Обложка
пщется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 588.

Эѳиръ.

Исторія одной гипотезы.

М. Ла-Роза.

(Докладъ, прочитанный въ „Biblioteca philosofica" въ Палермо).

Настоящій докладъ не содержитъ систематическаго, а тѣмъ болѣе полнаго изложенія исторіи эѳира; это — лишь краткій обзоръ старыхъ и новыхъ воззрѣній, которыя всегда представляютъ особый философскій интересъ. Постулаты теоріи относительности, а также новыя понятія времени и пространства въ виду ихъ высокой важности изложены подробно.

Тѣ настойчивыя усилія, съ которыми современная наука искала прямыхъ доказательствъ существованія атомовъ, увѣнчались въ послѣднее время блестящимъ успѣхомъ.

Поистинѣ удивительный прогрессъ экспериментальной физики позволилъ намъ даже непосредственно познакомиться, если не съ самимъ атомомъ, то, по крайней мѣрѣ, съ нѣкоторыми частицами (а именно ультра-микроскопическими), которыя благодаря своимъ ничтожнымъ размѣрамъ вынуждены, такъ сказать, принимать прямое и самое близкое участіе въ жизни атомовъ; онѣ получаютъ отъ атомовъ свое движеніе и вынуждены во всемъ приспособляться къ тѣмъ условіямъ, которыя предписываетъ имъ движеніе атомовъ и которыя вычисленіе позволяетъ предусмотрѣть.

Но — странное дѣло! — въ то самое время, какъ столь выдающіеся экспериментаторы подготовляли твердую почву для атомистической теоріи, группа теоретиковъ настойчиво пыталась разрушить другой устой того моста, который соединялъ область физики вещества съ оптикой и электромагнитизмомъ и позволялъ слить всѣ явленія въ одно величественное зданіе: механистическое міровоззрѣніе.

Подъ этими упорными ударами гипотеза эѳира, насчитывающая уже цѣлыя столѣтія, начинаетъ колебаться, а возведенное съ такой любовью и трудомъ зданіе механическаго міровоззрѣнія разрушается и превращается въ развалины.

Эта ниспровергающая волна вполнѣ достойна той неизмѣримой катастрофы, которую она производитъ: она потрясаетъ основы всей физики и опрокидываетъ ихъ, она заливаетъ области родственныхъ наукъ — астрономіи и химіи — и неудержно подымается до высотъ теоріи познанія.

Во всей исторіи науки за послѣднія столѣтія нѣтъ ничего, что можно было бы поставить наряду съ современнымъ переворотомъ. Чтобы найти что-нибудь, сравнимое по своей чрезвычайной важности съ современнымъ движеніемъ, намъ пришлось бы, по словамъ Макса Планка (Max Planck), одного изъ самыхъ смѣлыхъ и счастливыхъ піонеровъ современной теоретической физики, вернуться къ тому времени, когда система Коперника перевернула наши самые основные взгляды на вселенную и глубоко потрясла даже религіозныя убѣжденія своихъ современниковъ.

Та страница физики, которую какъ разъ теперь пишутъ теоретики, будетъ въ исторіи эѳира, быть можетъ, послѣдней, но въ то же время и самой величественной,—эпилогомъ, достойнымъ той борьбы, которая съ величайшимъ одушевленіемъ и самымъ живымъ интересомъ велась въ теченіе столѣтій.

Начало исторіи эѳира, какъ и всякой другой гипотезы, въ теченіе извѣстнаго времени привлекавшей къ себѣ вниманіе въ области науки, можно было бы прослѣдить вплоть до древнихъ греческихъ философовъ.

Но я принадлежу къ числу тѣхъ, которые видятъ первое возникновеніе научной гипотезы лишь тамъ, гдѣ эта гипотеза впервые выдвигается на почвѣ твердо установленныхъ научныхъ фактовъ и получаетъ дѣйствительно научное содержаніе и научный характеръ.

Въ такомъ случаѣ исторія эѳира начинается около 1690 года. За нѣсколько лѣтъ до того датскому астроному Рёмеру (Römer) удалось впервые доказать, что для распространенія свѣта отъ одной опредѣленной точки до другой требуется нѣкоторый конечный промежутокъ времени. При помощи извѣстныхъ наблюденій надъ періодическимъ исчезаніемъ спутниковъ Юпитера въ конусѣ тѣни, отбрасываемой этой планетой, ему удалось установить, что для свѣта требуется приблизительно 8 минутъ 16 секундъ, чтобы пройти разстояніе, равное разстоянію земли отъ солнца. Такъ какъ это разстояніе тогда уже было извѣстно, то онъ могъ вычислить пространство, проходимое свѣтомъ въ одну секунду, т. е. скорость распространенія свѣта, при чемъ получилось, круглымъ числомъ, около 300 000 *км*. Мы можемъ составить себѣ грубое представленіе объ этой дѣйствительно громадной скорости, если примемъ въ соображеніе, что поѣздъ, мчащійся съ такой скоростью, успѣлъ бы лишь въ одну секунду объѣхать вокругъ земли $7^1/_2$ разъ.

Если, слѣдовательно, пучекъ свѣта выходитъ въ настоящій моментъ изъ какого-нибудь удаленнаго отъ насъ источника свѣта,—напримѣръ, изъ солнца, то намъ нужно еще обождать извѣстное время, пока онъ дойдетъ до насъ. Мы вынуждены поэтому представлять себѣ, что въ этотъ промежутокъ времени свѣтовой пучекъ распредѣленъ въ промежуточномъ пространствѣ и пробѣгаетъ его; такимъ путемъ мы естественно приходимъ къ вопросу, что́ же именно является носителемъ распространяющагося свѣта и въ чемъ состоитъ его механизмъ.

Два конкретныхъ образа скоро были придуманы для отвѣта на этотъ вопросъ, который всталъ передъ учеными того времени послѣ открытія Рёмера.

Первый былъ предложенъ Гюйгенсомъ въ 1690 году. Онъ опирается на нѣкоторыя аналогіи, которыя тогда уже были замѣчены между свѣтовыми явленіями, съ одной стороны, и звуковыми (или вообще явленіями распространенія деформацій въ упругихъ средахъ), съ другой стороны. Распространеніе свѣта въ пространствѣ происходитъ по Гюйгенсу въ особой средѣ и особымъ образомъ, аналогично тому, что мы видимъ при матеріальномъ распространеніи толчка, сообщеннаго упавшимъ камнемъ, по поверхности пруда.

Мы видимъ, какъ вокругъ того мѣста, гдѣ упалъ камень, вода приподымается и производитъ небольшія движенія снизу вверхъ и сверху внизъ. Эти движенія не ограничиваются тѣмъ мѣстомъ, гдѣ они возникли, и мѣстами, непосредственно прилегающими къ нему, но начинаютъ распространяться по всей поверхности пруда, пока не достигнутъ берега. Но въ каждый данный моментъ движеніе ограничено небольшой областью на поверхности въ формѣ кольца, центръ котораго лежитъ въ мѣстѣ паденія камня. Движенія всѣхъ лежащихъ въ этомъ кольцѣ частицъ, распространяясь вокругъ, образуютъ дальнѣйшія очень небольшія кольца, которыя сливаются и образуютъ появляющееся въ слѣдующій моментъ новое кольцо большаго радіуса.

Источникъ свѣта состоитъ, по взглядамъ Гюйгенса, изъ громаднаго числа маленькихъ, быстро движущихся частицъ и окруженъ упругой средой, которая воспринимаетъ толчки, сообщаемые ей источникомъ свѣта и разноситъ ихъ по всему пространству при помощи того же механизма „распространяющейся волны“.

Но какое же тѣло можетъ служить носителемъ, средой, необходимой для распространенія свѣта? Быть можетъ, то же самое, которое служитъ и для распространенія звука, т. е. воздухъ? Или какое-нибудь другое изъ извѣстныхъ тѣлъ? Несомнѣнно, нѣтъ! — и по различнымъ соображеніямъ. Самое важное изъ нихъ — слѣдующее.

И теорія и опытъ привели ужъ тогда къ заключенію, что скорость распространенія колебаній въ матеріальныхъ упругихъ тѣлахъ въ сотни тысячъ разъ меньше скорости распространенія свѣта. Слѣдовательно, носителемъ свѣта должно было быть нѣкоторое новое, отличное отъ всѣхъ извѣстныхъ тѣло. Самъ Гюйгенсъ назвалъ его „свѣтовымъ эѳиромъ“.

Теорія показала также, что скорость V распространенія колебаній въ упругомъ тѣлѣ зависитъ отъ двухъ свойствъ тѣла: отъ модуля упругости e и отъ плотности d, а именно $V^2 = \frac{e}{d}$; а такъ какъ V очень велико, то эѳиръ долженъ былъ обладать чрезвычайно большой упругостью и чрезвычайно малой плотностью.

Чтобы построить конкретную модель распространенія свѣта, Гюйгенсъ представилъ себѣ эѳиръ состоящимъ изъ мельчайшихъ шарообразныхъ частицъ одинаковаго размѣра, обладающихъ совершенной упругостью. Между этими частицами распространеніе свѣта должно происходить посредствомъ того же механизма, который мы показываемъ въ нашихъ школахъ, демонстрируя распространеніе толчка вдоль длиннаго ряда шариковъ изъ слоновой кости, центры которыхъ расположены по прямой линіи.

Съ метафизической точки зрѣнія этотъ образъ не былъ вполнѣ удовлетворительнымъ, именно, поскольку тутъ предполагалась упругость самихъ частицъ; не удовлетворялъ онъ и съ физической точки зрѣнія, такъ какъ недостаточно объяснялъ многія дѣйствительно основныя явленія, какъ, напримѣръ, прямолинейное распространеніе свѣта.

Со смертью Христіана Гюйгенса эѳирная теорія больше столѣтія оставалась непризнанной. Беззащитная сирота, она легко была вытѣснена новой соперницей, которая подъ прикрытіемъ великаго имени Ньютона долго царила въ научномъ мышленіи всѣхъ странъ.

По Ньютону источникъ свѣта самъ испускаетъ носителя, необходимаго для переноса свѣта, т. е. дѣйствіе свѣта и носитель его являются нераздѣльными.

Распространеніе свѣта сводилось въ этой теоріи просто къ чрезвычайно быстрому движенію частицъ, какъ бы маленькихъ снарядовъ, непрерывно и въ громадномъ количествѣ выбрасываемыхъ источникомъ свѣта; свѣтовой же энергіей является просто живая сила этого потока частицъ, этой чрезвычайно густой, но мелкой бомбардировки.

Отъ 1704 года, когда была выдвинута эмиссіонная теорія, нужно перейти сразу приблизительно къ 1800 году, когда снова появились первые признаки рѣшительнаго отпаденія отъ идей Ньютона и возвращенія къ воззрѣніямъ Гюйгенса.

Открытіе явленій интерференціи заставило Томаса Юнга (Thomas Young) снова принять теорію Гюйгенса и дать ей основаніе, которое допускало бы лучшую дальнѣйшую разработку.

Представленіе о періодичности въ связи съ представленіемъ о волнообразномъ распространеніи было той плодотворной прививкой, которая вдохнула новую, пышную жизнь въ сухой и до того безплодный побѣгъ.

Гюйгенсъ смотрѣлъ на свѣтовой пучекъ, какъ на послѣдовательность толчковъ, которые безъ всякаго порядка и закономѣрности сообщаются окружающей средѣ частицами источника свѣта.

У него была передъ глазами картина сотрясеній, вызванныхъ на поверхности пруда паденіемъ ряда безпорядочно слѣдующихъ другъ за другомъ камней, и распространеніе каждаго сотрясенія онъ разсматривалъ отдѣльно и независимо отъ наличности другихъ.

Юнгъ, напротивъ, представилъ себѣ механизмъ испусканія и распространенія свѣта совершенно иначе. По его взгляду частицы источника свѣта представляютъ какъ бы совокупность столь же многочисленныхъ мельчайшихъ маятниковъ, которые движутся съ большой скоростью, но вполнѣ закономѣрно, подобно часовому маятнику. Эти движенія съ такою же закономѣрностью сообщаются частицамъ эѳира и распространяются по всему пространству. Каждая частица этой среды колеблется подобно маятнику и непрерывно передаетъ характеръ своего движенія въ данный моментъ ближайшимъ слѣдующимъ частицамъ, въ то же время повторяя движенія частицъ, непосредственно предшествующихъ ей со стороны источника свѣта.

Частицы (въ однородной средѣ), лежащія на одной и той же шаровой поверхности, центромъ которой служитъ источникъ свѣта, въ каждый данный моментъ колеблются согласно другъ съ другомъ, совокупность ихъ образуетъ поверхность волны; частицы же, лежащія на одной и той же прямой, проходящей черезъ центръ распространенія колебаній, не могутъ колебаться согласно, такъ какъ движеніе требуетъ извѣстнаго времени, чтобы распространиться отъ одной частицы къ другой. Эти маленькіе маятники производятъ колебанія, какъ принято выражаться, не синхронныя (совпадающія во времени), а различающіяся по фазѣ, т. е. начинающіяся въ послѣдовательные моменты, такъ что на различныхъ разстояніяхъ отъ источника свѣта въ одинъ и тотъ же данный моментъ могутъ быть найдены частицы, движущіяся въ прямо противоположныхъ направленіяхъ.

Поэтому, если въ одномъ и томъ же пространствѣ налагаются другъ на друга двѣ системы волнъ, то можно будетъ найти точки, въ которыхъ колебанія, образованныя обѣими системами волнъ, имѣютъ согласный характеръ, такъ что дѣйствія ихъ складываются и даютъ болѣе яркій свѣтъ, и такія точки, гдѣ, напротивъ, дѣйствія взаимно уничтожаются и даютъ темноту.

Если мы представимъ себѣ, что явленія свѣта сводятся къ закономѣрнымъ періодическимъ движеніямъ, то можно будетъ объяснить ту смѣну свѣта и тѣни, которая возникаетъ при наложеніи двухъ свѣтовыхъ пучковъ, т. е. такъ называемыя явленія интерференціи, открытыя Юнгомъ.

Но ученые того времени слишкомъ крѣпко держались за теорію Ньютона, и указанія Юнга, пытавшагося вернуть ихъ къ волнообразной теоріи, остались почти безрезультатными. Къ тому же именно тогда такимъ людямъ, какъ Лапласъ, которые не смущались усложненіемъ теоріи истеченія, удалось дать изложеніе многихъ важныхъ явленій, основанное исключительно на старыхъ воззрѣніяхъ.

Но идеи Юнга, не встрѣтившія никакого отклика въ оффиціальной наукѣ, упали все-таки на чрезвычайно плодородную почву въ умѣ одного молодого инженера, жившаго по условіямъ своей службы въ заброшенномъ уголкѣ Франціи и предававшагося научнымъ размышленіямъ при полномъ отсутствіи всякихъ вспомогательныхъ средствъ, черпая совѣты и указанія лишь въ своемъ природномъ геніи.

Счастливое сочетаніе того, что было существеннымъ въ идеяхъ Гюйгенса и Юнга, соединеніе „принципа интерференціи" съ „принципомъ распространяющейся волны", т. е. то соображеніе, что движенія, исходящія изъ одной и той же поверхности волны, могутъ интерферировать благодаря различію въ длинѣ пути, который имъ приходится пройти до одной и той же точки, это соображеніе и оказалось тѣмъ волшебнымъ ключомъ, который далъ возможность Огюстену Френелю (Augustin Fresnel) объяснить почти всѣ извѣстныя до того оптическія явленія, и послужило путеводной нитью, приведшей его къ открытію многихъ новыхъ фактовъ, которые и вынудили науку признать теорію эѳира, такъ какъ иначе объяснить ихъ было невозможно.

Исторія этихъ открытій, экспериментальная повѣрка которыхъ принадлежитъ къ числу самыхъ тонкихъ, и которыя были совершены съ помощью нѣсколькихъ кусковъ картона и при содѣйствіи деревенскаго кузнеца, поистинѣ удивительна.

Если бы я хотѣлъ заняться здѣсь этими новыми фактами, мнѣ пришлось бы углубиться въ спеціальную область оптики. Хотя и съ сожалѣніемъ, но мнѣ приходится отказаться отъ изложенія даже важнѣйшихъ пунктовъ, такъ какъ я убѣжденъ, что мнѣ не удалось бы быть достаточно яснымъ.

Я упомяну только, что жатва фактовъ, которую Френель собралъ въ этой области, настолько велика, и предложенныя имъ объясненія были настолько гармоничны и убѣдительны, что даже Французская Академія, которая съ плохо скрытымъ намѣреніемъ дискредитировать работы Френеля объявила премію за разработку назначенной темы, оказалась вынужденной увѣнчать преміей работу, которую Френель по совѣту Араго смѣло представилъ. И всего нѣсколько лѣтъ спустя такіе люди, какъ Лапласъ (Laplace), Пуассонъ (Poisson) и Біо (Biot), прежніе горячіе противники волнообразной теоріи, привѣтствовали молодого инженера, какъ своего товарища.

Я съ удовольствіемъ упомяну еще объ одномъ фактѣ. Пуассонъ, предсѣдатель коммиссіи въ Академіи, для того, чтобы показать неудовлетворительность работы Френеля, выдвинулъ слѣдующее обстоятельство. Формулы, къ которымъ Френель пришелъ при изученіи явленій загибанія свѣта, допускаютъ дѣйствительное вычисленіе въ случаѣ тѣни, отбрасываемой на экранъ небольшимъ непрозрачнымъ дискомъ; онъ произвелъ соотвѣтствующее вычисленіе и пришелъ къ парадоксальному, по его мнѣнію, результату, что при извѣстныхъ условіяхъ разстоянія между источникомъ свѣта, дискомъ и экраномъ въ центрѣ тѣни должно находиться освѣщенное мѣсто, какъ если бы въ дискѣ было отверстіе. И именно благодаря тому, что Френель (котораго извѣстилъ объ этомъ Араго) далъ экспериментальное подтвержденіе этого вывода, даже враждебно настроенное большинство коммиссіи высказалось, въ концѣ концовъ, въ пользу Френеля.

Такимъ путемъ теорія эѳира проникла въ самыя неприступныя крѣпости офиціальной науки и прошла самый важный этапъ своего тріумфальнаго шествія.

Но это было еще не все или, по крайней мѣрѣ, не самое важное, что сдѣлалъ Френель для науки о свѣтѣ.

Получивъ въ 1816 году отпускъ на нѣсколько мѣсяцевъ, Френель отправился въ Парижъ и тамъ вмѣстѣ съ Араго предпринялъ изслѣдованіе тѣхъ интересныхъ свойствъ, которыя получаетъ свѣтовой пучекъ послѣ отраженія или послѣ прохожденія черезъ тѣло, кристаллизованное въ любой системѣ, кромѣ правильной.

Какъ извѣстно, эти тѣла раздѣляютъ пропущенный въ нихъ пучекъ; они, какъ принято говорить, обладаютъ способностью двойного лучепреломленія, при чемъ оба выходящихъ луча обладаютъ уже новыми свойствами по сравненію съ падающимъ лучемъ; такъ, напримѣръ, они уже не интерферируютъ другъ съ другомъ и не всегда могутъ пройти черезъ другой прозрачный кристаллъ, — напримѣръ, черезъ турмалинъ.

Всѣмъ, навѣрное, извѣстны турмалиновые щипцы. Они состоятъ изъ двухъ пластинокъ этого минерала, изъ которыхъ каждая сама по себѣ прозрачна. Обѣ вмѣстѣ образуютъ прозрачную систему, если пластинки извѣстнымъ образомъ оріентированы другъ относительно друга, и непрозрачную систему, если одна изъ нихъ повернута на прямой уголъ по сравненію съ предыдущимъ положеніемъ.

Въ то время какъ обыкновенный свѣтъ изъ окна всегда проходитъ черезъ первую пластинку, какъ бы мы ее ни вертѣли, тотъ свѣтъ, который уже прошелъ черезъ первую пластинку, становится латерально оріентированнымъ въ пространствѣ: онъ можетъ пройти черезъ вторую пластинку лишь въ томъ случаѣ, если послѣдняя опредѣленнымъ образомъ оріентирована. Явленіе это, какъ извѣстно, называютъ поляризацiей, а свѣтъ, прошедшій черезъ первую турмалиновую пластинку, называютъ поляризованнымъ.

Эти факты привели Френеля къ глубокому и чрезвычайно смѣлому измѣненію первоначальныхъ взглядовъ на свѣтовой эѳиръ.

До изслѣдованій Френеля волнообразную теорію свѣта молчаливо основывали на предположеніи, что волны въ эѳирѣ являются продольными, т. е. что каждая частица эѳира во время своихъ колебаній движется въ направленіи распространенія свѣтового луча.

Но совершенно очевидно, что продольныя колебанія не могутъ объяснить намъ тѣхъ явленій, на которыя я указалъ, говоря о поляризованномъ свѣтѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы предположимъ, что свѣтъ состоитъ изъ продольныхъ колебаній, то слѣдующее обстоятельство становится непонятнымъ. Если лучъ, прошедшій черезъ первую турмалиновую пластинку, проходитъ черезъ вторую такимъ образомъ, что внутри этой послѣдней идетъ все время по одному и тому же пути, то какимъ образомъ положеніе остальныхъ частей этой пластинки относительно луча можетъ вліять на его распространеніе? Какъ бы ни была оріентирована пластинка, частицы, приведенныя въ движеніе свѣтовыми колебаніями, будутъ всегда однѣ и тѣ же, и если колебанія продольны, то и направленіе, въ которомъ онѣ начнутъ двигаться, будетъ всегда одно и то же. Зависимость отъ положенія пластинки оказывается непонятной.

Если же мы предположимъ, что колебанія въ свѣтовомъ лучѣ происходятъ перпендикулярно къ направленію распространенія луча, то становится легко понять, какимъ образомъ положеніе кристаллическаго тѣла можетъ вліять на распространеніе свѣта, хотя бы путь его и оставался тѣмъ же самымъ.

Дѣйствительно, въ различныхъ плоскостяхъ, которыя мы можемъ мысленно провести черезъ свѣтовой лучъ, кристаллическое тѣло обладаетъ различными свойствами. Если свѣтовыя колебанія перпендикулярны къ направленію луча и до входа въ пластинку всѣ лежатъ въ одной плоскости, то при измѣненіи положенія кристалла относительно плоскости колебаній, эти послѣднія попадаютъ внутри кристалла въ среду, обладающую иными свойствами, и распространяются въ ней уже иначе.

Эта гипотеза поперечныхъ колебаній хорошо объясняетъ также и тотъ фактъ, что два поляризованныхъ луча иногда интерферируютъ, а иногда нѣтъ, смотря по тому, происходятъ ли ихъ колебанія въ одной и той же или во взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, что вполнѣ совпадаетъ съ результатами опытовъ Френеля и Араго*).

Но это предположенiе наталкивалось на такiя теоретическiя трудности, что и самъ Френель нѣкоторое время не рѣшался выступить съ нимъ.

Теорiя распространенiя волнообразныхъ движенiй въ упругихъ средахъ, которая была разработана только для жидкихъ тѣлъ, показала, что эти тѣла могутъ передавать лишь продольныя колебанiя. Только въ твердыхъ тѣлахъ, т. е. такихъ, которыя обладаютъ стремленiемъ сохранять свою форму, могутъ возникать и распространяться поперечныя колебанiя. Такимъ образомъ предположенiе о поперечномъ характерѣ колебанiй приводило, какъ это показалъ самъ Френель, къ тому, чтобы видѣть въ эѳирѣ Гюйгенса уже не жидкость, а твердое тѣло.

Этотъ послѣднiй взглядъ наталкивался на чрезвычайно важное затрудненiе, которое самому Френелю казалось непреодолимымъ, а именно на необходимость согласовать гипотетическiя свойства эѳира съ наличностью движенiй небесныхъ тѣлъ, которыя безпрепятственно движутся въ томъ самомъ пространствѣ, которое мы должны представлять себѣ, какъ заполненное твердымъ эѳиромъ.

И если основатель волнообразной теорiи свѣта долгое время не могъ освободиться отъ влiянiя строгой логики, воспитанной на французскомъ математическомъ классицизмѣ, и открыто признать необходимость разсматривать эѳиръ, какъ твердое тѣло, то все-таки его дальнѣйшiя работы неизбѣжно вращаются около этого важнаго представленiя.

Но скоро не одинъ только Френель, но и всѣ тѣ, кто послѣ него знакомился съ его цѣнными работами, должны были признать поперечный характеръ свѣтовыхъ колебанiй за неизбѣжную, изъ самыхъ фактовъ вытекающую необходимость, болѣе сильную, чѣмъ какое угодно чисто логическое требованiе. Съ тѣхъ поръ свѣтъ всѣми разсматривался и разсматривается, какъ перiодическое явленiе существенно поперечнаго характера.

Кромѣ этого представленiя объ эѳирѣ, какъ о твердомъ тѣлѣ, оптика не получила отъ своего величайшаго генiя почти никакой другой конкретной идеи о строенiи загадочнаго носителя свѣта. Глубокiй умъ Френеля былъ болѣе склоненъ къ абстрагированiю явленiй природы, чѣмъ къ матерiализированiю ихъ въ конкретныхъ, но болѣе или менѣе грубыхъ моделяхъ.

Объ эѳирѣ онъ говоритъ лишь то, что присутствiе вещества должно видоизмѣнять его, т. е. что эѳиръ, находясь въ соприкосновенiи съ веществомъ, долженъ обладать иной и именно бо́льшей плотностью, чѣмъ находясь въ свободномъ пространствѣ, и что въ кристал-

*) Предположенiе о поперечномъ характерѣ колебанiй впервые было высказано Юнгомъ.

лическихъ средахъ эта плотность вообще различна въ различныхъ направленіяхъ.

Всякое тѣло, по его мнѣнію, содержитъ, во-первыхъ, часть эѳира, равную той, которая содержалась бы въ свободномъ пространствѣ того же объема, что и тѣло, и остающуюся неподвижной при движеніи тѣла, и кромѣ того еще другую часть эѳира, которая тѣсно связана съ самимъ тѣломъ. Этотъ послѣдній и обусловливаетъ увеличеніе плотности и сопровождаетъ тѣло во всѣхъ его движеніяхъ. Къ такому взгляду Френель былъ приведенъ нѣкоторыми важными явленіями, о которыхъ я вкратцѣ скажу ниже.

Движущееся тѣло увлекаетъ за собой въ такомъ случаѣ лишь часть всего количества эѳира, которое оно содержитъ, а именно $\frac{n^2-1}{n^2}$-ую часть, гдѣ n есть показатель преломленія даннаго тѣла.

Характеръ настоящей статьи не позволяетъ мнѣ, къ сожалѣнію, коснуться другихъ важныхъ работъ Френеля въ области оптики, и мнѣ приходится разстаться съ нимъ, не успѣвши освѣтить его заслугъ достойнымъ образомъ.

Онъ успѣлъ дать наукѣ чрезвычайно много! Если мы вспомнимъ краткость его жизни (онъ умеръ всего 39 лѣтъ), вспомнимъ, что бо́льшая часть дѣятельности, которую онъ могъ развить въ свои лучшіе годы, была посвящена вплоть до послѣднихъ дней добросовѣстному выполненію скромныхъ обязанностей инженера (и въ этой области онъ оставилъ блестящіе слѣды своего генія), то мы почувствуемъ глубочайшее удивленіе, на какое способна наша душа, смѣшанное съ чувствомъ самой живой скорби за эту драгоцѣнную, такъ рано и такъ жестоко прекращенную жизнь, за дѣятельность, постоянно отвлекавшуюся и нарушавшуюся борьбой за существованіе.

Но какъ ни было велико твореніе Френеля, неполнота его скоро обнаружилась. Нѣкоторыя очень важныя явленія, а именно явленія свѣторазсѣянія, не находили себѣ мѣста въ теоріи Френеля; такъ же точно она далеко еще не являлась законченной и точной во всѣхъ своихъ деталяхъ. Это никоимъ образомъ не умаляетъ его заслугъ. „Если мы вспомнимъ, въ какомъ положеніи онъ засталъ теорію эѳира, — говоритъ Стоксъ (Stokes), — и въ какомъ онъ оставилъ ее, то мы будемъ удивляться не тому, что ему не удалось дать строгую динамическую теорію, а тому, что одинъ умъ оказался способнымъ сдѣлать такъ много". Дѣятельность почти всѣхъ преемниковъ Френеля сводится къ улучшенію и пополненію теоріи твердаго эѳира. Они старались при этомъ объяснить распространеніе свѣта черезъ матеріальныя тѣла, которое происходитъ съ различной скоростью для различныхъ цвѣтовъ, благодаря чему сложный свѣтовой пучекъ (бѣлый свѣтъ), проходя черезъ призму изъ прозрачнаго вещества, разлагается на свои части и образуетъ то, что мы называемъ спектромъ.

Эти явленія, какъ мы видимъ, затрагиваютъ одно существенное обстоятельство. Они касаются отношенія между свѣтомъ и средой, т. е. между эѳиромъ и веществомъ.

Рядъ идей и представленій, выросшихъ за время отъ смерти Френеля до Кельвина, такъ великъ, отличается такой пестротой и своеобразіемъ, такъ полонъ несогласованности и противорѣчій, что онъ можетъ привести въ смущеніе не только того, кто бѣгло прослѣдитъ его на протяженіи одной краткой лекціи, но и того, кто пытается, не торопясь, собрать эти идеи изъ многочисленныхъ трудовъ, по которымъ онѣ разсѣяны.

Я не могу поэтому дать хотя бы и суммарнаго обозрѣнія всѣхъ ихъ и ограничусь упоминаніемъ лишь нѣкоторыхъ, самыхъ важныхъ.

Первая остроумная попытка дать объясненіе свѣторазсѣянія и возстановить теорію твердаго эѳира принадлежитъ другому французскому инженеру и выдающемуся математику Коши (Cauchy). Онъ разсматривалъ эѳиръ, какъ упругую среду, состоящую изъ мельчайшихъ частицъ, которыя отдѣлены одна отъ другой настолько большими разстояніями, что по сравненію съ ними сами частицы могутъ быть разсматриваемы, какъ математическія точки.

Эти частицы дѣйствуютъ другъ на друга съ силой, величина которой зависитъ отъ ихъ массъ и разстояній. Онъ также представляетъ себѣ, что эѳиръ внутри тѣлъ состоитъ изъ двухъ частей. Одна часть сгущена вокругъ матеріальныхъ частицъ такъ, что она распредѣлена внутри тѣла періодически. Другая часть свободна, но частицы ея удалены одна отъ другой нѣсколько больше, чѣмъ въ пустомъ пространствѣ.

На этихъ предположеніяхъ Коши удалось построить теорію, которая привела къ тѣмъ же заключеніямъ, что и теорія Френеля, и дала возможность установить отношеніе между показателями преломленія и цвѣтомъ лучей (т. е. періодомъ колебанія), которое во многихъ случаяхъ подтверждалось опытомъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О числахъ, которыя не могутъ быть представлены въ видѣ суммы степеней съ разными основаніями.

Прив.-доц. Ю. Рабиновича.

Въ октябрьскомъ номерѣ журнала «L'intermédiaire des mathématiciens» за 1912 годъ г. Лемэромъ (G. Lemaire) была предложена слѣдующая задача (№ 4104, стр. 218): найти рекуррентную формулу для вычисленія цѣлыхъ чиселъ, которыя не могутъ быть представлены въ видѣ

$$a^m + b^n + c^p + \cdots,$$

гдѣ a, b, c,...—различныя положительныя цѣлыя числа, а m, n, p,...—цѣлыя числа, бо́льшія, чѣмъ 1.

Мнѣ удалось доказать, что чиселъ, которыя не могутъ быть представлены въ требуемомъ видѣ, имѣется только конечное число (совокупность этихъ чиселъ какъ разъ исчерпывается тѣми десятью, которыя приводитъ въ видѣ примѣра г. Лемэръ), и въ настоящей замѣткѣ я хотѣлъ бы подѣлиться съ читателями «Вѣстника» этимъ доказательствомъ.

Раньше всего условимся называть тѣ числа, которыя могутъ быть представлены въ требуемомъ видѣ, выражаемыми, а остальныя—невыражаемыми. Путемъ пробъ легко убѣдиться въ томъ, что изъ первыхъ восьми чиселъ натуральнаго ряда четыре выражаемы ($1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $8 = 2^3$) и четыре (2, 3, 6, 7) невыражаемы.

Далѣе, легко видѣть, что, если мы къ выражаемому числу

$$a^m + b^n + c^p + \cdots$$

прибавимъ число x^2, бо́льшее его и являющееся точнымъ квадратомъ, то мы опять получимъ выражаемое число. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$x^2 > a^m + b^n + c^p + \cdots,$$

то x не можетъ быть равно ни одному изъ чиселъ a, b, c, ..., и, слѣдовательно, разсматриваемая сумма

$$x^2 + a^m + b^n + c^p + \cdots$$

представлена въ требуемомъ видѣ. Иначе мы можемъ это высказать такъ.

Лемма 1. Если большее изъ двухъ слагаемыхъ нѣкоторой суммы есть точный квадратъ, то сумма можетъ быть невыражаема только въ томъ случаѣ, когда второе слагаемое невыражаемо (числа, равныя суммѣ невыражаемаго числа и большаго, чѣмъ оно, квадрата, не должны быть непремѣнно невыражаемыми,—они, такъ сказать, только сомнительны въ этомъ отношеніи).

Пользуясь этимъ предложеніемъ, мы замѣтимъ, что изъ чиселъ между 8-ью и 16-ью невыражаемыми могутъ быть только числа:

$$11 = 9 + 2, \quad 12 = 9 + 3 \quad \text{и} \quad 15 = 9 + 6.$$

Эти числа, какъ легко убѣдиться путемъ пробъ, на самомъ дѣлѣ невыражаемы.

Пользуясь опять леммой 1, мы найдемъ, что между 15-ью и 25-ью сомнительны только числа:

$$18 = 16 + 2, \quad 19 = 16 + 3, \quad 22 = 16 + 6 \quad \text{и} \quad 23 = 16 + 7.$$

Изъ этихъ чиселъ 18 выражаемо, потому что оно можетъ быть представлено въ видѣ $1^2 + 2^3 + 3^2$, а остальныя на самомъ дѣлѣ невыражаемы. Итакъ, изъ первыхъ 25-ти чиселъ невыражаемыми являются слѣдующія 10:

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 15,\ 19,\ 22,\ 23.$$

Это тѣ числа, которыя приведены г. Лемэромъ. Мы теперь докажемъ, что бóльше невыражаемыхъ чиселъ не существуетъ. Прибавляя къ каждому изъ этихъ чиселъ по $25 = 5^2$, мы увидимъ, что между 25-ью и 50-ью сомнительными числами являются слѣдующія 10:

$$27\,(=3^3),\ 28\,(=3^3+1),\ 31\,(=3^3+4),\ 32\,(=2^5),$$

$$36\,(=6^2),\ 37\,(=6^2+1),\ 40\,(=6^2+2^2),\ 44\,(=6^2+2^3),$$

$$47\,(=3^3+4^2+2^2),\ 48\,(=2^5+4^2),$$

но, какъ показываютъ написанныя около нихъ разложенія, они всѣ выражаемы.

Между 49-ью и 73-мя сомнительными являются числа:

$$51\,(=2^3+3^3+4^2),\ 52\,(=51+1^2),\ 55\,(=5^2+4^2+3^2+2^2+1^2),$$

$$56\,(=6^2+4^2+2^2),\ 60\,(=6^2+4^2+2^3),\ 61\,(=60+1^2),\ 64\,(=8^2),$$

$$68\,(=8^2+2^2),\ 71\,(=6^2+3^3+2^3),\ 72\,(=71+1^2).$$

Итакъ, между 23 и 73 всѣ числа выражаемы; для того, чтобы доказать, что остальныя числа также выражаемы, мы предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

Лемма 2. Если $A > 72$, то существуетъ цѣлое число x, удовлетворяющее неравенству:

$$23 < A - x^2 < x^2. \tag{1}$$

Доказательство. Замѣтимъ, раньше всего, что число 6 удовлетворяетъ равенству:

$$2y^2 - (y+1)^2 = 23;$$

далѣе, такъ какъ

$$2y^2 - (y+1)^2 - [2\,.\,6^2 - (6+1)^2] = (y-6)(y+4),$$

то всякое число, не меньшее, чѣмъ 6, удовлетворяетъ неравенству:

$$2y^2 - (y+1)^2 \geqslant 23.$$

Пусть теперь $A > 72$; тогда корень квадратный a изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ $\frac{A}{2}$, будетъ не меньше, чѣмъ 6; слѣдовательно, мы будемъ имѣть три неравенства:

$$2a^2 - (a+1)^2 \geqslant 23, \qquad 2a^2 < A, \qquad A < 2(a+1)^2.$$

Вычитая изъ второго соотношенія первое, получимъ:

$$(a+1)^2 < A - 23,$$

что можно записать такъ:

$$23 < A - (a+1)^2,$$

а третье неравенство можно представить въ видѣ:

$$A - (a+1)^2 < (a+1)^2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при $A > 72$ значеніе $x = a+1$ удовлетворяетъ неравенству (1), и лемма доказана.

Допустимъ, что всѣ числа между 23 и A (гдѣ $A > 72$) выражаемы. Возьмемъ число x, удовлетворяющее неравенству (1). Оно удовлетворяетъ также неравенству:

$$23 < A - x^2 < A,$$

и, слѣдовательно, число $A - x^2$ выражаемо. Число A можетъ быть представлено въ видѣ:

$$A = x^2 + (A - x^2),$$

и, на основаніи неравенства (1), первое слагаемое больше второго, а такъ какъ первое есть точный квадратъ, а второе выражаемо, то, согласно леммѣ 1, число A выражаемо. Такъ какъ всѣ числа между 23 и 73 выражаемы, то 73 выражаемо; отсюда слѣдуетъ, что 74 выражаемо и т. д.

Такимъ образомъ доказано, что только 10 чиселъ

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 15,\ 19,\ 22,\ 23$$

невыражаемы.

Совершенно аналогичнымъ способомъ можно доказать, что число чиселъ, которыя не могутъ быть представлены въ видѣ суммы различныхъ квадратовъ, также конечно. Самое большое изъ этихъ чиселъ есть 128.

Что такое векторъ?

К. Лезана.

Исчисленіе векторовъ является въ наукѣ весьма важнымъ вспомогательнымъ средствомъ. Въ частности, примѣненіе этого исчисленія къ геометріи и механикѣ даетъ возможность достичь важныхъ упрощеній и значительно большей ясности. Оно не только весьма замѣтнымъ образомъ сокращаетъ письмо, но представляетъ изъ себя аналитическій методъ, который даетъ наглядное представленіе о предметахъ, подлежащихъ изслѣдованію, между тѣмъ какъ при употребленіи координатъ объекты изслѣдованія слишкомъ часто теряются изъ виду.

Долголѣтнее примѣненіе исчисленія векторовъ — въ особенности, въ Великобританіи — позволило раскрыть всѣ выгодныя стороны его, и большія усилія прилагались къ тому, чтобы обратить на нихъ всеобщее вниманіе. Во Франціи *терминъ* «векторъ» не безъ труда получилъ признаніе въ преподаваніи. Онъ фигурируетъ въ очень большомъ числѣ программъ, а также въ большей части современныхъ классическихъ сочиненій.

Я дѣлаю удареніе на словѣ *терминъ*, ибо совсѣмъ иначе обстоитъ дѣло съ самимъ понятіемъ. Терминомъ пользуются, я могъ бы даже сказать — имъ злоупотребляютъ. Понятіе же пребываетъ, такъ сказать, въ таинственномъ полумракѣ. Невѣроятнымъ кажется тотъ фактъ, что почти нигдѣ — даже въ превосходнѣйшихъ сочиненіяхъ или въ лекціяхъ самыхъ выдающихся профессоровъ — нельзя найти точнаго опредѣленія вектора. Я ни разу не встрѣчалъ ни одного учащагося, который сумѣлъ бы отвѣтить на вопросъ «что такое векторъ?»; а между тѣмъ уже въ теченіе четверти часа, по крайней мѣрѣ, онъ излагалъ мнѣ очень много соображеній относительно векторовъ и удачно справлялся съ весьма обширными выкладками, относящимися къ ихъ теоріи. Я всегда снисходительно относился къ этому недостатку въ отвѣтѣ учащихся, ибо вина за это падаетъ не на нихъ, а всецѣло на дурное изложеніе, противъ котораго необходимо было бы бороться. Недостаточная точность всегда влечетъ за собою весьма вредныя послѣдствія въ дѣлѣ преподаванія.

Яснѣе всего обнаружилось это смѣшеніе понятій, на которое я здѣсь указываю и противъ котораго возстаю, въ элементарной статикѣ, ибо въ этой именно области, пожалуй, сильнѣе всего сказались вредныя послѣдствія такого рода смѣшенія. Раньше *силу*, приложенную въ точкѣ A, изображали *отрѣзкомъ* AB, при чемъ длина AB этого отрѣзка измѣряла напряженіе силы, а неопредѣленная полупрямая AB, указывавшая положеніе въ пространствѣ и направленіе силы, называлась *линіей дѣйствія* ея; кромѣ того, принимали въ качествѣ постулата, что силу можно перемѣщать, куда угодно, вдоль ея линіи дѣйствія.

Но противъ этой терминологіи было выдвинуто то возраженіе, что a priori нельзя установить тождественности между такимъ образомъ трактуемыми силами и силами динамики. Правда, вполнѣ основательно указывали на то, что элементарная статика представляетъ изъ себя, въ сущности, лишь особую вѣтвь геометріи, служащую подготовительной ступенью къ механикѣ; но вмѣстѣ съ тѣмъ совершенно напрасно полагали, что для того, чтобы выйти изъ затрудненія, стоитъ только замѣнить терминъ *сила* терминомъ *векторъ*; и зло тѣмъ болѣе велико, что эту замѣну произвели, не оговаривая ея. Замѣчательно, что *векторомъ* называли то, что не было векторомъ ни на языкѣ ихъ изобрѣтателей ни на языкѣ геометровъ, которые пользовались этимъ новымъ способомъ геометрическихъ вычисленій.

Символъ AB допускаетъ три толкованія. Во-первыхъ, это геометрическій *отрѣзокъ*; начало A и конецъ B его фиксированы; при этомъ нѣкоторый отрѣзокъ CD только тогда равенъ отрѣзку AB, когда C совпадаетъ съ A, а D — съ B. Во-вторыхъ, можно разсматривать отрѣзокъ AB, подчиняющійся такому условію: для существованія равенства $AB = CD$ необходимо, чтобы оба отрѣзка AB и CD имѣли одинаковую длину и одинаковое направленіе, и чтобы оба они лежали на одной и той же прямой AB; объекту, получившему такое опредѣленіе, можно было бы, какъ мнѣ кажется, безъ особыхъ затрудненій и даже съ нѣкоторымъ удобствомъ, дать названіе «геометрическая сила», которое устраняетъ какія бы то ни было недоразумѣнія; во всякомъ случаѣ, повторяю, и этотъ объектъ не есть векторъ. Наконецъ, векторъ AB опредѣляется своей длиной, своимъ положеніемъ въ пространствѣ и своимъ направленіемъ, — иначе говоря, $AB = CD$, если два отрѣзка AB и CD параллельны, одинаково направлены и имѣютъ одинаковую длину; при этомъ совершенно безразлично, гдѣ расположена точка C.

Гамильтонъ (Hamilton), сказалъ, что векторъ есть символъ переноснаго движенія; Грассманнъ (Grassmann) смотрѣлъ на векторъ, какъ на разность между двумя точками*). Оба эти способа выраженія одинаково правильны и удачно передаютъ сущность понятія. При переносномъ движеніи всѣ точки тѣла описываютъ тождественные векторы. Но если $AB = CD$, то геометрическая разность точекъ B и A, дѣйствительно, равна геометрической разности точекъ D и C, — подобно тому, какъ

$$3 = 7 - 4 = 20 - 17 = (12 + 2i) - (9 + 2i).$$

Неправильное употребленіе термина «векторъ» и примѣненіе его къ геометрическимъ силамъ привели къ слѣдующему чудовищному выраженію, получившему, такъ сказать, классическую извѣстность: «равнодѣйствующій моментъ системы векторовъ». Говорятъ также объ «эквивалентныхъ системахъ векторовъ», что̀ имѣетъ не больше смысла. Какъ бы нарочно допустили такое смѣшеніе терминовъ и, преслѣдуя единственную цѣль — освободиться отъ слова «сила», достигли какъ разъ противоположныхъ результатовъ. Это тѣмъ болѣе печально, что именно въ статикѣ векторъ даетъ вполнѣ точное представленіе о парѣ.

Истинное различие между отрѣзкомъ, геометрической силой и векторомъ состоитъ въ томъ, что отрѣзокъ опредѣляется шестью условіями или, лучше сказать, двумя группами условій (координаты начальной и конечной точки), по три въ каждой, геометрическая сила — пятью условіями (четырьмя элементами опредѣляется положеніе прямой въ пространствѣ; къ этому присоединяется длина отрѣзка), а векторъ — лишь тремя условіями (тремя проекціями или слагающими).

Исчисленіе векторовъ служитъ источникомъ ежедневно появляющихся интересныхъ работъ и имѣетъ полезныя примѣненія.

Будемъ ли мы пользоваться методомъ кватерніоновъ Гамильтона или слѣдовать Грассману, мы можемъ встрѣтить затрудненія, лежащія въ самой природѣ вещей; такъ, напримѣръ, многихъ привела въ уныніе некоммутативность произведенія, хотя это свойство лишь служитъ выраженіемъ почти очевидной геометрической истины. Быть можетъ, можно будетъ внести въ теорію векторовъ какія-либо упрощенія или усовершенствованія, и это даже

---

*) Очень изящное современное изложеніе векторіальнаго анализа съ съ этой точки зрѣнія можно найти въ прекрасной книгѣ, которую цитируемъ во французскомъ переводѣ — C. Bourali-Forti et R. Marcolongo, „Éléments de calcul vectoriel“.

Ред.

весьма вѣроятно. Уже въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ прилагаются усилія къ тому, чтобы по мѣрѣ возможности согласовать обозначенія. Но я твердо убѣжденъ въ томъ, что никто не предлагалъ сознательно привести въ полный безпорядокъ терминологію, и при томъ столь произвольнымъ образомъ; а между тѣмъ именно это произошло во Франціи вслѣдствіе какого-то рокового произвола*). Я полагаю, что еще не поздно попытаться вступить въ борьбу съ этимъ, и это именно побудило меня забить тревогу.

Я надѣюсь, мнѣ позволено будетъ воспользоваться настоящимъ случаемъ, чтобы, оставляя въ сторонѣ примѣненія векторовъ къ геометріи, механикѣ или физикѣ, указать на возможность расширенія понятія о числѣ, которое вполнѣ естественно вытекаетъ изъ только-что указанныхъ методовъ и котораго, однако, я до сихъ поръ нигдѣ не встрѣчалъ; впрочемъ, послѣднее не можетъ служить ручательствомъ его новизны. Но мнѣ кажется, что оно заключаетъ въ себѣ нѣкоторый интересъ съ точки зрѣнія философіи.

Это понятіе лучше всего можно было бы охарактеризовать, назвавъ его положеніемъ числа. Оно мнѣ было подсказано упомянутымъ выше опредѣленіемъ Грассмана. Первоначально изучали числа, сперва цѣлыя, затѣмъ раціональныя и, наконецъ, ирраціональныя; затѣмъ оказалось необходимымъ ввести отрицательныя числа; теорія мнимыхъ чиселъ привела къ разсмотрѣнію направленныхъ чиселъ въ плоскости. Открытія Грассмана и Гамильтона позволили выйти изъ плоскости и придти къ направленнымъ числамъ въ пространствѣ.

Во всѣхъ этихъ послѣдовательныхъ обобщеніяхъ число все время сохраняетъ — по крайней мѣрѣ, неявно — постоянное начало, а именно нуль. Быть можетъ, имѣло бы смыслъ различать числа также и въ зависимости отъ того начала, отъ котораго ихъ отсчитываютъ. Даже въ чистой ариѳметикѣ можно не отождествлять числа 3, отсчитываемаго отъ 0 до 3, съ тѣмъ же числомъ, отсчитываемымъ отъ 1000 до 1003. При такомъ порядкѣ идей число, фиксированное по величинѣ, направленію и положенію, оказалось бы охарактеризованнымъ системою двухъ векторовъ a и α и могло бы быть обозначено, напримѣръ, символомъ a_α, при чемъ за общее начало этихъ векторовъ можно было бы условиться принять нуль.

Повидимому, вполнѣ возможно установить систему опредѣленій элементарныхъ операцій надъ этими числами, которыя, очевидно, представляются отрѣзками. Напримѣръ, для чиселъ компланарныхъ, т. е. для всѣхъ чиселъ, расположенныхъ въ одной плоскости, можно полагать, что, прибѣгая къ посредству операцій надъ мнимыми числами въ алгебрѣ, это было бы сравнительно легко выполнить. Что же касается чиселъ самаго общаго вида, то, вѣроятно, пришлось бы прибѣгнуть къ исчисленію кватерніоновъ, при чемъ здѣсь слѣдовало бы ожидать выводовъ, аналогичныхъ тѣмъ, съ которыми мы уже знакомы.

Вмѣстѣ съ тѣмъ подобнаго рода исчисленіе, въ виду вышеуказаннаго способа изображенія его элементовъ, было бы исчисленіемъ геометрическихъ отрѣзковъ. У меня нѣтъ (и, вѣроятно, не будетъ) возможности продолжать ни изученіе этого вопроса ни болѣе глубокое изслѣдованіе его. Я желалъ бы

*) И далеко не только во Франціи. *Ред.*

только, чтобы оно привлекло вниманіе кого-нибудь изъ нашихъ молодыхъ собратьевъ; лишь на это я надѣялся, когда рѣшился выступить съ предлагаемой бѣглой замѣткой*).

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Дж. В. А. Юнгъ, профессоръ методики математики Чикагскаго Университета. *Какъ преподавать математику?* Преподаваніе математики въ средней и начальной школѣ. Перевелъ съ англійскаго съ разрѣшенія автора и дополнилъ А. Р. Кулишеръ. Съ 20 чертежами. — Доп. I. Профессоръ Маріо Векки — «Характеристика главнѣйшихъ руководствъ по элементарной геометріи, вышедшихъ въ свѣтъ въ Италіи за послѣднее пятидесятилѣтіе». Доп. II. Изъ уроковъ ариѳметики и геометріи. Доп. III. Новѣйшая литература на иностранныхъ языкахъ и литература предмета на русскомъ языкѣ. Вып. I — стр. XVI + 192. Вып. II — стр. IX + (192 — 425). Цѣна по 1 руб. 50 коп. за выпускъ. Изд. т-ва «Общественная польза». С.-Петербургъ, 1912.

«Вотъ книга, которую слѣдуетъ прочесть каждому преподавателю», — такъ сказалъ мнѣ одинъ знакомый преподаватель, и я вполнѣ присоединяюсь къ этому мнѣнію. Конечно, книга составлена для американскаго преподавателя, примѣнительно къ американскимъ условіямъ. Но, во-первыхъ, какъ справедливо замѣчаетъ авторъ въ предисловіи къ русскому переводу, «нѣтъ американской геометріи или геометріи русской. Математическіе факты остаются одними и тѣми же для всѣхъ народовъ и во всѣ эпохи». Во-вторыхъ, есть извѣстная аналогія между условіями преподаванія въ Америкѣ и въ Россіи. Какъ указывалъ въ своемъ докладѣ на Кембриджскомъ Конгрессѣ проф. D. E. Smith, преподаваніе въ начальной школѣ въ Соединенныхъ Штатахъ на $^4/_5$ находится въ рукахъ учительницъ, которыя при томъ остаются преподавательницами, большею частью, лишь сравнительно короткое время. Такимъ образомъ возникаетъ труднѣйшая задача — подготовить весьма большое число лицъ, входящихъ въ составъ этого преподавательскаго персонала, постоянно мѣняющагося, — задача, подобная той, съ которой придется имѣть дѣло и въ Россіи послѣ введенія всеобщаго обученія. И книги, подобныя книгѣ Юнга, оказываются въ высшей степени полезными въ рукахъ преподавателя. Въ ней онъ найдетъ много поучительнаго; и, если не всегда и не во всемъ можно согласиться со взглядами проф. Юнга, то даже и то, подъ чѣмъ нельзя подписаться, заставляетъ работать мысль.

Авторъ посвящаетъ первую главу разбору вопроса, нужно ли изучать методику математики, и приходитъ къ заключенію, что прежде, чѣмъ начать

*) Вопросъ, поставленный въ этой статьѣ, представляетъ значительный интересъ; онъ во всякомъ случаѣ здѣсь не исчерпанъ. Мы надѣемся къ нему еще вернуться.

Ред.

учиться преподаванію путемъ фактическаго преподаванія, необходимо хотя бы въ малой мѣрѣ подготовить себя чтеніемъ того, къ чему опытъ привелъ другихъ, личными бесѣдами съ опытными учителями и посѣщеніемъ преподавателей во время ихъ работы на урокахъ. Онъ переходитъ затѣмъ къ разбору цѣлей и значенія изученія математики въ начальной и въ средней школѣ (гл. II), къ методамъ и пріемамъ вообще (гл. III). Останавливается въ особенности на эвристическомъ методѣ (гл. IV), на индивидуальномъ способѣ (гл. V) и на связанномъ съ именемъ Д. Перри такъ называемомъ лабораторномъ методѣ. Очень интересна глава VII. Здѣсь собраны различныя указанія относительно методовъ и пріемовъ. Мнѣ хотѣлось бы отмѣтить нѣкоторые, особенно мнѣ симпатичные: опасность излишняго увлеченія приложеніями, многочисленность которыхъ затемняетъ обычно самый предметъ (стр. 129), опасность слишкомъ продолжительнаго изученія одного и того же вопроса; надо избѣгать сложности, домашнія работы не должны быть трудны и должны пополнять классную работу предыдущаго урока, а не подготовлять слѣдующій; надо избѣгать потери времени на урокѣ. Не особенно нравится мнѣ увлеченіе «работою у доски всего класса», едва ли осуществимою при большихъ классахъ. Глава VIII трактуетъ о подготовкѣ учителей, и о томъ, что для насъ является лишь pium desiderium — о математическихъ клубахъ и т. д. Много полезнаго можно вынести изъ главы IX (оборудованіе школы пособіями), которою заканчивается первый выпускъ, но и здѣсь, конечно, многое при нашихъ условіяхъ почти неосуществимо.

Во второмъ выпускѣ глава X посвящена программамъ математики (реформаторское движеніе въ Англіи и Германіи, сліяніе отдѣльныхъ «предметовъ», согласованіе математики и физики — по времени прохожденія), глава XI посвящена опредѣленіямъ и аксіомамъ, гл XII — XIV посвящены преподаванію ариѳметики, геометріи и алгебры и послѣдняя, XV-я глава — предѣламъ. Что касается, прежде всего, ариѳметики, то здѣсь, конечно, есть проявленія разницы установившихся курсовъ: о выясненіи квадратныхъ и кубичныхъ корней въ ариѳметикѣ у насъ не говорятъ. Очень симпатично указаніе на желательность ранняго введенія буквеннаго обозначенія, сокращенія до минимума ученія о пропорціяхъ, о желательности введенія метрической системы. Зато едва ли практично внесеніе геометріи въ ариѳметику; скорѣе эти занятія (приложеніе ариѳметики къ геометрическимъ формамъ), являются составнымъ элементомъ начальнаго, по возможности интуитивнаго, курса математики вообще. Очень удачно составленъ отдѣлъ геометріи. Заслуживаетъ одобренія протестъ противъ излишняго формализма (напримѣръ, опредѣленіе круга на стр. 296 — 297), хотя и здѣсь съ нѣкоторыми вещами можно не согласиться (напримѣръ, съ пользованіемъ доказательствомъ, принадлежащимъ, кажется, Thibaut, на стр. 303). Очень интересна и глава, относящаяся къ алгебрѣ, съ ея призывомъ отказаться отъ пріобрѣтенія «навыковъ для навыковъ».

Русскому переводу предпослано предисловіе автора къ оригиналу и къ русскому переводу, сдѣланному А. Р. Кулишеромъ. Переводчикъ, отнесшійся къ своему дѣлу весьма внимательно, присоединилъ еще переводъ статьи итальянскаго профессора М. Векки, дающую характеристику главнѣйшихъ итальянскихъ руководствъ, вышедшихъ за послѣднія 50 лѣтъ, — періодъ, отличающійся подъемомъ научнаго творчества Италіи; онъ приложилъ также нѣкоторыя собственныя соображенія по поводу примѣненія измѣреній въ курсѣ ариѳметики, а также «Литературу предмета на русскомъ и новѣйшую литературу на иностранныхъ языкахъ». Всѣ дополненія очень полезны, но по поводу послѣдняго приходится сдѣлать кое-какія замѣчанія.

Прежде всего переводчикъ обратилъ мало вниманія на литературу, приводимую самимъ авторомъ въ началѣ каждой главы. Здѣсь въ оригиналѣ умѣстны были указанія на англійскіе переводы французскихъ и нѣмецкихъ сочиненій. Въ русскомъ переводѣ слѣдовало замѣнить такія ссылки и указанія ссылками на подлинники и, гдѣ возможно, на русскіе переводы. Таковы ссылки на книги: Лагранжъ, «Лекціи по элементарной математикѣ» (стр. 1); Bain, «Воспитаніе, какъ предметъ науки»; A. Compte, «Позитивная философія»; Милль, «Философія Гамильтона» (стр. 9); Schubert (стр. 10 и 190), Reye (стр. 171) — слѣдовало дать заглавіе оригинала; Карпентеръ, «Физіологія ума» (стр. 49); Паульсенъ, «Нѣмецкій Университетъ» (стр. 134) — имѣется въ русскомъ переводѣ; Enriques, «Questioni di Geometria elementare (стр. 173) — слѣдовало указать нѣмецкій переводъ (теперь появился и русскій); Dirichlet (стр. 173) — имѣется въ русскомъ переводѣ Я. М. Назаревскаго (1-ая часть). Ссылка на Kambly (стр. 174) неудачна. Книгу Пикара «О развитіи нѣкоторыхъ теорій математическаго анализа» (стр. 175) слѣдовало указать въ оригиналѣ; теперь появился русскій переводъ ея въ изданіи Харьковской Математической Библіотеки. Книги «Colloquium» Клейна и «Die Allgemeine Functionentheorie» Du Bois-Reymond'a (стр. 188) слѣдовало указать и во французскомъ переводѣ. Row, «Geometric Exercises in Paper Folding» — издано по-русски т-вомъ «Матезисъ», Bachet de Meziriac, «Problèmes plaisants et delectables» (стр. 189) — издано по-русски М. Вольфомъ; Ф. Клейнъ, «Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи» — издано по-русски Казанскимъ Физико-математическимъ Обществомъ.

Переходя къ составленному самимъ переводчикомъ указателю литературы, я долженъ прежде всего признать его трудъ цѣннымъ для русскихъ педагоговъ, но не могу не указать излишней подчасъ снисходительности его въ сужденіяхъ о достоинствѣ отмѣчаемыхъ книгъ. Такъ, я никоимъ образомъ не могу согласиться съ лестною оцѣнкой составлявшихся мною съ 1896 по 1900 гг. и въ послѣднее время ежегодныхъ указателей литературы, а равнымъ образомъ и моихъ отчетовъ о Съѣздахъ Международной Коммиссіи по преподаванію математики. Объяснить это можно лишь бѣдностью нашей учебной математической литературы, побуждающей отмѣчать и журнальныя статьи. Я хотѣлъ бы отмѣтить, съ другой стороны, и нѣкоторыя неточности. «Начала Евклида» издаетъ теперь въ моемъ и С. И. Бернштейна переводѣ изд. «Матезисъ», а не Харьковское Математическое Общество (переводъ печатается) (гл. IX, стр. 414); въ гл. XIII, стр. 420, пропущено указаніе на переизданія сочиненій Н. И. Лобачевскаго «Начала геометріи съ полною теоріей параллельныхъ» (Харьковская Математическая Библіотека, № 2-3).

Надо прибавить, что въ этомъ указателѣ исправлены нѣкоторые пропуски, мною выше указанные. Переводъ въ общемъ удаченъ, хотя и попадается мѣстами lapsus calami (въ родѣ «наличность математики въ явленіяхъ природы»), иногда, можетъ быть, принадлежащія самому автору, напримѣръ, рекомендующему на стр. 184 сообщать ученикамъ біографіи математиковъ, въ томъ числѣ Евклида, о жизни котораго мы ровно ничего не знаемъ.

Въ общемъ же это хорошая и полезная книга, за переводъ которой можно только поблагодарить А. Р. Кулишера.

Проф. Д. Синцовъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 114 (6 сер). Даны двѣ прямыя и на нихъ по точкѣ A и B. Изъ даннаго центра C описать окружность, пересѣкающую прямую въ X и Y такъ, чтобы отношеніе $AX : BY$ имѣло данное значеніе.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 115 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$a^2(1+x)^2 + b^2(1-x)^2 = 4ab\sqrt{1-x^2}.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 116 (6 сер.). Дано, что цѣлыя положительныя отличныя отъ единицы числа p, q, r и m удовлетворяютъ равенству

$$p^2 + p + m = qr.$$

Доказать неравенство

$$4r^2(q-1) > (2p+1)^2.$$

Ю. Рабиновичъ (Казань).

№ 117 (6 сер.). Пусть r и R суть разности двухъ ариѳметическихъ пропорцій, а r_1 и R_1 суть соотвѣтственно разности тѣхъ пропорцій, которыя получены изъ данныхъ путемъ перестановки въ каждой изъ нихъ среднихъ (или въ каждой изъ нихъ крайнихъ) членовъ. Доказать, что равенство

$$rR_1 + Rr_1 = 0$$

есть необходимое и достаточное условіе возможности почленнаго перемноженія данныхъ ариѳметическихъ пропорцій.

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 2. *Даны двѣ параллельныя прямыя* (D) *и* (D′) *и ихъ общій перпендикуляръ, встрѣчающій эти прямыя соотвѣтственно въ точкахъ* A *и* B. *На отрѣзкѣ* AB *дана точка* 0 *такъ, что* 0A = a, 0B = b *Изъ точки* 0 *проводятъ прямую, образующую съ* 0A *острый уголъ* x *и встрѣчающую прямую* D *въ точкѣ* M, *а затѣмъ возставляютъ изъ* 0 *перпендикуляръ къ* 0M, *встрѣчающій прямую* D′ *въ точкѣ* M′. 1°. *Найти не зависящее отъ значенія угла* x *соотношеніе между длинами* AM *и* BM′. 2°. *Выразить въ функціи отъ* tg x = t *площадь трапеціи* AMM′B *и изучить ея измѣненіе при измѣненіи* x *отъ* 0° *до* 90°. *Вычислить длины* AM *и* BM′ *для того случая, когда площадь* AMM′B *достигаетъ minimum'а, и вывести отсюда построеніе соотвѣтствующей сѣкущей* MM′.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

По условію $\angle MOM' = \frac{\pi}{2}$, а такъ какъ сумма угловъ AOM, MOM' и $M'OB$ равна π, то $\angle M'OB = \frac{\pi}{2} - x$. Итакъ, полагая $AM = y$, $BM' = z$, имѣемъ: $y = a \operatorname{tg} x$, $z = b \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = b \cot x$, откуда $yz = ab \operatorname{tg} x \cot x$, т. е. $yz = ab$. Это и есть искомое соотношеніе между y и z, не зависящее отъ x.

По извѣстной формулѣ площадь трапеціи $AMM'B$ равна $\frac{(y+z)(a+b)}{2}$. Поэтому, обозначая эту площадь черезъ u и полагая $\operatorname{tg} x = t$, находимъ (такъ какъ $\cot x = \frac{1}{t}$):

$$u = \frac{a+b}{2}\left(at + \frac{b}{t}\right), \tag{1}$$

или же

$$u = \frac{(a+b)}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{at} - \sqrt{\frac{b}{t}}\right)^2 + 2\sqrt{ab}\right]. \tag{2}$$

Изъ равенства (2) вытекаетъ, что площадь разсматриваемой трапеціи не меньше числа $\frac{(a+b)\,2\sqrt{ab}}{2} = (a+b)\sqrt{ab}$ и что она достигаетъ этого наименьшаго значенія при томъ значеніи t, которое удовлетворяетъ равенству $\sqrt{at} - \sqrt{\frac{b}{t}} = 0$. Рѣшая это уравненіе, находимъ: $t = \left|\sqrt{\frac{b}{a}}\right|$, при чемъ ариѳметическій корень мы беремъ потому, что t, при измѣненіи остраго угла x отъ 0° до 90°, сохраняетъ положительное значеніе. Легко видѣть, что при достиженіи minimum'а площади разсматриваемая трапеція обращается въ прямоугольникъ; дѣйствительно, при $t = \sqrt{\frac{b}{a}}$ имѣемъ:

$$y = AM = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab} = z = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = AM'.$$

Поэтому для построенія сѣкущей MM', дающей наименьшую площадь, достаточно описать на AB, какъ на діаметрѣ, окружность, возставить изъ O перпендикуляръ къ AB до встрѣчи съ этой окружностью въ точкѣ T и провести черезъ T параллельную AB прямую, встрѣчающую данныя параллельныя прямыя въ M и M'; тогда

$$OT = AM = y = BM' = z = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg} AOM = \sqrt{ab} : a = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\operatorname{tg} BOM' = \sqrt{ab} : b = 1 : \sqrt{\frac{b}{a}},$$

а потому построенная такимъ образомъ сѣкущая MM' даетъ наименьшую площадь, а именно $(a+b)\sqrt{ab}$. При возрастаніи t отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$, т. е. при возрастаніи x отъ 0^0 до наименьшаго положительнаго значенія $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}}$ площадь трапеціи $AMM'B$ убываетъ отъ $+\infty$ до $(a+b)\sqrt{ab}$, а при дальнѣйшемъ возрастаніи t отъ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до $+\infty$ (т. е. при возрастаніи x отъ $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}}$ до 90^0) эта площадь снова возрастаетъ отъ $(a+b)\sqrt{ab}$ до $+\infty$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, вычислимъ [см. (1)] приращеніе Δu функціи u, получаемое ею при переходѣ отъ нѣкотораго значенія t къ новому, большему значенію $t+h$; тогда находимъ:

$$\Delta u = \frac{(a+b)}{2}\left[a(t+h) + \frac{b}{t+h} - at - \frac{b}{t}\right] = \frac{a(a+b)h\left[t(t+h) - \frac{b}{a}\right]}{2t(t+h)}. \quad (3)$$

Если оба значенія перемѣннаго t, а именно t и $t+h$, лежатъ въ промежуткѣ отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$, то $t < \sqrt{\frac{b}{a}}$ и $t+h \leqq \sqrt{\frac{b}{a}}$, а потому $t(t+h) < \frac{b}{a}$; если же оба числа t и $t+h$ лежатъ въ промежуткѣ отъ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до $+\infty$, т. е. если t не меньше, чѣмъ $\sqrt{\frac{b}{a}}$, то изъ неравенствъ $t \geqq \sqrt{\frac{b}{a}}$ и $t+h > \sqrt{\frac{b}{a}}$ выводимъ, что $t(t+h) > \frac{b}{a}$. Значитъ, при $h > 0$ въ первомъ случаѣ имѣемъ [см. (3)] $\Delta u < 0$, а во второмъ случаѣ $\Delta u > 0$. Итакъ, функція u въ первомъ промежуткѣ убываетъ, а во второмъ возрастаетъ съ возрастаніемъ t, причемъ въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ u можетъ принять любое значеніе, большее минимальнаго значенія $(a+b)\sqrt{ab}$. Въ этомъ можно убѣдиться, полагая $u = c$, гдѣ c — данное число. Тогда имѣемъ:

$$\frac{(a+b)}{2}\left(at + \frac{b}{t}\right) = c,$$

или

$$a(a+b)t^2 - 2ct + b(a+b) = 0, \quad (4)$$

откуда

$$t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - (a+b)^2 ab}}{a(a+b)}.$$

Такимъ образомъ, при $c > (a+b)\sqrt{ab}$ получаемъ два положительныхъ неравныхъ значенія для t. Произведеніе этихъ неравныхъ положительныхъ корней равно [см. (4)] $\frac{b(a+b)}{a(a+b)}=\frac{b}{a}$, а потому одинъ изъ этихъ неравныхъ корней, при $c>(a+b)\sqrt{ab}$, больше $\sqrt{\frac{b}{a}}$, а другой меньше $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Значитъ, при нѣкоторомъ опредѣленномъ значенiи t внутри промежутка отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$, а также при второмъ значенiи, лежащемъ внутри промежутка отъ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до $+\infty$, площадь u можетъ принять любое значенiе, большее, чѣмъ $(a+b)\sqrt{ab}$, этотъ результатъ можно предвидѣть, замѣчая, что u, будучи непрерывной функцiей для положительныхъ значенiй t, убываетъ, какъ мы видѣли въ промежуткѣ отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$ и возрастаетъ въ промежуткѣ отъ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ до $+\infty$, достигая при $t=\sqrt{\frac{b}{a}}$ наименьшаго значенiя $(a+b)\sqrt{ab}$, при чемъ и въ первомъ промежуткѣ и во второмъ u можетъ превзойти любое положительное число для надлежащаго t, такъ какъ [см. (1)] въ суммѣ положительныхъ членовъ $at+\frac{b}{t}$ при очень маломъ положительномъ t второй, а при очень большомъ положительномъ t первый членъ можетъ превзойти любое число. Итакъ, площадь u дѣйствительно убываетъ отъ $+\infty$ до $(a+b)\sqrt{ab}$ при возрастанiи положительнаго перемѣннаго t отъ 0 до $\sqrt{\frac{b}{a}}$ и возрастаетъ снова отъ $(a+b)\sqrt{ab}$ до $+\infty$ при дальнѣйшемъ возрастанiи t до $+\infty$.

И. Зюзинъ (с. Архангельское); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографiя Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется