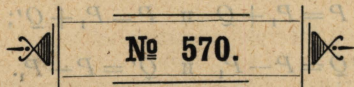


Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 570.

Содержаніе: О преобразованіи многогранниковъ. *Прив.-доц В. Ф. Кагана.* — Новая физика. *А. Риги.* — Зодіакальный свѣтъ. *Ф. Генкеля.* — Интуиція и опытъ при преподаваніи математики въ средней школѣ. *Проф. Д. Е. Смиа.* — Задача на премію № 6. *Прив.-доц. Е. Буничаго.* — Научная хроника: Жидкій воздухъ, какъ изоляторъ. *М. Я.* — Библиографія. II. „Библіотека элементарной математики“ изданіе книгоиздательства „Mathesis“. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.* — Рѣшеніе задачъ: № 23 (6 сер.) — Объявленія.

О преобразованіи многогранниковъ.

Прив. доц. В. Кагана.

Докладъ, прочитанный въ Общемъ Собраніи Перваго Всероссійскаго
Съѣзда Преподавателей Математики.

§ 1. Постановка задачи.

При доказательствѣ основной теоремы о равновеликости двухъ пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, геометрія искони прибѣгаетъ къ методу предѣловъ, разсматривая пирамиды, какъ предѣлы вписанныхъ и описанныхъ призмъ. Помимо дидактическихъ трудностей (учащіеся не даромъ назвали эту фигуру чертовой лѣстницей), появленіе здѣсь метода предѣловъ сначала представляется страннымъ по существу. Когда мы доказываемъ равновеликость прямолинейныхъ фигуръ въ планиметрій, мы не только не прибѣгаемъ къ предѣламъ, но пользуемся наиболѣе элементарными средствами. Именн., для этой цѣли примѣняются два приема, изъ которыхъ одинъ въ германской литературѣ принято называть методомъ разложенія (*Zerlegungsmethode*), а другой методомъ дополненія (*Ergänzungsmethode*). Методъ разложенія заключается въ томъ, что для доказательства равновеликости двухъ фигуръ одну изъ нихъ разрѣзываютъ на части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можетъ быть составлена вторая фигура. Такъ, для доказательства равновеликости параллелограммовъ $(Q) ABCD$ и $(Q') A'B'CD$ (фиг. 1) мы первый разлагаемъ на треугольникъ P_1 и трапецію P_2 , изъ которыхъ въ иномъ рас-

положении составляется второй параллелограммъ. Можно сказать, что методъ разложенія заключается въ томъ, что фигуры представляются, какъ суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей. Методъ дополненія заключается въ томъ, что къ обоимъ многоугольникамъ различнымъ образомъ присоединяются конгруэнтные многоугольники такъ, что въ результатъ получаются конгруэнтныя фигуры. Чтобы доказать равновеликость параллелограммовъ Q ($ABCD$) и Q' ($A'B'CD$) (фиг. 2) къ нимъ присоединяють конгруэнтные треугольники ADA' и BCB' (P_1) и такимъ образомъ дополняютъ до трапеціи P ($AB'CD$); такъ что

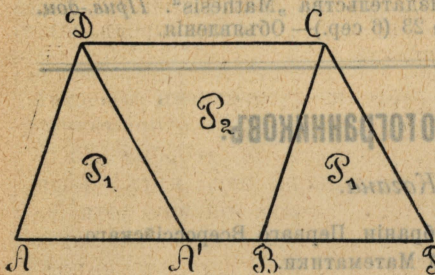
$$P = P_1 + Q \text{ и } P = P_1 + Q';$$

откуда

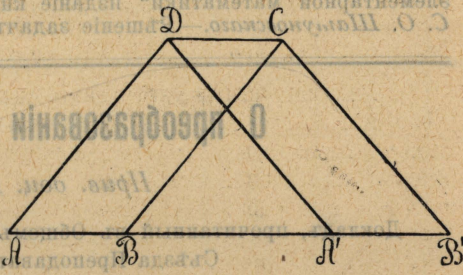
$$Q = P - P_1 \text{ и } Q' = P - P_1.$$

Методъ дополненія заключается, слѣдовательно, въ томъ, что оба многоугольника представляются въ видѣ разности конгруэнтныхъ многоугольниковъ.

Очень часто комбинируются оба приѣма; въ такомъ случаѣ дѣло сводится къ тому, что оба многоугольника представляются въ видѣ



Фиг. 1.



Фиг. 2.

алгебраической суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ многоугольниковъ. Примѣненіе обоихъ приѣмовъ даетъ обыкновенно лучшіе результаты въ томъ смыслѣ, что доказательства получаются наиболѣе простыя. Но, какъ оказывается, необходимости въ примѣненіи обоихъ приѣмовъ нѣтъ. — Въ 1895 г. проф. Лаццери доказалъ *), что эквивалентность двухъ многоугольниковъ, когда таковая имѣетъ мѣсто, всегда можетъ быть доказана методомъ разложенія. Иными словами, проф. Лаццери доказалъ слѣдующую замѣчательную теорему:

Если два многоугольника равновелики, то любой изъ нихъ всегда можно разрѣзать на конечное число частей, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можно составить второй многоугольникъ

Иначе: два равновеликихъ многоугольника всегда могутъ быть составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей, взятыхъ въ конечномъ числѣ.

*) G. Lazzari. „Sulla teoria della equivalenza geometrica“. Periodico di matematica. 10. 1895. G. Sforza. A proposito della nota del prof. Lazzari sulla teoria dell'equivalenza geometrica“. Ibidem.

Въ частности, каждый многоугольникъ можно такимъ путемъ превратить въ квадратъ, т. е. каждый многоугольникъ можно разрѣзать на такія части, изъ которыхъ при иномъ расположеніи ихъ составляется равновеликій этому многоугольнику квадратъ.

Доказательство проф. Лапцери отличается полной элементарностью, но за недостаткомъ времени я не имѣю возможности его здѣсь приводить; въ настоящемъ докладѣ я желалъ бы сосредоточить ваше вниманіе на другой сторонѣ дѣла, на доказательствахъ равновеликости многогранниковъ.

Казалось бы, что и здѣсь доказательство слѣдуетъ вести въ томъ же порядкѣ идей — методами разложенія и дополненія. И дѣйствительно, при доказательствѣ равновеликости многогранниковъ чаще всего и находятъ себѣ примѣненіе эти приемы. Съ помощью ихъ мы доказываемъ равновеликость параллелепипедовъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, а также равновеликость прямой и наклонной призмы при извѣстныхъ условіяхъ. Но, когда мы обращаемся къ доказательству равновеликости пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, то эти приемы отказываются служить: какъ я уже сказалъ, геометрія искони приобѣгаетъ здѣсь къ методу предѣловъ; мы находимъ его уже въ XII книгѣ Евклида.

Гдѣ источникъ этого затрудненія? Коренится ли оно въ существѣ дѣла или оно обуславливается тѣмъ, что мы не умѣемъ примѣнить здѣсь прежнихъ методовъ. Иначе говоря, можетъ ли теорема Лапцери быть распространена и на многогранники или нѣтъ? Если каждый многогранникъ можетъ быть путемъ разложенія или хотя бы путемъ разложенія и дополненія преобразованъ въ любой равновеликій ему многогранникъ, то нужно будетъ только указать, какъ это выполнить по отношенію къ трехграннымъ пирамидамъ, и предѣлы будутъ изъ этого отдѣла геометріи изгнаны. Если же обнаружится, что многогранники въ-этомъ отношеніи кореннымъ образомъ отличаются отъ многоугольниковъ, т. е. если будетъ доказано, что существуютъ, скажемъ, равновеликія пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами, которыя не могутъ быть преобразованы одна въ другую разложеніемъ и дополненіемъ, то тогда ясно, что заставило ввести въ этомъ пунктѣ предѣлы.

Надѣ разрѣшеніемъ этой задачи немало трудились, но безуспѣшно. Не только не удавалось доказать, что всякій многогранникъ можетъ быть преобразованъ въ любой другой равновеликій ему многогранникъ, но даже построить одну пирамиду, которую удалось бы разрѣзать на части такъ, чтобы изъ нихъ можно было составить кубъ, даже это оказалось задачей отнюдь не изъ легкихъ. Въ математическомъ кабинетѣ Гёттингенскаго университета имѣются только двѣ такія модели*), изъ которыхъ

*) C. Juel „Egalité par addition de quelques polyèdres“ Kjobenhavn, Overs. Vid. Selsk. 1903. Небольшой рефератъ объ этой работѣ подъ заглавіемъ „Ueber das Volumen der Pyramide“ помѣщенъ въ XII томѣ журнала „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“.

Hill. Proceedings of the London Math. Society. Vol. XXVII.

одна указана датскимъ математикомъ Д жюлемъ, а другая англійскимъ математикомъ Г и л л о мъ.

Въ 1900 г. на I Международномъ Математическомъ Конгрессѣ профессоръ Гёттингскаго университета Д. Гильбертъ произнесъ рѣчь подъ названіемъ „Математическія проблемы“. Въ этой рѣчи онъ сконцентрировалъ рядъ задачъ, разрѣшеніе которыхъ поглотило уже немало усилій, не давшихъ еще благопріятныхъ результатовъ. Онъ указалъ важнѣйшія изъ этихъ проблемъ, на которыхъ должно быть сосредоточено вниманіе математиковъ. Третья изъ этихъ 23 проблемъ и есть задача о преобразованіи многогранниковъ*). Задача поставлена здѣсь Гильбертомъ такъ: Можетъ ли всякій тетраэдръ быть преобразованъ въ любой равновеликій тетраэдръ методомъ разложенія?

Черезъ два года ученикъ Гильберта, М. Денъ, нынѣ профессоръ въ Мюнстерѣ, опубликовалъ въ журналѣ „Mathematische Annalen“ статью, содержащую отвѣтъ на этотъ вопросъ**).

Статья Дена содержитъ даже больше, чѣмъ одинъ только отвѣтъ на этотъ вопросъ. Онъ доказываетъ, что многогранники, могущіе быть преобразованы одинъ въ другой путемъ разложенія или дополненія, должны удовлетворять условію, заключающемуся въ слѣдующемъ.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ суть двугранные углы одного многогранника, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ двугранные углы второго многогранника, выраженные въ частяхъ прямого угла, то существуютъ такія цѣлыя положительныя числа A_1, A_2, \dots, A_m и $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ и такое цѣлое (положительное или отрицательное) число k , что

$$(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_m\alpha_m) - (B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \dots + B_n\beta_n) = 2kd. \quad (1)$$

А такъ какъ, далѣе, существуютъ равновеликіе многогранники, для которыхъ условіе (1) не выполняется, то отсюда слѣдуетъ, что равновеликіе многогранники не всегда могутъ быть этимъ путемъ преобразованы другъ въ друга; напротивъ, какъ мы увидимъ ниже, возможность такого преобразованія является рѣдкимъ исключеніемъ.

Работа Дена написана крайне сжато и доступна только специалистамъ. Когда она появилась въ свѣтъ, я поручилъ одному изъ своихъ учениковъ, г. Рейтеру, изложить это изслѣдованіе въ болѣе доступной формѣ для опубликованія въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“. Я долженъ сказать, однако, что лишь скрѣпя сердце помѣстилъ эту статью; она осталась мало доступной, хотя г. Рейтеръ несомнѣнно сдѣлалъ все возможное, чтобы изложить эти идеи возможно яснѣе.

Но въ виду фундаментальной важности теоремы Дена меня неотступно занимала мысль найти иное болѣе простое доказательство этого

*) D. Hilbert, „Les problèmes mathématiques“ Comptes Rendus du Congrès International Mathématique, Paris 1900. См. также „Göttingener Nachrichten“ 1900.

**) M. Dehn, „Ueber Raungleiche Polyeder“ Göttingener Nachrichten 1900, „Ueber den Rauminhalt“ Mathematische Annalen. 55. 1901.

предложенія. Черезъ два года мнѣ дѣйствительно удалось найти неизмѣримо болѣе простое доказательство теоремы Дена, основанное на совершенно иномъ принципѣ. Это доказательство было мною опубликовано въ 57 томѣ „Mathem. Annalen“^{*)}. Но и послѣ этого я не разъ возвращался къ той же проблемѣ и внесъ въ нее значительныя упрощенія. Мнѣ кажется, что въ этомъ упрощенномъ видѣ, мнѣ удастся изложить Вамъ это доказательство и сдѣлать изъ него необходимые выводы.

§ 2. Нѣсколько словъ объ однородныхъ уравненіяхъ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ разсужденіямъ геометрическаго характера, мнѣ необходимо нѣсколько остановиться на системѣ линейныхъ однородныхъ уравненій.

Положимъ, что мы имѣемъ рядъ линейныхъ однородныхъ уравненій, связывающихъ n неизвѣстныхъ

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

именно:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_nx_n = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \dots + k_nx_n = 0.$$

Если такая система имѣетъ рѣшенія, отличныя отъ нуля, точнѣе, если этимъ уравненіемъ удовлетворяютъ значенія, которые не всѣ сводятся къ нулю, то число независимыхъ уравненій въ этой системѣ меньше числа неизвѣстныхъ (n); остальные же, если таковыя существуютъ представляютъ собой слѣдствія предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы допустить, что среди уравненій (1) имѣется n независимыхъ, то они имѣли бы только одну систему рѣшеній и именно:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0.$$

Если, слѣдовательно, помимо нулевыхъ рѣшеній имѣются другія, которыя не сводятся всѣ къ нулю, то число независимыхъ уравненій h въ системѣ (1) меньше n .

Но отсюда слѣдуетъ, далѣе, что такая система уравненій имѣетъ также безчисленное множество системъ цѣлыхъ рѣшеній, если только коэффициенты этихъ уравненій рациональны.

Въ самомъ дѣлѣ, если среди уравненій (1) имѣется h независимыхъ уравненій, а остальные представляютъ собой слѣдствія этихъ

*) B. Kagan. „Ueber die Transformation der Polyeder“, Leipzig. Mathematische Annalen, 1903.

последнихъ, то изъ независимыхъ уравненій можно опредѣлить h неизвѣстныхъ x_1, x_2, x_3, x_h въ зависимости отъ остальныхъ; получимъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_{h+1} + A_2 x_{h+2} + \dots + A_{n-h} x_n, \\ x_2 &= B_1 x_{h+1} + B_2 x_{h+2} + \dots + B_{n-h} x_n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_h = G_1 x_{h+1} + G_2 x_{h+2} + \dots + G_{n-h} x_n,$$

гдѣ коэффициенты A, B, C, \dots, G суть рациональныя числа. Теперь мы можемъ дать неизвѣстнымъ $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ произвольныя значенія, и тогда уравненія (2) опредѣляютъ значенія остальныхъ неизвѣстныхъ x_1, x_2, \dots, x_h . Если мы дадимъ неизвѣстнымъ $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ рациональныя значенія, то при рациональныхъ коэффициентахъ и остальные неизвѣстныя получатъ рациональныя значенія. Значенія всѣхъ неизвѣстныхъ мы можемъ привести къ одному знаменателю, такъ что получимъ

$$x_1 = \frac{M_1}{M}, \quad x_2 = \frac{M_2}{M}, \quad \dots, \quad x_h = \frac{M_h}{M}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{M_n}{M}. \quad (3)$$

Но если однороднымъ уравненіямъ удовлетворяютъ нѣкоторыя значенія неизвѣстныхъ, то мы получимъ другія значенія, удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ, если помножимъ первыя на одно и то-же число. Если помножимъ поэтому значенія (3) на M , то получимъ цѣлыя числа

$$x_1 = M_1, \quad x_2 = M_2, \quad \dots, \quad x_n = M_n.$$

удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ.

Но для насъ имѣетъ важное значеніе еще одна подробность. Уравненіямъ (1) можно удовлетворить иррациональными, рациональными и цѣлыми значеніями для неизвѣстныхъ. Но если можно подобрать какую-либо систему рѣшеній, хотя бы даже иррациональных, но составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ (конечно, отличныхъ отъ нуля), то уравненія имѣютъ также систему цѣлыхъ рѣшеній, составленныхъ изъ положительныхъ же чиселъ (опять таки, конечно, отличныхъ отъ нуля). Въ самомъ дѣлѣ, если уравненія имѣютъ систему рациональныхъ положительныхъ рѣшеній, то, умноживъ ихъ на общаго знаменателя, получимъ систему цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Положимъ теперь, что уравненіемъ (1) удовлетворяютъ положительные значенія

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_h, l_{h+1}, l_{h+2}, \dots, l_n, \quad (4)$$

среди которыхъ есть и иррациональныя. Это значитъ, если мы неизвѣстнымъ

$$x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n,$$

дадимъ значенія

$$l_{h+1}, l_{h+2}, \dots, l_n, \quad (5)$$

то неизвѣстныя

$$x_1, x_2, \dots, x_h$$

изъ уравненій (2) получать значенія

$$l_1, l_2, \dots, l_h. \quad (6)$$

Въ первой группѣ необходимо имѣются ирраціональныя значенія, такъ какъ иначе всѣ неизвѣстныя получили бы раціональныя значенія. Но формулы (2) обнаруживаютъ, что значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ измѣняются непрерывно, когда мы непрерывно измѣняемъ значенія неизвѣстныхъ. Если поэтому при положительныхъ значеніяхъ (5) неизвѣстныхъ $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ первые неизвѣстныя (x_1, x_2, \dots, x_h) получаютъ положительныя значенія, то мы получимъ другія положительныя же значенія для неизвѣстныхъ x_1, x_2, \dots, x_h , если возьмемъ для $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ иныя значенія, достаточно близкія къ числамъ (5). Но сколько угодно близко къ ирраціональному числу имѣются раціональныя числа; мы можемъ, слѣдовательно, второй группѣ неизвѣстныхъ дать раціональныя положительныя значенія, настолько мало отличающіяся отъ чиселъ (5), что остальные неизвѣстныя сохранять положительныя значенія, хотя и станутъ раціональными. Получивъ же систему положительныхъ раціональныхъ рѣшеній, мы можемъ отъ нихъ перейти къ системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Итакъ, если система однородныхъ линейныхъ уравненій удовлетворяется значеніями, отличными отъ нуля, то она допускаетъ также системы цѣлыхъ рѣшеній. Если же она имѣетъ хоть одну систему рѣшеній, составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ, то она допускаетъ систему цѣлыхъ рѣшеній, также составленную изъ положительныхъ чиселъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Новая физика.

А. Риги.

Рѣчь, произнесенная при открытіи V-го Съѣзда Итальянскаго Общества содѣйствія прогрессу науки.

Милостивыя государыни и милостивые государи!

Въ исторіи человѣческой мысли физика занимаетъ выдающееся мѣсто и, повидимому, ей предстоитъ сохранить его и въ будущемъ, если принять во вниманіе то вліяніе, которое она оказала и все еще оказываетъ на развитіе многихъ другихъ наукъ, и важность — какъ практическую, такъ и философскую — тѣхъ результатовъ, къ которымъ

она привела. Въ послѣдніе годы, благодаря изслѣдованіямъ и опытамъ, на первый взглядъ какъ будто бы имѣющимъ лишь ограниченное значеніе, но въ дѣйствительности чрезвычайно важнымъ, она сама развилась и расширилась съ быстротой, вызывающей глубокое изумленіе.

Я говорю, конечно, о чистой физикѣ, о той наукѣ, которая мало думаетъ о практическихъ примѣненіяхъ своихъ открытій и не заботится о матеріальныхъ выгодахъ для сдѣлавшихъ эти открытія,—о наукѣ, которая выше всего ставитъ высокую задачу установить тѣ великіе законы, управляющіе явленіями въ неодушевленной природѣ, и дать для нихъ какое нибудь пріемлемое объясненіе; я говорю о той наукѣ, которая заслуживаетъ названія естественной философіи, какъ ее долгое время называли прежде и какъ ее часто называютъ еще и теперь, особенно въ Англіи.

Я чувствую, конечно, что эти мои слова защиты меня легко могутъ заклеить, какъ преувеличеніе, или, въ лучшемъ случаѣ, могутъ посмотрѣть на нихъ снисходительно, какъ на слова влюбленнаго, въ которомъ страсть затмеваетъ разумъ. Но если я сумѣю хоть сколько нибудь успѣшно выполнить задачу, которую я себѣ поставилъ, если мнѣ удастся въ краткой рѣчи, обращенной къ аудиторіи, избранной и привыкшей къ научному мышленію, но все таки въ большинствѣ не посвятившей себя специально этой наукѣ, дать ясное представленіе о новомъ и многообещающемъ направленіи въ физикѣ, тогда вы сумѣете бслѣе правильно оцѣнить мои слова и признаете, что въ нихъ есть твердое основаніе, что они правдивы и справедливы.

Задача эта трудна, и, можетъ быть, для достойнаго ея выполненія окажутся недостаточными всѣ мои усилія. Поэтому мнѣ, можетъ быть, не слѣдовало бы вовсе за нее браться; но мою нерѣшительность побѣдило желаніе почтить науку, которой я посвятилъ всю свою энергію, съ тѣхъ поръ какъ научился владѣть мыслью, и любезная настойчивость президента нашего Общества, съ которымъ меня вотъ уже четверть вѣка связываетъ самая сердечная дружба.

Рѣчь моя не будетъ изящной и красивой, какой она должна была бы быть въ этой обстановкѣ; мнѣ придется войти въ подробности и касаться вещей незначительныхъ или могущихъ показаться таковыми; но передо мною опредѣленная цѣль, и я долженъ выбрать лучший путь для ея достиженія, принося все въ жертву краткости и ясности.



Эпоха гипотетическихъ невѣсомыхъ жидкостей, придуманныхъ и допущенныхъ въ качествѣ субстрата физическихъ явленій, давно отошла уже въ область прошлаго; далека отъ насъ теперь и волнообразная теорія въ той формѣ, которую ей придать Френель, и съ помощью которой по изгнаніи свѣтоносной жидкости были произведены удивительно полныя и стройныя изслѣдованія явленій излученія. Теперь въ этой области господствуетъ электромагнитная теорія свѣта, большей частью которой мы обязаны гению Максвелла и согласно

которой всё эти явления сводятся въ концѣ концовъ къ электрическимъ процессамъ. Она пробивалась мало по малу и утвердилась окончательно, когда Герцъ своими простыми и остроумными опытами далъ ей прочное экспериментальное основаніе. Другіе продолжали работу этого великаго физика, столь преждевременно отнятаго у науки, укрѣпили ея основы и сдѣлали ее легко понятной, показавъ при помощи разнообразныхъ опытовъ, что всякій фактъ относящійся къ оптикѣ или къ тепловымъ излученіямъ, можно точно воспроизвести при помощи достаточно быстрыхъ электрическихъ колебаній или быстро и правильно чередующихся короткихъ токовъ. Колебанія этого рода образуютъ, на примѣръ, при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ условіяхъ разрядъ конденсатора, который, какъ всѣмъ извѣстно, можно получить, соединивши обѣ его обкладки, заряженные разноименными электричествами.

Эти опыты безусловно подтвердили то, что избранные умы предвидѣли уже и раньше, а именно, что электрическія и магнитныя силы не принадлежать, какъ это долгое время предполагали, къ силамъ, дѣйствующимъ на разстояніе и мгновенно, но что онѣ представляютъ собой проявленіе внутреннихъ силъ того мірового ээира, необходимость существованія котораго доказана, такъ какъ онъ объясняетъ намъ большое количество фактовъ; передаются же эти силы не мгновенно, но со скоростью около 300 000 км. въ секунду.

Такимъ образомъ, субстанція-электричество вмѣстѣ съ субстанціей-матеріей и субстанціей-ээиромъ могутъ дать основу для общаго изслѣдованія явленій физическаго міра.

Здѣсь полезно будетъ указать, какъ различно смотрятъ и съ какою почти партійной страстностью отстаиваются эти взгляды на эти три основныхъ субстанціи. Дѣйствительно, всякій легко принимаетъ, какъ самую естественную и обычную вещь, существованіе матеріи, смотреть на нее, какъ на нѣчто вполне понятное, но въ то же время не хочетъ допустить безъ достаточно убѣдительныхъ доказательствъ существованія ээира и электричества и считаетъ природу ихъ безусловно загадочной и таинственной. Но достаточно хоть нѣсколько внимательно подумать, чтобы понять, что сущность матеріи съ характеризующимъ ее свойствомъ инерціи, быть можетъ, не менѣе таинственна, чѣмъ ээиръ или электричество. Такимъ образомъ общее изслѣдованіе физическихъ фактовъ основано на допущеніи трехъ субстанцій, пониманіе сущности которыхъ ускользаетъ отъ насъ теперь и, можетъ быть, будетъ ускользать вѣчно.

Таковы были, вкратцѣ, всего нѣсколько лѣтъ тому назадъ основныя понятія естественной философіи, непосредственно вытекавшія изъ физическихъ изслѣдованій и составлявшія въ своей совокупности великую гипотезу или теорію, основанную на извѣстныхъ въ то время фактахъ.

И здѣсь мы можемъ убѣдиться, что ни одна общая теорія среди всѣхъ, могущихъ возникнуть въ пылкомъ, но дисциплинированномъ воображеніи ученаго, не можетъ пріобрѣсти права гражданства въ физикѣ, если она не находится въ полномъ согласіи, даже съ количественной

стороны, со всѣми тѣми фактами, для объясненія которыхъ она и была придумана, и если при провѣркѣ она не оказалась способной предвидѣть новые факты, которые затѣмъ нашли бы на опытѣ точное подтвержденіе. Нѣтъ недостатка въ поучительныхъ примѣрахъ такихъ теоретическихъ предвидѣній, блестяще подтвержденныхъ опытомъ. Достаточно напомнить классическій примѣръ конической рефракціи, въ доказательствѣ которой вычисленія опередили экспериментъ: рядомъ съ нимъ можно поставить всѣмъ извѣстный примѣръ изъ астрономіи, а именно открытіе планеты Нептунъ, который былъ найденъ, если можно такъ выразиться, въ формулахъ раньше, чѣмъ въ полѣ зрѣнія телескопа.

Электрическія явленія, которыя послѣдними явились обогатить и расширить область физики, приобрѣли преобладающее значеніе.

Никто не можетъ теперь и никогда не сможетъ объяснить ихъ только съ помощью матеріи и эѳира. Поэтому и послѣ появленія электромагнитной теоріи свѣта приходилось говорить объ электричествѣ, какъ объ особой вещи, либо избѣгая ближе опредѣлять его, либо — и болѣе искренно — продолжая видѣть въ немъ, какъ во времена первыхъ открытій въ области электричества, нѣкоторую невѣсомую жидкость, непонятную для насъ въ своей сущности.

Но въ послѣдніе нѣсколько лѣтъ быстро послѣдовалъ цѣлый рядъ новыхъ открытій, которыя, нисколько не затрагивая значенія уже установленныхъ законовъ, придали новое направленіе нашей наукѣ. На основаніи экспериментальныхъ изслѣдованій, а также остроумныхъ и удачныхъ догадокъ, которыми мы обязаны плеядѣ физиковъ, въ которой, какъ звѣзды первой величины, блестятъ имена Томсона (въ Кембриджѣ) и Лоренца (въ Лейденѣ), и не менѣе того благодаря правильному истолкованію нѣкоторыхъ прежнихъ опытовъ, существенная важность которыхъ не была понята въ свое время, пришлось принять, что электричество нельзя разсматривать, какъ непрерывную жидкость, а напротивъ, ее нужно представлять, какъ состоящую изъ мельчайшихъ частицъ, которымъ теперь даютъ имя электроновъ. Другими словами, нужно и для электричества допустить прерывное строеніе, подобное тому, которое мы допустили для вѣсомой матеріи.

Но этимъ еще не ограничивается эта совершившаяся на нашихъ глазахъ эволюція. Дѣйствительно, нѣкоторыя понятія, прежде считавшіяся неприкосновенными, теперь оказались глубоко потрясенными, какъ, на примѣръ, недѣлимость атома, невозможность превратить данный атомъ въ другой, химически отличный отъ него, или, по крайней мѣрѣ, получить одинъ изъ другого, а также и вѣчная неизмѣнность самихъ атомовъ.

Достигнуть всѣхъ этихъ результатовъ удалось, настойчиво примѣняя методъ изслѣдованія, который прежде имѣлъ больше противниковъ, чѣмъ сторонниковъ.

Тридцать или сорокъ лѣтъ тому назадъ, гордясь только что установленнымъ принципомъ сохраненія энергіи, физики не придавали,

обыкновенно, большого значенія научнымъ гипотезамъ, которыми нѣкоторые пытались дать удовлетвореніе инстинктивной потребности человѣка — познавать первыя причины наблюдаемыхъ явленій; дѣятельность самыхъ выдающихся физиковъ была, главнымъ образомъ, направлена на тщательныя и кропотливыя измѣренія, на все болѣе точное опредѣленіе числовыхъ значеній извѣстныхъ постоянныхъ, на разысканіе и изученіе деталей физическихъ явленій или, въ лучшемъ случаѣ, на изобрѣтеніе экспериментальныхъ методовъ, могущихъ дать надежное рѣшеніе вопросу о выборѣ между противоположными гипотезами. И, быть можетъ, только въ глубинѣ души всякій признавалъ ту безграничную полезность, какую имѣютъ „хорошія“ гипотезы въ дѣлѣ отысканія новыхъ путей изслѣдованія; но извлекиши изъ нихъ такимъ образомъ извѣстную выгоду, о нихъ ужъ больше не говорили или упоминали о нихъ лишь какъ о простыхъ искусственныхъ моделяхъ; не обходилось и безъ того, чтобы дать почувствовать свое превосходство надъ тѣми, кто приписывалъ имъ философское значеніе.

Теперь, напротивъ, многіе начинаютъ предпочитать другой методъ изслѣдованія, который кто нибудь и назоветъ, пожалуй, менѣе строгимъ, но который, несомнѣнно, является болѣе остроумнымъ и болѣе продуктивнымъ. Теперь уже не бѣгутъ съ такимъ ужасомъ отъ объяснительныхъ гипотезъ и, отбросивъ прежнее преувеличенное недовѣріе, болѣе широко пользуются интуиціей и воображеніемъ. Это — драгоценныя орудія, которыя могутъ оказаться недѣйствительными и даже опасными, если пользоваться ими безъ специальной опытности и безъ достаточнаго благоразумія, но въ рукахъ того, кто соединяетъ эти качества съ способностью къ широкимъ взглядамъ, они даютъ результаты высокой цѣнности, какъ это и было за послѣднее десятилѣтіе.

За краткостью времени я не смогу дать полнаго историческаго обзора послѣднихъ открытій и потому ограничусь лишь краткимъ перечнемъ наиболѣе важныхъ.

* * *

Всѣмъ, даже не занимающимся физикой, достаточно извѣстны электрическіе разряды въ ихъ разнообразныхъ формахъ — отъ яркой трещащей искры до тихаго свѣченія разряженнаго газа, или, выходя за предѣлы лабораторіи физики, отъ пугающаго и импонирующаго удара грома до спокойнаго полярнаго сіянія, извѣстно также различіе, которое почти всегда замѣчается въ свѣтѣ электрическаго разряда, а именно въ его противоположныхъ концахъ, по сосѣдству съ тѣмъ или другимъ изъ электродовъ, какъ называются тѣ два проводника, между которыми происходитъ разрядъ.

Опыты надъ разрядами, всегда очень красивыя, представляютъ вообще большой научный интересъ; и всетаки, когда полѣтка тому назадъ выдающійся нѣмецкій физикъ Плюккеръ замѣтилъ вблизи катода, или отрицательнаго электрода новое явленіе, а именно увидѣлъ, какъ начала свѣтиться стѣнка трубки съ разряженныхъ газомъ, въ которой онъ производилъ разряды, никто не предвидѣлъ тѣхъ результатовъ чрезвычайной важности, которые проистекли изъ этого опыта.

Другой искусный экспериментаторъ, Гитторфъ, нѣсколько лѣтъ спустя установилъ, что яркое свѣщеніе стекла, замѣченное его учителемъ, возбуждается невидимыми прямолинейными лучами, исходящими изъ катода (позднѣе ихъ назвали катодными лучами), такъ какъ предметъ, помѣщенный между катодомъ и стѣнкой, отбрасываетъ на послѣднюю свою тѣнь.

Явленіе это не привлекло къ себѣ вниманія физиковъ, такъ что въ послѣдствіи Круксъ вторично открылъ его, воспроизвелъ въ различныхъ чрезвычайно остроумныхъ и блестящихъ формахъ, основательно изучилъ его и предложилъ для его объясненія свою гипотезу лучистой матеріи. Гипотеза эта, которую значительное большинство физиковъ нѣкоторое время оспаривали и отрицали, теперь восторжествовала, по крайней мѣрѣ, въ своихъ существенныхъ чертахъ. По этой гипотезѣ катодные лучи разсматриваются, какъ состоящіе изъ движущихся матеріальныхъ частичекъ, наэлектризованныхъ отрицательно, вылетающихъ съ громадной скоростью изъ катода въ направленіяхъ, перпендикулярныхъ къ его поверхности. Падая на различные тѣла, они во многихъ случаяхъ не вызываютъ свѣщенія, но всегда нагрѣваютъ ихъ благодаря частичному превращенію ихъ энергіи движенія въ теплоту. Они же при этихъ условіяхъ заставляютъ тѣла, на которые падаютъ, испускать тѣ знаменитые лучи, открытые Рѣнтгеномъ, замѣчательныя и часто драгоцѣнныя дѣйствія которыхъ извѣстны теперь всякому. Благодаря этимъ же частичкамъ происходитъ явленіе тѣни, наблюдавшееся Гитторфомъ и съ тѣхъ поръ называемое всегда явленіемъ электрической тѣни, которое вполнѣ естественно должно произойти, когда какое-нибудь препятствіе не дастъ части ихъ дойти до стѣнки трубки или вообще до какого-нибудь экрана, надлежащимъ образомъ поставленнаго, на которомъ при помощи различныхъ приспособленій, преимущественно электрическаго характера, и обнаруживается образованіе тѣни.

Но Герцу удалось констатировать, что катодные лучи могутъ проникать черезъ тонкія пластинки металла. Это составляло, повидимому, непреодолимое препятствіе для гипотезы Крукса, и потому была высказана, правда, довольно неопредѣленная новая гипотеза, разсматривавшая катодные лучи, если не прямо, какъ свѣтовые лучи, то, по крайней мѣрѣ, какъ нѣкоторое аналогичное явленіе, распространяющееся въ эфирѣ подобно свѣтовымъ волнамъ.

Теперь—и это есть именно характерный признакъ радиоактивныхъ явленій—это возраженіе потеряло все свое значеніе; но, какъ бы то ни было, новая гипотеза встрѣтила всеобщее признаніе, такъ что въ теченіе многихъ лѣтъ во всемъ мірѣ не удалось бы найти больше трехъ или четырехъ физиковъ, которые принимали бы цѣликомъ гипотезу Крукса.

Изъ этихъ немногихъ тотъ, кто имѣетъ въ настоящій моментъ высокую честь говорить передъ вами, изучалъ долгое время явленіе, подобное катоднымъ лучамъ, которое можно наблюдать при извѣстныхъ условіяхъ, но уже не въ крайне разрѣженномъ газѣ, а въ газѣ при вы-

сокомъ давленіи, напр., въ свободной атмосферѣ; я показалъ, что обнаруживаясь въ этомъ случаѣ электрическая тѣнь несомнѣнно происходитъ благодаря наэлектризованнымъ частицамъ, движущимся подѣ дѣйствіемъ электрическихъ силъ, и появляется всякій разъ, какъ какое нибудь препятствіе задерживаетъ часть ихъ. По моему мнѣнію эти частицы должны быть — и теперь всѣ соглашались съ этимъ — наэлектризованными атомами или группами атомовъ того газа, въ которомъ производится опытъ. Въ такомъ случаѣ, онѣ должны довольно точно слѣдовать въ своемъ движеніи тѣмъ, обыкновенно, кривымъ линіямъ, которыя называются силовыми линіями — и это было вполне подтверждено соотвѣтствующими опытами.

Эти опыты представляютъ — правда, лишь въ видѣ аналогіи — подтвержденіе гипотезы Крукса; а такъ какъ людямъ вообще не легко отказаться отъ мнѣнія, которое они настойчиво и публично излагали въ теченіе ряда лѣтъ, то не замедлило появиться и возраженіе. А именно, было высказано сомнѣніе, не выполняють ли безчисленные и мельчайшія твердыя частицы, всегда находящіяся подвѣшенными въ нашей атмосферѣ, того, что я приписывалъ наэлектризованнымъ молекуламъ или атомамъ.

Для того, чтобы устранить это возраженіе, достаточно было показать, что опытъ съ электрической тѣнью вполне удастся даже въ томъ случаѣ, если газъ или воздухъ, въ которомъ онъ производится, какимъ нибудь способомъ, напр., фильтрованіемъ очищенъ отъ малѣйшихъ слѣдовъ пыли. Но мое убѣжденіе было твердо и осталось непоколебленнымъ; такъ что съ того отдаленнаго времени и до настоящаго дня мысль о томъ, что распространеніе электричества черезъ газъ есть явленіе переноса, производимаго наэлектризованными матеріальными частицами, приведенными въ движеніе электрической силой, вздохновила большую часть моихъ экспериментальныхъ работъ, неизмѣнно дававшимъ предвѣдѣнные или могущіе быть предвѣдѣнными результаты.

Въ это время молодой и выдающійся французскій физикъ Перренъ (Perrin) доказалъ, что катодные лучи, дѣйствительно переносятъ отрицательное электричество. Другіе обнаружили отчасти въ послѣдствіи, отчасти еще раньше, что они измѣняютъ свою форму и искривляются, если ихъ подвергнуть раздѣльному или одновременному дѣйствію электрическихъ и магнитныхъ силъ. Всѣ эти явленія вполне совпадали съ тѣмъ, къ чему приводила на основаніи законовъ электромагнетизма гипотеза Крукса; но они оставались необъяснимыми съ точки зрѣнія другой гипотезы. Наконецъ Томсоу удалось различными методами, приведшими тѣмъ не менѣе къ согласнымъ результатамъ, не только измѣрить количество электричества, переносимое каждой отдѣльной частичкой, но и опредѣлить какъ массу ея, такъ и скорость, съ которой она движется.

Достигнутые такимъ образомъ результаты освѣтили яркимъ свѣтомъ вопросъ о природѣ катодныхъ лучей.

Дѣйствительно, хотя скорость этихъ частичекъ оказалась громадной, она всетаки несомнѣнно меньше скорости свѣта, а это отнимаетъ почву у гипотезы, выдвинутой взамѣнъ гипотезы Крукса. Результатъ

измѣренія массы оказался еще болѣе важнымъ, такъ какъ тутъ получилась величина чрезвычайно малая, гораздо меньше, чѣмъ это можно было предвидѣть, а именно, около одной двухтысячной массы одного атома водорода. Одновременно съ этимъ было установлено, что масса каждой частички не зависитъ отъ условій опыта (отъ природы и давленія газа, въ которомъ образуются катодные лучи, отъ природы электродовъ и т. д.).

Эти частички, слѣдовательно, не могли быть атомами, а тѣмъ болѣе молекулами какого нибудь изъ извѣстныхъ тѣлъ. Быть можетъ, это былъ новый химическій элементъ съ атомнымъ вѣсомъ, значительно меньшимъ, чѣмъ у всѣхъ извѣстныхъ элементовъ? Но тогда какимъ же образомъ это новое вещество могло образоваться въ любомъ газѣ и въ присутствіи электродовъ, сдѣланныхъ изъ любого металла?

И горе было бы наукѣ, если бы передъ лицомъ такой загадки физики изъ трусости или изъ преувеличеннаго благоразумія не рѣшились вдохновиться интуиціей. Но этого не случилось, такъ какъ напротивъ въ умѣ многихъ и, повидимому одновременно, сразу появилось смѣлое предположеніе, отождествляющее эти частички съ электричествомъ. И вотъ какимъ образомъ.

На основаніи законовъ электромагнитизма извѣстно, что если наэлектризованное тѣло движется, то оно кажется намъ обладающимъ большей инерціей, чѣмъ въ нейтральномъ состояніи, и, слѣдовательно, большей массой, чѣмъ оно имѣетъ на самомъ дѣлѣ. Кромѣ того, эта кажущаяся часть массы тѣмъ больше, чѣмъ больше скорость тѣла. Отсюда вытекаетъ, если мы представимъ себѣ первоначальную массу равной нулю и, слѣдовательно, будемъ разсматривать движеніе простого электрическаго заряда, то этотъ послѣдній обнаружитъ нѣкоторую массу и такимъ образомъ будетъ симулировать инерцію, это характеристическое свойство матеріи. А потому вполне естественно предположить, что частички, составляющія катодные лучи, суть не что иное, какъ частицы электричества, а именно отрицательнаго электричества, либо сами электроны, которые, находясь въ движеніи, какъ будто бы обладаютъ извѣстной инерціей, либо же электроны, соединенные каждый въ отдѣльности съ мельчайшей частицей обыкновенной матеріи. Такимъ путемъ физики и пришли къ новому взгляду, согласно которому электричество не разсматривается уже, какъ непрерывная жидкость, а, напротивъ, ему приписывается прерывное строеніе, аналогичное строенію вѣсомой матеріи.

Эта гипотеза скоро оказалась настолько удовлетворительной, что въ этомъ направленіи сдѣланъ былъ еще и дальнѣйшій шагъ, а именно было допущено, что матеріальные атомы есть не что иное, какъ системы электроновъ, или что инерція атомовъ есть не что иное, какъ видимая или электромагнитная инерція электроновъ, изъ которыхъ они построены. Въ такомъ случаѣ нейтральный (незаряженный) атомъ представлялъ бы систему, состоящую изъ извѣстнаго числа отрицательныхъ и такого же числа положительныхъ электроновъ. Но есть серьезные мотивы, по которымъ предпочитаютъ допустить, что положительная

часть атома образуетъ самостоятельный комплексъ, нѣчто вродѣ большого положительнаго электрона, внутри котораго находятся отрицательные электроны, быстро движущіеся на подобіе планетъ въ солнечной системѣ.

Вполнѣ справедливо тутъ можно замѣтить, что такое подробное описаніе строенія атомовъ выходитъ уже за предѣлы научнаго благоразумія и не является достаточно обоснованнымъ.

Дѣйствительно, въ то время какъ гипотеза объ электрической природѣ матеріи вытекаетъ изъ основной философской концепціи, упомянутая специальная гипотеза о строеніи атомовъ, правда, находитъ много косвенныхъ подтвержденій, но все таки разсматривается еще всѣми лишь какъ рабочая гипотеза, возбуждающая къ новымъ изслѣдованіямъ. Равнымъ образомъ можетъ показаться совершенно произвольнымъ, что отрицательнымъ электронамъ приписывается преобладающее значеніе. Но на это наводитъ, я сказалъ бы даже, къ этому принуждаютъ твердо установленные факты. Такъ, напр., не смотря на всѣ попытки въ этомъ направленіи ни разу еще не было доказано независимое существованіе положительныхъ электроновъ, аналогичныхъ отрицательнымъ электронамъ, образующимъ катодные лучи. Съ другой стороны, открытое нѣсколько лѣтъ тому назадъ Зееманомъ магнитно—оптическое явленіе, достаточно ясное и полное описаніе котораго я не могу дать здѣсь въ краткихъ словахъ, и которое состоитъ въ томъ, что всякій простой лучъ, испускаемый газомъ, замѣняется другимъ лучомъ съ отличнымъ періодомъ колебанія, если подѣйствовать на него большой магнитной силой, — явленіе это вполнѣ объясняется только при допущеніи, что свѣченіе газа обязано своимъ возникновеніемъ колебаніямъ отрицательныхъ электроновъ, а не положительныхъ.

Отсюда возникло обыкновеніе называть отрицательные электроны просто электронами; такъ и слѣдуетъ вообще понимать это слово, если нѣтъ специальныхъ указаній на противное.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Зодіакальный свѣтъ.

Ф. Генкеля.

Жителямъ большихъ городовъ не часто приходится наблюдать этотъ странный свѣтъ. Поэтому не нужно удивляться, что мы до сихъ поръ еще мало освѣдомлены относительно его истинной природы.

Фламмаріонъ говоритъ, что онъ наблюдалъ одинъ разъ зодіакальный свѣтъ чрезвычайной яркости даже въ Парижѣ; это было ночью 20 февраля 1871 г., когда городъ вскорѣ послѣ осады былъ лишенъ газа. Но подѣ тропиками это явленіе наблюдается почти постоянно, по словамъ Гумбольта и другихъ, яркость его часто значительно превосходитъ яркость млечнаго пути.

Въ нашихъ широтахъ зодіакальный свѣтъ лучше всего виденъ по вечерамъ въ февралѣ и въ мартѣ, когда онъ расположенъ почти что перпендикулярно къ западному горизонту: въ октябрѣ онъ виденъ также по утрамъ на востокъ.

По вечерамъ въ февралѣ онъ представляется въ видѣ свѣтлаго конуса, идущаго отъ западнаго горизонта къ зениту, и расположеннаго въ плоскости эклиптики или, скорѣе, въ плоскости солнечнаго экватора; вслѣдствіе этого это явленіе и получило названіе зодіакальнаго свѣта, такъ какъ зодіакъ это тотъ поясъ небесной сферы, въ которомъ происходятъ всѣ видимыя движенія солнца, луны и главныхъ планетъ.

Конусъ имѣетъ основаніе на горизонтѣ, а вершина его находится на разстояніи отъ 50° до 90° отъ положенія, занимаемаго солнцемъ. Ширина основанія измѣняется отъ 8 до 30° . Кассини и Мѣранъ встрѣчали его на разстояніи 100° отъ солнца и даже далѣе. Наблюденіе, сдѣланное въ Гринвичѣ въ 1842 г. показало, что вершина конуса находилась на разстояніи 105° отъ солнца, что свидѣтельствуетъ о протяженіи въ пространствѣ, превосходящемъ земную орбиту. Гумбольтъ и Брорсенъ и нѣкоторые другіе, повидимому, наблюдали иногда второй свѣтъ на востокъ одновременно съ главнымъ свѣтомъ на западѣ и говорятъ, что узкая полоса свѣта идетъ отъ одного къ другому и соединяетъ ихъ.

«Въ экваторіальныхъ странахъ», говоритъ Фламмаріонъ «коническая форма исчезаетъ съ послѣднимъ слѣдомъ сумерекъ, и ночью видна свѣтлая полоса въ видѣ болѣе или менѣе полнаго круга на небѣ. Иногда виденъ весь кругъ, простирающійся съ запада на востокъ, при чемъ части, болѣе близкія къ солнцу, отличаются большимъ блескомъ, другія меньшимъ; все явленіе имѣетъ чисто бѣлый цвѣтъ». Въ части неба, прямо противоположной солнцу, или вблизи ея иногда видно пятно діаметромъ въ нѣсколько градусовъ, немного болѣе освѣщенное, чѣмъ части, близъ него лежація; оно извѣстно подъ именемъ противосіянія или отблеска (*contre-lueur*, *Gegenschein*, *counter-glow*).

Между тѣмъ какъ въ тропикахъ зодіакальный свѣтъ имѣетъ чисто бѣлый цвѣтъ, въ нашихъ широтахъ онъ обыкновенно немного красноватъ, въ особенности, у основанія: но это, безъ сомнѣнія, происходитъ отъ соединенія съ цвѣтами сумерекъ, такъ какъ тамъ, гдѣ онъ виденъ яснѣе всего, будетъ виденъ всякій цвѣтъ, который болѣе опредѣленно обозначенъ.

Однако Гумбольтъ говоритъ (Космосъ, т. I): «Въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ мнѣ казалось, что я не замѣчалъ ни опредѣленнаго красноватаго оттѣнка, ни нижней затемненной части въ видѣ дуги, ни даже сверканія, которое по словамъ Мѣрана, было имъ замѣчено, но какое то дрожаніе и мельканіе свѣта».

Довольно удивительно, что зодіакальный свѣтъ, повидимому, не обратилъ на себя вниманія астрономовъ древности и среднихъ вѣковъ, если не отождествить съ нимъ, что довольно сомнительно, «Тробестъ» Истинія. Гумбольдтъ полагаетъ, что замѣчательный свѣтъ, наблюдавшійся на возвышенныхъ равнинахъ Мексики въ продолженіи 40 послѣдовательныхъ ночей въ 1509 г., поднимавшійся на востокъ въ видѣ пирамиды, былъ случаемъ зодіакальнаго свѣта. Кеплеръ и Декартъ, вѣроятно, не знали его, хотя нѣкоторые темныя мѣста въ ихъ произведеніяхъ были истолкованы такъ, какъ будто это явленіе было имъ знакомо. Самое древнее несомнѣнное упоминаніе нахо-

дится въ трудахъ Чилдрея (Childrey), капеллана лорда Генри Сомерсетъ который въ «Natural History of England» (1659) и въ «Britannia Baconica» (1661) первый обратилъ вниманіе своихъ современниковъ на наблюденія, сдѣланныя имъ въ продолженіе многихъ лѣтъ по вечерамъ въ февралѣ и въ мартѣ.

Но Доминикъ Кассини первый около 1683 г. началъ изучать явленіе «во всѣхъ его соотношеніяхъ съ пространствомъ» и высказалъ теорію его возникновенія, которая не отличается отъ принятой въ настоящее время большинствомъ астрономовъ. Онъ допускалъ существованіе кольца маленькихъ планетныхъ тѣлъ, обращающихся вокругъ солнца почти въ плоскости эклиптики, отражающихъ его свѣтъ. Онъ полагалъ даже, что паденіе метеоритовъ или болидовъ могло происходить отъ прохожденія земли черезъ это кольцо.

Главное отличіе современной теоріи заключается въ томъ, что эти безчисленные маленькія метеорныя тѣла разсматриваются, какъ составляющія тонкій плоскій слой, находящійся отчасти внутри земной орбиты, отчасти простирающійся значительно далѣе, при этомъ свѣтъ происходитъ отъ отраженія солнечнаго свѣта мириадами этихъ космическихъ осколковъ. Не лишено возможности, что наиболѣе густая часть этого слоя находится внутри орбиты Меркурія, и что въ этомъ заключается причина не объясненнаго движенія перигелія этой планеты, открытаго Леверрье (Юнгъ).

Джонъ Гершель высказалъ мнѣніе, что «наиболѣе густая часть этой среды оказываетъ сопротивленія движенію кометъ и содержитъ, быть можетъ, матерію отнятую у миллионновъ этихъ метеоровъ во время ихъ послѣдовательныхъ прохожденій черезъ перигелій». (Outlines of Astronomy, p. 807). Ліз и Мейеръ допускали даже, что отъ этого слоя происходятъ свѣтъ и теплота солнца. Это такъ называемая «метеоритная теорія». Частицы этого слоя должны постоянно падать на солнечную поверхность вслѣдствіе планетныхъ пертурбацій и другихъ причинъ, нарушающихъ ихъ движеніе вокругъ центрального тѣла. Въ такомъ случаѣ, «прекращеніе ихъ движеній» производитъ теплоту, и солнце получаетъ обратно теплоту, утерянную черезъ лучеиспусканіе, и можетъ продолжать согрѣвать и освѣщать планеты.

Но недостаточность названной причины давно заставило отказаться отъ этой теоріи, пригодной лишь по отношенію къ маленькой части солнечнаго лучеиспусканія. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы солнечная теплота поддерживалась бы такимъ образомъ, то вычисленія показываютъ, что и земля была бы такой мѣрѣ бомбардирована, что она получала бы по крайней мѣрѣ 50 тоннъ метеорной матеріи ежедневно на квадратную милю; между тѣмъ какъ въ дѣйствительности, она едва ли получаетъ одну миллионную часть этого количества. Другими словами, еслибы на солнце падало достаточно тѣлъ, чтобы поддерживать его теплоту, надо было бы, чтобы ихъ было возлѣ него гораздо больше, такъ какъ только незначительная часть метеоровъ, проходящихъ по его сосѣдству, ударялось бы о него, между тѣмъ какъ большинство ихъ обращалось бы вокругъ него, не ударяя его, и многіе должны были бы падать на планеты. Намъ можно однако пожалѣть, что столь красивое объясненіе его экономіи не правильно.

Долгій рядъ наблюденій былъ сдѣланъ Г. Джонсомъ, капелланомъ американскаго парохода «Миссисипи» во время двухлѣтняго путешествія вокругъ свѣта; онъ были опубликованы въ 1856 г. Этотъ авторъ вывелъ изъ своихъ наблюденій, что зодіакальный свѣтъ происходитъ отъ туманнаго кольца,

имѣющаго центромъ землю и находящагося ближе къ землѣ, чѣмъ луна: коротко говоря, это должно быть земное кольцо, аналогичное кольцамъ Сатурна.

Извѣстный американскій мореплаватель капитанъ Вильксъ раскрытиковалъ идеи Джонса и предложилъ другую теорію, по которой зодіакальный свѣтъ разсматривается просто, какъ результатъ освѣщенія части земной атмосферы, на которую солнечные лучи падаютъ между тропиками вертикально.

Голландскій наблюдатель Гронеманъ также считалъ этотъ свѣтъ земного происхожденія; онъ говоритъ, что соотношеніе, между утренними и вечерними свѣтящимися конусами, о которомъ говорятъ нѣкоторые наблюдатели, не установлено, и не доказано также, что они участвуютъ въ видимомъ суточномъ движеніи небесныхъ тѣлъ.

Въ 1876 г., Серпіери, изъ Урбино, представилъ итальянскому спектроскопическому обществу мемуаръ, трактующій о результатахъ, полученныхъ предшествовавшими наблюдателями, причемъ высказалъ мнѣніе, что зодіакальный свѣтъ, быть можетъ, электрическаго происхожденія, аналогичнаго сѣверному сіянію.

Изъ сказаннаго видно, что еще много остается сдѣлать въ теоріи этого загадочнаго явленія, хотя, повидимому, есть достаточно основаній считать, что теорія зодіакальнаго свѣта, какъ «полярнаго сіянія», возникла изъ смѣшенія, которое будетъ указано ниже.

Уже давно Гумбольдтъ выражалъ удивленіе по поводу измѣнчивости интенсивности явленія, какимъ онъ видѣлъ его въ тропическихъ странахъ Южной Америки. Въ случаяхъ наибольшей интенсивности свѣтъ иногда на нѣсколько минутъ замѣтно ослабѣваетъ и затѣмъ внезапно снова пріобрѣтаетъ прежнюю яркость. Большая интенсивность явленія въ Испаніи, чѣмъ въ Германіи, побудила его къ послѣдовательнымъ наблюденіямъ до отъѣзда въ Америку. «Сила свѣта удивительнымъ образомъ возрастала по мѣрѣ того, какъ я приближался къ экватору въ Южной Америкѣ и въ Южномъ морѣ. Въ постоянной ясной и сухой атмосферѣ Куманы, въ травянистыхъ «льяносахъ» Каракаса, на возвышенныхъ равнинахъ Квито, въ Мексиканскомъ морѣ, въ особенности, на высотахъ (3000-4000 м.), гдѣ я могъ дольше оставаться, яркость часто превосходила самыя блестящія части Млечнаго Пути между Аргусомъ и Стрѣлкомъ, или, чтобы сравнивать съ частью на нашемъ полушаріи, между Орломъ и Лебедемъ» («Космосъ», т. IV).

Въ общемъ, однако, Гумбольдтъ не считалъ, что яркость зодіакальнаго свѣта возрастаетъ съ широтой мѣста наблюденія: онъ особенно настаивалъ на «внутренней измѣнчивости самого явленія», но не отрицалъ возможности вліянія различій въ состояніи воздуха, большей или меньшей прозрачности верхнихъ атмосферныхъ слоевъ на его измѣняемость, какъ это уже было замѣчено по поводу окрашенности явленія во внѣ-тропическихъ странахъ, сверканія и т. д.

Хотя наблюденія показали, что по крайней мѣрѣ часть этого свѣта есть отраженный солнечный свѣтъ, но остается все таки вѣроятность, что часть свѣта его собственная. Посмотримъ теперь, каковы относящіеся сюда наблюденія и выводы нѣкоторыхъ другихъ изслѣдователей.

Профессоръ Сирль (Searle), говоря о наблюденіяхъ Джонса и другихъ, резюмируетъ слѣдующимъ образомъ: положеніе зодіакальнаго свѣта измѣ-

няется въ теченіе года, находясь ближе къ сѣверу осенью, чѣмъ весною (въ нашемъ полушаріи); атмосферное поглощеніе имѣетъ большое вліяніе на его видимое положеніе; поясъ неба, занятый проекціями малыхъ планетъ, представляетъ особенности, сходныя съ особенностями пояса, занятаго свѣтомъ, и наводитъ на мысль, что послѣдній можетъ происходить отчасти отъ маленькихъ тѣлъ, движущихся по планетнымъ орбитамъ; свѣтъ не вліяетъ на видимость неяркихъ звѣздъ и исчезаетъ, заходя, но не блѣднѣя.

Это послѣднее движеніе свѣта, связанное съ вращеніемъ земли, Гронеманъ какъ мы видѣли выше, отвергалъ. На основаніи наблюденій, произведенныхъ на морѣ въ тропическихъ странахъ, въ 1862 г., Гелисъ выводилъ, что измѣненіе положенія свѣта зависитъ болѣе отъ времени года, чѣмъ отъ положенія наблюдателя.

Другія наблюденія были произведены отъ 1863 г. до 1871 г. полковникомъ Тупманомъ въ южной Европѣ. Въ работѣ, представленной Лондонскому Астрономическому Обществу («Monthly Notices», vol. 32), авторъ говоритъ, что положеніе оси симметріи свѣта, по отношенію къ эклиптикѣ, очень измѣняется въ теченіе года; именно она остается почти параллельной этой плоскости зимой и образуетъ съ ней уголъ, доходящій до 20° въ августѣ и сентябрѣ. Онъ утверждалъ также, что плоскость свѣта не проходитъ черезъ солнце. Еслибы это было вѣрно, то это, очевидно, доказывало бы, что матерія, дающая зодіакальный свѣтъ не можетъ обращаться вокругъ солнца; но наблюденія Тупмана значительно расходятся съ наблюденіями другихъ наблюдателей.

Покойный А. С. Раніардъ, находившійся въ Сициліи зимой 1870 г. для наблюденія знаменитаго полнаго солнечнаго затменія этого года, изслѣдовалъ зодіакальный свѣтъ посредствомъ полярископа Савара. Онъ доказалъ, что свѣтъ обладалъ отчетливыми признаками поляризаціи, и отсюда заключилъ, что матерія, испускающая зодіакальный свѣтъ состоитъ либо изъ частицъ, настолько малыхъ, что длина ихъ діаметровъ того же порядка, какъ и длина свѣтовой волны, либо изъ матеріи способной давать зеркальное отраженіе.

Проф. Онгстрёмъ въ Упсалѣ вывелъ изъ своихъ спектроскопическихъ изслѣдованій, что матерія, испускающая этотъ свѣтъ та же, что и производящая сѣверное сіяніе. Онъ находитъ въ спектрѣ блестящую линію сѣвернаго сіянія (5567), но такъ какъ сіяніе есть явленіе, гораздо болѣе обычное въ Швеціи, чѣмъ южнѣе, его наблюденія подвержены большому сомнѣнію.

Акримисъ въ Кадиксѣ, также наблюдалъ непрерывный, но слабый спектръ, съ двумя блестящими линіями, одной желтой, «вѣроятно, линія поляризаціи» и другой голубой, болѣе преломляемый, чѣмъ черта F водорода, которую онъ считаетъ другою линіей полярнаго сіянія, хотя онъ и не могъ ее отождествить съ достовѣрностью. Но такъ какъ его наблюденія были произведены посредствомъ прибора, обладавшаго слишкомъ большой дисперсіей и потому мало пригоднаго для разсматриванія слабаго зодіакальнаго свѣта, представляется вѣроятнымъ, что «то, что онъ наблюдалъ, не было зодіакальнымъ свѣтомъ».

Важныя наблюденія были произведены Барнардомъ въ Америкѣ, Максомъ Вольфомъ въ Гейдельбергѣ, Феррари и другими; но, чтобы придти къ исполнѣ удовлетворительной теоріи, необходимо большее число наблюденій на высотахъ, гдѣ можно наблюдать явленіе, не нарушенное дѣйствіемъ болѣе плотныхъ частей атмосферы и другихъ причинъ; нужны также

точно сдѣланныя измѣренія. До сихъ поръ, за рѣдкими исключеніями, наблюденія производились слишкомъ близко отъ поверхности моря и въ мало благоприятныхъ условіяхъ. Вотъ почему не приходится удивляться разнообразію и числу предложенныхъ теорій.

Мы уже говорили объ еще болѣе загадочномъ явленіи «противосіянія» какъ его назвалъ Брорзенъ, открывшій его около 60 лѣтъ тому назадъ. Это — свѣтлое пятно измѣнчивыхъ размѣровъ, обыкновенно болѣе или менѣе овальной формы, иногда чечевице-образное, лежащее на эклиптикѣ или близкое къ ней, при чемъ среднее положеніе его мало отклоняется отъ положенія, противоположнаго солнцу, откуда происходитъ названіе его.

Многочисленный рядъ наблюденій былъ сдѣланъ г. Бакгаузомъ въ Вестъ-Гендонъ-Гоузѣ, въ Сѣндрландѣ (Англія) въ теченіе 30 лѣтъ; результатъ былъ опубликованъ во 2-мъ томѣ изданій этой обсерваторіи. По указаніямъ этого автора обычная форма противосіянія приблизительно круглая, въ 7° въ діаметрѣ, съ центромъ немного къ сѣверу отъ эклиптики ($0^{\circ},75$ широты къ сѣверу въ среднемъ). Противосіяніе предшествуетъ солнечному противостоянію на небѣ, не болѣе $0^{\circ}6$ долготы *).

Профессоръ Барнардъ, около 1-го октября 1883 г. находясь въ Нашвиллѣ, въ Теннесси, ночью въ поискахъ за кометами, замѣтилъ маленькій пятно свѣта около Пегаса. Онъ думалъ сначала, что это мѣстный свѣтъ, хотя онъ былъ ненормально постояненъ. Слѣдующую ночь свѣтъ оставался тамъ же и изъ наблюденій его положенія въ продолженіе нѣсколькихъ ночей онъ убѣдился, что свѣтъ передвигается къ востоку по эклиптикѣ на 1° градусъ въ день. Онъ, такимъ образомъ, вновь открылъ противосіяніе. Послѣ этихъ первыхъ наблюденій, онъ сдѣлалъ многочисленныя изслѣдованія, открывъ различныя измѣненія формы въ теченіе года. Пятнадцать лѣтъ наблюденій показали ему, что эти измѣненія соотвѣтствуютъ временамъ года и повторяются въ одной и той же части неба.

Напомнимъ вкратцѣ нѣкоторые изъ идей, высказанныхъ относительно природы противосіянія. Нѣкоторые видятъ въ немъ туманную матерію, отбрасываемую землею, и образующую ея хвостъ, аналогичный хвосту кометъ. Достаточно было бы весьма малаго количества матеріи, отброшенной указаннымъ образомъ, чтобы явленіе было видимымъ для насъ, такъ какъ мы видимъ этотъ хвостъ сокращеннымъ въ проекціи на темномъ небѣ. Наша земля была бы такимъ образомъ богаче придатками, чѣмъ это можно было бы предположить, такъ какъ противосіяніе представляло бы нѣчто вродѣ кометнаго хвоста; и наша планета обладала бы кольцомъ или кольцами, какъ Сатурнъ (теорія Джонса относительно зодіакальнаго свѣта). Г. Барнардъ склоненъ, однако, считать противосіяніемъ атмосфернымъ явленіемъ («Популярная Астрономія» № 64); но онъ соглашается, что отсутствіе параллакса составляетъ возраженіе противъ такого объясненія.

Профессоръ Сирль полагаетъ, что зодіакальный свѣтъ происходитъ отъ отраженія солнечнаго свѣта миллионами миниатюрныхъ планетъ, или частицъ космической пыли, слишкомъ мелкихъ, чтобы ихъ можно было видѣть въ отдѣльности. Когда онѣ расположены со стороны прямо противоположной солнцу, каждая изъ частицъ блеститъ полнымъ дискомъ совершенно такъ же, какъ луна въ томъ же положеніи, и эта обширная коллекція частицъ въ полномъ

свѣтъ, должна увеличить общій свѣтъ пояса и усилить сіяніе всей области. Въ другихъ положеніяхъ относительно солнца, яркость освѣщенія должна уменьшаться. Кромѣ того, въ противостояніи частицы находились бы ближе къ землѣ. Вслѣдствіе этихъ двухъ причинъ, поворота освѣщенной части, къ землѣ, и наибольшаго приближенія частицъ, противосіяніе даетъ максимумъ свѣта въ мѣстѣ противоположномъ солнцу.

Г. Эвершедъ, въ Кодайканальской обсерваторіи въ Индіи, объяснилъ происхожденіе противосіянія въ 1899 г. молекулами водорода и гелія, покидающими землю, молекулами легчайшими изъ извѣстныхъ газохъ, улетающими изъ земли въ направленіи противоположномъ солнцу. Опять отсутствіе замѣтнаго параллакса служитъ фатальнымъ возраженіемъ, если не допустить, что частицы въ моментъ наблюденія находятся уже значительно дальше луны.

Шведскій математикъ-астрономъ, Гюльденъ, показалъ, что метеоры, проходящіе около противоположной солнцу точки внутри земной орбиты, могли бы описать одну или нѣсколько колеблющихся орбитъ около этой точки прежде чѣмъ возобновить свой путь вокругъ земли и солнца. Даже еслибы число этихъ частицъ было весьма велико, они не оказывали бы другъ на друга значительнаго притяженія, вслѣдствіе ничтожности ихъ общей массы; тѣмъ не менѣе онѣ представляли бы нѣчто вродѣ свѣтящагося тумана въ противоположномъ солнцу мѣстѣ. Центромъ этого свѣтлаго пятна служило бы мѣсто, противоположное солнцу, и контуръ его долженъ былъ бы быть эллиптическимъ съ большой осью вдоль эклиптики. Такъ какъ, согласно наблюденіямъ, эллиптичность или отклоненіе отъ круга, не велико, то нужно, повидимому, допустить, что метеоры движутся вокругъ солнца во всѣхъ направленіяхъ безъ значительнаго увеличенія ихъ числа въ плоскости эклиптики. Довольно вѣроятно, что свѣтъ сыгралъ значительную роль въ захватѣ большого количества «космической пыли», которая обращается въ вихрь вокругъ земли.

Послѣдняя теорія противосіянія, насколько намъ извѣстно, предложена Иннесомъ въ 1910 г. Это видоизмѣненіе другой теоріи, цитированной выше. Иннесъ полагаетъ, что земля постоянно бомбардируется метеоритами, отъ которыхъ отдѣляются маленькія тѣльца. Эти послѣднія отталкиваются одновременно землей и солнцемъ и образуютъ въ противоположной солнцу части неба тонкій хвостъ, не столь большой, какъ у кометы, но достаточно блестящій, чтобы стать видимымъ земнымъ наблюдателямъ въ темную безоблачную ночь.

Хотя по поводу описанныхъ только что явленій существуетъ много разногласій въ мнѣніяхъ, изъ которыхъ нѣкоторыя были указаны, и хотя нужно еще наблюдать непрерывно и болѣе систематически въ странахъ болѣе для этого благоприятныхъ, чѣмъ наши, можно, однако, въ заключеніе сказать, что общая природа зодіакальнаго свѣта, повидимому, довольно хорошо установлена. Почти нѣтъ сомнѣнія, что онъ происходитъ отъ безчисленнаго множества частицъ матеріи, вращающихся вокругъ солнца по эллиптическимъ болѣе или менѣе эксцентричнымъ орбитамъ, находящихся почти цѣликомъ въ плоскости земной траекторіи, или во всякомъ случаѣ въ предѣлахъ зодіака, области гораздо болѣе въ ширину, чѣмъ въ глубину, такъ что частицы (или по крайней мѣрѣ большинство ихъ) образуютъ плоскій тонкій слой, какъ одно изъ колецъ Сатурна, находящійся отчасти внутри, отчасти снаружи земной орбиты. Такъ какъ солнечная корона не имѣетъ опредѣленной границы, возможно, что внутренний край поверхности соприкасается съ внѣшней короной; въ такомъ слу-

чаѣ зодіакальный свѣтъ являлся бы въ нѣкоторомъ родѣ продолженіемъ короны. Но это, повидимому, крайняя точка зрѣнія, съ которой можно было бы и планеты считать соединенными аналогичнымъ образомъ.

Не мало есть доказательствъ существованія сопротивляющейся среды, вліяніе которой, въ прошедшемъ, на траекторіи планетъ вокругъ солнца было очень велико, такъ какъ она притягивала ихъ къ центральному тѣлу и дѣлала ихъ траекторіи болѣе круговыми, чѣмъ если бы ея не было. И хотя большое количество матеріи, составляющей эту среду, безъ сомнѣнія, было притянута въ теченіе времени къ солнцу и къ планетамъ, оно остается еще, вѣроятно, въ обширныхъ областяхъ, отдѣляющихъ главныя тѣла нашей системы, видимая намъ въ силу отраженія солнечнаго свѣта, а также, быть можетъ, и вслѣдствіе собственной легкой свѣтимости, въ формѣ зодіакальнаго свѣта.

Наблюденія, связывающія, повидимому, явленія съ сѣвернымъ сіяніемъ, и тѣмъ самымъ съ проявленіями атмосфернаго электричества, могутъ быть объяснены, вѣроятно, смѣшеніемъ, происходящимъ отъ совмѣстнаго появленія того и другого явленія на небѣ. Такимъ образомъ присутствіе спектральной линіи сѣвернаго сіянія въ спектрѣ зодіакальнаго свѣта, замѣченное Онгстрёмомъ въ то время, какъ сѣверное сіяніе само не было, конечно, далеко, не можетъ считаться рѣшающимъ; и, какъ мы видѣли, наблюденіе Акримисомъ двухъ линій сіянія, при помощи спектроскопа, дисперсія котораго должна была настолько ослабить силу свѣта и сдѣлать его невидимымъ, отвергается очень компетентнымъ лицомъ Мичи Смитомъ. Красноватая окраска, аналогичная окраскѣ заката солнца, видимая въ основаніи свѣта около солнца, была, очевидно, кажущейся, а не дѣйствительной, вслѣдствіе первыхъ и послѣднихъ слѣдовъ сумерекъ. Вліянія и сверканія, замѣченныя Гумбольдтомъ и другими, были объяснены имъ, какъ измѣненія въ прозрачности атмосферы, а не какъ нѣчто, присущее природѣ самаго свѣта.

Постепенныя измѣненія отъ одной ночи до другой, отъ одного времени года до другого, могутъ тѣмъ не менѣе прекрасно быть приписаны измѣненіямъ относительнаго положенія земли и различіямъ плотности отражающаго слоя.

Мнѣніе г. Джонса, который полагаетъ, что его наблюденія могутъ быть объяснены только присутствіемъ туманнаго кольца, имѣющаго центромъ землю, кажется несомнѣннымъ съ фактомъ, повидимому, вполне установленнымъ, что плоскость свѣта гораздо болѣе совпадаетъ съ плоскостью земной орбиты вокругъ солнца (эклиптики) чѣмъ съ ея экваторомъ; между тѣмъ измѣненіе формы отъ одного мѣсяца до другого, замѣченное столькими наблюдателями, а также отсутствіе измѣримаго параллакса (по крайней мѣрѣ для противосіянія), показываетъ, что частицы, отраженіе которыхъ производитъ свѣтъ, находятся значительно дальше луны, и движутся по планетнымъ орбитамъ вокругъ солнца, а не вокругъ нашей собственной планеты.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Интуиція и опытъ при преподаваніи математики въ средней школѣ.

Профессора Д. Е. Смита.

Докладъ, представленный Международной Коммиссіи по преподаванію математики на V-мъ Международномъ Математическомъ Конгрессѣ въ Кембриджѣ. (Засѣданіе 27 августа 1912 года).

1. Методъ изслѣдованія.

Въ 1911 г. Центральный Комитетъ Международной Коммиссіи по преподаванію математики организовалъ Подкоммиссію, которой поручилъ изслѣдовать роль интуиции при преподаваніи математики въ средней школѣ («Подкоммиссія А»). Д-ру В. Лицману (W. Lietzmann, Barmen въ Германіи) было поручено своевременно составить опросные листы, чтобы собрать матеріалъ для доклада, и это порученіе было имъ выполнено весьма старательно. Опросные листы были разосланы зимою 1911—1912 г., и къ 1 апрѣлю 1912 г. были получены отвѣты отъ представителей Австріи, Англіи, Франціи, Германіи, Швейцаріи и Соединенныхъ Штатовъ Сѣверной Америки. Отвѣтовъ изъ другихъ странъ не поступало и 1 июля автору настоящей статьи было поручено составить настоящій докладъ.

Въ различныхъ странахъ примѣнялся различный методъ изслѣдованія. Въ однихъ случаяхъ составитель отвѣта («rapporteur») предварительно устраивалъ самъ мѣстную анкету, либо же онъ ссылаясь на напечатанные доклады о Международной Коммиссіи, либо, наконецъ, отвѣты были рассмотрѣны Національной Подкоммиссіей. Какъ показали результаты, эти различія не имѣли особеннаго значенія.

2. Типъ школы.

Опросные листы были составлены на нѣмецкомъ языкѣ, такъ что въ нихъ неминусомъ должно было сказаться влияние германской учебной системы, и терминологія не вполне соответствовала положенію вещей во всѣхъ прочихъ

*) Нѣмецкое заглавіе доклада: „Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht der höheren Schulen“. Французскій переводъ: „L'intuition et l'expériences dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes“.

Докладъ основанъ на матеріалѣ, собранномъ д-ромъ В. Лицманомъ, старшимъ преподавателемъ въ высшемъ реальномъ училищѣ въ Барменѣ (Германія), которому было поручено разослать опросные листы въ различные страны. Отвѣты присланы слѣдующими лицами:

Австрія, профессоръ д-ръ Эрвинъ Динцль (E. Dintzl, Вѣна). Англія, Шарль Годфрей М. А. (Ch. Godfrey, главный учитель въ Royal Naval College, Osborne). Франція, Ш. Бишъ (M. Ch. Bioche, профессоръ въ лицѣ Людовика Великаго, Парижъ). Германія, профессоръ д-ръ П. Трейтлейнъ (G. H. R. Treutlein, директоръ Real-u. Reform-Gymnasium въ Карлсруэ и д-ръ В. Лицманъ въ Швейцаріи, Р. Фэръ (H. Fehr, профессоръ Женевского университета). Соединенные Штаты, Д. Е. Смитъ (D. E. Smith, проф. въ Teacher College, Columbia University, New-York City) и проф. Юнгъ (I. W. A. Young, Чикаго).

странахъ. Поэтому мы предварительно постараемся установить съ точностью, о какомъ типѣ школы идетъ у насъ рѣчь.

Австрійскія и германскія гимназіи и «Realanstalten» *) по возрасту учащихся близко подходят къ французскимъ лицеямъ и швейцарскимъ гимназіямъ и «кантональнымъ школамъ» **). Менѣе близко онѣ соотвѣтствуютъ англійскимъ «public schools» и кореннымъ образомъ отличаются отъ правительственныхъ «high schools» Соединенныхъ Штатовъ. Выраженіе «Unterricht der höheren Schulen» означаетъ, слѣдовательно, преподаваніе въ тѣ школьные годы, которые соотвѣтствуютъ возрасту учащихся въ гимназіяхъ, лицеяхъ, англійскихъ «public schools» и, наконецъ, — въ Соединенныхъ Штатахъ, — въ послѣднемъ отдѣленіи «elementary school», во всѣхъ классахъ «high school» и въ первые два года «college». Другими словами, изслѣдованіе касается обученія приблизительно въ возрастѣ отъ 10 до 19 лѣтъ. Къ изслѣдуемому типу школы лучше всего, повидимому, подходитъ французскій терминъ «средняя школа».

Нужно также отмѣтить, что въ отвѣтахъ рѣчь идетъ о преподаваніи въ общей школѣ, класической и неклассической, а не въ школахъ спеціального типа, какъ то въ земледѣльческихъ, техническихъ, морскихъ, штейгерскихъ и т. п. Напримѣръ, представитель австрійской школы въ своемъ отвѣтѣ ограничился гимназіей, реальной гимназіей, реформированной реальной гимназіей (Reformrealgymnasium) и реальнымъ училищемъ. Англійскій представитель разсматриваетъ тѣ школы, которыя составляютъ наибольшее число студентовъ въ старѣйшихъ университетахъ: Оксфордскій и Кембриджскій (онъ объединяетъ всѣ такія школы подъ не совсемъ опредѣленнымъ названіемъ «public school»). Германия и Швейцарія сообщаютъ лишь о преподаваніи въ гимназіяхъ, реальныхъ гимназіяхъ и высшихъ реальныхъ училищахъ, и, наконецъ, Франція разсматриваетъ преимущественно преподаваніе въ лицеяхъ и колледжахъ. Въ Соединенныхъ Штатахъ организація школы существенно отличается отъ европейской; докладъ имѣетъ въ виду преподаваніе въ общей «high school» и въ первые два года колледжа. Во всѣхъ отвѣтахъ школѣ общаго типа уделено больше вниманія, чѣмъ спеціальной.

3. Вопросъ объ элементарной школѣ и высшей.

Можно было бы, конечно, расширить рамки вопроса такъ, чтобы включить также важный вопросъ объ интуиціи и опытѣ въ дѣтскихъ садахъ, въ Ecoles maternelles (материнскія школы), въ первоначальной школѣ, и даже въ домашнемъ обученіи. Д-ръ Монтеessori показалъ въ Италіи и Америкѣ, и тысячи способныхъ учителей другихъ странъ давно уже доказали, что интуиція и опытъ играютъ чрезвычайно существенную роль въ первоначальномъ обученіи, вообще, и въ частности математики. Лезанъ (Laisant, Франція) обратилъ вниманіе своихъ соотечественниковъ на этотъ важный вопросъ, а Лицъ (Lietz) и другіе весьма извѣстные педагоги сдѣлали то же въ другихъ странахъ. Тѣмъ не менѣе Комитетъ чувствовалъ, что на первое время полезнѣе обратить вниманіе учителей на значеніе данного вопроса для средней школы, а вопросъ о

*) Т. е. реальныя гимназія, реальныя училища и высшія реальныя училища. *Ред.*

**) Также къ русскимъ гимназіямъ и реальнымъ училищамъ съ дополнительнымъ классомъ. См. объ этомъ подробнѣе Лицманъ. Постановка преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Пруссіи.

первоначальной школѣ отложить на будущее. Центральный Комитетъ въ слѣдующее четырехлѣтіе, нужно надѣяться отнесется къ этому вопросу съ должнымъ вниманіемъ.

Что касается высшихъ учебныхъ заведеній, то по отношенію къ нимъ разсматриваемый вопросъ находится въ тѣсной связи съ задачей, возложенной на «Субкомиссію В». Университетское преподаваніе математики для физиковъ; съ особенной ясностью эта связь обнаруживается изъ доклада, представленнаго уже профессоромъ Рунге *) (Runge); (засѣданіе 26 августа 1912 г.).

4. Методъ, котораго придерживался авторъ настоящаго доклада.

Комитетъ считаетъ цѣлесообразнымъ въ настоящемъ докладѣ не приводить полностью отвѣтовъ, полученныхъ отъ представителей различныхъ государствъ, но дать лишь краткую сводку, такъ какъ нѣкоторые представители вмѣсто непосредственныхъ свѣдѣній дали лишь ссылки на опредѣленные страницы напечатанныхъ монографій. При изложеніи авторъ рѣшилъ сохранить тѣ рубрики, которыя были приняты комитетомъ въ опросѣ.

5. Общее положеніе.

Раньше чѣмъ разсмотрѣть вопросъ въ деталяхъ, полезно сказать нѣсколько словъ относительно общаго положенія вещей въ различныхъ странахъ. Наблюдателю прежде всего должно броситься въ глаза, что мы переживаемъ весьма переходную эпоху во всемъ, что касается средняго образованія, вообще, и въ частности, въ интересующей насъ области. Напримѣръ, трудно и почти невозможно было бы сказать, какое положеніе занимаетъ въ школѣ такой предметъ, какъ начертательная геометрія, ибо вопросъ о цѣли и значеніи этого предмета и о томъ, въ какой школѣ ему мѣсто, подверженъ весьма быстрымъ измѣненіямъ. Австрія удѣляетъ этой дисциплинѣ серьезное вниманіе въ реальныхъ училищахъ; нѣсколько меньше — въ реальныхъ гимназіяхъ, въ классической же гимназіи этотъ предметъ почти отсутствуетъ. Этого, впрочемъ, можно было ожидать; но за то было бы преждевременно предсказывать, какое положеніе займетъ начертательная геометрія въ «реформированной реальной гимназіи», такъ какъ этотъ типъ школы въ Австріи только лишь началъ появляться. Тотъ же духъ неустойчивости замѣчается и въ Англіи, гдѣ на общее образованіе вліяетъ стремленіе готовить мальчиковъ къ различнымъ специальностямъ. Въ обученіи будущихъ офицеровъ, инженеровъ или землемѣровъ элементъ интуиціи и опыта начинаетъ играть все болѣе важную роль, а требованія военнаго дѣла за послѣдніе 10 лѣтъ несомнѣнно оказали весьма сильное вліяніе на характеръ преподаванія въ англійской средней школѣ. Съ другой стороны, по вопросу относительно обученія мальчиковъ безотносительно къ специальности въ Англіи господствуетъ, повидимому, взглядъ, что методы интуиціи и опыта болѣе умѣстны въ среднихъ и низшихъ классахъ, чѣмъ въ старшихъ. Нѣкоторые учителя, которыхъ интересуютъ на первомъ планѣ математически болѣе одаренные ученики относятся къ этимъ методамъ съ недо- вѣріемъ, такъ что во многихъ случаяхъ практические методы, усвоенные учащимися въ младшихъ классахъ, находятся подъ запретомъ въ старшихъ.

*) См. рефератъ проф. Д. Синцова въ предыдущемъ номерѣ.

Нѣкоторые учителя соглашаются допустить новые методы въ низшіе классы, но лишь подъ условіемъ, чтобы въ старшихъ классахъ преподаваніе носило абстрактный характеръ.

Въ соединенныхъ Штатахъ также замѣчается движеніе въ дѣлѣ воспитанія и обученія, и, въ особенности, въ вопросѣ объ интуиціи и опытѣ при преподаваніи математики. Этотъ вопросъ дебатруется уже около десяти лѣтъ и за это время были сдѣланы самые разнообразныя опыты, начиная отъ крайняго лабораторнаго метода съ минимумомъ математики и кончая самымъ абстрактнымъ методомъ, въ которомъ интуиція и опытъ не играютъ почти никакой роли. Мнѣнія по этому вопросу весьма расходятся, и ни о чемъ общепризнанномъ и установленномъ здѣсь не можетъ быть рѣчи.

Теперь мы рассмотримъ подъ рядъ всѣ рубрики циркуляра, разосланнаго въ прошлую зиму д-ромъ Лицманомъ. Для большаго удобства мы предварительно изложимъ результаты вкратцѣ, и лишь потомъ перейдемъ къ детальному обзору.

Измѣреніе и оцѣнка величинъ. Въ наиболѣе практической формѣ обученіе измѣренію развивается, повидимому, преимущественно въ Австріи, Германіи и Швейцаріи. Англія, Франція и Соединенные Штаты посвящаютъ этому дѣлу меньше вниманія или, по крайней мѣрѣ, не достигли столь опредѣленныхъ результатовъ. Въ трехъ первыхъ государствахъ мы чаще встрѣчаемъ раннее обученіе элементарной тригонометріи, что даетъ возможность производить работы съ несложными инструментами на открытомъ воздухѣ.

Что касается геометрическаго черченія и графическаго изображенія тѣлъ, то въ этомъ отношеніи различныя страны переживаютъ переходное время: раньше это считалось специальностью преподавателя искусствъ, теперь же этотъ предметъ постепенно переходитъ къ математику. Общая тенденція такова, чтобы разсматривать этотъ предметъ, какъ часть математики. Но желательный характеръ работы еще не выясненъ, и даже терминъ «начертательная геометрія» еще не имѣетъ вполне опредѣленнаго смысла. Въ общемъ можно сказать, что этотъ предметъ введенъ въ школы типа Oberrealschule, гдѣ наблюдается тенденція усилить его качественно и количественно, въ программѣ же школъ гимназическаго типа онъ отсутствуетъ.

Графическіе методы представленія функцій за послѣднее время получили всеобщее распространеніе. Отъ идеи о представленіи уравненія посредствомъ линіи теперь переходятъ къ графическому представленію функцій. Въ какой именно мѣрѣ учащіе усваиваютъ понятіе функцій, во многихъ случаяхъ остается спорнымъ, да и весь этотъ предметъ вообще находится пока въ стадіи опытовъ. О пользѣ упражненій на бумагѣ съ квадратными клѣтками (миллиметровая бумага) уже не спорятъ нигдѣ; несомнѣнно, однако, что этими упражненіями злоупотребляютъ: слишкомъ пространно разрабатываются уравненія и нерѣдко тратятся усилія на доказательство того, что очевидно само собой.

Методы сокращеннаго вычисленія, которые столь усиленно рекомендовались полвѣка тому назадъ, повидимому, не дѣлаютъ существенныхъ успѣховъ, такъ какъ практичность такихъ способовъ весьма сомнительна. За то все больше входятъ въ употребленіе логарифмы, а въ техническихъ школахъ, гдѣ приближенныя вычисленія играютъ выдающуюся роль, становится весьма популярной счетная линейка. Графическіе методы вычисленія и приближенное

вычисленіе корней численныхъ уравненій высшихъ степеней (напримѣръ, по методамъ профессора Рунге*), лишь рѣдко примѣняются въ школахъ разсматриваемаго нами типа. Пока еще преждевременно судить, могутъ ли они вообще имѣть въ этой школѣ успѣхъ, и найдется ли достаточное число преподавателей которые могли бы справиться съ этимъ предметомъ.

Въ общемъ можно сказать, что примѣненіе интуиціи и опыта къ среднему курсу математики сдѣлало за послѣднее время большіе успѣхи въ Австріи, Германіи и Швейцаріи, чѣмъ въ Англіи, Франціи и Соединенныхъ Штатахъ**). Сравненіе того, что сдѣлано въ этихъ странахъ, главнымъ образомъ, по пути серьезнаго приложенія математики къ практическимъ задачамъ и производства измѣреній явится однимъ изъ цѣнныхъ результатовъ современнаго международнаго движенія.

На первомъ планѣ стоитъ, конечно, вопросъ о характерѣ преподаванія геометріи и о разработкѣ понятія функціи; есть и другіе весьма важные вопросы, но центральная задача для ближайшаго будущаго заключается все-таки здѣсь.

Первый вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ: въ какой мѣрѣ преподаваніе геометріи въ средней школѣ должно носить индуктивный характеръ? Въ настоящее время уже мало кто настаиваетъ, что преподаваніе геометріи лучше всего начинать съ Евклида или Лежандра. Необходима подготовительная стадія, въ которой главную роль должны играть интуиція и опытъ. Но сколько времени нужно отвести на эту подготовительную стадію? на какую именно почву нужно стать и, что важнѣе, въ какой именно мѣрѣ интуиція замѣнить дедукцію Евклидова типа***)? Необходимо ли вести наглядное обученіе два и даже три года, какъ рекомендуютъ нѣкоторые, или же достаточно одного года или полугодія****)? Какъ далеко ригористы въ геометріи должны идти навстрѣчу потребностямъ не математическихъ умовъ? Правъ ли былъ Ньютонъ говоря, что вся эта интуиція есть прекрасная вещь, но что это не геометрія. Нужно ли старую, заправскую геометрію выбросить за бортъ, какъ мы сдѣлали съ средневѣковой логикой, или же, напротивъ, пропедевтическія занятія лишь укрѣпляютъ ея позиціи? Заслуживаетъ ли геометрія Евклидова типа сохраненія, или же ее необходимо разбавить до неузнаваемости всевозможными рисунками, моделями и практическими измѣреніями? Если ростъ интуиціи и опыта въ геометріи вызванъ требованіями самой могущественной силы нашихъ дней — промышленностью и техникой — то, спрашивается, чего потребуютъ отъ насъ силы, идущія ей на смѣну — социальная справедливость? Такіе вопросы часто приходится слушать, но пока еще на нихъ трудно дать научный отвѣтъ; отъ насъ впрочемъ, и не требуется отвѣта на эти вопросы, такъ какъ они лежатъ за предѣлами той задачи, которую поставилъ себѣ настоящій Комитетъ.

Въ общемъ можно сказать, что въ тевтонскихъ странахъ наблюдается тенденція къ соединенію интуитивнаго метода съ индуктивнымъ съ первыхъ же шаговъ преподаванія, тогда какъ во Франціи, а за послѣднее время въ

*) Изложенныхъ ими въ лекціяхъ въ университетѣ Колумбіи (Нью-Йоркъ).

**) Насколько, конечно, можно судить по отвѣтамъ на опросные листы.

***) Эти вопросы разсматриваются въ недавно вышедшемъ сочиненіи Трейтлейна (Treutlein) и Тимердинга (Timerding), изданіе Тейбнера.

****) См. Lietzmann, Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland, 1912.

Англии, дедуктивному курсу предпосылаютъ первоначальный интуитивный циклъ. Въ Соединенныхъ Штатахъ недавно лишь начато обсужденіе этого вопроса, и здѣсь склоняются къ англо-французской системѣ. Возможно ли доказать, что тотъ или другой планъ лучше? Или это зависитъ отъ расы? Можетъ ли нѣмецкая система имѣть успѣхъ въ Соединенныхъ Штатахъ, или къ такому конгломерату расъ лучше подходитъ французская система? Въ Англіи весь курсъ распадается на три части, изъ которыхъ первоначальная основана исключительно на интуиціи и опытѣ; подойдетъ ли такая система для Германіи лучше, чѣмъ ея собственная, радикально отличная, система, характеризующая новѣйшіе учебники этой страны? Многіе считаютъ нѣмецкую систему ненаучной и кажущіеся успѣхъ ея приписываютъ превосходной выучкѣ нѣмецкихъ учителей, тогда какъ другіе, напротивъ, считаютъ распределение курса по цикламъ ультра-научнымъ. Кто правъ? или, можетъ быть, неправы ни тѣ, ни другіе? На эти именно вопросы доклады Комиссіи помогутъ намъ отвѣтить въ ближайшіе годы; пока же достаточно поставить эти вопросы и обратить вниманіе на ихъ важное значеніе.

Второй важный вопросъ касается разработки понятія функціи. Здѣсь роль интуиціи, по крайней мѣрѣ на первыхъ шагахъ, является болѣе определенной, такъ какъ интуитивному методу здѣсь пока еще нельзя противопоставить подходящей научной дисциплины (какъ въ геометріи). Главный доводъ въ пользу школьной разработки понятія функціи, повидимому, слѣдующій: высшій анализъ уже введенъ въ разсматриваемыя нами школы, и для того, чтобы онъ удержалъ здѣсь свое мѣсто и продолжать развиваться въ смыслѣ строгости, необходимо готовить къ нему учениковъ съ младшихъ классовъ, а не ограничиваться старшими. Понятія предѣлъ, перемѣнная скорость, функція и графика должны быть вводимы исподволь и усвоены съ такой ясностью, чтобы учащіеся, приступивъ къ анализу, встрѣтились съ этими понятіями, какъ встрѣчаютъ хорошихъ друзей. Какъ достигнуть этой цѣли наиболѣе экономически, это вопросъ, относящійся къ интуитивной математикѣ. Любопытно, что преподаватели, съ одной стороны, требуютъ исключенія несоизмѣримыхъ величинъ изъ доказательствъ элементарной геометріи, и они же, съ другой стороны, настаиваютъ на изученіи предѣловъ, функцій и скорости измѣненія. Движеніе въ пользу разработки функциональных понятій слишкомъ, однако, молодое, чтобы можно было судить, имѣетъ ли оно прочные корни въ средней школѣ. Началось оно во Франціи лѣтъ двадцать тому назадъ, а за послѣдніе десять лѣтъ нашло сильныхъ защитниковъ въ Германіи; несомнѣнно, что оно имѣетъ серьезное будущее, конечно, при рациональной постановкѣ дѣла *).

(Окончаніе слѣдуетъ).

*) См. Schimmack, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland.

Задача на премию № 6.

Доказать слѣдующую теорему. Если численныя значенія многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

съ цѣлыми коэффициентами и съ положительнымъ коэффициентомъ a_0 при старшемъ членѣ представляютъ собою точныя n -ыя степени при всякомъ цѣломъ значеніи x , то этотъ многочленъ представляетъ собой n -ую степень нѣкотораго другого многочлена съ цѣлыми же коэффициентами (n цѣлое положительное число).

Прив.-доц. Е. Буницкій.

Авторъ лучшаго рѣшенія получить книгъ математическаго содержанія стоимостью въ 10 руб. Рѣшенія должны быть присланы въ редакцію не позже 1 мая 1913 года.

Примѣчаніе. Рѣшеніе задачи на премию должно быть написано на особомъ листѣ бумаги, на которомъ никакой другой переписки съ редакціей быть не должно. Авторы должны назвать свою фамилію и указать адресъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Жидкій воздухъ, какъ изоляторъ. Измѣренія діэлектрической постоянной для охлажденныхъ газовъ, произведенныя Линде, Дьюаромъ (Dewar), Флеммингомъ и Газенёрломъ (Hasenöhr), показали, что всѣ они (между прочимъ также жидкій воздухъ и кислородъ) представляютъ собою хорошіе изоляторы. Но всѣ эти измѣренія были выполнены при низкихъ потенциалахъ, и вопросъ, насколько велики электрическія силы, которыя могутъ выдержать жидкіе газы, оставался открытымъ. Недавно извѣстному голландскому физіку Зееману (Zeeman) понадобилось зарядить конденсаторъ, погруженный въ жидкій воздухъ, до потенциала въ 30 000 *в.м.* При этомъ разстояніе пластинъ конденсатора другъ отъ друга было $\frac{1}{3}$ *с.м.*, такъ что электрическая сила равнялась 90 000 *в.м.* на *с.м.* Оказалось, что указанное огромное напряженіе можетъ быть поддерживаемо въ жидкомъ воздухѣ въ теченіе довольно продолжительнаго времени, если только предварительно устранить нѣкоторыя вредно дѣйствующія обстоятельства: во первыхъ, содержащіяся въ немъ кристаллики твердой углекислоты притягиваются къ пластинкамъ конденсатора и, расположившись другъ за другомъ, могутъ образовать мостъ для разряда. Ихъ можно удалить, профильтровавъ жидкій воздухъ. Во вторыхъ, очень мѣшаютъ образующіеся внутри жидкости пузырьки газа; но если дьюаровскій сосудъ, служащій для храненія жидкаго воздуха, находится въ хорошемъ состояніи, такихъ пузырей образуется очень мало.

Несмотря на то, что конденсаторъ, прослойка котораго состоитъ изъ жидкаго воздуха, можетъ въ теченіе долгаго времени сохранять огромныя раз-

ности потенциалов (90 000 влт. на см. не есть еще предѣль), нельзя все таки быть вполне увѣреннымъ, что внутри жидкаго воздуха существуетъ сильное электрическое поле: возможно предположеніе, что на поверхностяхъ конденсаторовъ образуются непроводящіе слои, такъ что у самыхъ поверхностей градиентъ потенциала огромный, а въ массѣ жидкости лишь незначительный. Чтобы убѣдиться, что въ жидкомъ воздухѣ имѣется чрезвычайно сильное поле не только на границахъ, но и во всей массѣ, Зеemannъ изслѣдовалъ, наблюдается ли въ жидкомъ воздухѣ электрооптическое явленіе Керра или нѣтъ. Явленіе это, характерное для диэлектриковъ, состоитъ въ томъ, что всѣ эти вещества подъ вліяніемъ сильныхъ электрическихъ полей становятся двояко-преломляющими. Это явленіе обнаружено Зеemannомъ въ жидкомъ воздухѣ въ довольно рѣзкой формѣ, и, такимъ образомъ, жидкій воздухъ несомнѣнно долженъ быть причисленъ къ наиболѣе идеальнымъ изоляторамъ. Авторъ намѣренъ повторить свои опыты съ болѣе совершенными приборами, чтобы найти точныя числовыя характеристики.

М. Я.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакция сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Библиотека элементарной математики издается книгоиздательствомъ „Mathesis“ подъ общей редакціей прив.-доц. С. О. Шатуновскаго. I. **В. Лицманъ**. „Теорема Пифагора съ приложеніемъ нѣкоторыхъ свѣдѣній о теоремѣ Ферма“. Переводъ съ нѣмецкаго съ 44 рисунками. Одесса, 1912. Стр. 80. Ц. 40 к.

Идея изданія „Библиотеки элементарной математики“ заимствована книгоиздательствомъ „Mathesis“ у извѣстной Лейпцигской фирмы В. Г. Teubner, выпускающей съ текущаго года рядъ небольшихъ книжекъ приблизительно одинаковаго размѣра въ видѣ серіи подъ общимъ заголовкомъ „Mathematische Bibliothek“. Брошюры составляютъ чрезвычайно элементарно, такъ что они должны быть доступны для учащихся старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, сохраняя, однако, интересъ и для лицъ, владѣющихъ болѣе глубокимъ математическимъ образованіемъ. Книгоиздательство „Mathesis“ издаетъ въ русскомъ переводѣ нѣкоторые выпуски Тейбнеровской бібліотеки, но оно отнюдь не намѣрено копировать последнюю. Напротивъ, нѣкоторые изъ появившихся выпусковъ тейбнеровской серіи въ составъ русской „Библиотеки элементарной математики“ не войдутъ; но последняя будетъ пополнена другими переводными и оригинальными сочиненіями, подходящими подъ тотъ же уровень.

Высшая математика удѣлъ немногихъ. Но интересующихся элементарной математикой есть очень много; въ медвѣжьихъ углахъ, въ отдаленнѣйшихъ закоулкахъ Россіи сидятъ учителя, инженеры, техники, иногда даже врачи и представители другихъ профессій, сохранившіе любовь къ красотахъ математической мысли и склонные удѣлять имъ часы досуга. Въ старшихъ классахъ каждой гимназіи имѣется нѣсколько учениковъ, увлекающихся математикой и жаждущіе узнать что нибудь помимо того, что они готовятъ къ урокамъ.

Библиотека элементарной математики имѣетъ въ виду удовлетворить этимъ запросамъ. Книжки библиотеки будутъ посвящены разработкѣ наиболее важныхъ или интересныхъ вопросовъ элементарной математики въ историческомъ и, по возможности, философскомъ освѣщеніи, при чемъ полная доступность изложенія, какъ основное требованіе, ставится на первый планъ.

Выпущенная первая книжка заимствована изъ Тейбнеровской библиотеки и посвящена основному предложенію Евклидовой геометріи. Въ ней выяснены разнообразныя геометрическіе и арифметическіе вопросы, стоящіе въ связи съ знаменитой теоремой, и значеніе этого предложенія освѣщается такимъ образомъ со всѣхъ сторонъ.

Въ ближайшіе дни выйдутъ также два выпуска, принадлежащіе французскому автору Е. Фурре: „Краткій очеркъ исторіи геометріи“ и „Геометрическіе головоломки и паралогизмы“. Готовятся къ печати: В. Аренсъ „Мысли и изреченія великихъ математиковъ“, Г. Вилейтнеръ „Понятіе о числахъ“, Э. Лёфлеръ „Цифры и цифровыя системы главнѣйшихъ культурныхъ народовъ“, Э. Мейснеръ „Элементы теоріи вѣроятностей“ и т. д.

Прив.-доц. С. Шатуновскій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 23 (6 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3} + \sqrt{x^2 + x + y + 2} = \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 3},$$

$$x^{x-y} = 2y - 1.$$

При рѣшеніи этого уравненія мы будемъ отыскивать исключительно вещественные корни, такъ какъ истолкованіе значенія лѣвой части второго уравненія при мнимыхъ значеніяхъ одного или обоихъ неизвѣстныхъ x и y представило бы трудности, превосходящіе рамки элементарнаго курса алгебры. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы предположимъ, что радикалы лѣвой и правой части перваго уравненія должны также по условію оказаться вещественными числами при искомымъ значеніяхъ x и y , при чемъ всюду по условію взяты арифметическія значенія корней. При этихъ обычныхъ предположеніяхъ отыщемъ раньше тѣ корни, которые не обращаютъ лѣвой (а потому и правой) части перваго уравненія въ нуль. Имѣя въ виду тождество:

$$(\sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3})^2 - (\sqrt{x^2 + x + y + 2})^2 = (\sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2})^2 - (\sqrt{x^2 + 2y + 3})^2, \quad (1)$$

которое легко провѣрить, замѣтивъ, что въ обоихъ частяхъ послѣ обычныхъ упрощеній получается $4x + y - 5$, раздѣлимъ обѣ части тождества (1) на первое изъ данныхъ уравненій. Тогда получимъ новое уравненіе:

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3} - \sqrt{x^2 + x + y + 2} = \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} - \sqrt{x^2 + 2y + 3}.$$

вычитая, которое изъ первого, изъ данныхъ уравненій и дѣля результатъ на 2, получимъ:

$$\sqrt{x^2 + x + y + 2} = \sqrt{x^2 + 2y + 3},$$

откуда $x^2 + x + y + 2 = x^2 + 2y + 3$, т. е.

$$x - y = 1. \quad (2)$$

Подставивъ это значеніе разности $x - y$ въ показатель первой части второго изъ данныхъ уравненій, приводимъ его къ виду:

$$x = 2y - 1. \quad (3)$$

Рѣшая уравненія (2) и (3), находимъ рѣшеніе $x = 1$, $y = 1$, которое по проверкѣ, удовлетворяетъ ограниченіямъ, принятымъ относительно первого уравненія. Теперь остается посмотреть, нѣтъ ли корней, обращающихъ лѣвую (а потому и правую) части первого уравненія въ нуль. Для такихъ корней мы должны имѣть:

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3} + \sqrt{x^2 + x + y + 2} = 0, \quad \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 3} = 0. \quad (4)$$

Но при сдѣланныхъ ограниченіяхъ, эти равенства возможны лишь при соблюденіи четырехъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 5x + 2y - 3 &= x^2 + x + y + 2, \\ x^2 + 4x + 3y - 2 &= x^2 + 2y + 3, \\ x^2 + x + y + 2 &= 0, \quad x^2 + 2y + 3 = 0^* \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Первые два изъ уравненій (5) приводятся къ одному и тому же уравненію:

$$4x + y - 5 = 0, \quad (6)$$

которое несовмѣстимо съ остальными двумя уравненіями (5). Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ изъ уравненія (6) значеніе y въ послѣднихъ два уравненія (5), приходимъ послѣ преобразованій къ уравненіямъ:

$$x^2 - 3x + 7 = 0, \quad x^2 - 5x + 3 = 0,$$

не имѣющимъ общихъ корней, въ чемъ можно убѣдиться, разрѣшивъ эти уравненія. Итакъ, при принятыхъ ограниченіяхъ, $x = 1$, $y = 1$ есть единственное рѣшеніе данной системы.

А. Ильинъ (Астрахань); Л. Сиванъ; Н. Орловскій (Кіевъ); Н. Нейцъ (Самара); М. Рыбкинъ (Ейскъ) Б. Щиголевъ (Варшава).

*) Первые два изъ этихъ равенствъ имѣютъ мѣсто во всякомъ случаѣ, въ чемъ можно убѣдиться, перенося одинъ изъ радикаловъ въ каждомъ изъ равенствъ (4) во вторую часть и возвышая обѣ части въ квадратъ. Третье же и четвертое равенство вытекаютъ изъ сдѣланнаго выше ограниченія, что радикалы предположено разсматривать, какъ арифметическіе корни; но къ тому же результату можно прийти и при болѣе широкой и вполнѣ естественной оговоркѣ — не брать при постановкѣ значеній x и y численно равныхъ радикаловъ (хотя бы и мнимыхъ) съ противными знаками.

Обложка
щется

Обложка
щется