+a-1}\right)^{n-1} \quad \text{при } n \leqq 2a^2 - 2a - 1.$$

Сколько ни взять членовъ формулы бинома, всегда получится такое значенiе, котораго не должно превосходить число n, что и дѣлаетъ формулу мало полезной.

Чтобы получить для z_n неравенство со знакомъ $<$, возьмемъ выведенное нами изъ формулы бинома неравенство (35):

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

и возвысимъ его въ $(n-1)$-ую степень, что доставитъ:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2-n} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{n-1} < \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^{n-1}.$$

Но $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2-n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{n} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Вставляя эти значенiя и дѣля неравенство на $n^n\sqrt{n}$, получимъ:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right]^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

а умножая это неравенство на $z_n^n = n z_{n-1}^{n-1}$, найдемъ:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{z_n}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right]^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{z_{n-1}}{n} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Это неравенство показываетъ, что значенiя выраженiя

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{z_n}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right]^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

---

*) Ибо при $n = 2a^2 - 2a - 1$ эта сумма равна $\frac{a^2-2}{2a(a-1)}$ и убываетъ при возрастанiи n. *Ред.*

http://vofem.ru

убываютъ при возрастанiи n и, слѣдовательно, остаются всегда менѣе значенiя, соотвѣтствующаго $n = 1$ и равнаго 1. Итакъ:

$$\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{z_n}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right]^n < \sqrt{n+1},$$

откуда, извлекая n-ый корень, найдемъ:

$$\frac{z_n}{n+1} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sqrt[2n]{n+1}. \qquad (46)$$

Основываясь на этомъ неравенствѣ, нетрудно обнаружить, что $\dfrac{z_n}{(n+1)\sqrt[2n]{n+1}}$ возрастаетъ при возрастанiи n. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ отношенiе

$$\left[\frac{z_n}{(n+1)\sqrt[2n]{n+1}} : \frac{z_{n-1}}{n\sqrt[2n-2]{n}}\right]^{n-1} = \frac{z_n^n}{z_n z_{n-1}^{n-1}} \cdot \frac{n^{n-1}\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{(n+1)^{n-1}\sqrt{n+1}},$$

что, послѣ подстановки nz_{n-1}^{n-1} вмѣсто z_n^n, приводится къ выраженiю

$$\frac{n+1}{z_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sqrt[2n]{n+1},$$

которое, на основанiи только-что найденнаго неравенства (46), болѣе 1, мы заключимъ, что

$$\frac{z_n}{(n+1)\sqrt[2n]{n+1}} > \frac{z_{n-1}}{n\sqrt[2n-2]{n}} > \ldots > \frac{z_2}{3\sqrt[4]{3}} > \frac{z_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $z_n > \dfrac{n+1}{2} \dfrac{\sqrt[2n]{n+1}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{а прежде мы имѣли } z_n < \dfrac{n+1}{2}\right)$ и что

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt[2n]{n+1}}{\sqrt[2n-2]{n}}$$

$\left(\text{а прежде (стр. 188) имѣли } \dfrac{z_n}{z_{n-1}} < \dfrac{n+1}{n}\right)$, такъ что $\sqrt[2n]{n+1} < \sqrt[2n-2]{n}$, т. е. $\sqrt[2n]{n+1}$ убываетъ при возрастанiи n и остается всегда $< \sqrt{2}$. Нетрудно показать, что при безграничномъ возрастанiи n выраженiе $\sqrt[2n]{n+1}$ стремится къ предѣлу 1; въ самомъ дѣлѣ, если бы допустить,

http://vofem.ru

что этотъ предѣлъ равенъ $1+\varepsilon$, гдѣ ε очень малое число, то при всѣхъ значеніяхъ n мы имѣли бы неравенство $\sqrt[2n]{n+1} > 1+\varepsilon$, или $n+1 > (1+\varepsilon)^{2n}$; но послѣдняя степень, по формулѣ бинома, болѣе $1+2n\varepsilon+\frac{2n(2n-1)}{2}\varepsilon^2$, а, слѣдовательно, и подавно болѣе $1+n(2n-1)\varepsilon^2$, такъ что было бы $n+1 > 1+n(2n-1)\varepsilon^2$, откуда $2n-1 < \frac{1}{\varepsilon^2}$, что представляетъ очевидную нелѣпость, такъ какъ число n находится въ нашемъ распоряженіи и не подлежитъ никакимъ ограниченіямъ. Итакъ, предѣлъ $\sqrt[2n]{n+1} = 1$.

Соединяя два неравенства (40) и (46) съ знаками $>$ и $<$, полученныя для z_n, и умножая неравенство (40) на неравенство $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, вытекающее изъ неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$, будемъ имѣть двойное неравенство:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{2}} < \frac{z_n}{n+1} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\sqrt[2n]{n+1}.$$

Множитель $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ мы замѣнимъ меньшимъ на основаніи слѣдующаго разсужденія. Мы знаемъ, что $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$ возрастаетъ при возрастаніи n; если поэтому допустимъ, что это выраженіе равно 2 при $n=2$, откуда слѣдуетъ, что $1+\frac{\lambda}{2}=\sqrt{2}$, т. е. $\lambda = 2(\sqrt{2}-1)$, то можемъ быть увѣрены, что при $n>2$ будетъ $2 < \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$, а, слѣдовательно, извлекая n-ый корень, найдемъ: $\sqrt[n]{2} < 1+\frac{\lambda}{n}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} > \frac{n}{n+\lambda}$.

Такимъ образомъ заключимъ: $\frac{z_n}{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+\lambda}$, и это неравенство превращается въ равенство при $n=2$.

Умножая двойное неравенство для $\frac{z_n}{n+1}$ на e, представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\frac{n+1}{n+\lambda}e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{ez_n}{n+1} < \sqrt[2n]{n+1}\cdot e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \qquad (47)$$

откуда легко получается выводъ, что предѣлъ $\frac{ez_n}{n+1}$ при безграничномъ возрастаніи n равенъ 1, ибо какъ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, такъ и $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

http://vofem.ru

имѣютъ предѣломъ e (стр. 181), а предѣлъ $\sqrt[2n]{n+1}$, какъ мы только-что видѣли, равенъ 1.

Какъ извѣстно (стр. 181), послѣдовательность чиселъ вида $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ приближается къ e убывая, такъ что

$$e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}};$$

слѣдовательно,

$$e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \sqrt{\frac{n+1}{n}} < 1 + \frac{1}{2n}. \qquad (48)$$

Такъ какъ послѣдовательность чиселъ вида $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ приближается къ e возрастая, то мы имѣемъ право написать, при произвольномъ значенiи числа k: $\left(\frac{nk+1}{nk}\right)^{nk} < e$, откуда

$$e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{nk+1}{nk}\right)^{nk} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{nk}\right)^k : \frac{n+1}{n}\right]^n.$$

Но примѣняя формулу бинома къ выраженiю $\left(1+\frac{1}{nk}\right)^k$ и взявъ три ея члена, получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{nk}\right)^k > 1 + \frac{1}{n} + \frac{k-1}{2kn^2} = \frac{n+1}{n} + \frac{k-1}{2kn^2},$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{nk}\right)^k : \frac{n+1}{n} > 1 + \frac{k-1}{2kn(n+1)},$$

и, слѣдовательно,

$$\left[\left(1+\frac{1}{nk}\right)^k : \frac{n+1}{n}\right]^n > \left[1 + \frac{k-1}{2kn(n+1)}\right]^n > 1 + \frac{k-1}{2k(n+1)}.$$

Когда перейдемъ къ предѣлу, считая k безгранично возрастающимъ, то получимъ:

$$e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{2n+2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что можно написать:

$$e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{2n+2} + \mu_n, \quad \text{гдѣ } \mu_n > 0,$$

при чемъ [см. неравенство (48)] должно быть выполнено условiе:

$$1 + \frac{1}{2n+2} + \mu_n < 1 + \frac{1}{2n},$$

откуда получается: $\mu_n < \frac{1}{2n(n+1)}$.

http://vofem.ru

Мы напишемъ поэтому

$$\mu_n = \frac{\theta_n}{2n(n+1)},$$

гдѣ θ_n представляетъ нѣкоторое число, удовлетворяющее условію $0 < \theta_n < 1$, и такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$e : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{2n+2} + \frac{\theta_n}{2n(n+1)},$$

и, слѣдовательно, замѣчая, что $\frac{n+1}{n+\lambda} = 1 + \frac{1-\lambda}{n+\lambda}$, найдемъ, согласно неравенству (47):

$$\left(1 + \frac{1-\lambda}{n+\lambda}\right)\left[1 + \frac{1}{2n+2} + \frac{\theta_n}{2n(n+1)}\right] < \frac{ez_n}{n+1},$$

или, умножая на $n+1$:

$$\left(1 + \frac{1-\lambda}{n+\lambda}\right)\left(n + 1,5 + \frac{\theta_n}{2n}\right) < ez_n. \tag{49}$$

Какъ извѣстно (стр. 194), это неравенство обращается въ равенство при $n=2$, откуда получимъ: $\theta_2 = 4\left(\frac{4e}{3} - 3,5\right) = 0,49\,748$.

Выполняя умноженіе въ первой части неравенства (49) и перенося члены, найдемъ:

$$n < ez_n - \left[4,5 - 2\sqrt{2} + \frac{(1-\lambda)(1,5-\lambda)}{n+\lambda} + \frac{\theta_n}{2n}\left(1 + \frac{1-\lambda}{n+\lambda}\right)\right].$$

При $n = 2$ неравенство переходитъ въ равенство, и вычитаемое въ скобкахъ получаетъ значеніе $e\sqrt{2} - 2 = 1,84\,423$, которое мы обозначимъ буквою a. При безгранично возрастающемъ n вычитаемое приближается къ предѣлу $4,5 - 2\sqrt{2} = 1,67\,157$, и мы можемъ съ полною строгостью утверждать, что $n < ez_n - 1,67\,157$. Однако, разсмотрѣніе нижеприводимой (стр. 197) таблицы значеній $ez_n - a$ обнаруживаетъ, что $n < ez_n - a$. Табличныя числа вычислены при посредствѣ логариѳмовъ, кромѣ послѣднихъ четырехъ строкъ, для вычисленія которыхъ примѣнена одна формула Высшаго Анализа. Въ таблицѣ помѣщены въ одной строкѣ значенія чиселъ: n, z_n, разности $z_n - z_{n-1}$ и числа $ez_n - a$. Разсматривая столбецъ этихъ послѣднихъ чиселъ, замѣчаемъ, что цѣлая часть въ нихъ отъ $n = 2$ до $n = 38$ точно равна n, такъ что $0 < ez_n - a - n < 1$, при чемъ эта послѣдняя разность медленно возрастаетъ при возрастаніи n; отъ $n = 39$ до $n = 101$ и много далѣе — примѣрно, до $n = 300$ — разность $ez_n - a - n$ превышаетъ 1, но не достигаетъ 2; при дальнѣйшемъ возрастаніи n цѣлая часть числа $ez_n - a$ дѣлается $n+2$ и остается такою при $n = 1000$ и много далѣе —

n	z_n	$z_n - z_{n-1}$	$ez_n - a$
2	$\sqrt{2}$	0,414213	2,00000
3	1,817120	0,402907	3,09521
4	2,213363	0,396243	4,17132
5	2,605170	0,391807	5,23736
6	2,993795	0,388625	6,29375
7	3,380007	0,386212	7,34358
8	3,764350	0,384343	8,38842
9	4,147165	0,382815	9,42893
10	4,528728	0,381563	10,46613
11	4,909238	0,380510	11,50047
12	5,288853	0,379615	12,53236
13	5,667690	0,378837	13,56215
14	6,045854	0,378164	14,59011
15	6,423424	0,377570	15,61636
16	6,800466	0,377042	16,64136
17	7,177038	0,376572	17,66498
18	7,553182	0,376144	18,68745
19	7,928947	0,375765	19,70888
20	8,304360	0,375413	20,72937
21	8,679456	0,375096	21,74898
22	9,054260	0,374804	22,76782
23	9,428799	0,374539	23,78589
24	9,803084	0,374286	24,80332
25	10,177141	0,374057	25,82011
38	15,02460		38,99688
39	15,39661	0,37201	40,00810
100	37,9927		101,43065
101	38,3622	0,3695	102,43502
1000	369,49170		1002,53818
1001	369,85974	0,36804	1003,53867

http://vofem.ru

примѣрно, до $n = 4000$; при $n = 10000$, $z_n = 3680{,}81$, $ez_n - a = 10003{,}636$; произведенiе чиселъ отъ 1 до 10000 представляется числомъ, состоящимъ изъ 35660 цифръ, изъ которыхъ семь старшихъ будутъ 2718153. Такимъ образомъ, для послѣдовательности чиселъ $z_2, z_3, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots$, которую мы обозначимъ для краткости (z_n), выраженiе $ez_n - a$ доставитъ своею цѣлою частью или число σ, при которомъ $\frac{z_n^\sigma}{\sigma!} = 1$, если $n < 39$, или число $\sigma + 1$, или $\sigma + 2$ и т. д. Если возьмемъ теперь какое-нибудь число z, то оно будетъ заключаться между двумя числами послѣдовательности (z_n), такъ что $z_{k-1} < z < z_k$ (напримѣръ, $z_{20} < 8{,}5 < z_{21}$), и потому $ez_{k-1} - a < ez - a < ez_k - a$, откуда слѣдуетъ, что цѣлая часть $ez - a$ будетъ одинакова съ цѣлою частью $ez_{k-1} - a$ или $ez_k - a$: если z не превосходитъ 15, то въ первомъ случаѣ къ цѣлой части числа $ez - a$ нужно прибавить 1, чтобы получить σ для числа z, а во второмъ случаѣ $ez - a$ даетъ своей цѣлой частью наименьшее число σ, при которомъ $\frac{z^\sigma}{\sigma!} < 1$; если же $z > 15{,}4$, то въ первомъ случаѣ получается σ, а во второмъ $\sigma + 1$. Отсюда видимъ, что цѣлая часть выраженiя $ez - a + 1$, во всякомъ случаѣ, будетъ болѣе или равна σ; поэтому, называя ее σ_1, будемъ имѣть: $\frac{z^{\sigma_1}}{\sigma_1!} < 1$.

Дальнѣйшее разсмотрѣнiе таблицы обнаруживаетъ, что разность $z_n - z_{n-1}$ убываетъ при возрастанiи n,—приближаясь къ $\frac{1}{e} = 0{,}3678794$ (стр. 184), — но столь медленно, что при измѣненiи n отъ 12 до 101 сумма разностей, равная $z_{101} - z_{11}$, убываетъ всего на 0,01, а при дальнѣйшемъ возрастанiи n отъ 101 до 1001 она убываетъ всего на 0,0015. Замѣченное изъ разсмотрѣнiя таблицы убыванiе разности выражается неравенствомъ $z_{n+1} - z_n < z_n - z_{n-1}$, или $z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} < 0$, откуда, послѣ раздѣленiя на z_n, получаемъ:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} + \frac{z_{n-1}}{z_n} - 2 < 0.$$

Это неравенство несомнѣнно существуетъ для значенiй n отъ $n = 2$ до $n = 24$, и для этихъ значенiй оно приводитъ къ одному неравенству, которое было выведено нами въ общемъ видѣ для всѣхъ значенiй n. Именно, представивъ разсматриваемое неравенство въ видѣ:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} < 2 - \frac{1}{\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)}, \tag{50}$$

замѣтимъ, что оно и подавно сохранится, когда вмѣсто знаменателя $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ вставимъ большее число. Этимъ соображенiемъ мы будемъ руководиться, когда изъ разсматриваемаго неравенства получимъ рядъ частныхъ неравенствъ при $n = 2, 3, 4, \ldots$, зная, что $z_2 = \sqrt{2} = a$.

Именно будемъ имѣть:

$$\frac{z_3}{z_2} < 2 - \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{a}, \quad \frac{z_4}{z_3} < 2 - \frac{a}{2a-1} = \frac{3a-2}{2a-1},$$

$$\frac{z_5}{z_4} < 2 - \frac{2a-1}{3a-2} = \frac{4a-3}{3a-2}, \quad \frac{z_6}{z_5} < 2 - \frac{3a-2}{4a-3} = \frac{5a-4}{4a-3}.$$

Законъ, по которому составляются въ окончательномъ видѣ дроби во вторыхъ частяхъ, настолько простъ и очевиденъ, что мы можемъ выразить его въ общемъ видѣ такъ, помня, что $a^2 = 2$:

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} < \frac{(n-1)a-(n-2)}{(n-2)a-(n-3)} =$$

$$= \frac{na-a-n+a^2}{na-2a-n+a^2+1} = \frac{(n+a)(a-1)}{(n-1+a)(a-1)} = \frac{n+a}{n-1+a};$$

теперь нетрудно убѣдиться, что при такомъ видѣ неравенства для $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ соотвѣтствующее неравенство для $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ получается изъ него простою замѣною n на $n+1$: для этого достаточно вставить найденное значеніе $\frac{n+a}{n-1+a}$, — большее, чѣмъ $\frac{z_n}{z_{n-1}}$, — въ исходное неравенство (50). Отсюда слѣдуетъ, что для значеній n отъ $n=2$ до $n=24$ будетъ $\frac{z_n}{n+a} < \frac{z_{n-1}}{n-1+a}$, т. е. то неравенство, которое мы уже получили ранѣе для всякаго значенія n. Какъ мы только-что видѣли, это послѣднее неравенство получается изъ неравенства (50) путемъ послѣдовательной замѣны знаменателей дробей бо́льшими числами $n-1$ разъ, и потому по сравненію съ неравенствомъ (50) оно можетъ быть названо грубымъ приближеніемъ, характеризующимъ взаимное отношеніе чиселъ z_n и n. Еще болѣе грубымъ, но удобнымъ для приложеній, является утвержденіе, что съ возрастаніемъ n $\frac{z_n}{n+1}$ убываетъ; оно слѣдуетъ изъ того, что $\frac{z_n}{n+a}$ убываетъ, ибо

$$\frac{z_n}{n+1} = \frac{z_n}{n+a} \cdot \frac{n+a}{n+1} = \frac{z_n}{n+a}\left(1 + \frac{a-1}{n+1}\right),$$

такъ что $\frac{z_n}{n+1}$ представляется произведеніемъ чиселъ двухъ убывающихъ послѣдовательностей; но, наоборотъ, изъ убыванія $\frac{z_n}{n+1}$ нельзя вывести убыванія $\frac{z_n}{n+a}$, ибо

$$\frac{z_n}{n+a} = \frac{z_n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+a} = \frac{z_n}{n+1}\left(1 - \frac{a-1}{n+a}\right),$$

http://vofem.ru

гдѣ первый множитель убываетъ, а второй возрастаетъ. Изъ этихъ разсужденій можно придти къ догадкѣ, что едва ли новое неравенство (50) можетъ быть доказано при посредствѣ тѣхъ примитивныхъ соображеній, на которыхъ были основаны всѣ предыдущіе выводы.

Принимая во вниманіе, что числа z_{n+1}, z_n, z_{n-1} связаны между собою равенствами:

$$z_{n+1}^{n+1} = (n+1)\, z_n^n, \qquad z_n^n = n z_{n-1}^{n-1},$$

мы можемъ, или, скорѣе, должны устранить два изъ этихъ чиселъ изъ разсматриваемаго неравенства. Простѣйшую форму неравенство получитъ, когда исключимъ z_{n+1} и z_{n-1} при посредствѣ формулъ:

$$\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{z_n}, \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{z_n}}; \quad \left(\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)^{n-1} = \frac{z_n}{n}, \quad \frac{z_{n-1}}{z_n} = \sqrt[n-1]{\frac{z_n}{n}},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{z_n}} + \sqrt[n-1]{\frac{z_n}{n}} - 2 < 0.$$

Непосредственно въ такомъ видѣ неравенство не можетъ быть доказано, ибо намъ неизвѣстно удобное для вычисленій точное выраженіе для z_n. Поэтому мы разсмотримъ вообще такое выраженіе (которое обозначимъ буквою ω):

$$\omega = \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{z}} + \sqrt[n-1]{\frac{z}{n}} - 2,$$

которое при различныхъ значеніяхъ z получаетъ различныя—какъ положительныя, такъ и отрицательныя — значенія. Напримѣръ, при маломъ значеніи $z = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$ первый членъ ω равенъ 2 и потому $\omega > 0$; при большомъ значеніи $z = n \,.\, 2^{n-1}$ второй членъ ω равенъ 2 и потому $\omega > 0$. Но для насъ представляютъ интересъ значенія ω только для тѣхъ значеній z, которыя не выходятъ изъ границъ, установленныхъ для z_n, т. е. удовлетворяютъ двойному неравенству [ср. неравенства (40) и (46)]:

$$(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < z < (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, \sqrt[2n]{n+1},$$

гдѣ достаточно считать $n > 24$. Соотвѣтствующія этимъ крайнимъ значеніямъ z значенія ω обозначимъ ω_1 и ω_2.

Будемъ имѣть:

$$\omega_1 = \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} + \sqrt[n-1]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}} - 2 = \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} - \frac{n+2}{n+1},$$

http://vofem.ru

при чемъ знакъ разности, къ которой привелось ω_1, будетъ такой же, какъ знакъ разности $(n+1)$-ыхъ степеней уменьшаемаго и вычитаемаго, т. е. разности:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1},$$

въ которой, какъ мы знаемъ, вычитаемое больше уменьшаемаго. Поэтому $\omega_1 < 0$.

Выраженіе ω_2 приводится къ такому виду:

$$\omega_2 = \frac{n+1}{n}\sqrt[2n+2]{\frac{n}{n+1}}\sqrt[2n(n+1)]{\frac{1}{n+1}} + \frac{n}{n+1}\sqrt[2n-2]{\frac{n}{n+1}}\sqrt[2n(n-1)]{n+1} - 2;$$

но при посредствѣ элементарныхъ соображеній, повидимому, нельзя доказать, что $\omega_2 < 0$, и причина этого заключается въ томъ, что $\sqrt[n]{n+1}$ не можетъ быть выраженъ съ достаточной точностью безъ посредства логариѳма. Если бы было доказано, что $\omega_2 < 0$, то оставалось бы еще доказать, что при измѣненіи z между его крайними значеніями ω не мѣняетъ знака, т. е. не получаетъ положительныхъ значеній. Это послѣднее обстоятельство обнаруживается посредствомъ красиваго геометрическаго истолкованія неравенства $\omega < 0$.

Примемъ $z = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}}\, x^{n^2-1}$. Вставляя это значеніе, получимъ:

$$\omega = \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}}\,\frac{1}{x^{n^2-1}}} + \sqrt[n-1]{\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}}\, x^{n^2-1}} - 2,$$

и такъ какъ $\frac{n+1}{n}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$, $x^{n^2-1} = x^{(n+1)(n-1)}$,

то найдемъ:

$$\omega = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{x^{n-1}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1} - 2,$$

и потому

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1}\omega = x^2 + \frac{n}{n+1}\, x^{2n+2} - 2\sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1} + 1 - 1$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1}\right)^2 - (\sqrt{1-x^2})^2.$$

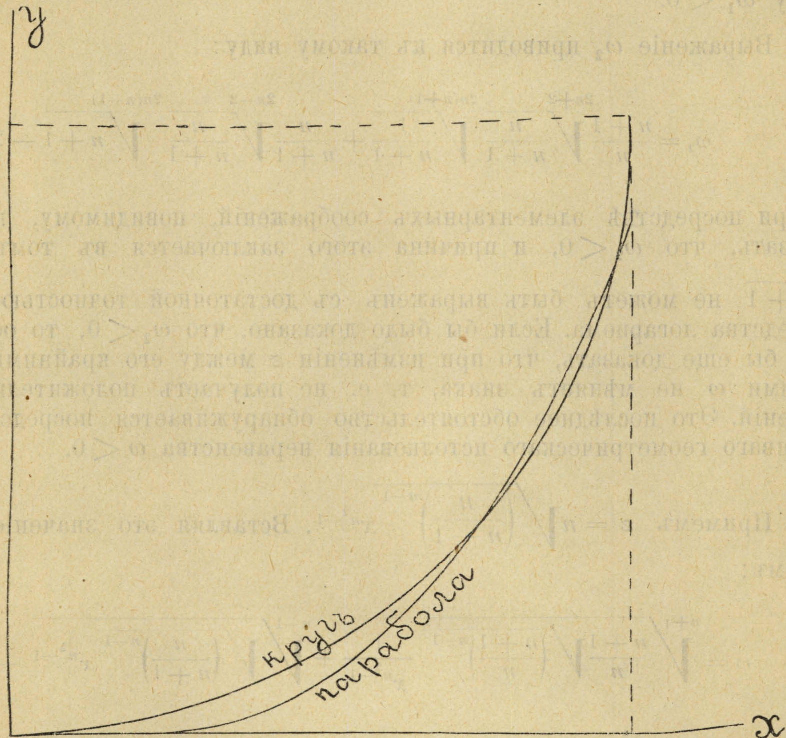
http://vofem.ru

Отсюда слѣдуетъ, что неравенство $\omega < 0$ равносильно неравенству:

$$1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1} < \sqrt{1 - x^2},$$

или

$$1 - \sqrt{1 - x^2} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1}.$$



Полагая $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, $Y = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x^{n+1}$, разсмотримъ представляемыя этими уравненіями кривыя линіи. Первое уравненіе при $x > 0$ представляетъ четверть круга радіуса 1, имѣющаго центръ на оси y, на разстояніи 1 отъ начала, и касающагося оси x въ началѣ. Второе уравненіе представляетъ параболическую кривую, которая также касается оси x въ началѣ и при сколько-нибудь значительномъ n (а насъ интересуютъ значенія n, начиная съ 25) сначала крайне медленно отступаетъ отъ оси x: на чертежѣ радіусъ (т. е. единица) равенъ 8 *см.* и соотвѣтствующее $x = \frac{1}{2}$ значеніе Y при $n = 25$ равно $\sqrt{\frac{25}{26}} \cdot \frac{8 \text{ см.}}{2^{26}}$, что меньше $\frac{1\ \textit{мм.}}{850\,000}$, т. е. совершенно неощутимо, такъ что часть параболы отъ $x=0$ до $x=\frac{1}{2}$ на чертежѣ будетъ совпадать съ осью x, и потому чертежъ можетъ быть только грубо схематичнымъ. На крайней ординатѣ $x=1$ находится крайняя точка четверти круга $y=1$ и точка параболы $Y=0{,}98058$, на 1,6 *мм.* ниже точки круга. Обѣ кривыя выпуклы въ одну и ту же сторону (къ оси x); поэтому, принимая во вниманіе расположеніе ихъ конечныхъ точекъ, соотвѣтствующихъ $x=0$ и $x=1$, можно утверждать, что онѣ могутъ не пересѣкаться, а если пересѣкаются, то непремѣнно въ двухъ точкахъ: въ этомъ послѣднемъ случаѣ кругъ отсѣкаетъ отъ параболы дугу, для всѣхъ точекъ которой — и только для нихъ — будетъ $y<Y$, т. е. $\omega<0$. Но мы видѣли, что $\omega_1<0$ при произвольномъ значеніи n и $z=(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, чему соотвѣтствуетъ $x=\sqrt[2n+2]{\frac{n}{n+1}}$; и такъ какъ это значеніе $x<1$, то несомнѣнно, что каждая изъ параболъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ n, пересѣкаетъ четверть круга въ двухъ точкахъ, при чемъ для одной точки пересѣченія $x<\sqrt[2n+2]{\frac{n}{n+1}}$. Если бы было доказано, что $\omega_2<0$, то это значило бы, что и точка параболы, соотвѣтствующая другому крайнему значенію z, лежитъ также на отрѣзкѣ параболы, отсѣченномъ кругомъ; а потому на томъ же отрѣзкѣ лежитъ и точка, соотвѣтствующая промежуточному значенію $z=z_n$, т. е. и для этого значенія $\omega<0$.

Чтобы дать представленіе о числовыхъ значеніяхъ выраженій, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло, приведемъ результаты вычисленій для $n=25$. Въ таблицѣ находимъ $z_{25}=10{,}177141$; крайнее низшее значеніе z въ формѣ $\frac{25^{25}}{26^{24}}=9{,}753058$, въ формѣ $25\left(\frac{24+\sqrt{2}}{25+\sqrt{2}}\right)^{24}=9{,}90093$, и, наконецъ, въ формѣ $25\left(\frac{24+a}{25+a}\right)^{24}$, гдѣ должно быть $n=25>\frac{a(a-1)}{2-a}$, — откуда $a^2+24a-50=(a+12)^2-194<0$, или $a<\sqrt{194}-12$, т. е. $a<1{,}928388\ldots$, — при $a=1{,}928388$ будетъ $10{,}081083$; крайнее высшее значеніе равно $10{,}207601$: оно только на $0{,}03$ превосходитъ истинное значеніе z_{25}; наконецъ, при $z=z_{25}$, $\omega=-0{,}0000211$, $\omega_1=-0{,}0000294$, $\omega_2=-0{,}0000202$, а соотвѣтствующее ω_1 значеніе $x=0{,}999246$, такъ что при $n>24$ намъ придется разсматривать параболы и кругъ только на промежуткѣ отъ приведеннаго значенія x до $x=1$.

(Окончаніе слѣдуетъ).

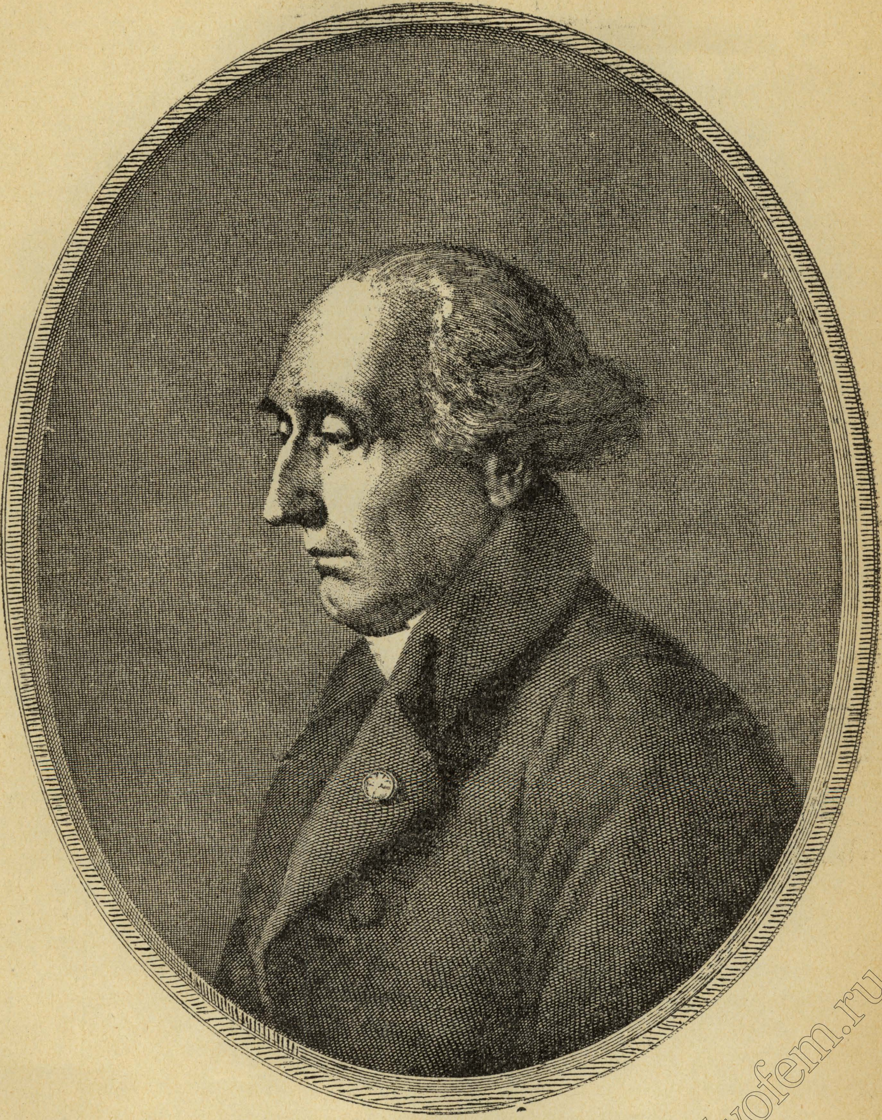
Іосифъ Людвигъ Лагранжъ (Joseph Louis Lagrange).

(25 января 1736 г. — 10 апрѣля 1813 г.)

В. Аренса.

«Изъ изобрѣтателей, наиболѣе расширившихъ предѣлы нашего знанія, Ньютонъ и Лагранжъ обладали, какъ мнѣ кажется, высшей степенью той счастливой способности, которая помогаетъ всюду установить и всесторонне освѣтить бывшіе дотолѣ скрытыми общіе принципы, тѣ именно принципы, открытіе которыхъ составляетъ истинную сущность и цѣль всякаго знанія. Эта именно способность, въ связи съ рѣдкимъ изяществомъ въ изложеніи даже самыхъ абстрактныхъ теорій, вотъ что характеризуетъ Лагранжа». Такъ говорилъ сто лѣтъ тому назадъ у свѣжей могилы Лагранжа Лапласъ (Pierre Simon Laplace). Нельзя было бы въ столь немногихъ словахъ лучше охарактеризовать существенныя черты великаго математика. И дѣйствительно, почти во всѣхъ областяхъ знанія, на которыя Лагранжъ направилъ свѣтъ своего генія, онъ умѣлъ открывать общіе и послѣдніе принципы и строить на нихъ законченныя по своей формѣ, классическія теоріи; въ другихъ же случаяхъ онъ умѣлъ болѣе или менѣе ясно предугадывать и предчувствовать основные принципы, и притомъ такъ далеко, что его соображенія послужили фундаментомъ, на который съ успѣхомъ опирались въ своихъ изслѣдованіяхъ его геніальные послѣдователи. Показать это подробнѣе на нѣкоторыхъ главныхъ областяхъ изслѣдованія Лагранжа — вотъ какую цѣль ставимъ мы себѣ въ настоящей краткой памяткѣ, посвященной столѣтію со дня смерти великаго изслѣдователя.

Никого другого изъ изслѣдователей, кромѣ Ньютона, Лапласъ и не могъ бы поставить рядомъ со своимъ скончавшимся университетскимъ товарищемъ, какъ равнаго ему по духу и по геніальности; точно такъ же никто другой не пользовался со стороны Лагранжа преклоненіемъ и уваженіемъ въ такой мѣрѣ, какъ Ньютонъ. «Если вы желаете узрѣть истинное величіе», — такъ, говорятъ, воскликнулъ однажды Лагранжъ, — «то войдите въ кабинетъ Ньютона въ тотъ моментъ, когда онъ разлагаетъ свѣтъ или раскрываетъ тайну системы міра». Великій британецъ былъ въ его глазахъ, какъ онъ часто о немъ выражался, безусловно величайшимъ геніемъ, которымъ человѣчество когда-либо дарило міръ, и къ тому же, — какъ онъ добавлялъ, не будучи въ состояніи подавить въ себѣ благородной ревности, — «самымъ счастливымъ геніемъ». Разгадать систему міра можно вѣдь только одинъ разъ! Если Ньютонъ въ области механики, которая тогда, главнымъ образомъ, сводилась къ механикѣ неба, открылъ основной, управляющій всѣмъ законъ силы, то Лагранжъ въ области той же науки нашелъ основной принципъ, создалъ для изслѣдованія одно могущественное средство, въ сравненіи съ которымъ всѣ прочіе, ранѣе или позже найденные и примѣненные методы, являются лишь его разновидностями. «Вообще я могу, повидимому, утверждать», — говоритъ онъ самъ въ своемъ классическомъ сочиненіи, — «что всѣ общіе законы, какіе только еще могутъ быть открыты въ наукѣ по поводу равновѣсія, будутъ представлять собой не что иное, какъ тотъ же



ІОСИФЪ ЛЮДВИГЪ ЛАГРАНЖЪ

(25 января 1736 года — 10 апрѣля 1813 года).

http://vofem.ru

http://vofem.ru

принципъ возможныхъ перемѣщеній, но только разсматриваемый съ разныхъ точекъ зрѣнія, и будутъ отличаться отъ него лишь формулировкой». Уже Иванъ Бернулли (Johann Bernoulli) хорошо представлялъ себѣ великое и общее значеніе этого принципа возможныхъ перемѣщеній, но только въ рукахъ Лагранжа этотъ принципъ, въ связи съ началомъ Даламберта (d'Alembert), получилъ то совершенство, ту удобопримѣнимость, которыя сдѣлали его универсальнымъ средствомъ для раціональной или чистой (теоретической) механики. Наука, созданная въ своей математической части Декартомъ (Descartes), Ньютономъ, Лейбницемъ (Leibniz), братьями Бернулли, а въ механической части — Галилеемъ, Ньютономъ, Иваномъ Бернулли и Даламбертомъ, — въ трудахъ Лагранжа получила свое завершеніе, свой вѣнецъ; именно благодаря этимъ трудамъ тотъ методъ, которому дали названіе «анализъ», достигъ своего высшаго развитія. Этимъ методомъ онъ, какъ плугомъ, глубоко вспахалъ ниву механики, и его появившаяся въ 1788 году «Mécanique analytique» или «Méchanique analytique», какъ называлась эта книга въ первомъ изданіи, служитъ неувядаемымъ памятникомъ той наивысшей побѣды, которую одержалъ этотъ методъ изслѣдованія и изложенія. «Существуетъ» — говоритъ самъ Лагранжъ въ предисловіи къ своему сочиненію, — «уже много системъ механики, но планъ предлагаемой системы вполнѣ новъ. Я поставилъ себѣ цѣлью свести теорію этой науки и искусство рѣшать ея проблемы къ общимъ формуламъ, простое примѣненіе которыхъ доставляетъ всѣ уравненія, необходимыя для рѣшенія всякой проблемы». Въ этомъ сочиненіи, — говорится дальше, — не имѣется никакихъ фигуръ. Методы, которые я здѣсь излагаю, не требуютъ никакихъ геометрическихъ или механическихъ построеній, никакихъ геометрическихъ или механическихъ выводовъ, а единственно только алгебраическихъ операцій, для которыхъ предуказаны неуклонные и единственные пути. Тѣ, которые любятъ заниматься анализомъ, съ удовольствіемъ узнаютъ, что механика такимъ образомъ является лишь новою его вѣтвью, и будутъ мнѣ признательны за то, что я расширилъ его владѣнія».

Въ то время, какъ оба Бернулли и Эйлеръ (Euler) должны были еще искать, такъ сказать, новыхъ путей для каждой проблемы механики, Даламбертъ впервые установилъ общій методъ для рѣшенія всѣхъ проблемъ динамики или, по крайней мѣрѣ, для выраженія ихъ при помощи уравненій. Этотъ методъ Даламберта, какъ извѣстно, сводитъ всякую задачу динамики къ задачѣ статики и, стало быть, всю динамику — къ статикѣ. Но только Лагранжъ впервые исчерпалъ всю плодотворность этого принципа, показавъ, что одной основной формулы динамики достаточно для того, чтобы всякую ея проблему, для которой извѣстны дѣйствующія силы и условія движенія, можно было выразить дифференціальнымъ уравненіемъ движенія; благодаря этому вся механика, какъ было сказано въ приведенной цитатѣ, становилась вѣтвью анализа, или, — употребляя позднѣйшее выраженіе Лагранжа изъ его «Теоріи функцій», — «геометріей четырехъ измѣреній» (три измѣренія обыкновеннаго пространства и время), но, конечно, геометріей безъ геометрическихъ наглядныхъ средствъ и методовъ. Упомянемъ еще другое названіе: «Философская механика», которой далъ нѣкогда Фурье (Fourier) Лагранжевой «Mécanique analytique» за то, что въ ней все вытекаетъ изъ одного принципа, все изложено съ помощью единообразнаго, общаго, чрезвычайно изящнаго метода.

Астрономическое изслѣдованіе Лагранжа, его сочиненіе о либраціи луны, написанное на соисканіе парижской преміи, заключаетъ въ себѣ первые зародыши того основного принципа, который позже Лагранжъ положилъ въ основаніе всей механики; а въ области астрономіи, въ дѣлѣ предсказанія движенія небесныхъ свѣтилъ на весьма отдаленное время впередъ, — раціональная механика, какъ извѣстно, одержала величайшую побѣду.

Хотя Лагранжъ вышелъ далеко за предѣлы этихъ проблемъ, но все же для него и для его времени механика, какъ уже было сказано, была еще, главнымъ образомъ, механикой неба, механикой матеріальныхъ точекъ — «petits corps», какъ онъ выражается. Аналитическая форма, въ которую Лагранжъ облекъ вопросы этой области, повидимому, не допускала дальнѣйшаго совершенствованія; и понятно, что не знавшее себѣ дотолѣ примѣра въ исторіи математики побѣдоносное шествіе анализа въ 18-мъ столѣтіи, — шествіе, въ которомъ, вслѣдъ за побѣдами обоихъ Бернулли, Эйлера и Даламберта, творецъ «Mécanique analytique» безспорно одержалъ самую блестящую и самую совершенную побѣду, — не могло не вызвать въ немъ, въ концѣ концовъ, нѣкотораго чувства утомленія. «Я начинаю чувствовать, — писалъ однажды Лагранжъ Даламберту, — «что моя косность постепенно увеличивается, и я не ручаюсь за то, что еще хотя бы 10 лѣтъ буду заниматься математикой. Рудникъ, какъ мнѣ кажется, уже слишкомъ глубокъ, и, если не будутъ найдены новые ходы, то рано или поздно придется его совсѣмъ оставить. Физика и химія таятъ въ себѣ нынѣ болѣе блестящія и легче добываемыя сокровища; поэтому взоры нынѣшняго столѣтія обратились, повидимому, въ эту именно сторону, и очень возможно, что въ одинъ прекрасный день засѣданія математиковъ въ академіяхъ будутъ представлять собою то же самое, что и нынѣшнія каѳедры арабскаго языка въ университетахъ». Это письмо относится, безъ сомнѣнія, къ берлинскому періоду, къ 1781 г.; «Mécanique analytique» тогда еще не появилась въ печати, но въ главныхъ чертахъ несомнѣнно была уже готова. И дѣйствительно, позже, въ парижскій періодъ и послѣ появленія его «Mécanique analytique» (1788 г.), Лагранжъ, какъ извѣстно, на время совершенно отвернулся отъ математики и сталъ интересоваться физикой, химіей, метафизикой, исторіей религіи и культуры, сравнительнымъ языковѣдѣніемъ, медициной и ботаникой, посвящая свое время ихъ изученію.

Но «рудникъ» не былъ оставленъ. И если не считать Гамильтона (W. R. Hamilton) и Якоби (C. G. J. Jacobi), то тѣмъ съ большимъ правомъ можно сказать, что послѣдующіе творцы механики не удовлетворились наслѣдіемъ Лагранжа: въ мечтахъ Лапласа о нахожденіи всеобъемлющей формулы мы усматриваемъ теперь лишь фантастическую идею, — можно сказать: пароксизмъ того побѣднаго ликованія, которое могло быть вызвано очерченнымъ выше завоевательнымъ шествіемъ анализа, — но въ то же время и завершеніе этого періода. Дальнѣйшее развитіе направилось уже по новымъ путямъ. Реакція противъ одностороннягo пониманія Лагранжемъ задачъ механики исходила отъ Пуансо (Poinsot), того самаго, который, по странной случайности, занялъ послѣ смерти Лагранжа его кресло въ «Institut de France». Онъ критически оспариваетъ то положеніе, что вся задача механики состоитъ въ сведеніи ея къ аналитическимъ формуламъ; наоборотъ, онъ требуетъ непосредственнаго и нагляднаго разсмотрѣнія самого объекта изслѣдованія и къ тому еще подтвержденія полученныхъ результатовъ путемъ эксперимента. Пуансо былъ дѣйствительно первымъ послѣ Лагранжа, которому удалось проложить «новый ходъ» въ «рудникѣ» механики; прежде всего онъ обогатилъ механику твердаго тѣла чрезвычайно важными понятіями и представленіями, — главнымъ образомъ, понятіемъ о парѣ силъ и представленіями объ эллипсоидѣ инерціи и о двухъ конусахъ, катящихся одинъ по другому во время движенія. Въ прежнее время развитіе механики обусловливалось преимущественно потребностями астрономіи, но затѣмъ техника стала все болѣе и болѣе вытѣснять астрономію и выступать на первое мѣсто. Такимъ образомъ, наряду съ теоретической механикой развивалась особая техническая механика, подготовленная трудами братьевъ Бернулли, Понсле (Poncelet) и Коріолиса (Coriolis); безъ нея и безъ графическихъ методовъ, изобрѣтенныхъ въ болѣе позднее время Кульманомъ (Culmann) и Кремоной (Cremona) для потребностей статики, техника давно сдѣлалась бы уже немыслимой.

Какъ въ изслѣдованіи, такъ и въ обученіи одностороннее господство механики Лагранжа давно уже прекратилось. Во франціи Бріо (Briot) былъ первымъ, который, если не раньше всѣхъ, то рѣшительнѣе всѣхъ требовалъ наглядности при преподаваніи механики въ высшихъ школахъ; онъ пошелъ въ этомъ отношеніи такъ далеко, что самъ въ своемъ преподаваніи излагалъ механику чисто геометрически; онъ довольно неучтиво отзывался о классическомъ произведеніи Лагранжа, какъ о полнѣйшей безсмыслицѣ (faribole). Впрочемъ, даже Якоби, который, какъ уже было сказано, вполнѣ раздѣлялъ взгляды Лагранжа и даже являлся наиболѣе яркимъ выразителемъ ихъ въ 19 столѣтіи, не совѣтовалъ пользоваться «Mécanique analytique» для цѣлей самообразованія, такъ какъ многое въ ней скорѣе предугадано, чѣмъ строго доказано. «У меня были ученики», — сказалъ онъ однажды на лекціи, — «которые лучше понимали «Mécanique analytique», чѣмъ я самъ, но нерѣдко это вовсе не хорошій признакъ, если кто-либо считаетъ то или иное понятнымъ». — Современная наука не отдаетъ предпочтенія въ механикѣ, — ни въ изслѣдованіи ни въ наукѣ, — какому-либо одному направленію передъ другимъ: она признаетъ попрежнему, что анализъ является наиболѣе надежнымъ и точнымъ средствомъ изслѣдованія, но вмѣстѣ съ тѣмъ она учитываетъ также и нужды техники, которая часто вполнѣ удовлетворяется уже меньшею степенью точности; она старается служить потребностямъ техники наиболѣе удобными — какъ графическими, такъ и числовыми — методами; въ то же время современная наука не оставляетъ безъ вниманія требованій наглядности и прибѣгаетъ къ услугамъ фигуръ, моделей и эксперимента.

Задача механики относительно кривой быстрѣйшаго паденія (т. е. брахистохроны) въ рукахъ Эйлера явилась зародышемъ новой математической науки, которая теперь обыкновенно носитъ данное ей впослѣдствіи Эйлеромъ названіе «варіаціонное исчисленіе». Это названіе Эйлеръ могъ предложить только тогда, когда 19-лѣтній Лагранжъ сообщилъ ему свои первыя математическія изслѣдованія. Геніальные, но вмѣстѣ съ тѣмъ довольно сложные, преимущественно геометрическіе, инфинитезимальные методы Эйлера благодаря работамъ Лагранжа были дополнены весьма плодотворнымъ алгориѳмомъ, который охватывалъ весьма многочисленные случаи и являлся аналитическимъ методомъ, немедленно дававшимъ для всякой частной задачи общій отвѣтъ. Новое исчисленіе позволило Лагранжу выйти далеко за предѣлы прежнихъ рамокъ и даже вмѣсто постоянныхъ предѣловъ интегрированія разсматривать перемѣнные предѣлы, — а также ввести въ кругъ своихъ изслѣдованій двойные интегралы. Съ другой стороны, основные вопросы этой области и прежде всего трудный вопросъ о томъ, является ли extremum въ томъ или иномъ случаѣ maximum'омъ или minimum'омъ, былъ въ работахъ Лагранжа едва задѣтъ, но далеко не исчерпанъ; кромѣ того, какъ указано было впослѣдствіи, когда къ этимъ вопросамъ стали относиться болѣе критически, въ нѣкоторыхъ фундаментальныхъ пунктахъ новаго исчисленія не доставало еще требуемой строгости доказательствъ и достаточной точности въ опредѣленіи понятій. Такимъ образомъ, математики 19-го столѣтія — и въ первую очередь Якоби, преждевременно умершій Людвигъ Шеферъ (Ludwig Scheefer) и Вейерштрассъ (Weierstrass) — нашли здѣсь богатое поле. Какъ извѣстно, механика, а также и другія части математической физики, благодаря варіаціонному исчисленію быстро подвинулись впередъ. Стоитъ только вспомнить о варіаціонномъ принципѣ механики, принципѣ наименьшаго дѣйствія и о принципѣ Гамильтона, изъ которыхъ первый, отличающійся чрезвычайной плодотворностью и вызвавшій немало возраженій и даже бурный споръ (извѣстенъ знаменитый споръ между Мопертюи (Maupertuis) и Эйлеромъ, съ одной стороны, и Самуелемъ Кёнигомъ (Samuel König), съ другой, въ который затѣмъ былъ вовлеченъ Вольтеръ со своимъ Акакіа-памфлетомъ и, наконецъ, Фридрихъ Великій), только благодаря Лагранжу получилъ ясное толкованіе; что же касается второго принципа, то онъ, такъ сказать, неявно существовалъ уже у Лагранжа, но затѣмъ, по словамъ Якоби, въ теченіе болѣе 70 лѣтъ оставался «въ одно и то же время и открытымъ и скрытымъ», пока, наконецъ, Гамильтонъ не вызвалъ его вновь къ жизни и не облекъ его въ новую форму. Совокупность этихъ изслѣдованій Лагранжа, которыя въ главной своей части относятся къ періоду его ранней молодости и которыя имѣли громадное значеніе какъ для аналитической механики, такъ и для созданія варіаціоннаго исчисленія, составляетъ центральный пунктъ всей научной дѣятельности великаго математика.

Но если изслѣдованія Лагранжа въ области варіаціоннаго исчисленія находятся, по самому существу своему, въ тѣснѣйшей связи съ его изслѣдованіями въ области механики, то его алгебраическія изысканія имѣютъ съ послѣдними то общее, что въ нихъ такъ же характерно проявляется свойственное духу Лагранжа особенное стремленіе искать широкія, объемлющія точки зрѣнія, вносить порядокъ и свѣтъ въ хаотическій запасъ различныхъ явленій и методовъ. Правда, въ данномъ случаѣ результаты его трудовъ не отличались такимъ совершенствомъ, какъ въ аналитической механикѣ, но все же изслѣдованіе Лагранжа въ области алгебры, въ особенности же его трудъ «Reflexions sur la résolution algébrique des équations», появившійся въ мемуарахъ Берлинской Академіи, долженъ считаться наиболѣе значительнымъ вкладомъ въ теорію уравненій за цѣлое столѣтіе; именно на изслѣдованія Лагранжа опираются основатели современной алгебры — Руффини (Paolo Ruffini), Абель (Niels Henrik Abel) и Галуа (Evariste Galois). Когда Лагранжъ подвергъ критическому изслѣдованію примѣнявшіеся до него методы рѣшенія алгебраическихъ уравненій 3-ей и 4-ой степени, онъ нашелъ, что появляющіеся при этихъ рѣшеніяхъ радикалы могутъ быть выражены раціонально въ корняхъ уравненій. Тѣмъ обстоятельствомъ, что вообще во всѣхъ случаяхъ алгебраически разрѣшимаго уравненія рѣшенію можно придать такой видъ, который согласуется съ соображеніями Лагранжа, воспользовался позже Абель для своего знаменитаго доказательства неразрѣшимости общаго уравненія 5-ой и высшихъ степеней. И вотъ Лагранжъ, обратно, составляетъ раціональную функцію отъ корней и изслѣдуетъ — первые зачатки теоріи субституцій!—, сколько различныхъ значеній принимаетъ эта функція при всѣхъ возможныхъ перестановкахъ n корней. Установить тотъ фактъ, что это число значеній всегда должно быть дѣлителемъ числа $n!$ (n есть показатель степени предложеннаго алгебраическаго уравненія), не стоило для Лагранжа большого труда. Но открыть, что не всѣ дѣлители числа $n!$ могутъ указывать число различныхъ значеній, принимаемыхъ функціей отъ корней, и что, въ частности, при $n = 5$ невозможны функціи съ 3-мя или 4-мя различными значеніями, — предложеніе, имѣющее столь важное значеніе въ вопросѣ о неразрѣшимости общаго уравненія 5-ой степени, — удалось только Руффини.

Далѣе Лагранжъ принимаетъ эти различныя значенія раціональной функціи отъ корней даннаго уравненія за корни новаго, такъ называемаго резольвентнаго уравненія, коэффиціенты котораго раціонально выражаются черезъ коэффиціенты даннаго уравненія, и затѣмъ устанавливаетъ, что всѣ извѣстные методы рѣшенія, въ сущности, состоятъ лишь въ нахожденіи такихъ функцій отъ корней предложеннаго уравненія, чтобы соотвѣтствующее или соотвѣтствующія этимъ функціямъ резольвентныя уравненія оказались болѣе низкой степени, чѣмъ данное уравненіе, или же чтобы они разлагались на такія уравненія болѣе низкой степени. Это открытіе дало въ руки Лагранжа аріаднову нить, съ помощью которой онъ могъ разобраться въ лабиринтѣ многочисленныхъ и разнообразныхъ методовъ рѣшенія. Но наиболѣе важная изъ теоремъ теоріи уравненій, открытыхъ великимъ изслѣдователемъ, состоитъ въ томъ, что, если изъ двухъ раціональныхъ функцій корней даннаго уравненія одна измѣняетъ свое значеніе при тѣхъ же перестановкахъ корней, что и другая, то одна функція можетъ быть выражена раціонально черезъ другую и черезъ коэффиціенты уравненія. На эту теорему, которой много позже Галуа далъ болѣе общее толкованіе, мы можемъ смотрѣть, какъ на зародышъ теоріи Галуа. Итакъ, всюду у Лагранжа мы находимъ важные зачатки позднѣйшихъ алгебраическихъ теорій, послужившіе имъ прочной основой. Достойны удивленія тѣ общія соображенія, которыя высказываетъ Лагранжъ послѣ достигнутыхъ имъ высокихъ завоеваній по поводу terra incognita уравненій 5-ой и высшихъ степеней. «Изъ этихъ разсужденій» — говоритъ онъ — «слѣдуетъ, что можно сильно сомнѣваться въ томъ, чтобы тѣ методы, о которыхъ мы говорили, вели къ полному рѣшенію уравненій 5-ой, а тѣмъ болѣе высшихъ степеней». Самая неразрѣшимость уравненій 5-й и высшихъ степеней, которая позже была доказана, не приходила, повидимому, Лагранжу на мысль, — по крайней мѣрѣ, онъ нигдѣ не говоритъ объ этомъ; но онъ рѣшительно сомнѣвается въ достаточности изложенныхъ методовъ рѣшенія. Точно такъ же Лагранжъ зналъ уже, какими особенностями обладаетъ уравненіе, если между его корнями имѣютъ мѣсто нѣкоторыя простыя соотношенія, — въ этомъ онъ также является предшественникомъ Галуа, — и поэтому классическія изслѣдованія Гаусса (Gauss) объ уравненіи дѣленія окружности на части естественно привели его въ высокую степень восхищенія: „Ваши «Disquisitiones» (arithmeticae), — писалъ онъ молодому изслѣдователю, — сразу поставили Васъ въ ряды первыхъ математиковъ, и содержаніе послѣдней главы («De aequationibus, circuli sectiones definientibus») я считаю самымъ изящнымъ открытіемъ анализа за много времени назадъ“.

Мы далеко зашли бы, если бы стали распространяться о прочихъ алгебраическихъ изслѣдованіяхъ Лагранжа. Но мы должны, по крайней мѣрѣ, вскользь упомянуть о его методѣ примѣненія непрерывныхъ дробей для приближеннаго численнаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій, объ его изслѣдованіяхъ условій существованія мнимыхъ корней, объ его доказательствѣ того предложенія, что всякій мнимый корень уравненія можетъ быть представленъ въ видѣ $a+b\sqrt{-1}$; наконецъ, также объ его доказательствѣ такъ называемой «основной теоремы» алгебры (всякое алгебраическое уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень). Впрочемъ, эти только-что упомянутыя работы Лагранжа не вплели новой вѣтки въ его неувядаемый лавровый вѣнокъ — non omnia eidem dii dedere. Какъ извѣстно, молодой Гауссъ, которому математика ближайшаго столѣтія обязана величайшими пріобрѣтеніями, въ своей знаменитой докторской диссертаціи рѣзко раскритиковалъ это доказательство Лагранжа, а также всѣ прочія доказательства этой теоремы, появившіяся до того времени, — главнымъ образомъ, доказательства Даламберта, Буженвилля (Boujainville), Эйлера, Де-Фонсене (de-Fonsenex), — и разрушилъ ихъ въ самомъ корнѣ, обнаруживъ, что авторы ихъ, желая доказать существованіе корней, неявно въ той или иной формѣ пользуются этими самыми корнями, какъ уже существующими.

Само собою разумѣется, что у такого изслѣдователя, какъ Лагранжъ, который во всѣхъ областяхъ старался знакомиться съ самымъ послѣднимъ состояніемъ основныхъ вопросовъ, геометрическая теорія параллельныхъ линій должна была вызвать особенный интересъ. Хотя великій аналитикъ, вообще говоря, довольно рѣдко занимался вопросами геометріи, тѣмъ не менѣе аксіома о параллельныхъ линіяхъ поистинѣ глубоко интересовала его, какъ и его современниковъ Ламберта (Lambert) и Лежандра (Legendre). Твердую увѣренность въ томъ, что этотъ постулатъ недоказуемъ, и что возможна геометрія, свободная отъ этого постулата, впервые, какъ извѣстно, обрѣлъ лишь Гауссъ. Но Лагранжъ былъ вполнѣ убѣжденъ лишь въ несостоятельности всѣхъ прежнихъ попытокъ доказать постулатъ параллельныхъ линій; поэтому его усилія были направлены на то, чтобы добыть вполнѣ безупречное доказательство. По разсказу де-Моргана (Augustus de Morgan) Лагранжъ къ концу своей жизни написалъ сочиненіе о параллельныхъ линіяхъ, о которомъ онъ собирался сдѣлать докладъ Парижской Академіи. Но въ самомъ началѣ доклада онъ внезапно остановился и сказалъ: «Il faut que j'y songe encore»; съ этими словами онъ спряталъ свои бумаги. Какого рода сомнѣнія заставили его прервать свой докладъ, неизвѣстно; тѣмъ не менѣе, даже относительно Лагранжа [нельзя предположить, чтобы онъ могъ посреди чтенія внезапно проникнуть своимъ взоромъ въ ту чудесную область, которую открыли, завоевали и обработали лишь математики 19-го столѣтія, — кромѣ уже упомянутаго Гаусса, эта заслуга принадлежитъ, главнымъ образомъ, Лобачевскому, І. Больэ (Johann Bolyai), Риману (Riemann), Бельтрами (Beltrami), Гельмгольцу (Helmholtz), Клейну (Klein), Ли (Lie), Гильберту (Hilbert).

Чтобы не выйти изъ рамокъ журнальной статьи, мы должны были ограничиться только нѣкоторыми изъ важнѣйшихъ и наиболѣе характерныхъ изслѣдованій Лагранжа, и можемъ только вкратцѣ упомянуть о томъ, что этотъ великій ученый обогатилъ весьма существенными пріобрѣтеніями не только вышеуказанныя, но и другія области математики, проложивъ въ нихъ и новые пути. Въ теоріи чиселъ Лагранжъ, наравнѣ съ Эйлеромъ и Лежандромъ, принадлежитъ къ самымъ замѣчательнымъ изслѣдователямъ 18-го столѣтія; особенно высоко стоятъ его изслѣдованія о квадратичныхъ формахъ, которыя продолжалъ разрабатывать Гауссъ, поднявшій теорію чиселъ, эту «царицу математическихъ наукъ», какъ онъ ее назвалъ, на поистинѣ царственную высоту, а также великій Дирихле (Dirichlet). Изъ заслугъ Лагранжа въ обширной области дифференціальныхъ уравненій мы укажемъ лишь на то, что онъ создалъ общую теорію для нахожденія интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, и что онъ впервые обнаружилъ и объяснилъ происхожденіе и истинный смыслъ особенныхъ интеграловъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія, а также связь между особеннымъ и общимъ интеграломъ. Въ области исчисленія бзконечно-малыхъ Лагранжъ стремился замѣнить методъ бэзконечно-малыхъ другимъ, болѣе строгимъ методомъ, пытаясь обосновать его алгебраически; хотя въ самомъ началѣ эта реформа была встрѣчена горячимъ одобреніемъ, тѣмъ не менѣе наука выдвинула противъ нея весьма существенныя возраженія и пошла по другимъ путямъ. Упомянемъ еще здѣсь объ одномъ открытіи, неправильно приписываемомъ Лагранжу: на основаніи одной изъ раннихъ статей Лагранжа дѣлали заключеніе, будто онъ владѣлъ уже весьма важной для чистой математики — и въ равной мѣрѣ для ея приложеній — идеей о возможности развернуть произвольно заданную (графически) функцію въ тригонометрическій рядъ. На самомъ же дѣлѣ въ указанномъ мѣстѣ у Лагранжа рѣчь идетъ не о безконечномъ тригонометрическомъ рядѣ Фурье, но о тригонометрической интерполяціи; это особенно подтверждается не лишеннымъ достовѣрности разсказомъ о томъ, какъ старикъ-Лагранжъ, присутствуя въ засѣданіи Академіи 21 декабря 1807 года, въ которомъ Фурье сообщилъ свое открытіе о возможности развернуть произвольную функцію въ тригонометрическій рядъ, въ такой мѣрѣ былъ изумленъ этимъ, что сталъ самымъ рѣшительнымъ образомъ отрицать такого рода возможность.

Въ исторіи математическихъ наукъ Лагранжу принадлежитъ не только честь открытія многихъ безсмертныхъ истинъ въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ, но и заслуга созданія новаго математическаго стиля, который съ того времени завоевалъ себѣ въ наукѣ прочное положеніе. Къ какой бы области работъ Лагранжа ни обратиться, повсюду — какъ уже было отмѣчено Лапласомъ въ вышеприведенной цитатѣ его, — Лагранжъ исходилъ изъ весьма общихъ и всеобъемлющихъ точекъ зрѣнія, — творилъ-ли онъ вполнѣ новыя теоріи или же облекалъ старыя теоріи въ новыя формы. Этотъ характеръ общности, который носили его руководящія точки зрѣнія и методы, въ связи съ невѣдомыми дотолѣ въ математикѣ изяществомъ и строгостью изложенія, составляетъ главную особенность новаго стиля, введеннаго Лагранжемъ. Какъ передаютъ, великій изслѣдователь, бывало, шутливо выражалъ сожалѣніе о будущихъ поколѣніяхъ математиковъ, которымъ придется изучать, кромѣ многочисленныхъ сочиненій Эйлера, также и его труды, а между тѣмъ именно онъ, благодаря своему сжатому, строгому и сдѣлавшемуся съ того времени образцовымъ слогу, болѣе, чѣмъ кто-либо другой, способствовалъ распространенію математической литературы. Эйлеръ всесторонне трактуетъ свой предметъ, съ любовью останавливается на каждомъ отдѣльномъ интересующемъ его спеціальномъ вопросѣ, важномъ или неважномъ, и, какъ кто-то удачно выразился, пишетъ математическія «новеллы». Лагранжъ же пишетъ абстрактно, изящно, строго и при томъ охватываетъ вопросъ во всей общности; онъ также не пишетъ по латыни, какъ это дѣлаетъ преимущественно Эйлеръ, а предпочитаетъ живой языкъ, болѣе отвѣчающій его стилю, — французскій. Всякій лишній наборъ словъ внушаетъ ему отвращеніе, и нерѣдко, встрѣчая этотъ недостатокъ у Эйлера и у Даніеля Бернулли, онъ рѣзко порицалъ ихъ.

Слѣдуетъ упомянуть еще объ одной особенности духа и стиля Лагранжа, которая всегда встрѣчала надлежащее признаніе и удивленіе: геніальный ученый, завоевавшій для математики столько новыхъ владѣній, Лагранжъ въ то же время въ сильной мѣрѣ тяготѣлъ и къ исторіи математики. Всякую проблему онъ трактуетъ въ свѣтѣ исторіи и, упоминая о важномъ открытіи, называетъ также и его творца. Въ особенности онъ слѣдуетъ этому обыкновенію въ своей «Mécanique analytique», каждую главу которой онъ, какъ извѣстно, сопровождаетъ историческимъ обзоромъ; эти замѣчательные по своей ясности историческіе обзоры, которые, впрочемъ, находятся и въ другихъ сочиненіяхъ Лагранжа и по своему изложенію принадлежатъ къ наилучшимъ историко-математическимъ сочиненіямъ, вызвали у современниковъ и у потомства почти такое же удивленіе, какъ и его собственныя открытія. Вмѣстѣ съ тѣмъ, ставя себѣ задачей въ своихъ работахъ и сочиненіяхъ овладѣть всякимъ предметомъ и съ исторической его стороны, Лагранжъ пріобрѣлъ столь глубокія и обширныя познанія въ исторіи и литературѣ математическихъ наукъ, что онъ нынѣ представляется намъ не только величайшимъ, но также и самымъ образованнымъ математикомъ своего времени.

http://vofem.ru

Аллотропія химическихъ элементовъ.

Прив.-доц. Е. Ельчанинова.

Давно уже стало извѣстно, что химическіе элементы могутъ принимать различныя кристаллографическія формы. Впослѣдствіи было установлено, что этимъ различнымъ формамъ соотвѣтствуютъ различныя свойства, но, кромѣ того, было обнаружено, что и газообразный элементъ иной разъ, въ зависимости отъ условій, можетъ обладать неодинаковыми физическими свойствами. Это явленіе, именно, что химическій элементъ является въ различныхъ формахъ и состояніяхъ, получило въ 1841 году, по предложенію Берцеліуса, названіе аллотропіи. Въ послѣднее время было направлено весьма много разностороннихъ изслѣдованій для выясненія этого явленія. Благодаря примѣненію различныхъ современныхъ методовъ и особенно термодинамики, получились очень цѣнные результаты, одинаково интересные для химика, физика и кристаллографа. Въ виду этого краткое изложеніе достигнутыхъ успѣховъ, вѣроятно, представило бы интересъ для читателей настоящаго журнала.

Когда стало извѣстно, что элементы могутъ являться въ различныхъ формахъ и состояніяхъ, то невольно возникли вопросы о причинахъ этого явленія и о предѣлахъ его распространенія. Относительно перваго вопроса въ 1810 г. Дальтономъ было предложено довольно удачное объясненіе, которое и теперь раздѣляютъ многіе. Именно, онъ предположилъ, что, если какой-либо элементъ, — напримѣръ, — углеродъ пріобрѣтаетъ различныя формы — форму алмаза, графита или обыкновенной сажи, то это происходитъ вслѣдствіе различной группировки молекулъ въ видоизмѣненіяхъ элемента. Въ каждой аллотропической формѣ образуются иные аггрегаты молекулъ, или, по выраженію Дальтона, элементъ въ нихъ находится «in different states of aggregation». Значительно труднѣе было достигнуть соглашенія при опредѣленіи понятія аллотропіи и его примѣненія. Разногласія отчасти возникли вслѣдствіе того, что одновременно съ явленіемъ аллотропіи выяснились явленія изомеріи и полиморфіи. Именно, обнаружилось, что многія сложныя вещества имѣютъ одинаковый составъ, но могутъ обладать совершенно различными химическими свойствами. Съ другой стороны, неоднократно выяснялось, что вещества химически идентичныя имѣютъ совершенно различныя кристаллическія формы и вмѣстѣ съ тѣмъ иныя физическія свойства. Было ясно, что явленія аллотропіи имѣютъ связь съ указанными двумя явленіями, но требовалась осторожность, чтобы не смѣшать всѣ три явленія и опредѣлить признаки, ихъ разграничивающіе. Къ сожалѣнію, многимъ изслѣдователямъ не доставало этой осторожности, а можетъ быть, и ясности представленія. Поэтому въ литературѣ осноcительно понятія аллотропіи встрѣчается нѣкоторая путаница. Доля вины въ этомъ падаетъ отчасти на В. Оствальда, который пытается слишкомъ широко охватить явленіе аллотропіи и причисляетъ къ нему случаи несомнѣнно не подходящіе, напримѣръ, превращеніе каліевой селитры при 129,5°. Другіе видные изслѣдователи совершенно неосновательно отрицаютъ возможность аллотропіи газообразныхъ элементовъ, — напримѣръ, кислорода. Однако, несмотря на указанное разнорѣчіе, въ настоящее время устанавливается соглашеніе относительно однообразнаго пониманія явленія аллотропіи. Именно пришли къ заключенію, что аллотропія можетъ имѣть мѣсто только среди элементарныхъ тѣлъ. Но она оказывается лишь частнымъ случаемъ болѣе общихъ явленій, наблюдаемыхъ среди многихъ тѣлъ: явленія изомеріи и явленія полиморфіи. Среди сложныхъ тѣлъ неоднократно наблюдалось, что они, обладая одинаковымъ составомъ, отличаются различными физическими и химическими свойствами. Такого рода явленіе получило названіе изомеріи. Полиморфіей же сложныхъ тѣлъ называютъ такой случай, когда тѣла при полной химической идентичности обладаютъ различными кристаллическими формами и различными физическими свойствами. На эту аналогію явленій, наблюдаемыхъ среди элементарныхъ и сложныхъ тѣлъ, впервые указалъ Вантъ-Гоффъ. «Выраженіе „аллотропія" примѣнимо къ явленіямъ изомеріи, наблюдаемымъ среди элементовъ». Такимъ образомъ, можно формулировать, что аллотропіей называется способность химическаго элемента принимать различныя формы, которыя отличаются другъ отъ друга не только по ихъ физическимъ, но и по химическимъ свойствамъ. Различіе принимаемыхъ элементомъ формъ можетъ наблюдаться въ твердомъ, жидкомъ и газообразномъ состояніяхъ, но элементъ, находящійся въ коллоидальномъ состояніи, не относится къ явленію аллотропіи. Коллоидальное состояніе подчиняется своимъ законностямъ и зависитъ отъ особенныхъ условій его происхожденія и существованія.

Причины аллотропіи въ настоящее время окончательно еще не выяснены. Вѣроятнѣе всего, что въ различныхъ случаяхъ онѣ не одинаковы. Весьма возможно, что аллотропія нѣкоторыхъ элементовъ зависитъ отъ причины, впервые отмѣченной Дальтономъ, т. е. отъ различнаго способа группировки молекулъ. Въ другихъ же случаяхъ рѣшающее вліяніе могутъ оказывать условія термическаго характера. Однимъ изъ типичныхъ случаевъ аллотропіи является система кислородъ-азотъ. Здѣсь причина явленія состоитъ въ томъ, что въ составъ молекулъ этихъ аллотропическихъ модификацій входятъ различное число атомовъ элемента. Слѣдовательно, аллотропія здѣсь зависитъ отъ той особой химической изомеріи молекулы, которая носитъ названіе полимеріи. Другой типъ аллотропіи представляетъ сѣра. Этотъ типъ также можетъ считаться особымъ проявленіемъ изомеріи, но уже иного характера; именно она относится къ явленіямъ, характеризующимся тѣмъ, что въ изомерныхъ, т. е. одинаковыхъ по составу, молекулахъ происходитъ различное распредѣленіе атомовъ. Слѣдовательно, къ этому случаю и къ другимъ, ему подобнымъ, ближе всего подойдетъ объясненіе Дальтона. Однако, въ сѣрѣ наблюдается и другой интересный случай аллотропіи. Именно при различныхъ условіяхъ химически совершенно одинаковыя молекулы сѣры образуютъ два тѣла съ различными кристаллографическими и физическими свойствами, т. е. образуютъ сѣру ромбическую и моноклиническую. Этотъ случай называется «физической изомеріей». Аллотропическія модификаціи здѣсь произошли вслѣдствіе того, что совершенно одинаковыя молекулы, различнымъ образомъ оріентируясь, образовали различные аггрегаты. Эти аггрегаты могутъ, впрочемъ, отличаться не только порядкомъ распредѣленія въ нихъ молекулъ, но и числомъ послѣднихъ. Но въ результатѣ получаются кристаллы различныхъ системъ и съ различными физико-химическими свойствами. Этотъ типъ аллотропіи можно также назвать полиморфной аллотропіей.

Существуетъ предложенiе раздѣлить случаи аллотропiи на двѣ группы. Къ первой причисляютъ аллотропiю, наблюдаемую во всѣхъ трехъ состоянiяхъ вещества. Это будетъ случай химической или динамической изомерiи. Вторая группа явленiй аллотропiи относится къ проявленiямъ физической изомерiи, и, какъ сказано выше, эта изомерiя зависитъ не отъ различiя въ свойствахъ молекулы, а отъ особаго порядка распредѣленiя въ послѣдней атомовъ.

Аллотропическiя видоизмѣненiя различныхъ элементовъ характеризуются однимъ въ высшей степени важнымъ признакомъ, именно количествомъ заключенной въ нихъ тепловой энергiи. При одинаковыхъ условiяхъ, т. е. при равныхъ температурѣ и давленiи и при одинаковой величинѣ кристалловъ, одна аллотропическая форма элемента отличается отъ другой различнымъ запасомъ энергiи, или же различнымъ энергетическимъ потенцiаломъ. Если же, однако, одна форма переходитъ въ другую, то измѣненiе въ количествѣ энергiи происходитъ не постепенно, а рѣзко, въ видѣ скачка. Переходъ становится замѣтнымъ вслѣдствiе наблюдаемаго въ этотъ моментъ термическаго или же электрическаго эффекта.

Явленiя аллотропiи характеризуются еще и другими признаками. Среди нихъ важнѣйшее мѣсто занимаетъ кристаллографическая форма. Можно сказать, что всегда различныя аллотропическiя видоизмѣненiя элемента принадлежатъ къ различнымъ кристаллическимъ формамъ. Въ связи съ этимъ находится то обстоятельство, что эти различныя кристаллографическiя формы образуются изъ жидкаго состоянiя съ различною скоростью. Скорость кристаллизацiи мѣняется отъ одного аллотропическаго видоизмѣненiя къ другому. Вмѣстѣ съ измѣненiемъ формы кристалловъ очень часто при аллотропiи наблюдается и измѣненiе ихъ цвѣта. Какъ на примѣры, можно указать на желтый и красный фосфоръ, сѣрый и желтый мышьякъ, на безцвѣтный и металлически-блестящiй углеродъ. Затѣмъ надо замѣтить, что въ случаѣ аллотропiи каждая кристаллическая форма имѣетъ свою особую, опредѣленную точку плавленiя; при этомъ высшую температуру имѣетъ болѣе стойкая форма. Такъ, напримѣръ, выше 96,5^0 существуютъ двѣ формы сѣры: ромбическая и миноклиническая. Послѣдняя въ этихъ условiяхъ отличается большею стойкостью, и она уже имѣетъ болѣе высокую температуру плавленiя, именно 119,25^0, тогда какъ ромбическая сѣра плавится при 112,28^0.

Различныя аллотропическiя видоизмѣненiя элемента отличаются, кромѣ того, одно отъ другого еще и различными упругостями ихъ паровъ. Менѣе стойкая форма при одинаковой температурѣ имѣетъ всегда болѣе высокую упругость пара.

Подобное же различiе аллотропическихъ модификацiй наблюдается и при раствореніи ихъ. Менѣе стойкая форма отличается большею растворимостью. Впрочемъ, это правило относится только къ тѣмъ случаямъ аллотропiи, которые причисляются къ физической изомерiи; относительная растворимость аллотропическихъ видоизмѣненiй не измѣняется съ перемѣной растворителя. Правильность этого замѣчанiя очень ясно видна изъ слѣдующихъ результатовъ, полученныхъ Бронштедтомъ. Онъ опредѣлялъ отношенiя растворимости ромбической и миноклинической сѣры при 25,3^0 и въ различныхъ растворителяхъ. Получилось, что въ бензолѣ отношенiе растворимостей равно — 1,27, въ этиловомъ эфирѣ — 1,28, въ бромистомъ этиленѣ — 1,28 и въ этиловомъ спиртѣ — 1,3.

Аллотропическія видоизмѣненія элемента могутъ быть разсматриваемы не только съ точки зрѣнія ихъ растворимости, но ихъ можно разсматривать и какъ растворителей.

Въ этомъ отношеніи они также имѣютъ нѣкоторыя различія. Такъ, напримѣръ, какое-либо вещество не одинаково растворяется въ жидкомъ кислородѣ и въ жидкомъ озонѣ. Болѣе точныхъ и опредѣленныхъ измѣреній этой растворяющей способности указанныхъ «химическихъ изомеровъ» не произведено. Вещества физически-аллотропныя также даютъ подобные примѣры. Бѣлое и сѣрое олово отличаются различною способностью растворять металлы. Точно такъ же α-желѣзо и γ-желѣзо не одинаково растворяютъ карбидъ желѣза.

Аллотропическія формы элемента не всегда можно отличать по температурѣ ихъ кипѣнія. Видоизмѣненія, относящіяся къ случаямъ химической изомеріи, т. е. къ первой группѣ, отличаются по этому признаку; такъ, напримѣръ, кислородъ и озонъ кипятъ при различныхъ температурахъ, а видоизмѣненія, принадлежащія ко второй группѣ, т. е. къ физической изомеріи, кипятъ при одной и той же температурѣ.

Весьма интересной особенностью твердыхъ аллотропическихъ модификацій является ихъ твердость. Она бываетъ весьма различна и служитъ хорошимъ ихъ отличительнымъ признакомъ. Напримѣръ, одно изъ видоизмѣненій углерода — алмазъ — обладаетъ твердостью, равной 10, а другое — графитъ — имѣетъ твердость, равную 0,5 — 1,0.

Очень часто аллотропическія формы элемента отличаются одна отъ другой по ихъ удѣльному вѣсу; такъ, удѣльный вѣсъ алмаза — 3,5, а графита — 2. Въ связи съ удѣльнымъ вѣсомъ или плотностью модификаціи находится ея теплоемкость. Именно для большинства случаевъ оказывается, что чѣмъ больше плотность аллотропическаго видоизмѣненія, тѣмъ меньше его теплоемкость. Справедливость этого правила наблюдается при элементахъ: C, Si, B, P, S, Se и As.

На основаніи всего до сихъ поръ нами указаннаго можно совершенно правильно заключить, что аллотропическія формы элемента характеризуются цѣлымъ рядомъ физическихъ признаковъ. Эти признаки бываютъ часто настолько ясны, что по нимъ можно отличать одну форму отъ другой. Химическія же свойства аллотропическихъ видоизмѣненій не всегда могутъ служить для ихъ характеристики. Именно, нельзя различать по химическимъ свойствамъ аллотропическія формы, относящіяся къ группѣ физической изомеріи. Нельзя этого дѣлать по той причинѣ, что эти формы, различныя физически, въ химическомъ отношеніи оказываются очень часто одинаковыми. Иначе, однако, дѣло стоитъ въ случаѣ химической изомеріи, напримѣръ, въ случаѣ аллотропіи кислорода и озона. Здѣсь наблюдаются различія не только физическихъ свойствъ, но и химическихъ. Эти формы элемента обладаютъ совершенно иными реакціонными способностями.

Очень часто приходится наблюдать одновременное существованіе нѣсколькихъ аллотропическихъ модификацій элемента. Между ними тогда устанавливается равновѣсіе. Это равновѣсіе будетъ, большею частью, однороднымъ, если аллотропія относится къ случаю химической изомеріи, — напримѣръ, въ случаѣ системы кислородъ-озонъ; если же имѣется аллотропія порядка физической изомеріи, то равновѣсіе чаще бываетъ неоднороднымъ. Количество каждой изъ модификацій, находящихся въ системѣ равновѣсія, и однороднаго и неоднороднаго, зависитъ, главнымъ образомъ, отъ температуры, которая опредѣляетъ границы существованія отдѣльныхъ формъ.

Весьма интереснымъ является то обстоятельство, что наиболѣе стойкая аллотропическая форма не образуется сразу въ тотъ моментъ, когда благопріятно складываются условія для ея образованія и существованія, а происходитъ лишь постепенное образованіе ея изъ менѣе прочныхъ формъ.

Процессъ образованія различныхъ аллотропическихъ формъ подчиняется правилу Франкенгейма-Оствальда. Именно, согласно этому правилу, если система стремится перейти къ наиболѣе стойкому состоянію, то совершается этотъ переходъ не сразу, а путемъ переходовъ отъ одной формы къ другой, болѣе прочной. Сначала всегда образуется форма, непрочная и содержащая при данныхъ условіяхъ минимальное количество свободной энергіи. Затѣмъ эта форма переходитъ въ другую, содержащую также minimum свободной энергіи. Наконецъ, образуется уже прочная аллотропическая форма, которая опять, соотвѣтственно измѣнившимся условіямъ, содержитъ минимальное количество свободной энергіи. Этотъ процессъ постепеннаго образованія стойкой формы хорошо наблюдается въ сѣрѣ. Когда сгущаются пары ея при комнатной температурѣ, то не получаются сразу кристаллы ромбическіе, наиболѣе стойкіе въ этомъ условіи, а сначала образуется жидкая форма, затѣмъ изъ нея выпадаютъ моноклиническіе кристаллы, и, наконецъ, послѣдніе превращаются въ ромбическіе.

Среди другихъ условій, вліяющихъ на образованіе аллотропическихъ видоизмѣненій, надо указать на давленіе и свѣтъ. Давленіе, повидимому, оказываетъ замѣтное вліяніе только на аллотропическія формы, находящіяся въ газообразномъ состояніи, т. е. оно вліяетъ на однородную систему равновѣсія. При разнородной же системѣ равновѣсія аллотропическихъ модификацій его замѣтнаго вліянія не обнаружено.

Свѣтовые лучи оказываютъ несомнѣнное вліяніе на аллотропію. Такъ подъ ихъ дѣйствіемъ происходитъ превращеніе желтаго фосфора въ красный и краснаго аморфнаго селена въ кристаллическій. Но нѣкоторыя наблюденія заставляютъ предполагать, что свѣтъ значительно сильнѣе дѣйствуетъ въ случаяхъ химической изомеріи, чѣмъ въ случаяхъ изомеріи физической, т. е. въ случаяхъ неоднороднаго равновѣсія.

Послѣ изложеннаго на предыдущихъ страницахъ краткаго обзора, содержащаго указанія на главнѣйшіе признаки аллотропіи, можно перейти къ разсмотрѣнію отдѣльныхъ случаевъ ея. При этомъ мы отдѣльно разсмотримъ примѣры, относящіеся къ роду явленій химической изомеріи и образующіе однородныя системы равновѣсія, и отдѣльно разсмотримъ аллотропію элементовъ, относящуюся къ физической изомеріи, когда образуется неоднородная система равновѣсія.

Аллотропическія видоизмѣненія, образующія однородную систему, могутъ быть въ состояніи газообразномъ, жидкомъ и твердомъ.

Довольно хорошо изученъ относящійся къ этой группѣ кислородъ. Извѣстно хорошо, что кислородъ можетъ принимать, въ зависимости отъ условій, двѣ аллотропическія формы: форму обыкновеннаго кислорода, имѣющаго молеку-

http://...

лярный вѣсъ 32 и форму озона съ молекулярнымъ вѣсомъ 48. Хотя и наблюдается въ иныхъ случаяхъ, — напримѣръ, при дѣйствіи лучей Ленара, ультра-фіолетовыхъ лучей и радіевыхъ лучей, — іонизація кислорода и пріобрѣтеніе имъ вслѣдствіе этого нѣкоторыхъ особенныхъ свойствъ, но такое явленіе нельзя считать аллотропіей, такъ какъ здѣсь происходитъ лишь образованіе вокругъ отрицательнаго іона сложнаго комплекса кислородныхъ молекулъ. Но нѣкоторые изслѣдователи наблюдали въ иныхъ условіяхъ образованіе сложныхъ комплексовъ изъ атомовъ кислорода; такъ, напримѣръ, Янсенъ наблюдалъ образованіе продукта ассоціаціи кислородныхъ атомовъ при высокомъ давленіи. Именно, при большомъ давленіи появляется второй спектръ кислорода, интенсивность котораго растетъ пропорціонально увеличенію давленія. Происхожденіе этого второго спектра приписывается образованію молекулъ состава O_4, или же ассоціаціи 2 молекулъ $(O_2)_2$. Образуется система равновѣсія $2O_2 \leftrightarrows O_4$, которая сдвигается вправо при повышеніи давленія. Это предположеніе Долезалекъ подтвердилъ изученіемъ парціальнаго давленія компонентовъ жидкаго воздуха. Онъ склоненъ думать, что уклоненіе величины парціальнаго давленія отъ теоретической объясняется образованіемъ въ жидкости O_4. Ладенбургъ и Леманъ пошли еще дальше и утверждали, что ихъ изслѣдованія въ инфракрасной части спектра указывали на возможность образованія еще болѣе сложнаго комплекса, который имѣетъ молекулярный вѣсъ, равный 51,5. Но это ихъ предположеніе не было достаточно обосновано.

Если отложить въ сторону всѣ мало изученные случаи, то останется только двѣ хорошо изслѣдованныя формы аллотропіи кислорода, именно обыкновенный кислородъ, имѣющій формулу $O=O$ и озонъ съ формулой $O=O=O$. Обѣ эти формы отличаются различнымъ содержаніемъ энергіи; тѣмъ не менѣе безъ особаго труда одна изъ нихъ можетъ быть превращена въ другую. При превращеніи 48 *гр.* озона въ кислородъ освобождается количество энергіи, выражаемое 34000 калорій. Однако, превращеніе одной формы въ другую никогда не бываетъ полнымъ. Хотя при обыкновенной температурѣ почти весь озонъ и превращается въ кислородъ, но все-таки остаются слѣды перваго. Равновѣсіе системы, состоящей изъ озона и кислорода, сдвигается въ ту или иную сторону въ зависимости отъ температуры. Концентрацію обоихъ компонентовъ можно вычислить на основаніи слѣдующихъ соображеній. Фр. Фишеръ установилъ, что электровозбудительныя сила цѣпи, состоящей изъ кислорода и озона, π равна 0,46 вольтъ, при обыкновенной температурѣ. Если мы обозначимъ черезъ R — газовую константу, черезъ T — температуру, черезъ F — 96540 кулоновъ, и черезъ p_1 и p_2 парціальныя давленія кислорода и озона, находящихся въ равновѣсіи, то между этими величинами устанавливается соотношеніе: $\pi = \frac{RT}{2F} \ln \frac{p_1}{p_2}$, позволяющее опредѣлить концентрацію газовъ, находящихся въ равновѣсіи. Экспериментальныя изслѣдованія подтвердили справедливость этой формулы. И опытъ и расчетъ показываютъ, что при обыкновенной температурѣ равновѣсіе настолько сдвигается въ сторону кислорода, что присутствіе озона можетъ быть констатировано только самыми чувствительными реакціями. Но по мѣрѣ повышенія температуры процентное содержаніе озона увеличивается. Его легко можно обнаружить при 1000°, а вблизи палочки въ лампѣ Нернста, если проходитъ токъ кислорода, озона получается 1,5 объемныхъ процента.

Неоднократно дѣлались попытки опредѣлить скорость превращенія озона въ кислородъ; вмѣстѣ съ тѣмъ пытались выяснить, отъ какихъ причинъ зависитъ этотъ процессъ. Одно время склонны были думать, что превращеніе озона, состоящее въ распаденіи его частицы, зависитъ, главнымъ образомъ, отъ температуры. Опредѣлили даже моментъ превращенія, именно 237°, но и это предположеніе и это опредѣленіе оказались ошибочными. Превращеніе зависитъ не отъ одной причины, а отъ совокупности нѣсколькихъ обстоятельствъ. Среди нихъ важнѣйшую роль играютъ явленія каталитическія. Именно, многія твердыя вещества при соприкосновеніи съ частицей озона разрушаютъ ее. Такое же дѣйствіе часто оказываютъ и стѣнки сосуда, въ которомъ помѣщается озонъ. Эта реакція распада озона относится къ типу реакцій мономолекулярныхъ. Нѣкоторыя газообразныя тѣла также способны разрушать молекулу озона; особенное вліяніе имѣетъ хлоръ, освѣщенный ультрафіолетовыми лучами. Реакція эта еще не выяснена, но во всякомъ случаѣ при ней незамѣтно какого-либо химическаго взаимодѣйствія между хлоромъ и озономъ. Но озонъ и безъ содѣйствія постороннихъ тѣлъ способенъ превращаться въ кислородъ. Можно представить себѣ, что распадъ молекулы озона совершается или по уравненію: $O_3 = O_2 + O$ или по уравненію $O_3 = 3O$. Образующіеся кислородные атомы соединяются въ молекулы кислорода, или же дѣйствуютъ на еще не разрушенныя частицы озона. Возможно, впрочемъ, что превращеніе происходитъ другимъ путемъ. Именно $2O_3 = 2O_2 + 2O$, или же $2O_3 = 6O$, выдѣляющіеся свободные атомы соединяются затѣмъ въ молекулы кислорода. Этотъ самостоятельный распадъ молекулъ озона относится къ типу реакцій бимолекулярныхъ. Ст. Янъ довольно подробно изслѣдовалъ эту реакцію распаденія и пришелъ къ заключенію, что она происходитъ въ двѣ стадіи:

$$\begin{array}{r} \text{I. } 2O_3 = 2O_2 + 2O, \\ \text{II. } 2O_3 + 2O = 4O_2, \\ \hline 4O_3 = 6O_2. \end{array}$$

Рѣшающее вліяніе въ процессѣ имѣетъ вторая стадія. Скорость реакціи превращенія озона въ кислородъ зависитъ отъ температуры и можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ. Извѣстное уравненіе бимолекулярной реакціи показываетъ, что $KC^2 = \frac{dC}{dt}$, послѣ интегрированія его получается $K = \frac{1}{t} \cdot \frac{C_0 - C}{C_0 \cdot C}$. Въ этомъ уравненіи C означаетъ концентрацію озона ко времени t, а C_0 — концентрацію его въ началѣ опыта. Таблица I (см. ниже, стр. 222) показываетъ зависимость скорости K отъ температуры.

В. Гоффъ для вычисленія константы K предложилъ уравненіе:

$$\ln K = -\frac{A}{T} + D, \quad \text{гдѣ } A = 5700, \quad \text{а } D = 14{,}939.$$

Эти уравненія даютъ возможность вычислить время, потребное для пониженія концентраціи озона до опредѣленнаго предѣла. Напримѣръ, вычислено, сколько требуется времени, чтобы содержаніе озона низвести съ 1% до

http://vivaldi.ru

Таблица I.

Температура	K — по вычисленію	K — по наблюденію
100^0	0,455	0,514
120^0	2, 73	2, 98
127^0	4, 89	4, 73
135^0	9, 31	8, 99
150^0	29, 11	29, 1
175^0	164	181
200^0	747	766
243^0	7820	9350
250^0	11 000	—
1000^0	$29 . 10^9$	—

0,001%. При 1000^0 для этого достаточно 0,000 53 секунды, при 250^0 уже надобно 5 минутъ, а при 100^0 требуется цѣлый годъ. Такимъ образомъ, при низкихъ температурахъ озонъ отличается весьма большою стойкостью, и въ жидкомъ состояніи онъ можетъ быть смѣшанъ съ жидкимъ кислородомъ во всѣхъ отношеніяхъ.

Все изложенное до сихъ поръ показываетъ, что аллотропія кислорода и озона хорошо изучена только съ одной стороны, т. е. изслѣдованъ только процессъ превращенія озона въ кислородъ. Обратный же процессъ изслѣдованъ очень мало. Объясняется это встрѣченными слишкомъ большими затрудненіями.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Интерференція рёнтгеновскихъ лучей*).

М. Якобсона.

Съ тѣхъ поръ, какъ Рёнтгенъ сдѣлалъ свое знаменитое открытіе, прошло уже 18 лѣтъ; за это время лучи Рёнтгена (или X-лучи, какъ назвалъ ихъ самъ Рёнтгенъ) успѣли получить столь широкое примѣненіе, особенно въ медицинѣ, что въ настоящее время о нихъ знаетъ почти всякій школь-

*) Настоящая статья была получена въ редакціи, когда статья г. Леви, помѣщенная въ № 580, была уже въ печати. Въ виду того, что интерференція рёнтгеновскихъ лучей представляетъ одно изъ наиболѣе замѣчательныхъ открытій послѣдняго времени, мы сочли цѣлесообразнымъ удѣлить ей мѣсто на страницахъ „Вѣстника“, тѣмъ болѣе, что настоящая статья освѣщаетъ вопросъ съ нѣсколько иной точки зрѣнія. *Ред.*

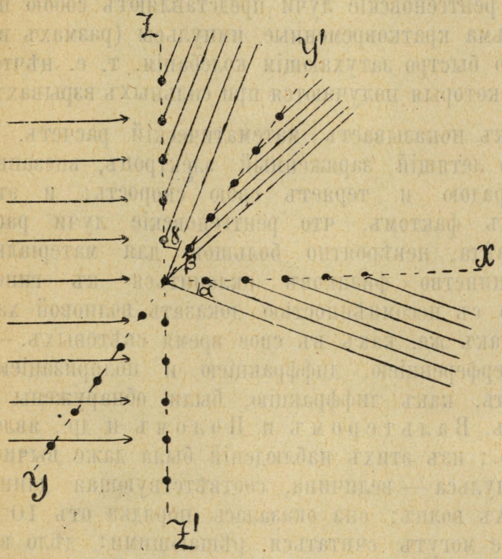
http://vofem.ru

никъ. Но какъ это ни странно, несмотря на современный быстрый прогрессъ физики, природа и сущность этихъ лучей до сихъ поръ еще не вполнѣ выяснены: установлено лишь, что лучи Рёнтгена возникаютъ всегда въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ быстро несущіеся электроны (катодныхъ или β-лучей) ударяются о матеріальныя тѣла; но до сихъ поръ физика не можетъ рѣшить съ увѣренностью, что собственно представляютъ собою эти лучи: являются ли они, согласно гипотезѣ Вихерта и Стокса, эѳирными колебаніями, похожими на свѣтовыя, или же, согласно гипотезѣ Брэгга, быстро несущимся потокомъ нейтральныхъ частицъ-дублетовъ, состоящихъ изъ электрона и положительной частицы. Противъ первой гипотезы какъ будто говоритъ тотъ фактъ, что рёнтгеновскіе лучи не обладаютъ, подобно свѣтовымъ, ультрафіолетовымъ и т. п. лучамъ, правильнымъ отраженіемъ и преломленіемъ, но это удовлетворительно объясняется предположеніемъ, что рёнтгеновскіе лучи представляютъ собою не правильный рядъ колебаній, а весьма кратковременные импульсы (размахъ въ одну сторону) или же чрезвычайно быстро затухающія колебанія, т. е. нѣчто, подобное тѣмъ звуковымъ волнамъ, которыя получаются при сильныхъ взрывахъ.

Такіе именно импульсы, какъ показываетъ математическій расчетъ, и должны получиться, когда быстро летящій заряженный электронъ, внезапно останавливается какою-либо преградою и теряетъ свою скорость; и это обстоятельство въ связи съ тѣмъ фактомъ, что рёнтгеновскіе лучи распространяются со скоростью свѣта, невѣроятно большою для матеріальныхъ частицъ, заставило большинство физиковъ склониться къ гипотезѣ Стокса и Вихерта. Но съ несомнѣнностью доказать волновой характеръ рёнтгеновскихъ лучей — такъ же, какъ въ свое время свѣтовыхъ, — могли бы только опыты съ интерференціею, диффракціею и поляризаціею. Явленія, которыя можно трактовать, какъ диффракцію, были обнаружены и изслѣдованы Хага и Виндомъ, Вальтеромъ и Поломъ и др., явленія поляризаціи — Баркла и др.; изъ этихъ наблюденій была даже вычислена ширина рёнтгеновскаго импульса — величина, соотвѣтствующая длинѣ волны обычныхъ электромагнитныхъ волнъ; она оказалась порядка отъ 10^{-8} до 10^{-9} *см.* Но и эти опыты не могутъ считаться рѣшающими: дѣло въ томъ, что всѣ указанныя явленія значительно усложняются такъ называемыми вторичными рёнтгеновскими лучами, или лучами флуоресценціи, которые испускаются всѣми матеріальными тѣлами, когда на нихъ падаютъ рёнтгеновскіе лучи. Поэтому понятно будетъ, съ какимъ глубокимъ интересомъ была встрѣчена появившаяся въ прошломъ году работа Лауэ и его учениковъ Фридриха и Книппинга, озаглавленная: «Явленія интерференціи съ рёнтгеновскими лучами».

Такъ какъ ширина (или длина волны) рёнтгеновскихъ лучей должна равняться $10^{-8} - 10^{-9}$ *см.*, то для того, чтобы разложить эти лучи въ диффракціонный спектръ, нужно было бы имѣть рѣшетку съ періодомъ (разстояніемъ между черточками), приблизительно равнымъ этому же числу, т. е. въ 10 000 разъ меньшимъ, чѣмъ у рѣшетокъ для свѣтовыхъ лучей. Приготовить такую рѣшетку, конечно, немыслимо. Но оказывается, что рѣшетки, подходящія для этихъ цѣлей, имѣются въ природѣ: еще въ 1850 г. Бравэ высказалъ гипотезу, что въ кристаллахъ атомы расположены въ вершинахъ правильныхъ геометрическихъ фигуръ, и что кристаллы, слѣдовательно, представляютъ собою пространственныя рѣшетки, составленныя изъ атомовъ. Вычисленія разстояній между элементами этихъ рѣшетокъ, основанныя на молекулярномъ вѣсѣ кристаллическихъ соединеній, ихъ плотности и числѣ молекулъ въ граммъ-молекулѣ, всегда даютъ числа порядка 10^{-8} *см.* Разсмотримъ, что должно получиться, когда на подобную пространственную рѣшетку упадетъ пучекъ рёнтгеновскихъ лучей, если послѣдніе считать электромагнитными импульсами.

Возьмемъ простѣйшій случай — кубическую рѣшетку. Пусть пучекъ рёнтгеновскихъ лучей падаетъ по направленію стрѣлокъ (см. рис.). Каждая молекула, на которую упадетъ рёнтгеновскій импульсъ, въ свою очередь сдѣлается источникомъ подобныхъ же импульсовъ, при чемъ безразлично, будетъ ли этотъ процессъ происходить просто согласно принципу Гюйгенса, или же здѣсь будетъ имѣть мѣсто переходъ первичныхъ лучей во вторичные.



Молекулы, лежащія въ плоскости, перпендикулярной къ направленію падающаго луча, возбуждаются всѣ одновременно; поэтому разность хода двухъ параллельныхъ лучей, испускаемыхъ сосѣдними молекулами, расположенными по оси Y или Z, равна $a \cos \beta$ или $a \cos \gamma$, гдѣ a есть разстояніе между молекулами. Разность же хода двухъ послѣдовательныхъ лучей, исходящихъ отъ молекулъ, расположенныхъ по направленію падающаго луча (т. е. по оси X) будетъ равна $a - a \cos \alpha$, такъ какъ каждая слѣдующая молекула возбуждается позже предыдущей на промежутокъ времени, въ теченіе котораго первичный импульсъ проходитъ разстояніе a. Для угловъ α, β и γ, удовлетворяющихъ равенствамъ:

$$a - a \cos \alpha = h\lambda; \quad a \cos \beta = h\lambda; \quad a \cos \gamma = h\lambda,$$

гдѣ h есть цѣлое число, разность хода будетъ равна цѣлому числу волнъ. Очевидно, что всѣ лучи, исходящіе изъ частицъ, расположенныхъ вдоль оси X, и обладающіе разностью хода въ цѣлое число волнъ, а, слѣдовательно, дающіе колебанія съ одинаковыми фазами, лежатъ на коническихъ поверхностяхъ, для которыхъ общею осью служитъ ось X, а углы растворенія опредѣляются изъ равенства $a(1 - \cos \alpha) = h\lambda$. Точно такъ же колебанія съ одинаковыми фазами, исходящія изъ частицъ, расположенныхъ по осямъ Y и Z, лежатъ на коническихъ поверхностяхъ, для которыхъ осями являются Y и Z, а углы опредѣляются равенствами $a \cos \beta = h\lambda$ и $a \cos \gamma = h\lambda$. Если за рѣшеткою пересѣчь эти коническія поверхности плоскостью, перпендикулярною къ направленію падающаго пучка, т. е. если, напримѣръ, поставить за кристалломъ фотографическую пластинку, то первая система коническихъ поверхностей дастъ въ сѣченіи рядъ концентрическихъ окружностей, вторая же и третья — рядъ гипербол. Замѣтнаго усиленія интенсивности колебаній можно ожидать только въ тѣхъ точкахъ, которыя лежатъ на пересѣченіи трехъ кривыхъ (двухъ гипербол и одной окружности). Дѣйствительно, въ точку лежащую, напримѣръ, только на пересѣченіи двухъ гипербол, приходятъ съ одинаковыми фазами колебанія отъ молекулъ, лежащихъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси X, но отъ другихъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ той же оси, колебанія къ этой точкѣ приходятъ уже съ другими фазами и ослабляютъ эффектъ. Если же въ разсматриваемой точкѣ пересѣкаются не только двѣ гиперболы, но и окружность, то въ нее съ одинаковою фазою будутъ приходить колебанія отъ всѣхъ молекулъ кристалла, и эти колебанія взаимно усилятся. Такимъ образомъ, если пропустить пучекъ рёнтгеновскихъ лучей черезъ кристаллъ и за нимъ поставить фотографическую пластинку, то мы должны получить по ней рядъ пятнышекъ, расположенныхъ по концентрическимъ окружностямъ.

Такіе опыты, по указанію Лауэ, были выполнены Фридрихомъ и Книппингомъ съ кристаллами цинковой обманки (ZnS), мѣднаго купороса, каменной соли и др. *).

Лауэ далъ не только качественную теорію этого явленія, вкратцѣ очерченную нами выше, но и вполнѣ точно вычислилъ число пятенъ и мѣсто каждаго изъ нихъ, принявъ 5 различныхъ длинъ волны для имѣвшагося пучка лучей. Расчетъ этотъ далъ только 24 лишнихъ точки, отсутствующія на снимкахъ, и не далъ всего двухъ изъ имѣющихся. Отсутствіе нѣкоторыхъ точекъ можно объяснить недостаточною экспозиціею, если принять во вниманіе, что для полученія фотограммъ пришлось дѣлать экспозицію до 20 часовъ при наиболѣе допустимой интенсивности разряда.

Но несмотря на то, что опыты блестяще подтвердили всѣ предсказанія теоріи Лауэ, построенной на эѳирной гипотезѣ, они все-таки не могутъ служить рѣшающимъ доводомъ въ пользу этой гипотезы, ибо, какъ оказалось, наблюдаемыя явленія могутъ быть объяснены и иначе. Вскорѣ послѣ опубликованія работы Лауэ, Книппинга и Фридриха, Штаркъ показалъ — правда, пока только качественно, — что такія же явленія должны получиться, если рёнтгеновскіе лучи имѣютъ частичное строеніе, и если кристаллическая рѣшетка построена такъ, что въ нѣкоторыхъ направленіяхъ образуются какъ бы каналы, совершенно свободные отъ молекулъ. Въ послѣднемъ засѣданіи Русскаго Физическаго Общества въ С.-Петербургѣ В. Р. Бурсіанъ показалъ, что эффектъ Лауэ — какъ теперь называютъ описанныя явленія — можно объяснить совершенно иначе, даже оставаясь на почвѣ эѳирной теоріи, а именно отраженіемъ отъ системы параллельныхъ плоскостей, проведенныхъ въ опредѣленныхъ направленіяхъ черезъ молекулы кристаллической рѣшетки. Подсчетъ, произведенный имъ, пожалуй, еще лучше согласуется съ опытомъ, чѣмъ вычисленія Лауэ. Подобное же объясненіе наблюдаемыхъ явленій, но уже на основаніи корпускулярной теоріи недавно опубликовалъ творецъ этой теоріи Брэггъ.

Такимъ образомъ, результатъ этихъ опытовъ для теоріи рёнтгеновскихъ лучей пока очень незначителенъ. Но важно, что открыта новая область для

---

*) Снимки были уже воспроизведены въ № 580 „Вѣстника", на стр. 100—101.

изслѣдованія, которая, можетъ быть, въ будущемъ еще дастъ что-нибудь для выясненія характера рёнтгеновскихъ лучей, такъ какъ уже сейчасъ напрашивается много вопросовъ, разрѣшеніемъ которыхъ занялись различные изслѣдователи.

Но если для физики работа Лауэ и его учениковъ пока не принесла тѣхъ плодовъ, какихъ ожидали авторы, то зато въ кристаллографіи этой работѣ суждено произвести настоящій переворотъ: каковъ бы ни былъ характеръ тѣхъ физическихъ процессовъ, благодаря которымъ получаются на фотографической пластинкѣ описанная картина, строеніе кристалла, черезъ который прошли рёнтгеновскіе лучи, въ этой картинѣ отражено во всякомъ случаѣ. И дѣйствительно, всѣ полученные до сихъ поръ снимки находятся въ полномъ согласіи съ кристаллографическими данными. Этотъ методъ даетъ возможность проникнуть въ самую глубь кристалловъ и видѣть ихъ какъ бы насквозь, подобно тому какъ при помощи тѣхъ же рёнтгеновскихъ лучей мы можемъ видѣть насквозь человѣческое тѣло.

Въ связи съ этимъ интересно отмѣтить, что «рёнтгенограммы» кристалловъ даютъ возможность рѣшать такіе вопросы, которыхъ раньше кристаллографическими методами нельзя было рѣшать. Такъ, напримѣръ, Глаголевъ и Зубаревъ, демонстрировавшіе на послѣднемъ засѣданіи Физическаго Общества въ Петербургѣ цѣлый рядъ весьма удачныхъ рёнтгенограммъ, могли, опредѣливъ относительную яркость различныхъ пятенъ, по рёнтгенограммѣ отличить правовращающій кварцъ отъ лѣвовращающаго, въ то время какъ кристаллографически оба кристалла ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются.

На новый путь только вступили, и уже онъ привелъ къ столь богатымъ результатамъ. Несомнѣнно, что впереди насъ ждетъ еще болѣе обильная жатва.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Жюль Таннери, профессоръ Парижскаго Университета, членъ французской Академіи Наукъ. *Курсъ теоретической и практической ариѳметики.* Переводъ съ послѣдняго 6-го французскаго изданія А. А. Котляревскаго подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1913. Стр. XX+671. Ц. 2 р. 60 к.

Сочиненіе Таннери распадается на 14 главъ, изъ которыхъ 11 первыхъ (511 стр.) по своему содержанію (но не по разработкѣ) отвѣчаютъ примѣрно обычному общеизвѣстному курсу средней школы, включая сюда вопросы теоретической ариѳметики. Глава XII посвящена ирраціональнымъ числамъ, комплексамъ и предѣламъ, въ главѣ XIII изложенъ вопросъ о мѣрѣ величинъ, въ главѣ XIV мы находимъ начала теоріи чиселъ.

http://vofem.ru

Идею числа или естественнаго числа авторъ отвлекаетъ изъ идеи собранія, къ которой онъ неоднократно позже возвращается. На первыхъ страницахъ (стр. 1 — 26) эти собранія понимаются вполнѣ конкретно, какъ собранія шаровъ въ мѣшкѣ, стадо барановъ, буквы, составляющія слово.

Оперируя этой идеей и другой важной идеей соотвѣтствія предметовъ одного собранія предметамъ другого собранія, а также пользуясь въ видѣ иллюстраціи собраніями точекъ, авторъ устанавливаетъ понятіе о равенствѣ и неравенствѣ чиселъ, о сложеніи, о равенствѣ и неравенствѣ суммъ, о вычитаніи, а также свойства алгебраической суммы.

Далѣе особыя страницы (7 — 10) удѣлены разсмотрѣнію вопроса о возникновеніи естественнаго ряда*), роли мѣста, порядка въ образованіи понятія о числѣ и числу «ноль». Въ главѣ объ умноженіи мы встрѣчаемъ умноженіе на сумму и разность, умноженіе суммы на сумму, умноженіе алгебраической суммы на алгебраическую сумму, нахожденіе произведенія нѣсколькихъ сомножителей, квадрата суммы или разности и т. д., ариѳметическую прогрессію съ суммой ея членовъ и неравенства. Мы подошли теперь къ § 7 первой главы, въ которомъ излагается дѣленіе (стр. 66). Сначала авторъ разсматриваетъ дѣленіе на конкретномъ примѣрѣ, вынимая изъ мѣшка, наполненнаго шарами, эти шары дюжинами, и даетъ опредѣленіе, изъ котораго выводитъ, пользуясь буквенными обозначеніями, зависимость между дѣлимымъ и дѣлителемъ, частнымъ и остаткомъ, а двѣ страницы спустя приходитъ къ другому толкованію дѣленія, ближе подходящему къ «естественному смыслу слова дѣленіе», и разсматриваетъ съ новой точки зрѣнія общій и частные случаи отмѣченной нѣсколько выше зависимости. Далѣе идутъ послѣдовательныя дѣленія, общія свойства дѣйствій (коммутативность и ассоціативность). Если мы прибавимъ, что въ первую главу въ формѣ относительныхъ чиселъ вошли числа отрицательныя (сложеніе и вычитаніе — стр. 38 - 44, умноженіе и дѣленіе — стр. 78 - 83, а также стр. 75 - 78), то этимъ исчерпается содержаніе первыхъ 83 страницъ, образующихъ первую главу, на которой мы остановились съ умысломъ подробнѣе, для того, чтобы имѣть право меньше говорить по поводу другихъ — болѣе или менѣе сходственно построенныхъ — мѣстъ книги. Главы о нумераціи, практикѣ дѣйствій, предложенія о дѣлимости, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, простыхъ числахъ (стр. 84 — 202) — все это**) представляетъ собой, съ одной стороны, развитіе предшествующей главы на числовомъ матеріалѣ (съ указаніемъ нѣкоторыхъ практическихъ пріемовъ, — между прочимъ, сокращеннаго умноженія и дѣленія), а съ другой стороны, — обоснованіе многочисленныхъ предложеній въ томъ смыслѣ, какъ это имѣетъ мѣсто въ

---

*) Переводчикъ нѣсколько отступаетъ отъ общераспространенной терминологіи и транскрипціи. Рядъ натуральныхъ чиселъ именуется естественнымъ рядомъ, слово „нуль“ пишется ноль. На нашъ взглядъ, эти измѣненія своевременны.

*) Нельзя умолчать также о весьма интересномъ подборѣ многочисленныхъ упражненій.

обычномъ изложеніи «теоретической ариѳметики», но только нѣсколько болѣе подробно, нежели тамъ. Но какъ только мы перейдемъ къ главѣ VI-ой о простыхъ дробяхъ, то изложеніе пріобрѣтаетъ послѣ первыхъ конкретныхъ примѣровъ и относящихся къ нимъ соображеній характеръ особой строгости, вполнѣ доступной для учащихся: дроби разсматриваются, какъ пары чиселъ, но не сплошь, а каждый разъ послѣ изученія вопроса въ менѣе строгомъ освѣщеніи, — такъ разсмотрѣны между прочимъ всѣ дѣйствія надъ дробями, вопросъ о перемѣнѣ единицы (служащей для измѣренія). На дроби распространяются свойства цѣлыхъ чиселъ. Съ этими параграфами тѣсно связано ученіе объ обобщенныхъ дробяхъ, объ отношеніяхъ и пропорціональныхъ числахъ.

Точно такъ же съ большой тонкостью и подробностью разработанъ вопросъ о десятичныхъ дробяхъ, о приближенныхъ вычисленіяхъ, о численныхъ выраженіяхъ ошибокъ, о квадратномъ и кубическомъ корнѣ. «Важно умѣть вычислять», говоритъ авторъ, «и знать, что́ мы дѣлаемъ, когда вычисляемъ». (Авторъ въ другихъ мѣстахъ книги выдвигаетъ важность выполненія повѣрокъ). Не надо прибавлять, что на протяженіи сказаннаго изложенія рядъ страницъ посвященъ, какъ и раньше, обоснованію тѣхъ или другихъ соображеній.

Наконецъ, по преимуществу практическій характеръ (но и только по преимуществу) носитъ прекрасно написанная многосторонняя и содержательная глава о метрической системѣ (стр. 423 — 474), приложенія, въ видѣ новаго разсмотрѣнія вопроса о пропорціональности въ связи съ тройными правилами; въ частности очень хорошо изложены параграфы, касающіеся простыхъ интересовъ и постоянныхъ рентъ.

Ирраціональныя числа, изложенныя по Дедекинду съ нѣкоторыми отступленіями автора, краткое ученіе о комплексахъ, включеніе въ теорію чиселъ квадратичныхъ вычетовъ сравненій, теоріи индексовъ (приложена таблица изъ «Disquisitiones arithmeticae» Гаусса) — даютъ учащемуся должное представленіе о наукѣ о числѣ.

И вотъ, останавливаясь передъ книгой, разбирающей для учащихся французской школы какъ разъ тѣ самые вопросы, которые въ видѣ курса «теоретической ариѳметики» вызываютъ зачастую нерасположеніе учениковъ и отрицательное отношеніе со стороны преподавателей, оцѣнивающихъ эту область знаній настолько низко, что приходится выступать уже въ защиту важности самой науки о числѣ, нельзя не спросить себя, въ чемъ лежатъ причины этого явленія. Неужели такое стройное и возвышенное твореніе мысли Таннери то же вызвало бы къ себѣ такое холодное отношеніе? И вотъ одну-то изъ причинъ подобнаго отношенія можно, повидимому, опредѣлить правильно. То, что въ книгѣ Таннери представляетъ собой отвлеченіе, выполненное на основѣ многочисленныхъ другихъ соображеній, то въ обычныхъ курсахъ является почти единственнымъ содержаніемъ.

Стройное цѣлое усмотритъ въ предложеніяхъ, изучаемыхъ такимъ конспективнымъ путемъ, лишь тотъ, кто и безъ нихъ владѣетъ достаточно широкимъ математическимъ кругозоромъ. Но вопросъ настолько сложенъ, что мы позволимъ себѣ обмолвиться здѣсь только нѣсколькими строками, особенно въ виду того, что въ этой области уже имѣются соображенія спеціалистовъ въ трудахъ I-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики (доклады I. И. Чистякова и П. А. Некрасова).

Какъ справедливо указываетъ редакторъ, книга можетъ служить прекраснымъ пособіемъ для старшихъ классовъ мужскихъ и женскихъ среднихъ учебныхъ заведеній, для учительскихъ семинарій и институтовъ, для лицъ, готовящихся въ высшія спеціальныя учебныя заведенія, а также незамѣнимымъ руководствомъ для преподавателей ариѳметики и для лицъ, желающихъ самостоятельно изучить курсъ ариѳметики въ цѣляхъ самообразованія.

Переводчикъ и редакторъ заслуживаютъ нашей признательности за вкладъ, сдѣланный ими въ переводную учебную литературу.

А. Кулишеръ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 98 (6 сер.). Даны три точки A, B и C. Черезъ точку B провести прямую такъ, чтобы разстоянія ея AD и CE отъ точекъ A и C удовлетворяли равенству

$$p\,.\,\overline{AD}^2+q\,.\,\overline{CE}^2=k^2,$$

гдѣ k — данный отрѣзокъ, а p и q — данныя числа (заданныя вообще, какъ отношенія данныхъ отрѣзковъ).

И. Александровъ (Москва).

№ 99 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\operatorname{tg}^3 x+\sec^3 x=3.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 100 (6 сер). Построить треугольникъ, зная положеніе его вершины A, центра I_b круга, внѣвписаннаго относительно стороны AC, и центра O описаннаго круга.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

http://vofem.ru

№ 101 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$16x^4 - 32x^3 + 16x + 3 = 0.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 69 (6 сер.). *Пусть* ABC *будетъ треугольникъ, углы котораго удовлетворяютъ неравенствамъ* $A > B > C$. *Обозначая черезъ* α, α', β, β', γ, γ' *внутреннія и внѣшнія биссектрисы угловъ* A, B, C, *доказать тожество*

$$(b + c)\frac{\alpha}{\alpha'} + (a + b)\frac{\gamma}{\gamma'} = (c + a)\frac{\beta}{\beta'}\cdot$$

(Заимств. изъ *Journal des Mathématiques élémentaires*).

Проведемъ биссектрисы $AD = \alpha$ и $AD' = \alpha'$. Такъ какъ уголъ DAD' прямой, то

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \cot\angle ADD'.$$

По условію $B > C$. Поэтому $\angle ADD' = C + \frac{A}{2} = C + \frac{\pi - B - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}\cdot$

Слѣдовательно,

(1) $$\frac{\alpha}{\alpha'} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

Но по извѣстнымъ формуламъ

(2) $$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}},$$

(3) $$\cot\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r},$$

гдѣ p и r суть соотвѣтственно полупериметръ и радіусъ круга вписаннаго. Слѣдовательно [см. (1), (2), (3)],

$$(b+c)\frac{\alpha}{\alpha'} = (b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{(b-c)(p-a)}{r};$$

точно такъ же замѣчая, что $A > B$ и $A > C$, получимъ:

$$(a+b)\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{(a-b)(p-c)}{r}, \qquad (c+a)\frac{\beta}{\beta'} = \frac{(a-c)(p-b)}{r}.$$

Поэтому

$$(b+c)\frac{\alpha}{\alpha'} + (a+b)\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{(b-c)(p-a) + (a-b)(p-c)}{r} =$$

$$= \frac{p(b-c+a-b) - (ab-ac+ac-bc)}{r} = \frac{(a-c)(p-b)}{r} = (c+a)\frac{\beta}{\beta'}\cdot$$

Н. Кирьяновъ (Петербургъ); *Н. С.* (Одесса).

http://vofem.ru

№ 70 (6 сер). *Доказать, что при* a *и* b *цѣлыхъ число*

$$a^2 - ab + b^2$$

всегда можно представить въ видѣ $x^2 + 3y^2$ *при условіи, чтобы* x *и* y *были также цѣлыми.*

Если a и b оба одновременно четны или оба одновременно нечетны, то числа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ оказываются цѣлыми: въ этомъ случаѣ разсматриваемое выраженіе представляется въ видѣ $x^2 + 3y^2$, если положить $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$, какъ это видно изъ тожества

$$a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Если же одно изъ чиселъ a и b четно, а другое нечетно, то въ случаѣ, когда a — четно, положимъ $x = \frac{a}{2} - b$, $y = \frac{a}{2}$. Тогда получимъ опять

$$a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Если же b четно, то положимъ $x = \frac{b}{2} - a$, $y = \frac{b}{2}$; тогда получимъ

$$a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

М. Вайнбергъ (Одесса); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Киселевъ. *Систематическій курсъ ариѳметики.* Изданіе 25-ое Думнова. Москва, 1913. Ц. 75 к.

Его же. *Элементарная физика для среднихъ учебныхъ заведеній со многими упражненіями и задачами;* въ двухъ выпускахъ. Выпускъ I. Основныя свѣдѣнія изъ механики. Тяжесть, Жидкости, Газы, Теплота; стр. XIV+176. Ц. 1 р.—Выпускъ II: Акустика, Оптика, Магнетизмъ, Электричество, Гальванизмъ, Механическій отдѣлъ, Свѣдѣнія изъ химіи и метеорологіи; стр. X + 322. Ц. 1 р. 40 к. Изданіе 11-ое, Думнова. Москва, 1913.

Его же. *Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.* (Курсъ VII класса реальныхъ училищъ). Четвертое улучшенное изданіе. Москва, 1913. Стр. 187. Ц. 1 р.

Е. И. Игнатьевъ. *Математическая хрестоматія.* Книга 1-я. „Ариѳметика". Съ 35-ю рисунками, 2-мя таблицами и многими фигурами и чертежами въ текстѣ. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1913. Стр. XI + 273 + II. Ц. 1 руб.

Я. Перельманъ. *Занимательная физика.* 140 парадоксовъ, задачъ, опытовъ, замысловатыхъ вопросовъ и пр. Съ 160 рис. въ текстѣ. Изданіе П. П. Сойкина. СПб., 1913. Стр. 212. Ц. 1 р.

Э. А. Маркусъ. *Наглядная геометрія.* Курсъ геометріи для младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для начальныхъ и городскихъ училищъ. Изданіе Н. П. Карбасникова. СПб, 1913. Стр. 236. Ц. 1 руб.

В. Полидоровъ. *Сборникъ геометрическихъ задачъ на вращеніе различныхъ фигуръ.* Складъ изданія: Т-во И. Н. Кушнеревъ и К°. Москва, 1913. Стр. 36. Ц. 25 к.

В. Риппасъ. *Въ подтвержденіе ложнаго принципа въ математикѣ.* 2-ое, значительно исправленное и дополненное изданіе. СПб., 1912. Стр. 30 и 8 чертежей.

Его же. $\sqrt[2^n]{a}$ *въ геометрическомъ построеніи.* СПб., 1913. Стр. 5 и 2 черт.

Я. И. Грдина, профессоръ Екатеринославскаго Горнаго Института. *Дополненіе къ динамикѣ живыхъ организмовъ.* Складъ изданія въ канцеляріи Екатеринославскаго Горнаго Института. Екатеринославъ, 1913. Стр. 106. Ц. 1 р.

С. И. Александровскій, инженеръ. *Аккумуляторы Эдисона.* Подробное описаніе устройства желѣзо-никкелевыхъ аккумуляторовъ, изслѣдованіе ихъ дѣйствія и преимущества ихъ по сравненію со свинцовыми аккумуляторами. Съ 24 рис. и діаграммами въ текстѣ. Кн-ство „Электричество и Жизнь". Николаевъ, 1913. Стр. 23. Ц. 40 к.

К. Э. Ціолковскій. *Первая модель чисто металлическаго аэроната изъ волнистаго желѣза.* Изданіе автора. Калуга, 1913. Стр. 16. Ц. 15 к.

И. Менделѣевъ. *Методъ математики.* Логика и гносеологія математическихъ знаній. Съ предисловіемъ профессора А. В. Васильева. Кн-ство „Образованіе". СПб. 1913. Стр. 143. Ц. 80 к.

Библіотека знанія. Проф. **К. Касснеръ и В. В. Шипчинскій**. *Погода, ея предсказаніе и значеніе для практической жизни.* Переводъ П. И. Ваннари. Съ 20 рис. и отдѣльной таблицей. Изданіе П. П. Сойкина. СПб., 1913. Стр. 188. Ц. 1 р.

Естествознаніе въ школѣ. Непеіодическое изданіе, выходящее подъ общей редакціей проф. В. А. Вагнера и Б. Е. Райкова. Сборникъ № 3. „Обзоръ новѣйшей учебной и учебно-вспомогательной литературы по естествознанію. Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 147. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ философіи. Непеіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей Н. О. Лосскаго и Э. Л. Радлова. Сборникъ № 5. „Теорія познанія II". Стр. 148. — Сборникъ № 6. „Существуетъ ли внѣшній міръ?". Стр. 138. — Сборникъ № 7. „Теорія познанія III". Стр. 158.—Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Цѣна каждаго сборника 80 к.

Новыя идеи въ математикѣ. Непеіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора А. В. Васильева. Сборникъ № 2. „Пространство и время I". Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 146. Ц. 80 к.

http://vofem.ru

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется