Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 586.

Содержаніе: Этюды по элементарной алгебрѣ. *Н. Ниноса.* (Окончаніе).— Число и величина молекулъ и атомовъ. *М. Смолуховскаго.* — 50-лѣтній юбилей Е. М. Пржевальскаго. *Д. В.* — Библіографія. I. Рецензіи. Я. Перельманъ. „Занимательная физика“. *Н. Каменьщикова.* — Задачи №№ 106 — 109 (6 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

Этюды по элементарной алгебрѣ.

Н. Ниноса.

(Окончаніе).*

VIII. О натуральномъ логариѳмѣ.

Мы видѣли (стр. 177 и 178), что значенія выраженія $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ возрастаютъ при увеличеніи n, ибо

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n > \left(1+\frac{z}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \text{гдѣ } 1+\frac{z}{n-1} > 0,$$

и при безграничномъ возрастаніи n стремятся къ опредѣленному предѣлу, который мы обозначили $E(z)$ и выразили безконечнымъ степеннымъ рядомъ

$$E(z) = 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{z^k}{k!}+\cdots;$$

мы показали далѣе (стр. 159), что число $E(z)$ обладаетъ свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ $E(x) \, . \, E(y) = E(x+y)$.

*) См. „Вѣстникъ“, № 583 — 584.

Степень числа $E(z)$ нужно разсматривать какъ предѣлъ такой же степени выраженія $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, т. е. $[E(z)]^k$ есть предѣлъ выраженія $\left(1+\frac{z}{n}\right)^{nk}$ при безграничномъ возрастаніи n; но если положимъ $nk=m$, то разсматриваемое выраженіе сдѣлается $\left(1+\frac{kz}{m}\right)^m$ и при безграничномъ возрастаніи m, соотвѣтственно безграничному возрастанію n, будетъ стремиться къ предѣлу $E(kz)$, откуда слѣдуетъ, что $[E(z)]^k=E(kz)$.

Точно такъ же подъ $\sqrt[i]{E(z)}$ мы должны понимать предѣлъ выраженія $\sqrt[i]{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}$ при безграничномъ возрастаніи n; но мы примемъ $n=mi$ и будемъ безгранично увеличивать m, вставляя вмѣсто него $m+1$, $m+2, \ldots$; при этомъ мы опускаемъ значенія n, представляемыя числами $mi+1$, $mi+2, \ldots, mi+i-1$ и т. д., но это значитъ, что мы приближаемся къ искомому предѣлу, не разсматривая всѣхъ промежуточныхъ возрастающихъ значеній $\sqrt[i]{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}$, а останавливаясь только на нѣкоторыхъ изъ нихъ, что въ такой же мѣрѣ достаточно и позволительно, какъ, примѣняя тривіальное сравненіе, позволительно при поднятіи на лѣстницу не ступать послѣдовательно на каждую ступеньку, а шагать черезъ нѣсколько ступенекъ сразу. Но при $n=mi$ разсматриваемое выраженіе будетъ $\sqrt[i]{\left(1+\frac{z}{mi}\right)^{mi}}=\left(1+\frac{z}{mi}\right)^m$, и предѣлъ его при безграничномъ возрастаніи m будетъ $E\left(\frac{z}{i}\right)$, такъ что получимъ $\sqrt[i]{E(z)}=E\left(\frac{z}{i}\right)$. Это равенство можно разсматривать, какъ слѣдствіе равенства $[E(z)]^k=E(kz)$, изъ котораго, по извлеченіи k-го корня и подстановкѣ $\frac{z}{k}$ вмѣсто z, получается равенство $E\left(\frac{z}{k}\right)=\sqrt[k]{E(z)}$.

На этомъ основаніи будемъ имѣть:

$$\sqrt[i]{[E(z)]^k}=\sqrt[i]{E(kz)}=E\left(\frac{k}{i}z\right)=\left[\sqrt[i]{E(z)}\right]^k.$$

Если для какого-нибудь значенія z вычислимъ значеніе $E(z)$ и обозначимъ его Z, то послѣднее равенство покажетъ, что

$$\sqrt[i]{Z^k}=\left[\sqrt[i]{Z}\right]^k=E\left(\frac{k}{i}z\right),$$

т. е. что $\sqrt[i]{Z^k}$ зависитъ не отъ абсолютныхъ значеній i и k, а только отъ ихъ отношенія, умноженнаго на нѣкоторое число z, которое нужно умѣть находить по данному значенію Z изъ равенства $E(z) = Z$. Это послѣднее требованіе приводитъ къ слѣдующимъ соображеніямъ.

Возвращаясь къ неравенству

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n > \left(1+\frac{z}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \text{гдѣ } 1+\frac{z}{n-1} > 0,$$

положимъ $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = A$, такъ что $A > \left(1+\dfrac{z}{n-1}\right)^{n-1}$. Отсюда слѣдуетъ, что при $z > 0$ будетъ $A > 1$, при $z = 0$ будетъ $A = 1$ и при $z < 0$ будетъ $A < 1$, но въ этомъ послѣднемъ случаѣ n подчиняется условію $1 + \dfrac{z}{n-1} > 0$, или $n + z > 1$.

Наоборотъ, если дано A, то при $A > 1$ при всякомъ значеніи натуральнаго числа n изъ равенства $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = A$ получимъ:

$$z = n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right),$$

а изъ сопутствующаго ему неравенства $\left(1+\dfrac{z}{n-1}\right)^{n-1} < A$ найдемъ:

$$z < (n-1)\left(\sqrt[n-1]{A} - 1\right);$$

такъ что будемъ имѣть:

$$n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right) < (n-1)\left(\sqrt[n-1]{A} - 1\right), \qquad A > 1.$$

Это значитъ, что значенія выраженія $n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right)$ убываютъ при возрастаніи n, такъ что вообще

$$n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right) < r\left(\sqrt[r]{A} - 1\right) < A - 1, \qquad n > r > 1, \qquad A > 1.$$

При $A < 1$ изложенный способъ вывода неравенства

$$n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right) < (n-1)\left(\sqrt[n-1]{A} - 1\right)$$

требуетъ выполненія условія $n + z > 1$, которое, въ силу равенства $z = n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right)$, превращается въ $n\sqrt[n]{A} > 1$, т. е. $A > \dfrac{1}{n^n}$. Хотя это условіе довольно незначительно ограничиваетъ значенія n при данномъ A, однако, и оно оказывается излишнимъ, явившимся только въ зависимости отъ способа вывода неравенства и исчезающимъ при прямомъ способѣ вывода. Такой прямой способъ мы примѣнили въ § III (стр. 127) къ выводу неравенства

$$\frac{y^n-1}{n} > \frac{y^r-1}{r},$$

гдѣ должно быть $y > 0$, $n > r$. Полагая здѣсь $y = \sqrt[nr]{A}$, получимъ:

$$\frac{\sqrt[r]{A}-1}{n} > \frac{\sqrt[n]{A}-1}{r}, \quad n > r, \quad A > 0,$$

или, по умноженіи на nr,

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) < r\left(\sqrt[r]{A}-1\right) < A-1, \qquad n > r > 1, \qquad A > 0. \qquad (51)$$

Вмѣстѣ съ этимъ неравенствомъ разсмотримъ другое, которое получается изъ него послѣ подстановки $\frac{1}{A}$ вмѣсто A и которое будетъ:

$$n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{A}}-1\right) < r\left(\frac{1}{\sqrt[r]{A}}-1\right),$$

или, мѣняя знаки у обѣихъ частей и знакъ $<$ на $>$, а также умножая на $\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[r]{A}$:

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)\sqrt[r]{A} > r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\sqrt[n]{A}.$$

Въ первой части представимъ множитель $\sqrt[r]{A}$ въ видѣ $\left(\sqrt[r]{A}-1\right)+1$, а во второй части вставимъ $\left(\sqrt[n]{A}-1\right)+1$ вмѣсто $\sqrt[n]{A}$, послѣ чего неравенство приметъ видъ:

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)\left(\sqrt[r]{A}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) > r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\left(\sqrt[n]{A}-1\right)+r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)$$

и послѣ приведенія будетъ:

$$(n-r)\left(\sqrt[n]{A}-1\right)\left(\sqrt[r]{A}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) > r\left(\sqrt[r]{A}-1\right), \quad n > r, \quad A > 0. \qquad (52)$$

Но изъ вышевыведеннаго неравенства

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) < r\left(\sqrt[r]{A}-1\right) < A-1 \qquad (51)$$

слѣдуетъ: $\sqrt[n]{A}-1<\frac{A-1}{n}$, $\sqrt[r]{A}-1<\frac{A-1}{r}$; поэтому, если $A>1$, то $\left(\sqrt[n]{A}-1\right)\left(\sqrt[r]{A}-1\right)<\frac{(A-1)^2}{nr}$; полученное выше неравенство (52) и подавно будетъ существовать, когда въ первой части его вмѣсто произведенія $\left(\sqrt[n]{A}-1\right)\left(\sqrt[r]{A}-1\right)$ вставимъ бо́льшее число $\frac{(A-1)^2}{nr}$, послѣ чего его легко привести къ виду:

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{n}>r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{r},\qquad n>r,\qquad A>1,$$

откуда видно, что значенія выраженія $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{n}$ возрастаютъ при возрастаніи n.

Изъ выраженія $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ получается послѣдовательность убывающихъ чиселъ:

$$A-1,\quad 2\left(\sqrt{A}-1\right),\quad 3\left(\sqrt[3]{A}-1\right),\ldots,\ k\left(\sqrt[k]{A}-1\right),\ldots,$$

а изъ выраженія $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{n}$ — послѣдовательность возрастающихъ чиселъ:

$$A-1-(A-1)^2,\quad 2\left(\sqrt{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{2},\quad 3\left(\sqrt[3]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{3},\ldots$$

$$\ldots,\quad k\left(\sqrt[k]{A}-1\right)-\frac{(A-1)^2}{k},\ldots,$$

и такъ какъ разность чиселъ, стоящихъ на k-омъ мѣстѣ въ этихъ послѣдовательностяхъ, представляется числомъ $\frac{(A-1)^2}{k}$, стремящимся къ нулю при безграничномъ возрастаніи k, то двѣ эти послѣдовательности опредѣляютъ общій предѣлъ, который называется **натуральнымъ логариѳмомъ** числа A и который мы будемъ обозначать $L(A)$.

Здѣсь возрастающую послѣдовательность чиселъ мы составили искусственно, чтобы имѣть **двѣ** послѣдовательности, имѣющія общій предѣлъ; но, очевидно, достаточно ограничиться одной убывающей послѣдовательностью для опредѣленія $L(A)$, какъ ея предѣла. Всѣ члены этой послѣдовательности болѣе $L(A)$ и всѣхъ членов возрастающей послѣдовательности, такъ что, если положимъ $m > n$, то можемъ написать:

$$m\left(\sqrt[m]{A}-1\right) > n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) - \frac{(A-1)^2}{n},$$

откуда слѣдуетъ:

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) - m\left(\sqrt[m]{A}-1\right) < \frac{(A-1)^2}{n}.$$

Это значитъ, что, если возьмемъ такое число n, чтобы было $\frac{(A-1)^2}{n} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{(A-1)^2}{\varepsilon}$, то всѣ члены убывающей послѣдовательности, слѣдующія за членомъ $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$, а также и предѣлъ этой послѣдовательности, т. е. $L(A)$, будутъ отличаться отъ числа $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ на числа, меньшія, чѣмъ произвольно взятое число ε.

Такой же и даже лучшій результатъ можно получить изъ разсмотрѣнія одной убывающей послѣдовательности. Въ ней за членомъ $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ будетъ находиться, между прочимъ, членъ $2n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right)$, и такъ какъ $\sqrt[n]{A} = \left(\sqrt[2n]{A}\right)^2$, то $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) = n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right)\left(\sqrt[2n]{A}+1\right)$, а потому

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) - 2n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right) = n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right)^2 = \frac{\left[2n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right)\right]^2}{4n} < \frac{\left[r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\right]^2}{4n},$$

гдѣ $r < 2n$ и, если угодно, $r = 1$.

Вставляя въ этомъ неравенствѣ $2n$ вмѣсто n, получимъ:

$$2n\left(\sqrt[2n]{A}-1\right) - 2^2n\left(\sqrt[2^2n]{A}-1\right) < \frac{\left[r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\right]^2}{2\,.\,4n};$$

вставляя здѣсь опять $2n$ вмѣсто n, получимъ новое неравенство, въ которомъ опять вставимъ $2n$ вмѣсто n и т. д. Наконецъ, получимъ неравенство такого вида:

$$2^{k-1}n\left(\sqrt[2^{k-1}n]{A}-1\right) - 2^kn\left(\sqrt[2^kn]{A}-1\right) < \frac{\left[r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\right]^2}{2^{k-1}\,.\,4n},$$

послѣ чего всѣ неравенства сложимъ и получимъ:

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right) - 2^kn\left(\sqrt[2^kn]{A}-1\right) < \frac{\left[r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\right]^2}{4n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Сумма $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}$ равна $2-\frac{1}{2^{k-1}}$ и можетъ быть замѣнена числомъ 2; полагая $m>n$, можемъ всегда найти такое число k, чтобы было $m>2^k n$ (для этого достаточно цѣлую часть дроби $\frac{m}{n}$ выразить по бинарной системѣ счисленія), и въ такомъ случаѣ неравенство сохранится, когда вычитаемое въ первой части замѣнимъ большимъ числомъ $m\left(\sqrt[m]{A}-1\right)$. Поэтому будемъ имѣть при $m>n$:

$$\left(n\sqrt[n]{A}-1\right)-m\left(\sqrt[m]{A}-1\right)<\frac{\left[r\left(\sqrt[r]{A}-1\right)\right]^2}{2n}$$

и здѣсь вмѣсто вычитаемаго можемъ поставить $L(A)$.

При $A<1$, когда $\sqrt[n]{A}<1$, неравенство

$$n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)<r\left(\sqrt[r]{A}-1\right),\quad n>r, \tag{51'}$$

превращается сначала въ неравенство

$$n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)>r\left(1-\sqrt[r]{A}\right),$$

а затѣмъ въ неравенство

$$\frac{1}{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}<\frac{1}{r\left(1-\sqrt[r]{A}\right)}.$$

Съ другой стороны, когда въ исходное неравенство (51′) вставимъ $\frac{1}{A}$ вмѣсто A, то оно приметъ видъ:

$$\frac{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}{\sqrt[n]{A}}<\frac{r\left(1-\sqrt[r]{A}\right)}{\sqrt[r]{A}},$$

откуда слѣдуетъ

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}>\frac{\sqrt[r]{A}}{r\left(1-\sqrt[r]{A}\right)},$$

или, приписывая въ числителяхъ $-1+1$:

$$\frac{1}{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}-\frac{1}{n}>\frac{1}{r\left(1-\sqrt[r]{A}\right)}-\frac{1}{r}$$

Такимъ образомъ, изъ выраженій $\frac{1}{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}$ и $\frac{1}{n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)}-\frac{1}{n}$ мы можемъ получить двѣ послѣдовательности чиселъ, изъ перваго выраженія — убывающую, изъ второго — возрастающую, которыя опредѣляютъ ихъ общій предѣлъ; изъ этого предѣла получится предѣлъ выраженія $n\left(1-\sqrt[n]{A}\right)$, который, взятый съ отрицательнымъ знакомъ, доставитъ натуральный логариѳмъ $L(A)$ при $A<1$.

Итакъ, при $A>0$ выраженіе $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ при безграничномъ возрастаніи n стремится къ опредѣленному предѣлу $L(A)$, который будетъ положителенъ при $A>1$, отрицателенъ при $A<1$ и равенъ нулю при $A=1$.

Предѣлъ выраженія $nk\left(\sqrt[nk]{A}-1\right)$ при безграничномъ возрастаніи n будетъ также $L(A)$; но разсматриваемому выраженію можно дать видъ $k\,.\,n\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{A}}-1\right)$, и теперь предѣлъ его будетъ равенъ $kL\left(\sqrt[k]{A}\right)$, такъ что, слѣдовательно,

$$L(A)=kL\left(\sqrt[k]{A}\right),\quad \text{или}\quad L\left(\sqrt[k]{A}\right)=\frac{1}{k}\,L(A).$$

Вставляя же здѣсь A^k вмѣсто A, получимъ:

$$L(A^k)=kL(A).$$

На основаніи этихъ равенствъ найдемъ, что

$$L\left(\sqrt[i]{A^k}\right)=\frac{1}{i}\,L(A^k)=\frac{k}{i}\,L(A).$$

Логариѳмъ произведенія AB будетъ предѣломъ выраженія $n\left[\sqrt[n]{AB}-1\right]$, которое приводится къ виду:

$$n\left(\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[n]{B}-\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{A}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{B}-1\right)\left(\sqrt[n]{A}-1+1\right)+n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$$

$$=\frac{n\left(\sqrt[n]{B}-1\right).\,n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)}{n}+n\left(\sqrt[n]{B}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{A}-1\right).$$

При безграничномъ возрастаніи n выраженія $n\left[\sqrt[n]{A}-1\right]$ и $n\left[\sqrt[n]{B}-1\right]$ доставятъ $L(A)$ и $L(B)$, а ихъ произведеніе, раздѣленное на n, обратится въ нуль, и мы получимъ основное свойство логариѳма:

$$L(AB)=L(A)+L(B),$$

откуда, при $B = \frac{1}{A}$, найдемъ: $L\left(\frac{1}{A}\right) = -L(A)$.

Если положимъ $A = E(z)$, то будемъ имѣть (см. стр. 266 и 265):

$$n\left[\sqrt[n]{E(z)} - 1\right] = n\left[E\left(\frac{z}{n}\right) - 1\right] = z + \frac{z^2}{2!\,n} + \frac{z^3}{3!\,n^2} + \ldots,$$

откуда при безграничномъ возрастанiи n найдемъ:

$$L[E(z)] = z,$$

такъ что, полагая $E(z) = Z$, получимъ: $z = L(Z)$ и, слѣдовательно, $E[L(Z)] = Z$.

Итакъ, изъ равенства $E(z) = Z$ слѣдуетъ:

$$z = L(Z) = \text{пред. } n\left[\sqrt[n]{Z} - 1\right]$$

въ силу чего будемъ имѣть:

$$\sqrt[i]{Z^k} = E\left(\frac{k}{i}z\right) = E\left[\frac{k}{i}L(Z)\right].$$

Въ частности при $z = 1$ получимъ: $Z = E(1) = e$, $L(e) = 1$, $E\left(\frac{k}{i}\right) = \sqrt[i]{e^k}$.

Намъ остается найти способъ вычисленiя $L(A)$ по данному значенiю положительнаго числа A, при чемъ можемъ ограничиться предположенiемъ, что $A > 1$, ибо, какъ мы видѣли, $L\left(\frac{1}{A}\right) = -L(A)$.

Въ концѣ §I (стр. 120) мы отмѣтили, что если существуетъ предѣлъ выраженiя $n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right)$ при безграничномъ возрастанiи n, то этотъ предѣлъ будетъ $> \frac{A-1}{A}$, но $< A - 1$. Теперь мы знаемъ, что предѣлъ $n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right) = L(A)$, и потому можемъ написать:

$$\frac{A-1}{A} < L(A) < A - 1, \qquad A > 0.$$

Это двойное неравенство доставляетъ возможность найти формулы для дѣйствительнаго вычисленiя $L(A)$ съ произвольною степенью точности.

Положимъ $A = \dfrac{1}{1-u}$; при этомъ условіе $A > 0$ замѣнится условіемъ $u < 1$, и предыдущее неравенство доставитъ:

$$u < L\left(\frac{1}{1-u}\right) < \frac{u}{1-u} = u + \frac{u^2}{1-u},$$

откуда мы имѣемъ право заключить, что

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + R,$$

гдѣ будетъ $0 < R < \dfrac{u^2}{1-u}$, т. е. R будетъ числомъ положительнымъ. Но каждое положительное число можно разсматривать, какъ логариѳмъ нѣкотораго числа, превосходящаго 1, именно $R = L[E(R)]$, гдѣ $E(R) = 1 + R + \dfrac{R^2}{2!} + \dfrac{R^3}{3!} + \cdots$; число же $E(R)$ мы можемъ принять равнымъ $\dfrac{1}{1-u_1}$, откуда $u_1 = 1 - \dfrac{1}{E(R)}$, такъ что u_1 будетъ удовлетворять двойному неравенству $0 < u_1 < 1$.

Такимъ образомъ будемъ имѣть: $R = L\left(\dfrac{1}{1-u_1}\right)$, и потому

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + L\left(\frac{1}{1-u_1}\right). \tag{53}$$

По существу это выраженіе $L\left(\dfrac{1}{1-u}\right)$ не отличается отъ прежняго: тамъ входило неизвѣстное положительное число R, здѣсь входитъ неизвѣстное число u_1; но новая форма выраженія, въ связи съ основнымъ свойствомъ логариѳма, приводитъ къ формулѣ для вычисленія логариѳма.

Вставляя $L[E(u)]$ вмѣсто u, получимъ изъ послѣдняго равенства (53):

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right) = L[E(u)] + L\left(\frac{1}{1-u_1}\right) = L\left[\frac{E(u)}{1-u_1}\right],$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{1}{1-u} = \frac{E(u)}{1-u_1},$$

или

$$1 - u_1 = (1-u)\,E(u), \quad u_1 = 1 - (1-u)\,E(u). \tag{54}$$

Мы получили точное выраженіе неизвѣстнаго числа u_1 при посредствѣ числа u. Вставляя въ него безконечный рядъ, которымъ представляется $E(u)$, получимъ:

$$u_1 = \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{3u^4}{4!} + \cdots + \frac{(k-2)\,u^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(k-1)\,u^k}{k!} + \cdots \tag{55}$$

Хотя для нашей цѣли имѣютъ интересъ только значенія $u < 1$, но тождество выраженій (54) и (55) существуетъ при всѣхъ значеніяхъ u; на этомъ основаніи заключимъ, полагая $u = 1$, что сумма всѣхъ коэффиціентовъ въ рядѣ (55) равна 1, откуда слѣдуетъ, что, если $0 < u < 1$, то $u_1 < u^2$. Болѣе тѣсныя границы для u_1 получаются слѣдующимъ образомъ. Изъ ряда (55) слѣдуетъ, что при $u > 0$

$$u_1 > \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{(k-2)\,u^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(k-1)\,u^k}{k!}.$$

Если вспомнимъ, что $E(u) > 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}$, то изъ (54) получимъ неравенство

$$u_1 < \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{(k-2)\,u^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{u^k}{(k-1)!},$$

гдѣ послѣдній членъ можно представить въ видѣ $\frac{ku^k}{k!}$. Изъ этихъ двухъ неравенствъ для u_1 слѣдуетъ, что u_1 можно представить формулой

$$u_1 = \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{(k-2)\,u^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(k-\theta)\,u^k}{k!}. \qquad u > 0, \tag{56}$$

гдѣ θ представляетъ неизвѣстное число, содержащееся между 0 и 1. При $k = 3$, $\theta = 0$ отсюда слѣдуетъ, что $u_1 < \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} < u^2$, если $u < 1$.

Возвращаясь къ формулѣ (53) и примѣняя ее къ числу u_1, мы имѣемъ право написать:

$$L\left(\frac{1}{1-u_1}\right) = u_1 + L\left(\frac{1}{1-u_2}\right), \tag{53'}$$

гдѣ u_2 такъ же выражается черезъ u_1, какъ u_1 выражалось черезъ u, такъ что

$$u_2 = 1 - (1-u_1)\,E(u_1) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_1^3}{3} + \cdots + \frac{(k_1-2)\,u_1^{k_1-1}}{(k_1-1)!} + \frac{(k_1-\theta_1)\,u_1^{k_1}}{k_1!},\ 0 < \theta_1 < 1, \tag{57}$$

и

$$u_2 < u_1^2 < u^{2 \cdot 2}.$$

Совершенно такъ же получимъ:

$$L\left(\frac{1}{1-u_2}\right) = u_2 + L\left(\frac{1}{1-u_3}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L\left(\frac{1}{1-u_{s-1}}\right) = u_{s-1} + L\left(\frac{1}{1-u_s}\right);$$

складывая эти формулы съ (53′) и (53), найдемъ:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right)=u+u_1+u_2+\ldots+u_{s-1}+L\left(\frac{1}{1-u_s}\right), \tag{58}$$

гдѣ $L\left(\dfrac{1}{1-u_s}\right)$ содержится между u_s и $u_s+\dfrac{u_s^2}{1-u_s}$ (стр. 274, строка 6 сверху) и притомъ $u_s<u^{2^s}$. Члены въ этой формулѣ очень быстро убываютъ, такъ что достаточно взять очень немного членовъ, чтобы вычислить $L\left(\dfrac{1}{1-u}\right)$ съ большою точностью. Такъ, для вычисленія $L(2)$ при $u=\dfrac{1}{2}$ достаточно взять $s=5$, т. е. $L(2)=u+u_1+u_2+u_3+u_4$, чтобы погрѣшность была значительно менѣе $\dfrac{1}{2^{32}}<0,000\,000\,000\,25$. При безграничномъ возрастаніи s число u_s стремится къ нулю, ибо $u_s<u_1^{2^{s-1}}$, а $u_1<1$, и потому формула (58) доставляетъ представленіе $L\left(\dfrac{1}{1-u}\right)$ безконечнымъ рядомъ:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right)=u+u_1+u_2+\cdots+u_{s-1}+u_s+\cdots,\quad u<1. \tag{59}$$

Мы преобразуемъ теперь этотъ рядъ въ другой, расположенный по степенямъ u и открытый въ 1668 г. Джономъ Валлисомъ. Число u_1 уже представлено безконечнымъ рядомъ (55) или многочленомъ неопредѣленно высокой k-ой степени, начинающимся съ члена $\dfrac{u^2}{2}\cdot$ Если внесемъ этотъ многочленъ вмѣсто u_1 въ формулу (57), въ которой примемъ $\theta_1=0$, а k_1 будемъ считать неопредѣленно высокимъ числомъ, и, выполнивъ возвышенія въ степени, расположимъ результатъ по возрастающимъ степенямъ u, то u_2 представится многочленомъ kk_1-ой степени, начинающимся членомъ $\dfrac{u^4}{8}\cdot$ Подобнымъ же образомъ изъ u_2 образуется u_3 и представится многочленомъ kk_1k_2-ой степени, начинающимся членомъ $\dfrac{u^8}{128}$ и т. д. Простое, но довольно утомительное вычисленіе доставляетъ:

$$u+u_1+u_2=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^6}{6}+\frac{u^7}{7}+\frac{15}{128}u^8+\cdots,$$

откуда видно, что въ выраженіи $u+u_1+u_2+u_3$ семь первыхъ членовъ остаются тѣ же, а восьмой членъ будетъ $\dfrac{u^8}{8}\cdot$ Эти формулы даютъ основанiе предполагать, что $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$ представится въ видѣ:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+\ldots+\frac{u^{k-1}}{k-1}+\frac{u^k}{k}+\ldots.$$

Чтобы подтвердить это предположенiе, примемъ:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^k}{k}+M(u), \tag{60}$$

что мы имѣемъ право сдѣлать, такъ какъ это равенство, въ сущности, опредѣляетъ $M(u)$. Замѣтимъ теперь, что выведенное нами ранѣе основное свойство логариѳма, выражающееся равенствомъ

$$L(A)+L(B)=L(AB),$$

даетъ:

$$L\left(\frac{1}{1-x}\right)+L\left(\frac{1}{1-y}\right)=L\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}\right)=L\left(\frac{1}{1-x-y+xy}\right), \tag{61}$$

гдѣ при $0<x<1$, $0<y<1$ будетъ $0<(1-x)(1-y)=1-x-y+xy<1$, откуда слѣдуетъ: $0<x+y-xy<1$. На этомъ основанiи равенство (61) можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} x+y+\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^3+y^3}{3}+\ldots+\frac{x^k+y^k}{k}+M(x)+M(y)= \\ =x+y-xy+\frac{(x+y-xy)^2}{2}+\ldots+\frac{(x+y-xy)^k}{k}+M(x+y-xy)\ldots. \end{aligned} \tag{62}$$

Во второй части этого равенства примѣнимъ формулу бинома, въ силу которой напишемъ:

$$(x+y-xy)^k=(x+y)^k-\binom{k}{1}(x+y)^{k-1}xy+\binom{k}{2}(x+y)^{k-2}x^2y^2-\cdots+(-xy)^k$$

и соединимъ члены одинаковаго измѣренiя относительно x и y.

Однородный многочленъ k-го измѣренiя во второй части будетъ:

$$\frac{(x+y)^k}{k}-\binom{k-1}{1}\frac{(x+y)^{k-2}xy}{k-1}+\binom{k-2}{2}\frac{(x+y)^{k-4}x^2y^2}{k-2}$$

$$-\binom{k-3}{3}\frac{(x+y)^{k-6}x^3y^3}{k-3}+\ldots,$$

и нетрудно доказать, что онъ равенъ двучлену k-го измѣренiя $\frac{x^k+y^k}{k}$, стоящему въ первой части. Въ самомъ дѣлѣ, коэффицiентъ при $(x+y)^{k-2s}x^sy^s$ во второй части, по умноженiи на k, будетъ:

$$\frac{k}{k-s}\binom{k-s}{s}=\left(1+\frac{s}{k-s}\right)\binom{k-s}{s}=\binom{k-s}{s}+\binom{k-s-1}{s-1};$$

поэтому намъ нужно доказать, что

$$x^k + y^k = (x+y)^k - \left[\binom{k-1}{1} + 1\right](x+y)^{k-2}xy + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^s\left[\binom{k-s}{s} + \binom{k-s-1}{s-1}\right](x+y)^{k-2s}x^s y^s + \cdots. \tag{63}$$

Но легко убѣдиться въ существованіи тождества:

$$x^k + y^k = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) - xy(x^{k-2} + y^{k-2}),$$

изъ котораго значенія $x^k + y^k$ при значеніяхъ $k = 2, 3, 4 \ldots$ послѣдовательно опредѣляются и выражаются посредствомъ степеней $x+y$ и xy. Это тождество будетъ удовлетворено, когда въ первую часть вмѣсто $x^k + y^k$ вставимъ вышенаписанное выраженіе этой суммы, а во вторую часть вставимъ подобныя же выраженія вмѣсто $x^{k-1} + y^{k-1}$ и $x^{k-2} + y^{k-2}$, получающіяся черезъ замѣну числа k числами $k-1$ и $k-2$. Въ самомъ дѣлѣ, послѣ такой подстановки въ первой части будетъ въ числѣ другихъ членъ $(-1)^s\left[\binom{k-s}{s} + \binom{k-s-1}{s-1}\right](x+y)^{k-2s}x^s y^s$, а во второй части будутъ два подобныхъ члена съ коэффиціентами:

$$(-1)^s\left[\binom{k-1-s}{s} + \binom{k-1-s-1}{s-1}\right] \quad \text{и} \quad -(-1)^{s-1}\left[\binom{k-2-s+1}{s-1} + \binom{k-2-s}{s-2}\right],$$

которые, послѣ приведенія, доставятъ коэффиціентъ члена въ первой части, ибо вообще

$$\binom{m}{s} + \binom{m}{s-1} = \binom{m}{s-1}\frac{m-s+1}{s} + \binom{m}{s-1} = \binom{m}{s-1}\frac{m+1}{s} = \binom{m+1}{s},$$

а потому

$$\binom{k-1-s}{s} + \binom{k-2-s+1}{s-1} = \binom{k-s}{s},$$

$$\binom{k-1-s-1}{s-1} + \binom{k-2-s}{s-2} = \binom{k-s-1}{s-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что дѣйствительно сумма $x^k + y^k$ выражается такъ, какъ выше указано, при посредствѣ $x+y$ и xy.

Доказанное нами относительно членовъ k-го измѣренія въ равенствѣ (62) примѣняется дословно къ членамъ любого измѣренія ниже k, такъ что, устраняя изъ обѣихъ частей равенства равные члены, мы приведемъ это равенство къ виду:

$$M(x) + M(y) = R + M(x+y-xy), \tag{64}$$

гдѣ R обозначаетъ совокупность членовъ $(k+1)$-го и высшихъ (до $2k$-го) измѣреній, входившихъ во вторую часть равенства. Въ частности, группа членовъ $(k+1)$-го измѣренія будетъ:

$$-\binom{k}{1}\frac{(x+y)^{k-1}xy}{k}+\binom{k-1}{2}\frac{(x+y)^{k-3}x^2y^2}{k-1}-\binom{k-2}{3}\frac{(x+y)^{k-5}x^3y^3}{k-2}+\cdots,$$

и на основаніи найденнаго для $\frac{x^k+y^k}{k}$ выраженія (63), въ которомъ вмѣсто k вставимъ $k+1$, легко убѣдиться, что эта группа членовъ $(k+1)$-го измѣренія равна $\frac{x^{k+1}+y^{k+1}-(x+y)^{k+1}}{k+1}$. Если вставимъ здѣсь вмѣсто $(x+y)^{k+1}$ выраженіе $(x+y-xy+xy)^{k+1}$ и примѣнимъ къ нему формулу бинома, въ силу которой оно превратится въ такое:

$$(x+y-xy)^{k+1}+\binom{k+1}{1}(x+y-xy)^kxy+\binom{k+1}{2}(x+y-xy)^{k-1}x^2y^2+\cdots,$$

то предыдущему равенству (64) можно дать видъ:

$$M(x)-\frac{x^{k+1}}{k+1}+M(y)-\frac{y^{k+1}}{k+1}=M(x+y-xy)-\frac{(x+y-xy)^{k+1}}{k+1}+R_1,$$

гдѣ R_1 представляетъ совокупность членовъ $(k+2)$-го и высшихъ измѣреній. Если положимъ:

$$M(x)-\frac{x^{k+1}}{k+1}=M_1(x),\qquad \text{откуда}\quad M(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}+M_1(x),$$

то предыдущее равенство приметъ видъ:

$$M_1(x)+M_1(y)=M_1(x+y-xy)+R_1,$$

и мы будемъ имѣть:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right)=u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}+\frac{u^{k+1}}{k+1}+M_1(u). \tag{60'}$$

Совершенно понятно, что, исходя отъ такого представленія $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$, мы вынуждены будемъ заключить, что $M_1(u)=\frac{u^{k+2}}{k+2}+M_2(u)$ и т. д. безъ конца.

Резюмируемъ: изъ представленія $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$ въ видѣ суммы $u+u_1+u_2+u_3+\cdots$ мы сдѣлали выводъ, что этотъ логариѳмъ можетъ быть представленъ въ видѣ многочлена неопредѣленно высокой степени, расположеннаго по степенямъ u, и намѣтили видъ этого многочлена $\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}\right)$; прибавивъ къ этому многочлену $M(u)$, мы убѣдились, что основное свойство логариѳма, выражаемое равенствомъ $L(A)+L(B)=L(AB)$, требуетъ, чтобы при любомъ значеніи k

выполнялось соотношеніе: $M(u) = \frac{u^{k+1}}{k+1} + \frac{u^{k+2}}{k+2} + \ldots$. На этомъ основаніи мы заключаемъ, что $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$ представляется безконечнымъ рядомъ Валлиса:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{u^{k-1}}{k-1} + \frac{u^k}{k} + \frac{u^{k+1}}{k+1} + \ldots, \quad 0 < u < 1. \quad (65)$$

Для дѣйствительнаго вычисленія $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$ мы вынуждены ограничиться извѣстнымъ числомъ членовъ ряда и вычислить приблизительно погрѣшность, которую мы дѣлаемъ, игнорируя прочіе члены. Въ данномъ случаѣ сдѣлать это будетъ очень нетрудно, если замѣтимъ, что

$$\frac{u^k}{k} + \frac{u^{k+1}}{k+1} + \frac{u^{k+2}}{k+2} + \ldots = \frac{u^k}{k}\left(1 + \frac{k}{k+1}u + \frac{k}{k+2}u^2 + \cdots\right),$$

и что выраженіе въ скобкахъ будетъ меньше $1 + u + u^2 + \cdots = \frac{1}{1-u}$, но будетъ больше, чѣмъ

$$1 + \frac{k}{k+1}u + \left(\frac{k}{k+1}u\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}u\right)^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{ku}{k+1}},$$

ибо

$$\frac{k}{k+2} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} > \left(\frac{k}{k+1}\right)^2, \qquad \frac{k}{k+3} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k+2}{k+3} > \left(\frac{k}{k+1}\right)^3,$$

и т. д. Если напишемъ:

$$L\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{k-1}}{k-1} + \frac{u^k}{k}\,\frac{1}{1 - \frac{ku}{k+1}} + K,$$

то положительная погрѣшность $K < \frac{u^k}{k}\left[\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1 - \frac{ku}{k+1}}\right]$. Такъ, при $u = \frac{1}{2}$, $k = 16$ получимъ: $K < \frac{1}{9 \cdot 16 \cdot 2^{16}}$, что немного болѣе $\frac{1}{10^7}$.

Замѣчая, что

$$L(1+u) + L(1-u) = L(1-u^2),$$

получимъ отсюда первый въ исторіи математики логариѳмическій рядъ, открытый Николаемъ Меркаторомъ въ 1668 г.:

$$
\begin{aligned}
L(1+u) &= L\left(\frac{1}{1-u}\right) - L\left(\frac{1}{1-u^2}\right) = \\
&= u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k} + \cdots + \frac{u^{2k}}{2k} + \cdots - \left[u^2 + \frac{u^4}{2} + \cdots + \frac{u^{2k}}{k} + \cdots\right] \\
&= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots + \frac{u^{2k-1}}{2k-1} - \frac{u^{2k}}{2k} + \cdots
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Складывая этотъ рядъ для $L(1+u)$ съ рядомъ для $L\left(\frac{1}{1-u}\right)$, найдемъ:

$$
L\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left[u + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^{2k-1}}{2k-1} + \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right], \quad 0 < u < 1, \tag{67}
$$

гдѣ совокупность членовъ, начинающаяся съ $\frac{u^{2k+1}}{2k+1}$, можетъ быть написана въ видѣ:

$$
\frac{u^{2k+1}}{2k+1}\left[1 + \frac{2k+1}{2k+3}u^2 + \frac{2k+1}{2k+5}u^4 + \cdots\right],
$$

и здѣсь сумма ряда въ скобкахъ $< 1 + u^2 + u^4 + \cdots = \frac{1}{1-u^2}$, но $> 1 + \frac{2k+1}{2k+3}u^2 + \left(\frac{2k+1}{2k+3}u^2\right)^2 + \cdots = \dfrac{1}{1 - \frac{2k+1}{2k+3}u^2}$, такъ что можно написать:

$$
L\,\frac{1+u}{1-u} = 2\left[u + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^{2k-1}}{2k-1} + \frac{u^{2k+1}}{2k+1}\,\frac{1}{1 - \frac{2k+1}{2k+3}u^2} + K_1\right],
$$

гдѣ положительный остатокъ $K_1 < \dfrac{u^{2k+1}}{2k+1}\left[\dfrac{1}{1-u^2} - \dfrac{1}{1 - \frac{2k+1}{2k+3}u^2}\right]$.

При $u = \frac{1}{3}$, $k = 5$ получимъ $L(2)$, при чемъ K_1 будетъ меньше числа, которое немного больше $\frac{1}{10^8}$.

Возвращаясь къ формулѣ (53), вставимъ въ ней $-u$ вмѣсто u, и пусть при этомъ u_1 обращается въ u'. Тогда наряду съ формулой (53), т. е.

$$
L\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + L\left(\frac{1}{1-u_1}\right), \quad u < 1, \tag{53}
$$

будемъ имѣть:

$$L\left(\frac{1}{1+u}\right)=-u+L\left(\frac{1}{1-u'}\right), \qquad u>-1,$$

гдѣ по формуламъ (54) и (55),

$$u_1=1-(1-u)\,E(u)=\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots+\frac{(2k-2)\,u^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{(2k-1)\,u^{2k}}{(2k)!}+\cdots,$$

$$u'=1-(1+u)\,E(-u)=\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+\cdots-\frac{(2k-2)\,u^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{(2k-1)\,u^{2k}}{(2k)!}-\cdots.$$

Отсюда находимъ:

$$L\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=L\left(\frac{1}{1-u}\right)-L\left(\frac{1}{1+u}\right)=2u+L\left(\frac{1-u'}{1-u_1}\right), \qquad 0<u<1 \tag{68}$$

Но изъ рядовъ, представляющихъ u_1 и u', очевидно, что $u'<u_1$; поэтому $\dfrac{1-u'}{1-u_1}>1$, и мы можемъ принять:

$$\frac{1-u'}{1-u_1}=\frac{1+v}{1-v}, \qquad v>0,$$

откуда получимъ:

$$v=\frac{u_1-u'}{2-u_1-u'}=\frac{(1+u)\,E(-u)-(1-u)\,E(u)}{(1+u)\,E(-u)+(1-u)\,E(u)}$$

$$=\frac{\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{4u^5}{5!}+\cdots+\dfrac{(2k-2)\,u^{2k-1}}{(2k-1)!}+\dfrac{2ku^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots}{1-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{3u^4}{4!}-\cdots-\dfrac{(2k-3)\,u^{2k-2}}{(2k-2)!}-\dfrac{(2k-1)\,u^{2k}}{(2k)!}-\cdots}. \tag{69}$$

Замѣтимъ, что изъ выраженій для u_1 и u', имѣющихъ мѣсто для всѣхъ значеній u, слѣдуетъ при $u=1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{2k-2}{(2k-1)!}+\frac{2k-1}{2k!}+\cdots=1,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4!}-\cdots-\frac{2k-2}{(2k-1)!}+\frac{2k-1}{2k!}-\cdots=1-2\,E(-1)=1-\frac{2}{e},$$

откуда чрезъ сложеніе и вычитаніе, по раздѣленіи на 2, найдемъ:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{2k-1}{2k!}+\cdots=1-\frac{1}{e}, \tag{70}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{2k-2}{(2k-1)!}+\cdots=\frac{1}{e}. \tag{71}$$

Если теперь въ выраженіи для v выдѣлимъ въ числителѣ множитель u^3, то оставшаяся дробь, въ которой $0<u<1$, будетъ менѣе своего значенія при $u=1$, которое, на основаніи формулъ (70) и (71), будетъ равна 1. Отсюда слѣдуетъ, что $v<u^3$. Пользуясь формулами (70) и (71), можно найти меньшія числа, которыя будутъ болѣе v. Такъ, выдѣливъ множитель u^3, замѣнимъ въ оставшейся дроби всѣ степени u квадратомъ u, отчего дробь увеличится, и получимъ:

$$v<\frac{\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)u^2}{1-\left(1-\frac{1}{e}\right)u^2}u^3 \text{ и т. д.}$$

Вычтемъ изъ обѣихъ частей равенства (69) по $\frac{u^3}{3}$ и найдемъ:

$$v-\frac{u^3}{3}=\frac{\frac{u^5}{5}+\frac{3}{70}u^7+\frac{53}{3.5.7.9.4!}u^9+\ldots+\left[\frac{2k}{(2k+1)!}+\frac{1}{3}\frac{2k-3}{(2k-2)!}\right]u^{2k+1}+\cdots}{1-\frac{u^2}{2}-\ldots-\frac{(2k-5)\,u^{2k-4}}{(2k-4)!}-\cdots}.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по $\frac{u^5}{5}$, получимъ:

$$v-\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}=$$

$$=\frac{\frac{u^7}{7}+\frac{31u^9}{1134}+\ldots+\left[\frac{2k}{(2k+1)!}+\frac{2k}{3}\frac{3}{.(2k-2)!}+\frac{2k-5}{5.(2k-4)!}\right]u^{2k+1}+\cdots}{1-\frac{u^2}{2}-\ldots-\frac{2k-7}{(2k-6)!}u^{2k-6}-\cdots}.$$

Наконецъ, вычитая по $\frac{u^7}{7}$, найдемъ окончательно:

$$v-\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}=$$

$$=\frac{\frac{8}{81}u^9+\cdots+\left[\frac{2k}{(2k+1)!}+\frac{2k-3}{3.(2k-2)!}+\frac{2k-5}{5.(2k-4)!}+\frac{2k-7}{7\ (2k-6)!}\right]u^{2k+1}+\cdots}{1-\frac{u^2}{2}-\ldots-\frac{2k-1}{2k!}u^{2k}-\ldots}.$$

Значеніе второй части при $u=1$ получится изъ первой части при $u=1$ и будетъ равно $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{34}{105}$; поэтому, выдѣливъ во второй части множитель u^9, найдемъ:

$$\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}<v<\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+\frac{34}{105}u^9. \tag{72}$$

Возвращаясь къ формулѣ (68), приведемъ ее къ виду:

$$L\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2u+L\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

и на основаніи этой формулы заключимъ, что

$$L\left(\frac{1+v}{1-v}\right)=2v+L\left(\frac{1+v_1}{1-v_1}\right),$$

гдѣ v_1 выражается черезъ v такъ же, какъ v выражалось черезъ u.

Значитъ, будетъ $v_1 < v^3 < u^{3^2}$. Далѣе будемъ имѣть:

$$L\left(\frac{1+v_1}{1-v_1}\right)=2v_1+L\left(\frac{1+v_2}{1-v_2}\right)$$

гдѣ $v_2 < {v_1}^3 < u^{3^s}$ и т. д.; наконецъ,

$$L\left(\frac{1+v_{s-2}}{1-v_{s-2}}\right)=2v_{s-2}+L\left(\frac{1+v_{s-1}}{1-v_{s-1}}\right),$$

гдѣ $v_{s-1} < u^{3^s}$. Складывая всѣ полученныя равенства, найдемъ:

$$L\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2\,(u+v+v_1+\cdots+v_{s-1}+\cdots). \tag{73}$$

Члены этого ряда убываютъ съ поразительною быстротою.

Примѣненіе логариѳмовъ къ вычисленіямъ при посредствѣ логариѳмическихъ таблицъ основано на свойствѣ логариѳмовъ, выражаемомъ равенствомъ $L(A\,.\,B)=L(A)+L(B)$, которое мы назвали основнымъ свойствомъ. Если мы умножимъ это равенство на произвольное число M, то будемъ имѣть: $ML(A\,.\,B)=ML(A)+ML(B)$, такъ что $ML(A)$ имѣетъ такое же основное свойство, какъ $L(A)$, и потому также называется логариѳмомъ, а M — его модулемъ; обозначимъ $\log A$ этотъ новый логариѳмъ, равный $ML(A)$. Въ связи съ десятичною системою счисленія опредѣлимъ M такъ, чтобы $\log 10 = ML(10)$ былъ равенъ 1; отсюда $M=\dfrac{1}{L(10)}$, а потому $\log A=\dfrac{L(A)}{L(10)}$; такіе логариѳмы называются обыкновенными.

Очевидно, $\log(10^s)=\dfrac{L(10^s)}{L(10)}=\dfrac{sL(10)}{L(10)}=s.$

IX. Формула бинома Ньютона для отрицательныхъ цѣлыхъ показателей.

Въ формулѣ

$$(1+h)^n=1+\binom{n}{1}h+\binom{n}{2}h^2+\cdots+\binom{n}{k}h^k+\cdots$$

при $h > 0$ всѣ члены во второй части положительны, и потому каждый изъ нихъ менѣе значенія первой части, такъ что можемъ написать:

$$\binom{n}{k} h^k < (1+h)^n.$$

Замѣтимъ, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{1 \;.\; 2 \quad\cdots\quad (k-1)} \frac{(n-k+1)}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k},$$

и пусть $\dfrac{1}{1+h} = a$, откуда $h = \dfrac{1-a}{a}$, гдѣ $a < 1$. При этихъ обозначеніяхъ предыдущее неравенство получаетъ видъ:

$$\binom{n}{k-1} a^n < \frac{k\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^k}{n-k+1},$$

изъ котораго очевидно, что при достаточно большомъ значеніи показателя n вторая часть неравенства дѣлается менѣе произвольно малаго числа δ (если $n > \dfrac{k}{\delta}\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^k + k - 1$)$\cdot$ Отсюда слѣдуетъ, что предѣлъ выраженія $\dbinom{n}{k-1} a^n$ при $a < 1$ при безграничномъ возрастаніи n равенъ нулю.

Обращаясь теперь къ формулѣ (23) въ § VI, мы примемъ въ ней $x = 1$ и предположимъ, что $|a| < 1$, что̀ можно выразить или неравенствомъ $a^2 < 1$ или неравенствами $-1 < a < 1$. Разсматриваемая формула легко приводится къ виду:

$$\frac{1}{(1-a)^k} = 1 + \binom{k}{k-1} a + \binom{k+1}{k-1} a^2 + \cdots + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} +$$

$$+ \frac{a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1}(1-a) + \cdots + \dbinom{n}{k-1} a^{n-k+1}(1-a)^{k-1}}{(1-a)^k}.$$

Если предположимъ теперь, что n безгранично возрастаетъ, то всѣ члены числителя дроби во второй части будутъ, по только-что доказанной леммѣ, стремиться къ предѣлу нуль, и мы получимъ такое равенство:

$$\frac{1}{(1-a)^k} = (1-a)^{-k} = 1 + \binom{k}{k-1} a + \binom{k+1}{k-1} a^2 + \cdots + \binom{k+m-1}{k-1} a^m + \cdots,$$

т. е. представленіе дроби, стоящей въ первой части, безконечнымъ степеннымъ рядомъ. Нужно помнить, что оно существуетъ только въ предположеніи $a^2 < 1$.

Коэффиціенты во второй части послѣдняго равенства можно представить въ иномъ видѣ. Для этого условимся понимать подъ $\binom{n}{k}$ выраженіе $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1.2\cdots k}$ не только тогда, когда n представляетъ натуральное число, а вообще будетъ какое угодно число. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\binom{-k}{m} = \frac{-k(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-m+1)}{1.2.3\ldots m} =$$

$$= (-1)^m \frac{(k+m-1)(k+m-2)\cdots(k+1)k}{1.2\ldots(m-1)m},$$

или, умножая числитель и знаменатель на $(k-1)(k-2)\cdots 2.1$:

$$\binom{-k}{m} = (-1)^m \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!};$$

съ другой стороны,

$$\binom{k+m-1}{k-1} = \frac{(k+m-1)(k+m-2)\cdots(m+1)}{(k-1)!},$$

и, умножая числитель и знаменатель на $m!$, получимъ:

$$\binom{k+m-1}{k-1} = \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!\,m!} = (-1)^m \binom{-k}{m}.$$

На этомъ основаніи наша формула принимаетъ видъ:

$$(1-a)^{-k} = 1 + \binom{-k}{1}(-a) + \binom{-k}{2}(-a)^2 + \cdots + \binom{-k}{m}(-a)^m + \cdots$$

и представляетъ о б о б щ е н і е ф о р м у л ы б и н о м а Н ь ю т о н а на ц ѣ л ы е о т р и ц а т е л ь н ы е п о к а з а т е л и.

Совокупность всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за m-ымъ, можетъ быть представлена въ видѣ произведенія $(m+1)$-го члена $\binom{-k}{m}(-a)^m$ на рядъ

$$1 + \frac{m+k}{m+1}a + \frac{m+k}{m+1}\,\frac{m+1+k}{m+2}a^2 + \frac{m+k}{m+1}\,\frac{m+1+k}{m+2}\,\frac{m+2+k}{m+3}a^3 + \cdots,$$

легко приводящійся къ виду:

$$1 + \left(1+\frac{k-1}{m+1}\right)a + \left(1+\frac{k-1}{m+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{m+2}\right)a^2 +$$

$$+ \left(1+\frac{k-1}{m+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{m+2}\right)\left(1+\frac{k-1}{m+3}\right)a^3 + \cdots \quad (74)$$

При $0 < a < 1$ значенiе этого ряда будетъ менѣе значенiя того ряда, который получится, когда всѣ знаменатели $m+2$, $m+3, \ldots$ замѣнимъ меньшимъ числомъ $m+1$, и который будетъ:

$$1+\frac{m+k}{m+1}a+\left(\frac{m+k}{m+1}a\right)^2+\left(\frac{m+k}{m+1}a\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\dfrac{m+k}{m+1}a},$$

предполагая, что $\dfrac{m+k}{m+1}a < 1$, или $a < \dfrac{m+1}{m+k} = 1-\dfrac{k-1}{m+k}$: это предположенiе всегда можетъ быть осуществлено надлежащимъ выборомъ числа $m > \dfrac{ka-1}{1-a}\cdot$ Итакъ, сумма членовъ, слѣдующихъ за m-ымъ въ разложенiи $(1-a)^{-k}$, менѣе

$$\binom{-k}{m}(-a)^m : \left(1-\frac{m+k}{m+1}a\right), \qquad 0 < a < 1, \qquad m > \frac{ka-1}{1-a}.$$

Рядъ (74), очевидно, болѣе $1+a+a^2+a^3+\cdots=(1-a)^{-1}$ при $0 < a < 1$. Если же умножимъ рядъ (74) на $1-a$, то произведенiе будетъ, какъ нетрудно убѣдиться, болѣе

$$1+\frac{k-1}{m+1}a+\left(\frac{k-1}{m+1}a\right)^2+\left(\frac{k-1}{m+1}a\right)^3+\cdots=\left(1-\frac{k-1}{m+1}a\right)^{-1}.$$

Поэтому рядъ (74) при $0<a<1$ болѣе $(1-a)^{-1}\left(1-\dfrac{k-1}{m+1}a\right)^{-1}=$ $=\left(1-\dfrac{m+k}{m+1}a+\dfrac{k-1}{m+1}a^2\right)^{-1}\cdot$ На этомъ основанiи можемъ утверждать, что при $0 < a < 1$ совокупность членовъ, слѣдующихъ за m-ымъ въ разложенiи $(1-a)^{-k}$, имѣетъ значенiе

$$\binom{-k}{m}(-a)^m : \left(1-\frac{m+k}{m+1}a+\theta\,\frac{k-1}{m+1}a^2\right), \qquad 0<\theta<1.$$

При $0 > a > -1$ степень $(1-a)^{-k}$ представится знакоперемѣннымъ рядомъ; при условiи $-\dfrac{m+k}{m+1}a < 1$, откуда $m > -\dfrac{ka+1}{1+a}$, члены ряда будутъ постоянно убывать численно, и если возьмемъ m членовъ ряда, то погрѣшность по величинѣ и по знаку представится нѣкоторою частью $(m+1)$-аго члена.

Число и величина молекулъ и атомовъ.

М. Смолуховскаго.

Современная физика есть точная наука: она стремится выразить найденные опытнымъ путемъ законы природы по возможности въ количественно точной, математической формѣ; она считаетъ пріемлемыми лишь тѣ физическія теоріи, которыя допускаютъ точную числовую формулировку и для которыхъ можно установить математически точное соотвѣтствіе между вытекающими изъ нихъ слѣдствіями и количественно формулированными законами природы. Поэтому современный физикъ чувствуетъ извѣстную неловкость, когда въ его присутствіи восхваляютъ греческихъ философовъ Левкиппа, Демокрита или римскаго философа Лукреція, какъ родоначальниковъ атомистической теоріи. Все то, что извѣстно намъ объ этой атомистикѣ древнихъ и объ ея позднѣйшихъ истолкованіяхъ, звучитъ для него почти какъ фантастическій вздоръ, ибо онъ не находитъ тамъ того, что считаетъ наиболѣе существеннымъ для физической теоріи: количественнаго соотвѣтствія съ численно формулированными законами природы. Но объ этомъ нельзя было и думать, пока физика носила лишь грубо качественный характеръ.

Какъ философская доктрина, атомистика, несомнѣнно, существуетъ уже больше двухъ тысячъ лѣтъ; но какъ точная физико-химическая теорія, она едва насчитываетъ отъ одного до двухъ столѣтій. Правда, еще Даніилъ Бернулли (Daniel Bernoulli, 1738 г.) высказалъ геніальную мысль, что законъ Бойля-Маріотта можетъ быть объясненъ очень просто, если предположить, что газы состоятъ изъ небольшихъ, прямолинейно движущихся частицъ; но болѣе важныя и болѣе общія доказательства, которыя могли, такъ сказать, принудить насъ къ принятію атомистики, были найдены лишь значительно позже.

На первомъ мѣстѣ здѣсь нужно, конечно, назвать открытіе Дальтона (Dalton) (1808 г.), ставшее съ тѣхъ поръ общепризнаннымъ основнымъ химическимъ закономъ подъ именемъ закона кратныхъ отношеній. Онъ представлялъ бы нѣчто совершенно загадочное и непонятное, если бы молекулы химическихъ соединеній не состояли изъ цѣлаго числа различныхъ атомовъ. Благодаря Дальтону атомистика стала основой химіи, и это значеніе ея ни разу не было серьезно поколеблено; химики съ тѣхъ поръ никогда не переставали мыслить атомистически, даже тогда, когда около двухъ десятилѣтій тому назадъ среди философовъ и физиковъ (Махъ, Оствальдъ) появилось, правда, временное, но сильное теченіе противъ атомистики.

Дальнѣйшей важной опорой для признанія атомистическаго строенія вещества послужилъ открытый Гаюи (Haüy) въ 1784 г. основной законъ кристаллографіи, а именно такъ называемый законъ раціональныхъ индексовъ, согласно которому параметры плоскостей кристалла относятся, какъ простыя раціональныя числа. Значеніе этого закона было вполнѣ оцѣнено лишь въ 1849 г. основателемъ современной теоріи кристаллическаго строенія Браве (Bravais). И до сихъ поръ физики обращаютъ еще слишкомъ мало вниманія на этотъ предметъ, хотя именно въ немъ совершенно наглядно обнаруживается строеніе вещества изъ дискретныхъ частицъ.

Въ области собственно физики существеннымъ дополненіемъ и опорой атомистики явился принципъ сохраненія энергіи, который непосредственно объяснялся тѣмъ взглядомъ, что теплота есть молекулярное движеніе, и что количество тепла соотвѣтствуетъ кинетической энергіи этого движенія. На соединеніи атомистики съ этимъ взглядомъ и покоится современная кинетически-атомистическая теорія, которая въ работахъ Клаузіуса (Clausius) и Максуелла (Maxwell) была впервые точно формулирована и использована для математическаго объясненія закона Бойля-Маріотта.

Въ этой стадіи, слѣдовательно, атомистика представляла собой уже хорошо обоснованную теорію, которая въ различныхъ научныхъ областяхъ очень простымъ и математически точнымъ способомъ выводила цѣлый рядъ основныхъ законовъ природы изъ того предположенія, что вещество состоитъ изъ дискретныхъ частицъ. Но въ извѣстномъ смыслѣ она все-таки оставалась еще лишь качественной теоріей, пока въ ней отсутствовала самая существенная количественная характеристика, а именно представленіе о величинѣ и числѣ этихъ частицъ.

И замѣчательно то, что обыкновенная химія которая все время имѣетъ дѣло съ атомами, самымъ точнымъ образомъ опредѣляетъ ихъ относительныя массы и изслѣдуетъ способъ ихъ группировки въ молекулѣ, все-таки не даетъ никакихъ данныхъ для опредѣленія абсолютной величины атомовъ. Для практическаго химика даже совершенно безразлично, чему равна абсолютная масса атома; онъ принимаетъ за единицу массу атома водорода, онъ знаетъ относительныя массы другихъ атомовъ по сравненію съ водородомъ, и эти числа, такъ называемые «атомные вѣса», вполнѣ достаточны ему для опредѣленія состава химическихъ соединеній и для провѣрки химическихъ формулъ.

Физики, правда, все время старались пополнить атомистическую теорію опредѣленіемъ этихъ основныхъ величинъ; но всѣ явленія, происходящія при термодинамически обратимыхъ процессахъ, не представляли для этого никакой возможности. Нужно, дѣйствительно, замѣтить, что всѣ до сихъ поръ упомянутыя явленія происходили бы совершенно одинаковымъ образомъ, какова бы ни была абсолютная величина атомовъ. Они протекали бы, напримѣръ, совершенно одинаково и въ томъ случаѣ, если-бы атомы были произвольно малы, даже безконечно малы, но число ихъ былобы безконечно велико; такимъ образомъ, можно былобы принять такую атомистику, которая видимо едва отличалась бы отъ теоріи непрерывности.

Но существуетъ другой классъ явленій, въ которыхъ величина и число атомовъ косвеннымъ образомъ имѣютъ значеніе; сюда относятся термодинамически необратимые процессы диффузіи, теплопроводности и внутренняго тренія, теорія которыхъ, съ этой точки зрѣнія, была развита отчасти Клаузіусомъ, отчасти Максуелломъ.

Та мысль, что математическая теорія этихъ процессовъ можетъ указать намъ путь къ опредѣленію величины атомовъ или, соотвѣтственно, молекулъ, повидимому, впервые пришла въ голову вѣнскому физику Лошмидту (Loschmidt), который развилъ ее подробнѣе въ своей знаменитой статьѣ «О величинѣ частицъ воздуха» («Zur Grösse der Luftmoleküle». Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1865).

Его методъ вычисленія покоится существеннымъ образомъ на предположеніи (которое считалось тогда почти самоочевиднымъ), что атомы или, вѣрнѣе, молекулы газа можно разсматривать, какъ твердые упругіе шары. Основную мысль Лошмидта можно пояснить слѣдующимъ образомъ. Если мы говоримъ, что нѣкоторое пространство заполнено воздухомъ, то это значитъ въ дѣйствительности, что бо́льшая часть этого пространства пуста и что молекулы кислорода и азота фактически занимаютъ лишь небольшую часть его, часть, которую можно приблизительно опредѣлить, если мы сгустимъ воздухъ въ жидкость посредствомъ давленія и охлажденія. По мнѣнію Лошмидта, молекулы въ этомъ случаѣ находятся почти во взаимномъ соприкосновеніи, между тѣмъ какъ въ газообразномъ состояніи онѣ отдѣлены другъ отъ друга относительно большими промежутками.

Въ такомъ случаѣ изъ этого „объема сгущенія“ (Condensationsvolumen) можно было бы легко опредѣлить ихъ число, если бы была извѣстна ихъ величина. Эту же послѣднюю можно вывести изъ такъ называемаго средняго свободнаго пути молекулъ въ газообразномъ состояніи, т. е. изъ длины того прямолинейнаго пути, который проходитъ газовая молекула между двумя послѣдовательными столкновеніями; при этомъ уже вполнѣ элементарное геометрическое разсужденіе, основанное на подобіи фигуръ, показываетъ, что при данномъ заполненіи пространства, но при различныхъ размѣрахъ сферическихъ молекулъ эта величина должна быть прямо пропорціональна діаметру молекулъ.

Съ другой стороны, легко сообразить, какимъ образомъ процессъ диффузіи (такъ же, какъ и два другихъ упомянутыхъ выше явленія) долженъ зависѣть именно отъ величины средняго свободнаго пути; въ самомъ дѣлѣ, диффузія (т. е. постепенное взаимное проникновеніе двухъ газовъ) должна, очевидно, происходить тѣмъ быстрѣе, чѣмъ длиннѣе пути, проходимые газовыми молекулами между двумя столкновеніями. Въ общемъ мы приходимъ къ тому, что при данномъ заполненіи пространства (и при данной температурѣ, такъ какъ отъ нея зависитъ скорость движенія) диффузія (то же относится и къ проводимости тепла и внутреннему тренію) должна происходить тѣмъ интенсивнѣе, чѣмъ больше молекулы газа, и тѣмъ слабѣе, чѣмъ онѣ меньше. Тотъ же выводъ вмѣстѣ съ значеніемъ коэффиціента пропорціональности получается изъ точныхъ математическихъ формулъ Клаузіуса и Максуелла. Впрочемъ, эта черта, а именно прямая зависимость скорости протеканія процесса отъ величины и числа молекулъ, характерна не только для упомянутыхъ выше, но и для другихъ термодинамически необратимыхъ молекулярныхъ процессовъ (напримѣръ, для проведенія электричества въ газахъ и электролитахъ).

Такимъ путемъ изъ двухъ экспериментально найденныхъ величинъ, а именно „объема сгущенія" и коэффиціента внутренняго тренія (вмѣсто послѣдняго можно было бы съ такимъ же успѣхомъ воспользоваться коэффиціентомъ диффузіи), Лошмидтъ получилъ для величины діаметра молекулъ воздуха значеніе, равное $1{,}18 \cdot 10^{-7}$ *см.* Такъ какъ молекулы кислорода и азота двухатомны, то этимъ самымъ дается одновременно и порядокъ величины атомовъ.

Это вычисленіе считалось въ началѣ очень гипотетичнымъ, хотя полученное число должно было казаться довольно вѣроятнымъ, такъ какъ оно, во всякомъ случаѣ, лежитъ значительно ниже того предѣла, до котораго удалось до сихъ поръ довести дѣлимость матеріи непосредственными, грубо механическими пріемами. Нѣкоторыя относящіяся сюда данныя окажутся, можетъ быть, небезынтересными. Такъ, употребляемое для золоченія листовое золото приготовляется обыкновенно настолько тонкимъ, что оно уже начинаетъ просвѣчивать зеленымъ цвѣтомъ; толщина его равна въ такомъ случаѣ 10^{-5} *см.*; по Фарадею, ее можно уменьшить прокатываніемъ до $5 \cdot 10^{-7}$ *см.* Самыя тонкія кварцевыя нити, приготовленныя Буа (Boys), были такъ тонки, что ихъ нельзя было разглядѣть въ микроскопъ. Существуютъ, повидимому, и бактеріи, величина которыхъ лежитъ ниже предѣла микроскопической видимости, т. е. ниже $2 \cdot 10^{-5}$ *см.* Въ введенныхъ 10 лѣтъ тому назадъ ультрамикроскопахъ предѣлъ (расплывчатой) видимости отодвинутъ еще значительно дальше. При ихъ помощи Зидентопфъ (Siedentopf) и Жигмонди (Zsigmondi) констатировали въ золоторубиновомъ стеклѣ существованіе зеренъ золота порядка величины $5 \cdot 10^{-7}$ *см.* Толщина мыльныхъ пузырей по Друде, Рейнольду, Рюккеру и Джогонотту (Drude, Reinold, Rücker, Johonott) можетъ быть уменьшена до предѣла отъ 17 до $6 \cdot 10^{-7}$ *см.*

Всѣ эти предѣльныя значенія прекрасно согласуются съ атомистической теоріей, если тѣ составныя части, изъ которыхъ состоитъ вещество, имѣютъ полученную Лошмидтомъ величину порядка одной милліонной доли *мм.* Но эти данныя не представляютъ еще настоящаго подтвержденія результата Лошмидта, они указываютъ лишь, что этотъ результатъ допустимъ, поскольку онъ лежитъ ниже предѣла, установленнаго непосредственнымъ наблюденіемъ.

Съ другой стороны, нижній предѣлъ допустимой величины молекулы былъ данъ, повидимому, въ работахъ лорда Кельвина (Kelvin), который спустя нѣсколько лѣтъ послѣ Лошмидта указалъ, что нѣкоторыя явленія,—напримѣръ, электризація черезъ прикосновеніе и капиллярныя явленія—приводятъ къ противорѣчію съ общепринятыми физическими законами, если принять, что вещество въ частицахъ порядка величины 10^{-8} *см.* обладаетъ еще тѣми же свойствами, что и въ обыкновенныхъ тѣлахъ. Впрочемъ, и эти данныя нельзя еще разсматривать, какъ опредѣленіе величины атомовъ въ прежнемъ смыслѣ этого слова; это скорѣе есть лишь качественная оцѣнка ихъ сферы дѣйствія. Можно было бы даже легко представить себѣ вполнѣ непрерывную среду съ дѣйствующими въ ней извѣстнаго рода силами (въ родѣ той, которую принялъ Лапласъ въ своей теоріи капиллярности), которая въ тонкихъ слояхъ обладала бы другими свойствами, чѣмъ въ массивномъ состояніи. По тѣмъ же причинамъ и многія другія подобныя оцѣнки, данныя различными авторами, не представляютъ, въ сущности, дѣйствительнаго рѣшенія нашего вопроса.

Методъ, предложенный Лошмидтомъ, оставался долгое время единственнымъ для количественнаго опредѣленія величины молекулъ; примѣненіе его было только усовершенствовано, съ одной стороны, благодаря болѣе точнымъ экспериментальнымъ даннымъ относительно явленій, связанныхъ съ средней величиной свободнаго пути, а съ другой стороны — благодаря болѣе точному опредѣленію пространства, занимаемаго молекулами. Относительно послѣдняго приходится принять, что и въ жидкостяхъ молекулы не заполняютъ совершенно всего пространства, а оставляютъ еще опредѣленные свободные промежутки. Поэтому представляется, повидимому, гораздо правильнѣе замѣнить „объемъ сгущенія“ экспериментально опредѣлимой величиной b изъ уравненія фанъ-деръ-Ваальса; согласно выводу этого уравненія эта величина обозначаетъ учетверенный дѣйствительно занимаемый молекулами объемъ. Другіе методы были даны Дорномъ (Dorn) и Экснеромъ (Exner), которые воспользовались для этого діэлектрической постоянной газовъ и связаннымъ съ ней показателемъ преломленія. Они соединяли свои разсужденія съ теоріей діэлектриковъ Клаузіуса и Мозотти (Mosotti), которая разсматриваетъ атомы, какъ лежащіе въ пустотѣ шарики, проводящіе электричество, и которая, исходя изъ этого предположенія, позволяетъ вычислить изъ діэлектрической постоянной коэффиціентъ заполненія пространства.

Но эти попытки усовершенствованія не привели все-таки къ вполнѣ удовлетворительному результату, такъ какъ, хотя различные способы вычисленія и привели къ числамъ одинаковаго порядка величины, различія все-таки значительно превосходили предѣлъ ошибокъ наблюденія. Въ своей извѣстной книгѣ „О кинетической теоріи газовъ“ (1899 г.) О. Э. Майеръ (O. E. Meyer) подробно обсуждаетъ этотъ вопросъ и при помощи различныхъ методовъ Лошмидта, Дорна, Экснера и фанъ-деръ-Ваальса получаетъ размѣры діаметра молекулы, которые, напримѣръ, для водорода колеблются между $3 \cdot 10^{-7}$ *см.* и $0{,}14 \cdot 10^{-7}$ *см.* Еще серьезнѣе оказывается различіе въ вытекающихъ отсюда опредѣленіяхъ числа молекулъ, такъ какъ это послѣднее (при данной средней длинѣ свободнаго пути) обратно пропорціонально квадрату этихъ чиселъ и, слѣдовательно, колеблется, смотря по методу опредѣленія, въ отношеніи 1 : 400. Изъ этихъ различныхъ чиселъ О. Э. Майеръ, (правда, безъ достаточнаго обоснованія) выбралъ, какъ наиболѣе вѣроятныя значенія для діаметра молекулы $0{,}2 \cdot 10^{-7}$ *см* и для числа молекулъ, содержащихся въ 1 *кб. см.* газа, $n = 6 \cdot 10^{19}$, и благодаря его авторитету эти числа считались общепризнанными вплоть до самаго послѣдняго времени.

(Окончаніе слѣдуетъ).

50-лѣтній юбилей Е. М. Пржевальскаго.

20 февраля 1913 г. исполнилось 50 лѣтъ учебно-педагогической дѣятельности генералъ-маіора Евгенія Михайловича Пржевальскаго, автора многихъ работъ по элементарной математикѣ, пользующихся извѣстностью въ математическомъ мірѣ.

Вотъ эти работы: 1) «Элементарная алгебра» (4 изданія); 2) «Собраніе алгебраическихъ задачъ» (7 изд.); 3) «Собраніе алгебраическихъ задачъ для учениковъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній», части I, II и III; 4) «Пятизначныя таблицы логариѳмовъ» (19 изд.); 5) «Начальная геометрія»; 6) «Собраніе геометрическихъ теоремъ и задачъ» (9 изд.); 7) «Прямолинейная тригонометрія и собраніе тригонометрическихъ задачъ» (8 изд.); 8) «Аналитическая геометрія» (на плоскости и въ пространствѣ) и «Собраніе задачъ изъ аналитической геометріи» (5 изд.).

Эти работы совмѣщаютъ въ себѣ научныя и педагогическія достоинства и являются цѣннымъ вкладомъ въ учебную литературу по элементарной математикѣ.

Отличаясь энергіей и работоспособностью, Е. М. Пржевальскій не ограничивается одною учебно-педагогическою дѣятельностью: такъ, онъ состоитъ членомъ Правленія Института для дворянъ имени Императора Александра III въ память Императрицы Екатерины II, почетнымъ членомъ Московскаго Столичнаго Попечительства о народной трезвости, почетнымъ членомъ Общества шелководства. Много лѣтъ пробылъ онъ вицепрезидентомъ Общества сельскихъ хозяевъ и былъ однимъ изъ учредителей Московскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Съ 1887 г. онъ состоитъ депутатомъ дворянства отъ Верейскаго уѣзда.

Е. М. Пржевальскій родился 15 января 1844 г. и происходитъ изъ дворянъ Смоленской губ.

Рано оставшись сиротой, Е. М. сначала поступилъ въ Смоленскую гимназію, гдѣ обучались его старшіе братья — Николай Михайловичъ, извѣстный русскій путешественникъ и изслѣдователь Центральной Азіи, и Владиміръ Михайловичъ, извѣстный общественный дѣятель г. Москвы и присяжный повѣренный.

Въ гимназіи Е. М. пробылъ недолго и вскорѣ поступилъ въ Александровскій Кадетскій корпусъ, гдѣ обучался математикѣ у извѣстнаго по тому времени математика Н. Н. Алексѣева, который обратилъ особое вниманіе на математическія способности Е. М. Пржевальскаго и имѣлъ большое вліяніе на его математическое развитіе.

По окончаніи Московскаго университета въ качествѣ вольнослушателя, Е. М. отдался педагогической дѣятельности. Онъ пробылъ много лѣтъ преподавателемъ военнаго училища. Его учениками были, между прочимъ, бывшій министръ путей сообщенія фонъ-Шауфусъ, бывшій военный министръ Сахаровъ, бывшій министръ народнаго просвѣщенія Глазовъ и много другихъ военныхъ дѣятелей.

Офиціально чествовался юбилей Е. М. Институтомъ Московскаго дворянства и неофиціально Александровскимъ Военнымъ училищемъ. Отъ другихъ чествованій Е. М. по скромности отказался. Въ день юбилея Е. М. получилъ много привѣтствій отъ разныхъ обществъ и лицъ, — между прочимъ, отъ Московскаго Математическаго Кружка и отъ редакціи «Математическаго Образованія». Несмотря на почтенный возрастъ, Е. М. полонъ жизни и энергіи и, помимо продолженія учебно-литературной дѣятельности, принимаетъ горячее участіе въ жизни Института Московскаго дворянства.

Пожелаемъ юбиляру здравствовать еще многіе годы и съ прежней энергіей продолжать свою плодотворную учебно-педагогическую дѣятельность.

Д. В.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Я. Перельманъ. *Занимательная физика.* 140 парадоксовъ, задачъ, опытовъ, замысловатыхъ вопросовъ и пр. Съ 164 рис. въ текстѣ. Изданіе П. Сойкина. С.-Пб., 1913. Стр. 211. Ц. 1 руб.

Книга эта — дѣйствительно занимательная физика уже по однимъ тѣмъ занимательнымъ опытамъ, задачамъ и физическимъ парадоксамъ, которые въ ней такъ просто и интересно описаны. Здѣсь затрагиваются вопросы физики, имѣющіе, главнымъ образомъ, общеобразовательное значеніе; поэтому эту книгу можно особенно рекомендовать ученикамъ среднихъ школъ, какъ для упражненій, такъ и для умственнаго развлеченія. Матеріалъ «занимательной физики» расположенъ по главамъ такъ: сложеніе и разложеніе движеній и силъ, сила тяжести, вращательное движеніе, борьба съ пространствомъ, сопротивленіе среды, свойства жидкостей, свойства газовъ, теплота, распространеніе свѣта, отраженіе и преломленіе свѣта, зрѣніе и звукъ. Изъ опытовъ въ книгу включены преимущественно тѣ, которые не только поучительны или занимательны, но и могутъ быть выполнены при помощи предметовъ, всегда находящихся подъ рукой. Кромѣ того, въ этой книгѣ изложены нѣкоторые вопросы, не разсматриваемые обычно учебниками; напримѣръ: «теорія бумеранга», «опыты съ мыльными пузырями», «задача о солнечномъ восходѣ», «вселенная въ спектроскопѣ», «какъ видятъ рыбы» и т. п.; но есть и недостатокъ въ книгѣ — отсутствіе главы о магнетизмѣ и электричествѣ. Весь матеріалъ книги хорошо распредѣленъ, а поэтому задачи и опыты «занимательной физики» идутъ въ строгой послѣдовательности, что также является однимъ изъ достоинствъ книги. Внутреннее содержаніе, много иллюстрацій, прекрасный внѣшній видъ книги и очень незначительная цѣна — все это служитъ залогомъ ея широкаго распространенія.

Пожелаемъ же ей успѣха у нашей учащейся молодежи, которая всегда любитъ и цѣнитъ поучительное и занимательное.

Н. Каменьщиковъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 106 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^5 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^5.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 107 (6 сер.). Черезъ данную точку провести къ двумъ окружностямъ сѣкущую такъ, чтобы сумма квадратовъ полученныхъ хордъ имѣла данное значеніе.

И. Александровъ (Москва).

№ 108 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 + 5x - 6 = 0.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 109 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin 2x - \frac{40(\sin^3 x + \cos^3 x)}{16 \sin x + 25 \cos x} = 0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Кларкъ. *Общедоступная исторія астрономіи въ XIX столѣтіи.* Перевелъ съ англійскаго В. В. Серафимовъ, прив.-доц. Императорскаго С.-Петербургскаго Университета. Изданіе „Mathesis". Одесса, 1913. Стр. 664. Ц. 4 руб.

Ф. Н Индриксонъ. *Начальныя работы по физикѣ.* III. Движеніе тѣла подъ вліяніемъ силы. Ученіе о свѣтѣ. Стр. 100. Ц. 30 коп.

К. Б. Пеніонжкевичъ. *Систематическій сборникъ задачъ по элементарной физикѣ.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Выпускъ I. „Механика, гидростатика и аэростатика". Изданіе второе (переработанное). Изданіе С. А. Козловскаго. Бѣлая Церковь, 1912. Стр. 132. Ц. 70 к.

С. Ѳ. Болотовъ. *Основные законы энергетики и главнѣйшій методъ ея.* Ростовъ н./Д. Стр. 65.

П. Н. Ушаковъ. *Происхожденіе химическихъ элементовъ и теорія распада атомовъ.* Съ приложеніемъ генетической таблицы элементовъ. Саратовъ, 1913.

Э. Л. Радловъ. *Владиміръ Соловьевъ.* Жизнь и ученіе. Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 267. Ц. 1 р. 50 к.

Новыя идеи въ біологіи. Неперіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей профессоровъ В. А. Вагнера и Е. А. Шульца. Сборникъ № 1. „Что такое жизнь?". Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 140. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ педагогикѣ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей Г. Г. Зоргенфрея. Сборникъ № 2. „Трудовая школа". Кн-ство „Образованіе". СПб., 1913. Стр. 148. Ц. 80 к.

Д. Л. Волковскій. *Дѣтскій міръ въ числахъ.* Для начальныхъ школъ. Для перваго года обученія. Съ рисунками. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1913. Стр. 80. Ц. 20 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется