Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLVIII Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 569.

Перемѣнныя звѣзды.

К. Болина.

Яркость большинства звѣздъ кажется намъ неизмѣнной и только тотъ, кто очень сжился съ небеснымъ сводомъ, найдетъ отсюда исключенія. Если не считать „новыхъ звѣздъ", какъ напримѣръ, звѣзды Гиппарха, Тихо-Браге, Кеплера, удивительную звѣзду Nova Персея 1901 г., впервые замѣченную въ Эдинбургѣ Томасомъ Андерсономъ, или въ настоящее время находящуюся въ созвѣздіи Близнецовъ звѣзду Энебо, — то перемѣнныя звѣзды, по крайней мѣрѣ для невооруженнаго глаза очень мало замѣтны. Изъ классической древности и изъ среднихъ вѣковъ до насъ не дошло никакихъ указаній объ измѣняемости звѣздъ. Впервые въ 1596 г. проповѣдникъ Фабриціусъ въ восточной Фрисландіи замѣтилъ въ одинъ прекрасный августовскій вечеръ первую перемѣнную звѣзду на небѣ, неподвижную звѣзду второй величины въ созвѣздіи Кита, которую онъ никогда раньше не наблюдалъ и которую онъ впослѣдствіи, въ октябрѣ слѣдующаго года тщетно пытался найти. Онъ не могъ объяснить свое наблюденіе перемѣнностью свѣта звѣзды, и съ этого времени протекло еще цѣлыхъ 100 лѣтъ, когда впервые было признано существованіе перемѣнныхъ звѣздъ; лишь въ 1639 г. Гольварда (Holwarda) въ Francker'ѣ при помощи продолжительныхъ изслѣдованій установилъ нѣсколько неправильное колебаніе свѣта этой звѣзды отъ 2-й до 6-й величины въ теченіе періода въ 333 дня. Названіе „Mira", данное этой, сперва единственной звѣздѣ, o Ceti, стало служить обозначеніемъ типа перемѣнныхъ звѣздъ съ длиннымъ періодомъ.

1. Перемѣнныя звѣзды съ длиннымъ періодомъ. Большинство открытыхъ затѣмъ перемѣнныхъ звѣздъ по отношенію колебанія ихъ свѣта являются аналогичными этой, впервые открытой звѣзды, — однако, часто колебанія эти не обладаютъ такой правильностью; они принадлежатъ къ типу Mira, или къ типу перемѣнныхъ звѣздъ съ длиннымъ періодомъ. Ихъ періоды равняются большей частью около 300 дней круглымъ счетомъ, или точнѣе, колеблятся въ границахъ отъ 200 до 400 дней. Наиболѣе короткимъ періодомъ обладаетъ звѣзда U Geminorum (86 дней) и длиннѣйшимъ — S-Cassiopejae (610 дней). Измѣненіе силы свѣта этихъ звѣздъ большей частью весьма замѣтно и звѣзды эти переходятъ обыкновенно черезъ нѣсколько классовъ по величинѣ. χ Лебедя измѣняется отъ 4-й до 13-й величины въ періодъ въ 13 мѣсяцевъ; V Дельфина отъ 7-й до 17-й величины въ періодъ въ 540 дней. Послѣдняя наиболѣе большая изъ извѣстныхъ амплитудъ соотвѣтствуетъ отношенію дѣйствительной силы свѣта 1 : 10000. Обыкновенно увеличеніе свѣта происходитъ быстрѣе уменьшенія. Яркость мѣняется также въ различные періоды.

Красныя звѣзды даютъ большой процентъ перемѣнныхъ и наоборотъ почти всѣ перемѣнныя звѣзды съ большимъ періодомъ являются болѣе или менѣе красными, такъ что здѣсь несомнѣнно существуетъ извѣстное взаимоотношеніе. Утвержденіе Ньюкома, что почти всѣ перемѣнныя звѣзды типа Mira въ моментъ своего наиболѣе яркаго свѣта даютъ спектры 3-го класса, т. е. спектръ поглощенія съ налагающимися на него яркими водородными линіями, за малыми исключеніями должно считаться справедливымъ. Слѣдуетъ упомянуть, что во многихъ случаяхъ перемѣнныя звѣзды были открыты лишь по характеристическимъ свойствамъ ихъ спектровъ.

По Кампбеллю, заслуженному директору Ликской обсерваторіи, у Mira водородная линія $H\gamma$ самая яркая и уже черезъ 2 минуты запечатлѣвается на фотографической пластинкѣ, въ то время какъ для остальной части спектра это требуетъ времени до одного часа. По Кампбеллю линія $H\delta$ тройная и въ этой тройной средняя значительно ярче лежащихъ съ боковъ. — Что касается спектровъ поглощенія Mira, то A. Fowler опубликовалъ недавно*) о поразительномъ открытіи, что этотъ спектръ Mira совпадаетъ со спектромъ окиси титанія. Mr. Slipher въ Ловелевской обсерваторіи (Аризона Сѣв.-Амер. Соед. Штаты) изготовилъ для него спектрограмму Mira, простирающуюся отъ крайняго видимаго краснаго цвѣта до фіолетоваго. Получаемый непосредственно въ пламени вольтовой дуги

*) A. Fowler. Cpectroscopie Comparison of o Ceti with Titanium Oxide. „Monity Notices of the Royal Astronomical Society". Vol. 59, pag. 508.

спектръ окиси титанія давалъ обращенный спектръ для сравненія со спектромъ звѣзды. Оба спектра показали поразительнѣйшее совпаденіе. Изъ десяти полосъ Dunér'а въ спектрѣ Mira о девяти было доказано ихъ принадлежность къ спектру окиси титанія. Напротивъ, относительно третьей полосы Duner'а существуетъ нѣкоторая неувѣренность. Соотвѣтственный спектръ Mira даетъ яркія водородныя линіи $H\alpha$ и $H\beta$, точно такъ же, какъ нѣкоторыя металлическія линіи, часть которыхъ были приписаны Slipher'омъ ванадію, въ то время какъ другія происходятъ отъ желѣза и титанія.

Упомянутыя выше свойства указываютъ на то, что измѣненіе свѣта въ звѣздахъ съ большимъ періодомъ, имѣетъ реальную и физическую природу. Весьма допустимо, что такія измѣненія силы свѣта могутъ имѣть мѣсто у звѣздъ съ болѣе или менѣе неправильнымъ и въ общемъ довольно большимъ періодомъ. Однако, о томъ какъ эти свѣтовыя и тепловыя измѣненія должны быть объяснены, существуютъ различныя мнѣнія. Теорія Zöllner'а о періодическомъ возникновеніи шлаковъ на поверхности звѣздъ хотя и не можетъ быть признана прямо невозможной, однако, имѣетъ въ настоящее время только немногихъ послѣдователей, а по отношенію къ солнечнымъ пятнамъ должна быть совершенно отвергнута. Объясненіе Ritter'а, что измѣненіе силы свѣта есть слѣдствіе послѣдовательнаго сжатія и расширенія звѣздъ, которыя разсматриваются какъ образованныя изъ газовъ, т. е. пульсаціи звѣзднаго тѣла — нѣсколько болѣе правдоподобна. Періодъ пульсаціи долженъ въ этомъ случаѣ расти съ объемомъ разсматриваемой звѣзды. При этомъ совершенно нѣтъ необходимости допускать болѣе значительное дѣйствіе сжатія, дабы могъ возникнуть избытокъ тепла и свѣта. Если мы будемъ думать, напримѣръ, о солнцѣ, то процессы могутъ возникать внутри солнечнаго тѣла, не проявляясь вообще въ расширеніи солнечной атмосферы и безъ замѣтнаго измѣненія солнечнаго діаметра, который, какъ до сихъ поръ могло быть установлено, при одиннадцатилѣтнемъ періодѣ солнечныхъ пятенъ также не испытываетъ никакихъ измѣненій. Такимъ образомъ солнце разсматривалось бы какъ перемѣнная звѣзда типа Mira, только со значительно большимъ періодомъ и со значительно меньшими варіаціями силы свѣта.

Согласно этому, причину колебанія свѣта перемѣнныхъ звѣздъ слѣдуетъ разсматривать, по аналогіи съ процессами на солнцѣ. Если бы солнце было также удалено, какъ ближайшія отъ насъ неподвижныя звѣзды, и если бы при этомъ мы могли достаточно точно измѣрить силу его свѣта, то мы нашли бы, что солнце — есть перемѣнная звѣзда съ одиннадцатилѣтнимъ періодомъ. При максимумѣ солнечныхъ пятенъ эта звѣзда имѣла бы минимумъ силы свѣта и при минимумѣ солнечныхъ пятенъ достигала бы максимума силы свѣта. Это объясненіе подтверждается до нѣкоторой степени тѣмъ, что перемѣнныя звѣзды съ длиннымъ періодомъ принадлежатъ къ III-му спектральному классу, который въ нѣкоторомъ отношеніи имѣетъ сходство со спектромъ солнечныхъ пятенъ. Слѣдуетъ допустить, что переходъ звѣзды изъ второго въ третій спектральный классъ сопровождается увеличеніемъ образованія пятенъ, благодаря чему поверхность звѣзды покрывается пятнами въ этомъ случаѣ, въ значительно большемъ масштабѣ, чѣмъ это имѣетъ мѣсто на солнцѣ.

Это представленіе приводитъ къ болѣе правдоподобному объясненію перемѣнныхъ звѣздъ, чѣмъ гипотеза Zöllner'a, особенно въ связи съ точкой зрѣнія Ritter'a. Здѣсь можно, какъ это дѣлаетъ проф. H. H. Turner, сдѣлать еще одинъ шагъ далѣе. Именно, если принять, что колебаніе свѣта перемѣнныхъ звѣздъ имѣетъ ту же природу, что и періодическіе процессы на солнцѣ, то въ частности будетъ вѣроятна еще аналогія въ томъ смыслѣ, что въ теченіе періода происходитъ смѣщеніе зонъ пятенъ. На солнцѣ происходитъ это явленіе, согласно такъ называемому закону широтъ Spörer'a, слѣдующимъ образомъ. При приближеніи максимума дѣятельности пятенъ, появляются солнечныя пятна приблизительно на 30^0 широты. Зона пятенъ приближается затѣмъ постепенно къ экватору и ко времени максимума лежитъ около 16^0 широты. Послѣ этого пятна начинаютъ исчезать и минимумъ ихъ наступаетъ приблизительно при $8^0 - 10^0$ широты по прошествіи 12 — 14 лѣтъ. Но уже за два года до того начинается новое періодическое образованіе въ тридцатиградусной зонѣ. H. H. Turner замѣчаетъ*), что смотря по тому, обращена ли къ намъ звѣзда своей экваторіальной стороной или областью полюса, такое смѣщеніе пятенъ должно различнымъ образомъ отражаться на измѣненіи свѣта звѣзды. Въ первомъ случаѣ время $M - m$, перехода отъ минимума къ максимуму, короче чѣмъ переходъ отъ максимума къ минимуму, ибо это какъ разъ характеристично при образованіи пятенъ an und für sich. Но это явленіе, разсматриваемое со стороны полюса, можетъ давать какъ разъ обратные законы, ибо эффектъ дѣйствительнаго максимума пятенъ, который имѣетъ мѣсто вблизи экватора, уменьшается благодаря проекціи, такъ что часть періода максимума пятенъ можетъ казаться даже какъ періодъ минимума, т. е. какъ періодъ максимума свѣта при чемъ также величина $M - m$ покажется увеличенной. Если P есть полный періодъ звѣзды, то, полагая

$$a = \frac{2(M - m) - P}{P},$$

находимъ характеристическое число a, принимающее въ различныхъ случаяхъ различныя значенія. По каталогу Chandler'a для перемѣнныхъ звѣздъ эта величина колеблется отъ $+0.22$ до -0.40. Отрицательныя числа принадлежатъ „экваторіальнымъ" звѣздамъ. Такія перемѣнныя звѣзды разбросаны по всему небу, въ то время, какъ „полярныя" звѣзды (съ положительнымъ a) согласно произведеннымъ вычисленіямъ не наблюдаются вблизи полюсовъ Млечнаго Пути. Это можно объяснить тѣмъ, что оси вращенія перемѣнныхъ звѣздъ расположены вообще параллельно Млечному Пути, вслѣдствіе чего въ

---

*) H. H. Turner. „On the Classification of long — period variable Stars, and a possible physikal Interpretation". „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society", col. 67, pag. 332.

Млечномъ Пути находятся какъ „полярныя“ такъ и „экваторіальныя“ звѣзды, на полюсахъ же Млечнаго Пути — только „экваторіальныя“ звѣзды.

2. Перемѣнныя звѣзды съ длиннымъ періодомъ и малой амплитудой. Особый классъ составляютъ звѣзды съ небольшими, неправильными, но всегда повторяющимися измѣненіями. Варіаціи ихъ достигаетъ обычно только правильной дроби отъ величины класса. Часто эти звѣзды бываютъ яркими. Къ этой группѣ принадлежатъ, напримѣръ:

α — Cassiopejae.	Измѣненіе отъ	2,4 — 2,8,
ϱ — Persei	„ „	3,4 — 4,2,
α — Orionis	„ „	1,0 — 1,4,
α — Herculis	„ „	4,6 — 6,4,
μ — Cephei	„ „	4,0 — 6,0,
β — Pegasi	„ „	2,2 — 2,7.

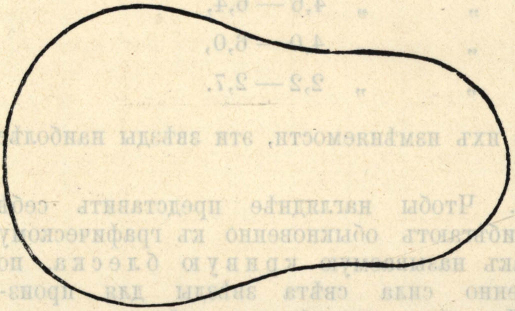
Очевидно, по отношенію ихъ измѣняемости, эти звѣзды наиболѣе близки къ солнцу.

3. Кривая блеска. Чтобы нагляднѣе представить себѣ измѣненіи свѣта звѣзды, прибѣгаютъ обыкновенно къ графическому представленію, и строятъ такъ называемую кривую блеска, по которой видна непосредственно сила свѣта звѣзды для произвольнаго момента періода. Для тѣхъ перемѣнныхъ звѣздъ съ длиннымъ періодомъ, которыя въ различные періоды достигаютъ неодинаковой силы свѣта, нужно было бы конструировать болѣе длинную кривую, какъ это сдѣлалъ, напримѣръ, B. Plassmann для такъ называемой Гранатовой звѣзды (μ Cephei) для періодовъ съ 1852 до 1903 года. Но въ общемъ неправильности колебанія свѣта между различными періодами такъ незначительны, что достаточно кривой для одного единственнаго періода.

4. Звѣзды типа Algol. Вскорѣ послѣ открытія Mira Монтанари нашелъ въ 1667 г., что одна звѣзда въ созвѣздіи Персея, такъ называемая Algol, тоже имѣетъ колебаніе свѣта; однако, только черезъ 115 лѣтъ, именно въ 1782 году, было доказано, что измѣненія этой звѣзды совершенно иной природы, чѣмъ у Mira Ceti. Именно, Goodricke показалъ, что періодъ Алголя чрезвычайно коротокъ, именно около 3 дней. Измѣненіе свѣта Алголя характеризуется тѣмъ, что звѣзда остается неизмѣнно второй величины въ теченіи $2^1/_2$ дней; затѣмъ въ теченіе слѣдующихъ 5 часовъ она убываетъ до 3-й величины, и затѣмъ также скоро возрастаетъ до 2-й величины, послѣ чего процессъ повторяется. Эта вполнѣ правильная свѣтовая кривая объясняется тѣмъ, что темный спутникъ звѣзды періодически проходитъ черезъ поле зрѣнія. Такимъ образомъ здѣсь нѣтъ физическаго измѣненія свѣта, но имѣетъ мѣсто „звѣздное затменіе“. Число извѣстныхъ перемѣнныхъ звѣздъ типа Algol доходитъ до 80 съ періо-

домъ отъ 1 дня до 30 дней. Одна изъ интереснѣйшихъ звѣздъ этого типа, есть *U* Cephei, сила свѣта которой приблизительно съ 9 величины во время минимума, достигаетъ до величины до $2^1/_2$; минимумъ остается также постояннымъ въ теченіе полныхъ двухъ часовъ. Въ 1896 году мнѣ удалось опредѣлить съ точностью до одной секунды ея періодъ въ $2^d\,11^h\,49^m\,44^s\,5$ *).

Въ случаѣ, когда спутникъ звѣзды имѣетъ собственный свѣтъ, возникаетъ въ общемъ два нѣсколько неравныхъ минимума, въ зависимости отъ того, которая изъ звѣздъ — главная звѣзда или спутникъ — находится позади. Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, съ *Y*-Лебедя или *Z*-Геркулеса; заслуга открытія и установленія законовъ измѣняемости ихъ принадлежитъ профессору N. C. Dunér'у **). H. N. Russel и A. W. Roberts независимо другъ отъ друга указали, что плотность звѣздъ типа Algol меньше плотности солнца и что спектроскопически они также отличаются отъ другихъ звѣздъ съ короткимъ періодомъ, спектръ которыхъ имѣетъ типъ солнечнаго спектра.



Фиг. 1. — Apioid.

5. Звѣзда апіоиднаго типа. Если обѣ составляющихъ двойной звѣзды находятся въ одной плоскости съ направленіемъ свѣта отъ звѣзды къ землѣ и чрезвычайно близки другъ отъ друга, то должны были бы произойти еще два различныхъ минимума свѣтовой интенсивности, но измѣненіе свѣта въ этомъ случаѣ было бы непрерывнымъ, т. е. звѣзда не оставалась бы продолжительное время неизмѣнной, какъ это имѣетъ мѣсто въ звѣздахъ, дѣйствительно типа Algol. Очевидно, этотъ типъ имѣлъ бы мѣсто, если большая и меньшая составляющая соединены и образуютъ единственное тѣло, такъ называемый — апіоидъ (грушеобразное тѣло вращенія), котораго устойчивость, какъ тѣла вращенія, доказалъ Анри Пуанкаре.

Существуютъ ли соотвѣтствующія перемѣнныя зрѣзды? Да. Уже названный выше Goodricke нашелъ въ 1784 году двѣ новыя перемѣнныя звѣзды — β-Lyrae и δ-Cephei, изъ которыхъ первая есть звѣзда типа Apioid. Къ той же группѣ принадлежитъ *U*-Pegasi, далѣе открытая A. W. Roberts'омъ въ Lovedal'ѣ въ Южной Африкѣ звѣзда *RR*-Centauri (періодъ $14^h\,32^m\,10^s\,76$ ***) точно также замѣчательная по своему

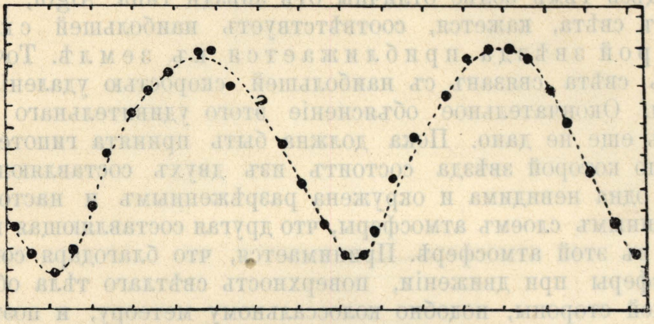
*) „Astron. Nachrichten“ № 3762. Ueber den Lichtwechsel von U-Cephei.

**) Другія, недавно открытыя A. Stanley Williams'омъ интересныя звѣзды типа Algol: *RV*-Syrae (періодъ $3^d\,5990$); *Y*-Anrigae (періодъ $3^d\,8590$); *VW*-Cygni (періодъ $8^d\,4306$). „Monthly Notices“ 66, p. 114; 65, p. 253; 66, p. 118.

***) „Monthly Notices“. 66, p. 123.

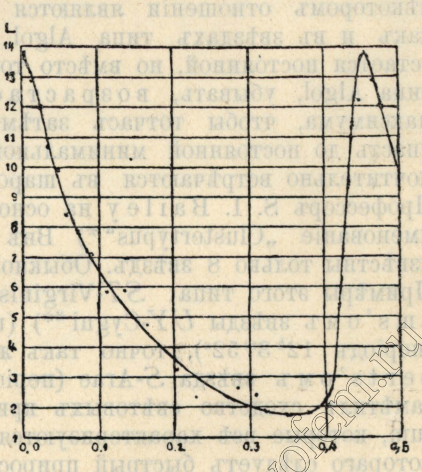
необычайно короткому періоду ($4^h\,0^m\,13^s\,267$), опредѣленная точнѣе I. M. Baldwin'омъ звѣзда *W*-Большой Медвѣдицы *). Эти звѣзды слѣдуетъ разсматривать, какъ разновидность типа Algol.

6. Звѣзды-метеороиды. Къ звѣздамъ съ краткимъ періодомъ (періодомъ, меньшимъ 10 дней) принадлежатъ не только звѣзды типа Apioid. Различаютъ обыкновенно двѣ группы звѣздъ съ краткимъ



Фиг. 2. — Свѣтовыя кривыя *RR* Centauri.

періодомъ, которые, однако, могутъ быть сведены къ одному типу. Первая группа, для которой типична звѣзда γ-Cephei, характеризуется тѣмъ, что усиленіе свѣта идетъ значительно быстрѣе ослабленія. Къ этой группѣ принадлежатъ далѣе звѣзды *SU*-Cygni, η-Aquilae (послѣдняя, открыта уже въ 1784 г.), *RR*-Leonis (періодъ $10^h\,51^m\,24^s\,6$) — звѣзда, недавно открытая г. Luizet**); точно также — звѣзда *XX*-Cygni, недавно найденная E. Крономъ — перемѣнная звѣзда съ наиболѣе короткимъ изъ до сихъ поръ извѣстныхъ пероідовъ — ($3^h\,14^m\,12^s.\,3547$ ***). Вторая группа характеризуется равномѣрнымъ увеличеніемъ и уменьшеніемъ свѣта; типомъ для этихъ звѣздъ служитъ ζ-Geminorum съ симметрической свѣтовой кривой.



Фиг. 3. — Свѣтовая кривая *RR* Leonis.

Однако, это не все. Означенныя звѣзды принадлежатъ ко

*) „Monthly Notices". 69, p. 78

**) M. Luizet. Èlements et courbe de lumière de l'etoile variable, *RR*-Lion (*BD* + 24°,2183). „Bulletin Astronomique", décembre 1911.

***) E. Kron. Über den Lichtwechsel von *XX*-Cygni. „Publicationen des Astrophysikalischer Observatiums zu Potsdam". N. 65, 1912.

II-му спектральному классу — не такъ, какъ звѣзда съ долгимъ періодомъ типа Mira къ спектральному классу III—и, кромѣ того, обнаружено, что всѣ эти звѣзды, насколько только было до сихъ поръ изслѣдовано, суть спектроскопическія двойныя звѣзды, період обращенія которыхъ въ точности равенъ періоду измѣненія свѣта. Такъ какъ всегда воспринимается спектръ только одной составляющей, то другая должна быть или темной или во всякомъ случаѣ значительно слабѣе первой. Но условія здѣсь тѣмъ болѣе отличны отъ звѣздъ типа Algol, такъ какъ максимумъ свѣта, кажется, соотвѣтствуетъ наибольшей скорости, съ которой звѣзда приближается къ землѣ. Точно также минимумъ свѣта связанъ съ наибольшей скоростью удаленія звѣзды отъ земли. Окончательное объясненіе этого удивительнаго факта до сихъ поръ еще не дано. Пока должна быть принята гипотеза Duncan'а, по которой звѣзда состоитъ изъ двухъ составляющихъ, изъ которыхъ одна невидима и окружена разрѣженнымъ и настолько распространеннымъ слоемъ атмосферы, что другая составляющая постоянно движется въ этой атмосферѣ. Принимается, что благодаря сопротивленію атмосферы при движеніи, поверхность свѣтлаго тѣла обнажается съ передней стороны, подобно колоссальному метеору, и поэтому свѣтитъ сильнѣе, въ то время, какъ задняя сторона остается относительно темной.

7. Звѣзды типа Antalgol. Къ звѣздамъ съ короткимъ періодомъ принадлежатъ еще, какъ спеціальный классъ, звѣзды такъ называемаго типа Antalgol. Названіе указываетъ, что эти звѣзды въ нѣкоторомъ отношеніи являются противоположностью Algol'я. Хотя, какъ и въ звѣздахъ типа Algol, сила ихъ свѣта нѣкоторое время остается постоянной, но вмѣсто того, чтобы затѣмъ, какъ въ звѣздахъ типа Algol, убывать, возрастаетъ ихъ сила свѣта до извѣстнаго максимума, чтобы тотчасъ затѣмъ, но болѣе медленнымъ темпомъ, упасть до постоянной минимальной интенсивности. Эти звѣзды предпочтительно встрѣчаются въ шарообразныхъ звѣздныхъ скопленіяхъ. Профессоръ S. I. Bailey на основаніи этого даетъ данному типу наименованіе „Clustertypus“ *) Внѣ звѣздныхъ кучъ изъ этого типа извѣстны только 8 звѣздъ. Обыкновенно, это слабыя свѣтомъ звѣзды. Примѣры этого типа: *ST*-Virginis, открытыя A. Stanley Williams'омъ звѣзды *UY*-Cygni **) (періодъ $13^h 27^m 20^s 85$) и *Y*-Lyrae ***) (періодъ $12^h 3^m 52^s$), точно такъ же, какъ открытая Alex. W. Roberts'омъ звѣзда *S*-Arae (періодъ $10^h 50^m 43^s$). Roberts впервые замѣтилъ сходство свѣтовыхъ кривыхъ *S*-Arae, *R*-Puppis и *S*-Velorum, которые всѣ характеризуются стаціонарнымъ минимумомъ, послѣ котораго слѣдуетъ быстрый приростъ силы свѣта, какъ онъ установилъ въ Lovedale'ѣ путемъ десятилѣтнихъ изслѣдованій. Относительно двухъ послѣднихъ звѣздъ не существуетъ иного объясненія измѣненія свѣта, какъ то, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ явленіемъ затменія. Маленькій,

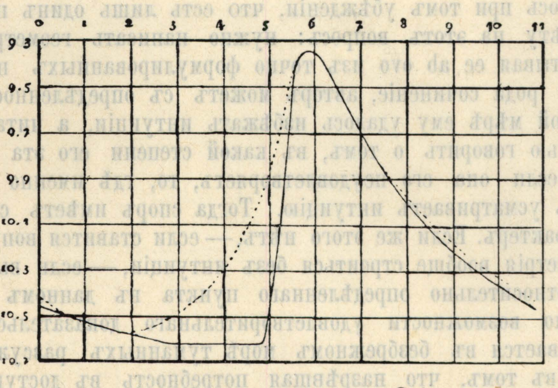
---

*) „Astrophysical Journal“. Vol X, 258.

**) „Monthly Notices“. 63, p. 304.

***) „Monthly Notices“. 62, p 206.

но яркій спутникъ проходитъ при каждомъ обращеніи позади основного тѣла, причемъ, вслѣдствіе того, что онъ загораживается, всякій разъ наступаетъ минимумъ силы свѣта. По Roberts'у для S-Arae явленіе это при минимумѣ фазъ совершенно подобно указанному, въ то время какъ остатокъ свѣтовой кривой и, особенно при убывающей фазѣ измѣненія свѣта S-Arae, конструированъ совершенно иначе, чѣмъ напримѣръ, у S-Velorum, такъ что кривая эта имѣетъ хорошо извѣстный типъ для звѣздъ съ краткимъ періодомъ. Такимъ образомъ слѣдуетъ принять, что при звѣздѣ S-Arae мы имѣемъ дѣло съ нѣкоторымъ измѣненіемъ происшедшимъ отъ затменія, за которымъ наступаетъ кратко-періодическое измѣненіе того же типа, что и у δ-Cephei. Въ этомъ случаѣ, если принять, приведенное выше объясненіе Duncan'a для звѣздъ типа δ-Cephei, будетъ въ обоихъ случаяхъ измѣненія одинъ и тотъ же періодъ. Свѣтовая кривая S-Arae представлена на прилагаемомъ чертежѣ.



Фиг. 4. — Свѣтовая кривая S-Arae.
Сплошныя линіи — наблюденныя, пунктирныя — теоретическія.

Періодъ звѣздъ, по Roberts'у $10^h 50^m 43^s 45$ и стаціонарная стадія продолжается 2 часа, т. е. $^1/_5$ всего періода.

Слѣдуетъ замѣтить, что эти звѣзды совсѣмъ слабы, постоянная минимумъ-фаза можетъ быть очень трудно и неточно установлена и поэтому и само явленіе еще сомнительно. Однако, Roberts, какъ это кажется, своими наблюденіями въ 1910 году, анулировалъ это замѣчаніе. Число его наблюденій было не меньше 310; они простирались отъ апрѣля до сентября и точность каждаго наблюденія была не меньше 0.07 величины класса.

Послѣднія изъ названныхъ перемѣнныхъ звѣздъ типа Antalgol, должны были бы быть внесены въ классъ метеорныхъ звѣздъ и именно какъ спеціальный случай послѣднихъ, гдѣ еще царитъ нѣкоторая темнота. Изученіе этихъ обоихъ типовъ принадлежитъ къ важнѣйшимъ задачамъ современной астрономіи, такъ какъ оно, какъ кажется, внесетъ нѣкоторую ясность въ до сихъ поръ неизвѣстныя явленія въ мірѣ неподвижныхъ звѣздъ.

По поводу интуиціи въ новой геометріи.

В. Ф. Кагана.

Въ статьѣ, озаглавленнной «Интуиція въ работѣ Д. Гильберта» *) и въ дополнительной замѣткѣ, помѣщенной въ предыдущемъ номерѣ нашего журнала, г. Извольскій ставитъ рядъ вопросовъ коренной важности въ ученіи объ обоснованіи геометріи. Г. Извольскій совершенно правъ, конечно, если «не жалѣетъ», какъ онъ выражается, что поднялъ эти вопросы на страницахъ «Вѣстника». Это вопросы слишкомъ существенные, они слишкомъ мало выяснены, чтобы ихъ можно было игнорировать. Жалѣть приходится только о томъ, что дать на нихъ удовлетворительные отвѣты въ предѣлахъ небольшой статьи очень трудно.

Я остаюсь при томъ убѣжденіи, что есть лишь одинъ путь къ положительному отвѣту на этотъ вопросъ: нужно написать геометрію, строго формально разматывая ее ab ovo изъ точно формулированныхъ посылокъ. Написавши такого рода сочиненіе, авторъ можетъ съ опредѣленностью говорить о томъ, въ какой мѣрѣ ему удалось избѣжать интуиціи, а читатель можетъ съ опредѣленностью говорить о томъ, въ какой степени его эта система удовлетворяетъ; а если она его неудовлетворяетъ, то, гдѣ именно тѣ пункты, въ которыхъ онъ усматриваетъ интуицію. Тогда споръ имѣетъ совершенно опредѣленный характеръ. Если же этого нѣтъ,— если ставится вопросъ о томъ, можетъ ли геометрія вообще строиться безъ интуиціи,— если высказывается сомнѣніе не относительно опредѣленнаго пункта въ данномъ доказательствѣ, а относительно возможности удовлетворительнаго доказательства вообще, то споръ расплывается въ безбрежномъ морѣ туманныхъ разсужденій. Вся бѣда заключается въ томъ, что назрѣвшая потребность въ доступномъ изложеніи современныхъ системъ геометріи еще не получила удовлетворенія. Спеціальныя же работы могутъ дѣйствительно порождать много сомнѣній вслѣдствіе своей краткости.

Я постараюсь съ возможной опредѣленностью высказать, въ какой мѣрѣ, на мой взглядъ, эти вопросы могутъ считаться рѣшенными.

Если мы ставимъ вопросъ о томъ, можно ли избѣжать въ геометріи интуиціи, то нужно прежде всего указать предѣлы самой интуиціи. Если я говорю: «столъ» есть одно слово, а «столъ» «стулъ» два слова, то есть ли это интуиція или нѣтъ? Конечно, есть, ибо утвержденіе это основано на тѣхъ представленіяхъ, которыя мы связываемъ съ терминами «одно слово», «два слова». Можетъ ли обойтись система геометріи безъ такого рода интуиціи? Безусловно нѣтъ. Никакое разсужденіе, никакое доказательство не можетъ имѣть мѣста, коль скоро мы не умѣемъ отличать одно понятіе отъ двухъ понятій, одно слово отъ двухъ словъ. «Элементъ a принадлежитъ комплексу A; комплексъ A принадлежитъ комплексу B; слѣдовательно, элементъ a принадлежитъ комплексу B». Представляетъ ли собой этотъ выводъ интуицію? Безусловно представляетъ, потому что онъ основанъ на этомъ представленіи,

*) См. „Вѣстникъ“, № 563—564.

которое мы соединяемъ съ понятіемъ «элементъ принадлежитъ комплексу» *). Можетъ ли геометрія обойтись безъ этого рода интуиціи? Нѣтъ, по крайней мѣрѣ, это еще не сдѣлано. Когда мы говоримъ: точка A лежитъ на линіи l, а линія l на поверхности Λ, слѣдовательно точка A лежитъ на поверхности Λ, то мы на это опираемся.

A означаетъ то же, что B; B означаетъ то же, что C; слѣдовательно A означаетъ то же, что C. Этотъ выводъ представляетъ собою интуицію и безъ этой интуиціи геометрія обойтись не можетъ.

Прямая имѣетъ точку внутри и другую точку внѣ данной окружности; слѣдовательно, прямая пересѣкаетъ окружность. Это интуиція, одна изъ тѣхъ формъ интуиціи, которая попадается на каждомъ шагу какъ у Евклида, такъ и во всѣхъ сочиненіяхъ, написанныхъ по шаблону Евклида. Можетъ ли новая геометрія обойтись безъ такого рода интуиціи? Безусловно можетъ, въ этомъ заключается ея успѣхъ.

Въ чемъ же заключается различіе интуиціи, приведенной въ послѣднемъ примѣрѣ, отъ той, которая имѣетъ мѣсто въ первыхъ трехъ примѣрахъ? Въ послѣднемъ примѣрѣ мы имѣемъ дѣло съ интуиціей геометрической, т. е. съ такой интуиціей, которая коренится въ опредѣленныхъ представленіяхъ, связываемыхъ съ пространственными образами. Такъ, интуитивное заключеніе въ третьемъ примѣрѣ имѣетъ свой источникъ въ томъ наглядномъ представленіи, которое мы связываемъ съ прямой и съ окружностью. Итакъ, мы будемъ подъ геометрической интуиціей разумѣть такую интуицію, которая покоится на опредѣленномъ наглядномъ представленіи геометрическихъ образовъ — точекъ, линій, поверхностей и тѣлъ.

Въ первыхъ же трехъ примѣрахъ мы имѣемъ дѣло съ интуиціей логической, т. е. съ наглядными представленіями такихъ понятій, которыя имѣютъ неизмѣримо бо́льшую общность, нежели понятія геометрическія. Кто не умѣетъ отличить одного понятія отъ двухъ понятій, или одного предмета отъ двухъ предметовъ, не можетъ вести никакого разсужденія. Пространство и пространственные образы здѣсь совершенно не причемъ. Это есть интуиція логическая, а не геометрическая. Кто не имѣетъ представленія о совокупности, тотъ не можетъ вести никакого разсужденія, къ какой бы области оно ни относилось; и здѣсь пространство и пространственные образы совершенно не причемъ — это интуиція логическая, а не геометрическая.

Итакъ, подъ логической интуиціей въ противоположность геометрической мы разумѣемъ сужденіе, основанное на наглядныхъ представленіяхъ такихъ понятій, которыя не свойственны непремѣнно геометріи и пространству, а представляютъ основную часть всякаго разсужденія вообще.

Геометрія Гильберта и его школы совершенно свободна отъ интуиціи геометрической, но, конечно, не свободна отъ интуиціи логической.

*) Въ современной математической логикѣ это свойство классовъ выводится изъ аналогичныхъ свойствъ предложеній; но тогда интуитивно принимаются эти интуитивныя свойства предложеній.

Я понималъ сомнѣнія г. Извольскаго именно въ этомъ смыслѣ. Если при чтеніи книги Энрикеса у г. Извольскаго возникло сомнѣніе, пересѣкутся ли линіи, которыя должны пересѣчься, то въ этомъ виноватъ либо онъ, либо авторъ. Новая геометрія здѣсь не при чемъ; такія вещи она должна доказать и умѣетъ доказать безъ малѣйшаго остатка. Но если возникаютъ сомнѣнія болѣе глубокія относительно интуиціи логической, то здѣсь вопросъ стоитъ иначе. Въ послѣднее время дѣлаются очень глубокія попытки установить тотъ минимумъ общихъ логическихъ понятій, которыя входятъ въ составъ математическихъ сужденій. Эту задачу съ полной опредѣленностью поставилъ себѣ Фреге; эту задачу ставятъ себѣ Рёссель и Уайтегидъ*) въ обширномъ трактатѣ, 2-ой томъ котораго появился только въ послѣдніе мѣсяцы. Тщательно изучая въ настоящее время это сочиненіе, мы полагаемъ все же, что эта задача еще не рѣшена; но очень возможно, что и она ближе къ своему разрѣшенію, чѣмъ это кажется.

Впрочемъ, въ своей дополнительной замѣткѣ г. Извольскій, по существу, собственно, мнѣ не возражаетъ; онъ ссылается на авторитетъ Пуанкаре, именно приводитъ выдержку изъ его книги «Наука и Методъ». Да позволено мнѣ въ такомъ случаѣ будетъ сослаться на выдержку изъ другого мемуара Пуанкаре, спеціально посвященному разбору «Grundlagen» Гильберта**). Пуанкаре имѣетъ здѣсь въ виду установить, въ чемъ собственно заключалась заслуга знаменитаго мемуара Гильберта. Указавъ, что до него Гельмгольцъ и Ли перевели геометрію изъ сферы пространственныхъ образовъ въ сферу чиселъ и численныхъ комбинацій и что эта ариѳметизація представляла слабое мѣсто этого направленія, Пуанкаре характеризуетъ заслугу Гильберта въ слѣдующихъ словахъ.

«Этотъ именно пробѣлъ заполнилъ Гильбертъ. Геометрическія системы Ли всѣ оставались связанными съ ариѳметическими и аналитическими формами, которыя казались совершенно неосязаемыми. Гильбертъ сломалъ эти формы, или лучше сказать онъ ихъ расширилъ. Его пространства уже не представляютъ собой Zahlenmanigfaltigkeiten (числовыхъ комплексовъ). Объекты, которые онъ называетъ точками, прямыми и плоскостями, становятся чисто логическими субстанціями, представить себѣ которыя совершенно невозможно. Нельзя себѣ рисовать въ опредѣленной формѣ этихъ точекъ, которыя представляютъ собой лишь системы трехъ рядовъ. И это для него вовсе не нужно; для него важно, что это суть индивидуумы и что онъ имѣетъ точныя правила, посредствомъ которыхъ онъ отличаетъ эти индивидуумы одни отъ другихъ и условно устанавливаетъ между ними соотношеніе равенства и неравенства, а также преобразованія».

Не означаетъ ли эта тирада, что Пуанкаре признаетъ отсутствіе геометрической интуиціи въ системѣ Гильберта? На страницѣ 256-ой онъ говоритъ: «кто оставилъ бы мѣсто интуиціи, хотя бы даже малѣйшей, тотъ не сталъ бы говорить о томъ, что на каждой прямой есть по крайней мѣрѣ

*) A. Whitehead and B. Russel. „Principia Mathematica". Vol. I. 1910, vol. II. 1912. Cambridge.

**) H. Poincaré. „Les fondements de la géométrie". Journal de savants, 1902. Выдержка со страницы 270.

двѣ точки и т. д.». Казалось бы, что здѣсь отсутствіе геометрической интуиціи признано еще съ большей опредѣленностью.

Такъ, во всякомъ случаѣ, высказывается Пуанкаре тамъ, гдѣ онъ занятъ непосредственно разборомъ Гильберта. Здѣсь, однако, онъ высказывается иначе. Если бы Пуанкаре указалъ, что въ такомъ то мѣстѣ у Гильберта онъ находитъ интуицію, то тутъ была бы почва для вполнѣ опредѣленнаго спора. Пуанкаре тонко изучилъ и глубоко продумалъ Гильбертовскую систему; это ясно для всякаго, читавшаго вышеупомянутый разборъ книги Гильберта, а также нѣсколько видоизмѣненную статью на ту же тему, напечатанную въ томъ же 1902 году въ журналѣ Darboux. Это особенно ясно слѣдуетъ изъ того, что пробѣлъ (не интуитивнаго свойства), допущенный Гильбертомъ въ 1-мъ изданіи въ ученіи о непрерывности, Пуанкаре тотчасъ же усмотрѣлъ и подчеркнулъ. Такъ вотъ, если геометръ съ такимъ тонкимъ умомъ, какъ Пуанкаре, тщательно продумавшій систему Гильберта, не можетъ указать фактически ни одного мѣста, гдѣ интуиціи не оставлено ни одного мѣста, но высказываетъ лишь мнѣніе, что можетъ оказаться не усмотрѣнный пробѣлъ, то это, на мой взглядъ, говоритъ больше въ пользу системы Гильберта, чѣмъ противъ нея. Представьте себѣ, что, прочитавъ какой либо изъ классическихъ мемуаровъ, скажемъ мемуаръ Эрмита о трансцендентности числа e, геометръ сказалъ бы: «это все такъ, никакой ошибки я тутъ обнаружить не могу, но разсужденія отличаются чрезвычайной тонкостью и ошибка могла быть допущена совершенно незамѣтно». Что можно сказать противъ такого замѣчанія? На мой взглядъ только одно: укажите слабое мѣсто, и тогда мы съ вами согласимся или не согласимся. А пока это не сдѣлано, замѣчаніе твердой почвы подъ собой не имѣетъ, какъ бы высокъ ни былъ авторитетъ лица, его высказавшаго.

Г. Извольскій подчеркиваетъ, что на книгу Пуанкаре «Наука и методъ» вообще слѣдуетъ обратить серьезное вниманіе. Охотно, конечно, подъ этимъ подписываюсь, ибо выдающійся интересъ къ этой книгѣ и побудилъ меня издать ея переводъ. Многообразіе поставленныхъ вопросовъ, широта взгляда, яркость изложенія придаютъ сочиненію такой живой интересъ, что книга читается съ увлеченіемъ. При всемъ томъ, я все таки скажу, что подписаться подъ всѣмъ, что тамъ сказано, я не могу, и во многихъ мѣстахъ, я считаю, сказывается избытокъ темперамента, чрезмѣрная страстность спора.

Г. Извольскій ставитъ еще вопросъ: что значитъ дѣйствительно построить всю геометрію? До какихъ предѣловъ ее нужно довести, чтобы быть увѣреннымъ, что въ дальнѣйшемъ не понадобится новыхъ постулатовъ? Я старался отвѣтить на этотъ вопросъ въ своихъ «Основаніяхъ геометріи» ч. I. стр. 580—582.

Быть можетъ это не совсѣмъ скромно; но мнѣ кажется, если бы г. Извольскій нашелъ возможнымъ прочитать нѣкоторыя части этого сочиненія, то онъ нашелъ бы отвѣты на многіе вопросы, которые онъ ставитъ. Довольно сложныя аналитическія вычисленія въ этой книгѣ останавливаютъ читателя; но эти аналитическія вычисленія имѣютъ въ виду исключительно доказательство независимости введенныхъ постулатовъ. Самая же система геометріи разматывается дедуктивно, совершенно независимо отъ этихъ аналитическихъ разсужденій. Если читать только то, что отмѣчено жирными заголовками, то врядъ ли встрѣтится затрудненіе.

Я считаю, что внести больше свѣта въ этотъ вопросъ для болѣе широкаго круга читателей въ настоящее время вопросъ насущной необходимости и весь свой досугъ удѣляю сочиненію, посвященному этой цѣли. Къ сожалѣнію, досугъ этотъ очень не великъ и я очень затрудняюсь сказать, когда мнѣ удастся выпустить его въ свѣтъ.

Недавно вышла въ свѣтъ книга «Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field» edited by J. W. A. Young. Какъ и книга Энрикеса, это есть сборникъ, написанный различными авторами. Первая статья принадлежитъ Веблену, одному изъ наиболѣе серьезныхъ представителей современнаго построенія геометріи; она называется «The foundations of geometry». Очень усердно рекомендую ее вниманію читателей.

---

† Д. Д. Ефремовъ.

24-го іюня, скончался отъ сердечнаго припадка (паралича сердца), инспекторъ и преподаватель математики Иваново-Вознесенской школы колористовъ Дмитрій Дмитріевичъ Ефремовъ. Д. Д. почти съ основанія „Вѣстника" былъ однимъ изъ наиболѣе преданныхъ сотрудниковъ журнала; редакція обратилась поэтому къ его близкимъ съ просьбой сообщить біографическія свѣдѣнія объ этомъ несомнѣнно выдающемся преподавателѣ.

Покойный прошелъ суровую школу жизни и достигнутыми успѣхами былъ обязанъ лишь самому себѣ и своимъ выдающимся способностямъ. Сынъ мѣщанина Орловской губ., Д. Д. Ефремовъ родился въ 1859 г. По окончаніи курса въ Елецкой гимназіи съ серебряной медалью, поступилъ въ институтъ инженеровъ путей сообщенія въ С.-Петербургѣ, откуда черезъ годъ перешелъ въ С.-Петербургскій Университетъ. По окончаніи курса въ университетѣ съ званіемъ кандидата физико-математическихъ наукъ и съ награжденіемъ золотой медалью (въ 1884 г.) Д. Д. оставался еще въ теченіе года при университетѣ для продолженія занятій раціональной механикой. Въ 1885 году Д. Д. поступилъ стипендіатомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія въ Императорское Московское Техническое училище для подготовленія къ должности преподавателя спеціальныхъ предметовъ въ дополнительномъ классѣ реальныхъ училищъ, откуда по окончаніи двухъ-лѣтняго курса, назначенъ въ 1887 году учителемъ математики въ Иваново-Вознесенское реальное училище съ предоставленіемъ ему уроковъ черченія, строительнаго искусства и землемѣрія въ механико и химико-техническихъ отдѣленіяхъ VII-го дополнительнаго класса.

Въ 1897 году Д. Д. перемѣщенъ штатнымъ преподавателемъ механики и математики въ школу колористовъ при Иваново Вознесенскомъ реальномъ училищѣ. Съ 1903 года ему поручено было временное исполненіе обязанностей инспектирующаго преподавателя школы колористовъ, въ каковой должности онъ былъ утвержденъ въ 1910 г. и пребывалъ въ ней до самой смерти.

Изъ сочиненій покойнаго, кромѣ кандидатской диссертаціи „Объ ударахъ“, извѣстна „Новая геометрія треугольника“. Это сочиненіе, въ настоящее время уже почти распроданное, несомнѣнно представляетъ собою одинъ изъ лучшихъ обзоровъ этой новой дисциплины не только въ русской, но и въ европейской литературѣ. Вмѣсто второго изданія этого сочиненія, издательство „Mathesis“ просило покойнаго составить двѣ нѣсколько болѣе доступныя книги, которыя въ совокупности охватывали бы то же содержаніе. Первая изъ нихъ „Начала новой геометріи на плоскости“, была уже начата покойнымъ, но неожиданная смерть помѣшала ему ее окончить.

Затѣмъ покойный напечаталъ рядъ статей по математикѣ въ „Вѣстникѣ“ и въ томъ же журналѣ велъ продолжительное время обзоръ иностранныхъ математическихъ журналовъ.

Какъ человѣкъ, покойный отличался замѣчательной отзывчивостью; онъ всегда былъ готовъ сдѣлать все, что было въ его силахъ. Какъ преподаватель, покойный не имѣлъ соперниковъ. Его лекціи были отдыхомъ для слушавшихъ его. Въ свое дѣло онъ вкладывалъ душу. „Такого преподавателя, какъ покойный Д. Д., у насъ не было и не будетъ“ — вотъ слова одного изъ сослуживцевъ, точно характеризующія покойнаго.

Онъ умѣлъ заставить заинтересоваться своимъ предметомъ всѣхъ, и его слушали съ восторгомъ. По отзывамъ его учениковъ, никто изъ учителей не давалъ имъ такого яснаго, краткаго, но вмѣстѣ съ тѣмъ и точнаго объясненія, какъ Д. Д. Онъ пользовался большою любовью среди всѣхъ учениковъ, уважавшихъ его справедливость и ласковое, хотя часто и строгое къ нимъ отношеніе.

Вотъ слова законоучителя реальнаго училища, сказанныя за отпѣваніемъ Д. Д. и отлично характеризующія покойнаго: „Это былъ неутомимый труженникъ на жизненномъ пути, болѣе четверти вѣка посвятившій силы свои и здоровье высокому, но далеко не легкому дѣлу — образованія и воспитанія юношей. Это былъ усердный исполнитель ввѣреннаго ему дѣла и глубоко убѣжденный въ важности принятаго имъ на себя служенія. Чувство долга и происходящія изъ этого чувства — уваженіе и любовь къ своему дѣлу, были характеристическими чертами покойнаго.

Онъ совершалъ свое служеніе, какъ бы священнодѣйствуя въ постоянно строгомъ вниманіи къ себѣ, съ сознаніемъ его великаго значенія и съ твердостью въ исполненіи принятыхъ мѣръ и рѣшеній.

И многочисленный сонмъ питомцовъ и учениковъ успѣлъ получить среднее образованіе подъ его добрымъ руководствомъ и вліяніемъ. Говорить ли еще объ его высокой честности и безкорыстіи? Онъ такъ открыто, ясно и отчетливо проходилъ поприще своего званія и служенія, что кажется и враги, если бы они только могли быть у него, не могли бы бросить здѣсь и тѣни упрека.

И пріятно было видѣть въ немъ эту увѣренность въ соблюдени долга, это чувство достоинства, не боящагося никому смѣло взглянуть въ глаза. Онъ старался постоянно ставить и ставилъ себя въ отвѣтъ передъ своей совѣстью. Что касается отношеній почившаго, какъ инспектора, къ питомцамъ школы, то нужно сказать, что всѣ мѣры вразумленія и наставленія, которыя ему приходилось принимать при руководствѣ поведеніемъ учащихся, были проникнуты искренно отеческой любовью и снисходительностью, соединенными со строгою справедливостью.

Ученики относились къ покойному съ любовью и уваженіемъ и эту любовь выразили въ надписи на вѣнкѣ: „Отъ осиротѣлыхъ учениковъ школы“.

Покойный былъ истинно-вѣрующій христіанинъ. Христіанинъ не только по званію, но въ полномъ смыслѣ этого слова. Къ низшимъ служащимъ онъ всегда относился требовательно, но безусловно справедливо.

Д. Д. былъ человѣкъ съ рѣдкой памятью, остроумный и занимательный собесѣдникъ, одаренный ораторскимъ талантамъ.

Къ этимъ строкамъ редакторъ считаетъ себя обязаннымъ прибавить, что Д. Д. Ефремовъ былъ однимъ изъ весьма немногихъ преподавателей, сохранившихъ на трудномъ поприщѣ провинціальнаго учителя глубокій интересъ къ наукѣ; онъ слѣдилъ за наукой, и былъ въ курсѣ литературы тѣхъ отдѣловъ, которыми занимался. Онъ обладалъ живымъ геометрическимъ чутьемъ и, внѣ сомнѣнія, могъ быть очень полезнымъ въ качествѣ научнаго работника. Не его вина въ томъ, что онъ могъ удѣлить наукѣ лишь немногіе часы убогаго досуга.

Миръ праху его!

2-ой Съѣздъ преподавателей естественной исторіи Московскаго Учебнаго Округа.

Московское Общество распространенія естественно-научныхъ знаній созываетъ въ Москвѣ во время предстоящихъ рождественскихъ каникулъ (отъ 28 декабря сего года по 6 января 1913 года) 2-ой Съѣздъ преподавателей естественной исторіи Московскаго Учебнаго Округа.

Во время Съѣзда будетъ устроена выставка учебныхъ пособій, а также работъ по естествознанію какъ учащихся, такъ и учащихъ. Членами Съѣзда могутъ быть какъ преподающіе естественную исторію, природовѣдѣніе, такъ и члены Общества.

Лица, желающія ближе ознакомиться съ программой Съѣзда, могутъ обращаться за нею въ Общество (Москва, Донская, 31, кв. 3), и она имъ будетъ выслана. Со всѣми запросами по Съѣзду просятъ обращаться по этому же адресу, прилагая для отвѣта соотвѣтствующую почтовую марку.

V-й Международный Математическій Съѣздъ въ Кембриджѣ.

(21—28 августа н. ст.).

Въ настоящемъ году состоялся V-й Международный Математическій Конгрессъ. Послѣ Швейцаріи, Франціи, Германіи и Италіи наступила очередь Англіи принимать у себя математиковъ всѣхъ странъ. Мѣстомъ Съѣзда избранъ былъ Кембриджъ, университетъ котораго одинъ изъ старѣйшихъ въ Европѣ; онъ основанъ еще въ XII столѣтіи и можетъ считаться однимъ изъ крупнѣйшихъ историческихъ центровъ преподаванія математики: здѣсь учился и затѣмъ училъ съ 1669 по 1702 г. великій Ньютонъ, этотъ humani generis decus.

Число участниковъ значительно возростало съ каждымъ новымъ Конгрессомъ: на первый Конгрессъ въ Цюрихъ (1897 г.) собралось 204 дѣйствительныхъ члена; на второмъ — въ Парижѣ (1900 г.) было 262; на третьемъ — въ Гейдельбергѣ (1904 г.) уже 336, на четвертомъ, въ Римѣ (1908 г.) число участниковъ превысило 500 (535*). Но еще болѣе возросло число сдѣланныхъ сообщеній: съ 30 — на I-омъ и 32 — на II-омъ оно возросло до 78 на III-емъ и до 125 на IV-омъ. Такой быстрый ростъ числа докладовъ, отразившійся и на объемѣ трудовъ (I-й 314 стр., II-й 454 стр., III-й 766 стр. и IV-й 1122 стр.) внушалъ даже опасеніе въ лицахъ, близко стоящихъ къ дѣлу организаціи, что Конгрессы будутъ задавлены массою частныхъ докладовъ. И въ упомянутой статьѣ, изъ которой я заимствовалъ приведенныя цифры, H. Fehr высказалъ это опасеніе печатно, ратуя за ограниченіе числа частныхъ докладовъ и за систематическое проведеніе планомѣрности въ программѣ Съѣздовъ. Для этого онъ предлагалъ установить напередъ темы для обсужденія (какъ это было на Миланскомъ Съѣздѣ дѣятелей Коммиссіи по преподаванію Математики), а также развить систему обращенія къ свѣтиламъ науки со стороны Организаціоннаго Комитета.

Такъ на самомъ дѣлѣ и поступилъ Организаціонный Комитетъ V-го Съѣзда, во главѣ котораго стоялъ Sir George Darwin (сынъ Чарльза Дарвина), извѣстный своими изслѣдованіями по теоріи приливовъ и отливовъ, съ 1883 г. занимающій въ Кембриджѣ каѳедру астрономіи и экспериментальной философіи. Въ своихъ приглашеніяхъ принять участіе въ Съѣздѣ, разосланномъ математикамъ всего міра, Организаціонный Комитетъ не выражалъ, какъ это дѣлали раньше, желанія, чтобы приглашаемый сдѣлалъ докладъ, предоставляя такимъ образомъ заявленіе докладовъ инціативѣ самихъ участниковъ. Съ своей стороны, Комитетъ заручился согласіемъ нѣсколькихъ выдающихся ученыхъ сдѣлать очерки современнаго состоянія избранныхъ ими областей математической науки. Въ то же время бюро Международной Коммиссіи по преподаванію математики организовало по примѣру Миланскаго Съѣзда анкету по двумъ вопросамъ: A) Интуиція и опытъ въ преподаваніи математики въ средней школѣ. B) Математика въ физикѣ. Математическія познанія, полезныя для физиковъ и требуемыя ими.

---

*) H. Fehr. A propos des congrès internationaux des mathématiciens. Enseig. Math. 1912. n°. 3.

По порученію Центральнаго Бюро анкета была разработана по первому вопросу Dr. W. Lietzmann'омъ, секретаремъ германской научной Подкоммиссіи, по второму проф. К. Рунге (Геттингенъ); результаты анкеты были обработаны въ видѣ докладовъ Съѣзду по первому — D. E. Smith'мъ*) (Нью-Іоркъ), по второму — проф. Рунге.

Съѣздъ открылся оффиціально 22 августа. Наканунѣ происходило пленарное засѣданіе Международнаго Комитета Съѣзда, вечеромъ — пріемъ въ залахъ St. Johns College сэромъ Дж. Дарвиномъ, какъ президентомъ Кембриджскаго Философскаго Общества. Первое общее собраніе состоялось въ обширной университетской Examenation Hall. Предсѣдатель Организаціоннаго Комитета проф. Дж. Дарвинъ посвятилъ свою рѣчь памяти Пуанкаре, смерть котораго незадолго передъ тѣмъ глубоко поразила весь ученый міръ. Сознаваясь, что для него самого, какъ представителя прикладной математики, работы нѣкоторыхъ изъ присутствующихъ представителей чистой математики такъ же мало понятны, какъ если бы онѣ были написаны на Санскритѣ, почтенный ораторъ указалъ, что именно въ Кембриджѣ такое предсѣдательство механика-астронома на математическомъ Съѣздѣ представляется довольно естественнымъ; если Кембриджъ и считаетъ въ прошломъ своими такихъ великихъ математиковъ какъ Cayley и Sylverter, то, начиная съ великаго Ньютона, которымъ Кэмбриджъ гордится, какъ своимъ «Lucasian Professor», именно прикладная математика наиболѣе культивировалась здѣсь;ограничиваясь только XIX-мъ столѣтіемъ, можно назвать имена Airy, Adams, Maxwell, Stokes, Kelvin, не говоря о свѣтилахъ меньшей величины. И теперь ректоромъ въ Кембриджѣ какъ разъ лордъ Rayleigh. Математика такъ разрослась, что лишь исключительныя личности могутъ обнять теперь всю область математической науки и ея приложеній. И можетъ быть единственнымъ, который безспорно являлся бы такимъ естественымъ президентомъ Математическаго Конгресса былъ H. Poincaré. Ораторъ припомнилъ, какое огорченіе причинила на Конгрессѣ въ Римѣ вѣсть: «Poincaré боленъ». Это была первая тѣнь той болѣзни, которая теперь отняла его у насъ. Не осуществилась надежда еще разъ услышать изъ его устъ такую же блестящую рѣчь, какой подарилъ онъ присутствовавшихъ на Съѣздѣ въ Римѣ. Въ той рѣчи, съ которою Дж. Дарвинъ обращался къ Poincaré въ 1900 г., передавая ему, какъ президентъ «Royal Astronomical Society», золотую медаль Общества**), онъ оцѣнивалъ работы Poincaré по теоріи приливовъ, о формахъ равновѣсія вращающейся жидкости и о задачѣ трехъ тѣлъ. Какъ велики заслуги человѣка, если оцѣнивая лишь половину его дѣятельности все же видишь въ немъ звѣзду первой величины!

Привѣтственное слово произнесъ вице-канцлеръ университета R. A. Scott отъ имени Кембриджскаго университета и его Колледжей, гостепріимно открывшихъ свои двери для пріѣзжихъ гостей. Затѣмъ генеральный секретарь Конгресса проф. E. W. Hobri познакомилъ присутствовавшихъ съ составомъ Членовъ Конгресса. Въ члены Конгресса записалось 670 человѣкъ, представители 27 странъ: Великобританія 250, Соединенные Штаты 82, Герма-

---

*) Результатъ английской анкеты обработалъ Godfrey. Докладъ Смитта будетъ напечатанъ въ ближайшемъ номерѣ „Вѣстника“.

**) Эта рѣчь въ извлеченіи напечатана въ № 566 „Вѣстника“.

нія 70, Франція 52, Италія, Россія и Австро-Венгрія ***) по 38, Испанія 25, Швеція 13, Швейцарія и Голландія по 9, Бельгія и Норвегія по 4, Португалія 3, Болгарія и Сербія по 1. Прислали своихъ представителей и внѣевропейскія страны кромѣ Соединенныхъ Штатовъ: Бразилія и Канада по 4, Индія и Японія по 3, Египетъ 2, Чили и Мексика по 1. Такимъ образомъ изъ четырехъ допущенныхъ языковъ преобладающимъ на Конгрессѣ оказался англійскій, какъ и слѣдовало ожидать; на немъ сдѣлано было и наибольшее число сообщеній въ секціонныхъ засѣданіяхъ (73 изъ 128) и рѣчей на общихъ собраніяхъ (6 изъ 9). На французскомъ языкѣ сдѣлано 27 докладовъ и произнесена 1 рѣчь, на нѣмецкомъ 23 доклада и 1 рѣчь, на итальянскомъ было заявлено 5 докладовъ и произнесена 1 рѣчь.

Рѣчи произнесены были слѣдующія. 22 августа. Во первыхъ, проф. Ф. Энрикесъ (Болонья): «Значеніе критики принциповъ въ развитіи математики». Рѣчь эта, произнесенная по итальянски, напечатана въ сентябрскомъ номерѣ «Scientia» по итальянски и по французски, и была бы конечно доступнѣе для большинства присутствующихъ, если бы была и произнесена на французскомъ языкѣ, которымъ математикъ-философъ превосходно владѣетъ. Впрочемъ прекрасно произнесенная на пѣвучемъ итальянскомъ языкѣ она являлась и въ этомъ видѣ достаточно доступной, чему помогали раздаваемые оттиски французскаго текста рѣчи. Критика принциповъ такъ занимаетъ современныхъ математиковъ, что не привлечь къ этой области вниманіе или убѣждать въ необходимости подобныхъ изслѣдованій въ настоящее время имѣлъ въ виду ораторъ: не недостатокъ, а скорѣе избытокъ работъ въ направленіи аксіоматизированія отдѣльныхъ вѣтвей математическихъ наукъ и изслѣдованіе ея принциповъ чувствуется въ настоящее время. И проф. Ф. Энрикесъ стремился какъ будто показать, что это не только не вредитъ прогрессу науки, а лишь содѣйствуетъ ему, и что это явленіе — не настоящаго только времени, а характерно для всего хода развитія математической науки, начиная съ творенія Евклида, которое своимъ совершенствомъ обязано предшествовавшему періоду долгой критики, отъ Пиѳагора до Евдокса. И парадоксъ, смущавшій пиѳагорейцевъ, — противорѣчіе между созданной ихъ школою теоріей измѣренія, въ основу которой они клали, какъ недѣлимый элементъ пространства, точку конечнаго протяженія, и открытой ими же несоизмѣримости стороны квадрата съ его діагональю, — былъ разрѣшенъ окончательно лишь критикою элейской школы; и если воображеніе толпы было поражено парадоксомъ Зенона объ Ахиллесѣ и черепахѣ, то положительное значеніе этой критики заключалось въ томъ, что она открывало дорогу точному понятію о континуумѣ и теоріи несоизмѣримыхъ величинъ, которую удалось построить Евдоксу при помощи введенія такъ называемаго постулата Архимеда, лежащаго въ основѣ теоріи пропорціи въ V книгѣ «Началъ Евклида». То же значеніе критики можно прослѣдить въ развитіи теорій, приведшихъ къ анализу безконечно малыхъ, начиная съ метода исчерпыванія, на которомъ развитіе остановилось у грековъ; и долго послѣ открытія Ньютона и Лейбница основанія его подвергались критикѣ, которая завершается лишь Cauchy. Прослѣдивъ вліяніе критики на дальнѣйшее развитіе математики (произвольныя функціи, уравненія и воображаемыя количества, теорія алгебраическихъ функцій Римана, — сыгравшая капитальную роль въ развитіи математическихъ

***) 19 собственно Австрія и 19 Венгрія.

наукъ въ XIX-мъ столѣтіи); убѣждаемся въ справедливости выставленнаго тезиса: «Критика принциповъ составляетъ интегральную часть въ исторіи развитія математическихъ наукъ».

Болѣе спеціальный характеръ носили другія рѣчи. E. W. Brown: «Періодичность въ солнечной системѣ» (22 августа). E. Landau: «Рѣшенныя и нерѣшенныя проблемы теоріи распредѣленія простыхъ чиселъ и римановой функціи ζ» (23 августа). Акад. князя Б. Голицына: «Принципы инструментальной сейсмологіи», призывавшаго англичанъ внести свою энергію въ область, гдѣ первые шаги были сдѣланы Кавендишемъ. (23 августа). E. Borel: «Опредѣленіе и область существованія моногенныхъ однозначныхъ функцій». (24 августа).

Болѣе общій характеръ носила рѣчь Sir W. H. White: «Мѣсто математики въ инженерной практикѣ». Интересно было именно въ Англіи слышать призывъ давать больше теоретическаго математическаго образованія техникамъ.

27 августа были произнесены рѣчи. M. Bocher: «Пограничныя задачи въ области одного измѣренія». (Boundary problems in one dimension) и Sir J. Larmor: «Динамика радіаціи».

Къ общимъ же докладамъ и рѣчамъ надо отнести, еще во первыхъ, замѣчательно интересный докладъ проф. J. J. Thomson: «О кратно заряженныхъ атомахъ». (Multiply charged atoms), который сопровождался рядомъ демонстрацій, осуществлявшихъ слова Максвелла о духахъ, ловящихъ атомы и, во вторыхъ, сопровождавшійся иллюстраціями на экранѣ докладъ Harding'a «Исторія и развитіе ариѳметическаго дѣленія».

Не буду перечислять отдѣльныхъ докладовъ это было бы и долго и утомительно и не интересно. Ихъ было всего 113, въ томъ числѣ въ I секціи (ариѳметика, алгебра и анализъ) 30 докладовъзаслушано и два за отсутствіемъ докладчиковъ зачтено заслушанными; въ II-ой секціи (геометрія) заслушано 23 и 1 зачтенъ заслушаннымъ; въ секціи IIIa (механика, математическая физика, астрономія) заслушано 24 и 2 зачтено; въ секціи IIIb (экономика, наука страхованія, статистика) заслушано 9, зачтено 2; въ секціи IVa (философія и исторія математики) заслушано 19, зачтено 6 и въ секціи IVb (дидактика) заслушано 9, зачтено 2. Кромѣ того, эта секція имѣла три засѣданія совмѣстныхъ съ Международной Коммиссіей по преподаванію Математики на которыхъ заслушаны были доклады о состояніи дѣла въ различныхъ странахъ, а также заслушаны и обсуждены доклады подкоммиссій A и B.

Но прежде чѣмъ перейти къ этому, нѣсколько словъ для общей характеристики Съѣзда. При своей многолюдности онъ отличался преобладаніемъ средняго математика. Крупныхъ математическихъ силъ было немного; конечно, сами хозяева-англичане были хорошо представлены (я не видѣлъ впрочемъ A. R. Forsyth'a); но изъ пріѣзжихъ наиболѣе видною фигурою былъ Mittag-Leffler. Франція была представлена E. Borel'емъ и J. Hadamard'омъ. G. Darboux, P. Apell и P. Painlevé не пріѣхали. Еще слабѣе представлена была Германія: W. von Dyck, и C. Runge вмѣстѣ съ Landau, вотъ наиболѣе крупные изъ пріѣхавшихъ нѣмецкихъ математиковъ. Изъ итальянцевъ пріѣхали Enriques, Castelnuovo, F. Severi — лауреатъ Римскаго Конгресса.

Не пріѣхалъ и F. Klein, и потеряли большую долю своей притягательной силы засѣданія Международной Коммиссіи. Вмѣсто той рѣчи, въ которой онъ хотѣлъ дать обзоръ дѣятельности Коммиссіи, краткое сообщеніе о дѣятельности Коммиссіи сдѣлалъ Sir J. Greenhill. За то крупный интересъ представили доклады Runge и Smith'a*).

21 августа утромъ происходило засѣданіе Центральнаго Комитета*), въ 3 часа — собраніе делегатовъ, сообщившихъ данныя о положеніи дѣла въ отдѣльныхъ странахъ; самое представленіе отчетовъ состоялось 23-го въ совмѣстномъ засѣданіи Коммиссіи съ секціей IVb Съѣзда. Членамъ Съѣзда былъ розданъ общій обзоръ дѣятельности Коммиссіи, составленный H. Fehr'омъ. Изъ него видно, что закончены отчеты въ 10 странахъ: Швеціи, Голландіи, Франціи, Швейцаріи, Австріи, Японіи, Соединенныхъ Штатовъ, Великобританіи, Даніи и Венгріи. Такимъ образомъ сомнѣнія, закончатъ ли американцы свою работу оказались неосновательными. Съ другой стороны французскій делегатъ C. Bourlet сказалъ, что, хотя отчетъ о преподаваніи во Франціи Коммиссіей и законченъ, но Коммиссія предполагаетъ выпустить еще томъ, посвященный выясненію методовъ преподаванія.

Не закончены работы національныхъ подкоммиссій въ Германіи, гдѣ работа сильно разрослась, и изъ намѣченныхъ 36 тетрадей напечатано 19, 8 находятся въ печати и 9 готовятся къ печати, — въ Бельгіи (выпущенъ I-й томъ), Испаніи, Италіи, Норвегіи, Румыніи и Россіи. Сообщавшій о состояніи работъ въ Россіи генеральный секретарь H. Fehr указалъ, что рефераты частью уже отпечатаны, частью уже составлены на русскомъ языкѣ и теперь переводятся на французскій языкъ, — работа, которой не приходится дѣлать въ странахъ, языки которыхъ допущены на Конгрессѣ, чѣмъ объясняется задержка. Общій итогъ работъ этой колоссальной анкеты и теперь уже внушителенъ: число собственно отчетовъ по преподаванію математики въ различныхъ странахъ уже отпечатанныхъ достигло 280. Они распредѣлены на 150 выпусковъ и томовъ и представляютъ болѣе чѣмъ 9000 стр. in. 8° **). Собраніе постановило просить Съѣздъ продолжать дѣятельность Коммиссій до слѣдующаго Съѣзда, что и было рѣшено въ вечернемъ — заключительномъ засѣданіи Съѣзда 27 августа.

Засѣданіе 26 августа было посвящено докладу C. Runge «Математическое обученіе физиковъ въ университетѣ». (The Mathematical training of the physicist in the University). Докладчикъ указывалъ на тѣ трудности, которыя возникаютъ при подведеніи итоговъ международной анкеты (отвѣты были получены изъ Италіи, Австріи, Германіи, Швейцаріи, Голландіи, Англіи и Соединенныхъ Штатовъ), — одни и тѣ же названія означаютъ у различныхъ лицъ очень различныя вещи. Объявляя свои лекціи по математической физикѣ Гельмгольцъ обыкновенно говорилъ «Unter Voraussetzung der Elemente der Differential und Integralrechnung»; но его такъ называемые элементы совсѣмъ не казались элементарными его слушателямъ. Подобнымъ образомъ термины «аналитическая геометрія» и «дифференціальное и интегральное

---

*) Этотъ докладъ, какъ уже сказано, будетъ напечатанъ въ ближайшемъ номерѣ.

*) Общій очеркъ дѣятельности Коммиссіи долженъ появиться на страницахъ „Математическаго Образованія“.

исчисленіе» могутъ имѣть очень различное значеніе у корреспондентовъ различныхъ странъ. Но за этою оговоркою приходится признать, что обычный курсъ математики, требуемый отъ изучающихъ физику, вездѣ одинаковый: аналитическая геометрія, дифференціальное и интегральное исчисленіе, элементы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, динамика читаются профессорами математики, мало обращающими вниманіе на нужды студентовъ физиковъ. Нѣкоторые изъ корреспондентовъ по словамъ Рунге жалуются, что профессора чистой математики игнорируютъ нѣкоторыя математическія теоремы и методы въ высшей степени важныя для физика: напримѣръ, теоремы Грина и Стокса должны быть излагаемы въ курсъ интегральнаго исчисленія; строку Фурье надо излагать болѣе практическимъ способомъ, не дѣлая ихъ только интересными примѣрами признаковъ сходимости. Векторіальный анализъ слѣдовало бы преподавать регулярно, чтобы студенты уже освоились съ нимъ ко времени занятій динамикой и математической физикой. Вмѣсто этого нѣкоторые профессора математики теряютъ слишкомъ много времени на логическое обоснованіе анализа безконечно малыхъ. Эти тонкости теряются для студента, который только еще начинаетъ овладѣвать анализомъ, который, быть можетъ, долженъ еще пользоваться имъ. Но всѣ эти замѣчанія примѣнимы и къ студенту, изучающему чистую математику. Въ общемъ, говоритъ почтенный Гёттингенскій профессоръ нѣтъ надобности въ новыхъ и особыхъ математическихъ курсахъ для физиковъ. Но чувствуется сильная потребность болѣе тѣснаго сближенія математиковъ и физиковъ. Нужно измѣнить духъ математическаго преподаванія, нужно сдѣлать его болѣе практичекимъ и болѣе приложимымъ къ физическимъ проблемамъ. Въ настоящее время пропасть широка и не стремится, повидимому, сузиться. Графическіе методы, кромѣ Франціи, введены слабо. Нужно, конечно, остерегаться давать слишкомъ много мѣста начертательной геометріи, которая теперь преподается почти вездѣ и которая имѣетъ тенденцію перерости все остальное, если ея не вводить въ надлежащія границы. Но значеніе графическихъ методовъ для изображенія функцій одного и болѣе перемѣнныхъ очень важно для физика: ему очень важно владѣть ими, потому что очень часто ему приходится имѣть дѣло съ графическими изображеніями, достаточно удобными и аккуратными, эмпирическихъ функцій, при помощи аналитическихъ выраженій вычислять ихъ во многихъ случаяхъ крайне утомительно, и всѣ операціи лучше всего продѣлывать графически, что и дѣлаютъ давно инженеры. Только Massan и d'Ocagne сдѣлали эти методы вѣтвью математики. Графическое интегрированіе функцій вещественной и комплексной перемѣнной обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и нѣкоторыхъ уравненій въ частныхъ производныхъ надо бы сдѣлать существенною частью курса анализа, который становится самъ легче отъ этого, ибо благодаря этому возстанавливается равновѣсіе между дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіемъ. Больше вниманія надо обращать на численные методы, болѣе старые, но заброшенные въ преподаваніи: численное рѣшеніе уравненій, конечныя разности, численное нахожденіе интеграловъ и численное интегрированіе дифференціальныхъ уравненій, примѣненіе механическихъ средствъ (счетная линейка, интеграфъ, планиметръ); причина этого, конечно, коренится въ томъ, что многіе профессора математики никогда не имѣли привычки къ численнымъ выкладкамъ и питаютъ отвращеніе къ обученію этому студентовъ; они часто не умѣютъ обращаться съ математическими инструментами и не упоминаютъ о нихъ на лекціяхъ по математикѣ. Поэтому студенты получаютъ ложное представленіе о возможности выполненія того или другого математическаго дѣйствія. Пока студентъ интересуется лишь математическими теоріями, это для него не такъ важно. Но физикъ или инженеръ не могутъ ограничиться теоремами о существованіи; имъ нуженъ дѣйствительный численный результатъ для примѣненія къ даннымъ, которыя онъ имѣетъ передъ собою. Конечно, онъ можетъ научиться этому въ физической лабораторіи; но лучше, если бы это давала ему уже его математическая подготовка. Не достаточно сказать, что отвѣтъ можетъ быть полученъ «помощью конечнаго числа операцій», нужно умѣть его разыскать безъ затраты излишняго труда. Но это возможно лишь при индивидуализаціи преподаванія, при такой организаціи математическихъ упражненій, какъ въ химической и физической лабораторіи. Для начертательной геометріи это уже признано необходимымъ; устраиваются спеціальныя чертежныя, и профессоръ имѣетъ помощниковъ — ассистентовъ, разсматривающихъ и исправляющихъ работы отдѣльныхъ студентовъ. По тому же плану слѣдовало бы организовать занятія численными и графическими вычисленіями и даже общими математическими упражненіями. Наибольшая трудность для изучающаго математику заключается не столько въ пониманіи доказательства математической теоремы, сколько въ усвоеніи ея содержанія и въ умѣніи примѣнить ее, въ способности усмотрѣть примѣнимость ея въ разнообразныхъ случаяхъ. Это умѣнье примѣнить свои математическія познанія и важно, главнымъ образомъ, для физика и инженера въ противномъ случаѣ эти математическія познанія излишнее бремя для нихъ.

Однимъ словомъ общее мнѣніе участниковъ анкеты, и самого профессора Рунге, что математическое образованіе физиковъ нуждается въ значительныхъ измѣненіяхъ. Значительная часть теорій, предназначенныхъ для чистыхъ математиковъ, могла бы быть оставлена и вниманіе нужно сосредоточить на матеріяхъ постоянно примѣняемыхъ въ математической физикѣ; но разбивать студентовъ на различныя группы невыполнимо на практикѣ и даже нежелательно. Есть предѣлъ безконечному умноженію классовъ при ограниченномъ числѣ преподавателей и ограниченномъ размѣрѣ средствъ. Но главная опасность лежитъ въ разрывѣ между физиками и чистыми математиками, которая повидимому возрастаетъ. Математика страдаетъ отъ чрезмѣрной спеціализаціи и отрѣзываетъ себя отъ натуральной философіи и экспериментальной науки. Но дѣлу мало можно помочь регламентаціей. Что дѣйствительно нужно, это,— чтобы профессора математики понимали проблемы и нужды физика.

Въ Россіи положеніе математики почти такое же. Надо только отмѣтить, какъ заслугу Чебышева и его школы («Петербургской школы»), что ее именно отличало стремленія къ опредѣленности задачъ и къ доведенію каждой задачи до конца, до конечнаго численнаго результата. Этимъ объясняется, что исчисленіе конечныхъ разностей не исчезло у насъ изъ преподаванія, какъ это произошло на Западѣ, на что и сѣтуетъ Рунге. Но малое число нашихъ университетовъ ведетъ къ такому переполненію ихъ, въ особенности столичныхъ, что примѣненіе индивидуализаціи преподаванія, какого желаетъ Рунге, становится практически неосуществимымъ. Лишь въ послѣдній годъ при оскудѣніи слушателей въ провинціальныхъ университетахъ является возможность осуществленія такихъ занятій.

Не менѣе интересенъ былъ и другой докладъ Д. Е. Smith'а: «Интуиція и экспериментъ въ математическомъ обученіи въ средней школѣ». Но если при спеціальныхъ задачахъ «Вѣстника Опытной Физики» по отношенію къ докладу Рунге можно было ограниться передачею его основного содержанія, то докладъ Смиса заслуживаетъ передачи in extenso, а потому я и не буду на немъ останавливаться въ этомъ очеркѣ.

Оттается сказать еще нѣсколько словъ. Слѣдующій VI-ой Конгрессъ рѣшено собрать согласно приглашенію Mittag-Leffler'а въ Стокгольмѣ въ 1916 году. Дѣятельность и полномочія Международной Коммиссіи по преподаванію математики продлена до этого срока.

Хотя о дальнѣйшемъ постановленій не могло быть сдѣлано, но пожеланія и приглашенія уже сдѣланы: профессоръ Беке отъ имени Венгерской Академіи и математиковъ на 7-ой Конгрессъ въ Будапештѣ въ 1920 году и K. Stephanos'омъ на 8-ой Конгрессъ въ Аѳины въ 1924 г.

При Конгрессѣ была организована выставка математической литературы (англійской, французской и нѣмецкой), моделей и письменныхъ работъ учащихся по математикѣ. Изъ моделей фигурировали Teubner'овскія, особенно все еще не поступившая въ продажу коллекція P. Treutlein'а, скоропостижно скончавшагося 26 іюля н. ст. Интересны были гироскопы Gray, приборъ для черченія кривыхъ — сложеніе 2 колебаній (Auto-vibration recorder Brooks'а) и въ особенности аналифъ Ришара — плоскіе чертежи сдѣланные для каждаго глаза для одного краснаго для другого зеленаго цвѣта разсматриваемые черезъ пластинки; нарисованные въ дополнительныхъ цвѣтахъ они даютъ иллюзію пространственныхъ формъ*). Цѣлую залу заняли различныя счетныя машины и ариѳмометры.

Но что для многихъ изъ присутствовавшихъ представляло на Кембриджскомъ Съѣздѣ, быть можетъ, наибольшій интересъ, это непосредственное ознакомленіе съ англійской университетской жизнью. Членамъ Конгресса открыли свои двери колледжи, и пріютили въ своихъ помѣщеніяхъ, свободныхъ отъ обычныхъ обитателей благодаря каникулярному времени. Но организаціи англійской университетской жизни и преподаванія математики въ Англіи, о чемъ даетъ возможность судить обширный отчетъ англійской Подкоммиссіи слѣдовало бы посвятить отдѣльный очеркъ.

Радушный пріемъ англичанъ далъ намъ возможность, непосредственно познакомиться съ ихъ учрежденіями, въ которыхъ сохранились до сихъ поръ шелковицы, посаженныя еще Ньютономъ въ саду Trinity College; самоучка Green былъ членомъ Canville and caies College, Lord Kelvin и Tait были члены Peterhouse'а. Это рядъ характерныхъ англійскихъ фигуръ, придающихъ жизнь тѣмъ сухимъ и голымъ цитатамъ, которыхъ даютъ намъ печатные источники. И благодарностью нашимъ милымъ хозяевамъ я и заканчиваю свой отчетъ.

Проф. Д. Синцовъ.

---

*) H. Vuibers издалъ о нихъ брошюру „Les anaglyphes Géométriques". О нихъ сообщимъ особо въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Вѣстника".

Ред.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Испусканіе электроновъ при химическихъ реакціяхъ. Катодные лучи, радіоактивный распадъ и т. п. явленія, при которыхъ изъ атомовъ, вслѣдствіе испытываемыхъ ими сильныхъ возмущеній, вылетаютъ электроны, навели на мысль, что подобное выбрасываніе электроновъ происходитъ и при другихъ процессахъ, въ которыхъ атомы испытываютъ достаточно сильныя сотрясенія. Но въ то время какъ для нѣкоторыхъ такихъ процессовъ, напримѣръ, для сильнаго накаливанія, для бомбардировки ультрафіолетовым и и рёнтгеновскими лучами и др., выдѣленіе электроновъ доказано уже давнои въ настоящее время даже въ значительной степени изучено даже количественно, для химическихъ реакцій, несмотря на многочисленныя попытки, его до сихъ поръ не удавалось установить. А между тѣмъ большая энергія, съ которою происходятъ нѣкоторые химическіе процессы какъ будто свидѣтельствуетъ о томъ, что атомы при этомъ подвергаются весьма значительнымъ толчкамъ. Поэтому, несмотря на отрицательные результаты, попытки обнаружить испусканіе электроновъ при химическихъ реакціяхъ все возобновлялись, и наконецъ недавно Ф. Габеру (F. Haber) дѣйствительно удалось доказать этотъ фактъ для нѣкоторыхъ реакцій. Изъ сравненія количества энергіи, освобождаемаго при радіоактивныхъ распадахъ и при самыхъ сильныхъ химическихъ реакціяхъ Габеръ вывелъ, что скорость электроновъ, выдѣляемыхъ при этихъ реакціяхъ въ лучшемъ случаѣ будетъ равняться 1200 *км.* въ секунду (тогда какъ β-лучи, т. е. электроны, выдѣляемые при радіоактивныхъ превращеніяхъ, обладаютъ, какъ извѣстно, скоростью почти въ 300 000 *км.* въ секунду). Поэтому ясно, что эти электроны могутъ обладать лишь весьма слабою способностью проникновенія даже сквозь газы, и для обнаруженія ихъ лучше всего подходятъ реакціи, происходящія въ очень разрѣженныхъ газахъ. Кромѣ того, для этихъ опытовъ нельзя пользоваться реакціями, протекающими при высокой температурѣ, ибо при высокой температурѣ, тѣла сами начинаютъ испускать электроны. Габеръ избралъ для своихъ опытовъ реакціи сплавовъ щелочныхъ металловъ (которые представляютъ собою при комнатной температурѣ жидкія тѣла) и нѣкоторыхъ ихъ амальгамъ со слѣдующими разрѣженными газами и парами: кислородомъ, хлористымъ водородомъ и парами іода, тіонинхлорида и фосгена ($COCl_2$).

Авторъ сначала пропускалъ жидкіе сплавы калія съ натріемъ и др. черезъ капиллярную трубку изъ серебра въ сосудъ, содержащій какой нибудь индифферентный газъ (водородъ или азотъ) при атмосферномъ давленіи; при этомъ никакихъ электрическихъ явленій не обнаружилось. Когда уже къ индифферентному газу примѣшивалось незначительное количество одного изъ указанныхъ сильно реагирующихъ газовъ, между капиллярною трубкою и помѣщенною очень близко отъ нея металлическою (индифферентною) пластинкою проходилъ электрическій токъ, если трубка служила катодомъ; если же направленіе тока измѣнялось, такъ что серебряный капилляръ дѣлался анодомъ, токъ не проходилъ. Слѣдовательно, при этихъ реакціяхъ появляются отрицательные носители электричества, отталкиваемые отъ трубки, когда она служитъ катодомъ.

Далѣе, Габеръ помѣщалъ въ нѣсколькихъ миллиметрахъ отъ отверстія трубки, изъ котораго капалъ сплавъ, пластинку, соединенную съ электрометромъ, и пропускалъ черезъ сосудъ (предварительно эвакуированный) одинъ изъ активныхъ газовъ подъ очень небольшимъ давленіемъ. Въ случаѣ сплава калія и натрія, реагирующаго съ фосгеномъ, электрометръ заряжался до потенціала въ 1 вольтъ. При отсутствіи реакціи, когда калій-натрій капалъ въ совершенно эвакуированный сосудъ, электрометръ не отклонялся. Слѣдовательно, очевидно, что при этой реакціи до тѣхъ поръ выбрасываются отрицательно заряженныя частички, пока реагирующая масса не пріобрѣтаетъ положительнаго потенціала, равнаго одному вольту; послѣ этого, вслѣдствіе притяженія со стороны этого положительнаго заряда, дальнѣйшее выдѣленіе отрицательныхъ частицъ прекращается. Наконецъ, при помощи отклоненія испускаемыхъ частицъ магнитнымъ полемъ, Габеръ опредѣлилъ для нихъ отношеніе заряда къ массѣ: e/m; получилось число, очень близкое къ найденнымъ для катодныхъ и β-частицъ, и такимъ образомъ доказано, что выдѣляющіяся при этой химической реакціи частички несомнѣнно представляютъ собою не что иное, какъ электроны.

Какъ и слѣдовало ожидать, при замѣнѣ сплава калія съ натріемъ болѣе активнымъ жидкимъ цезіемъ испусканіе электроновъ становилось энергичнѣе. Наоборотъ, когда фосгенъ замѣнялся паромъ іода, имѣющимъ меньшее сродство къ щелочнымъ металламъ, скорость испускаемыхъ электроновъ настолько уменьшалась, что для того, чтобы довести ихъ до пріемника электрометра, надо было прилагать вспомогательную разность потенціаловъ. Въ этомъ случаѣ отклоненіе въ магнитномъ полѣ также было гораздо слабѣе. Отрицательныя частицы, выдѣлявшіяся при реакціяхъ съ амальгамами цезія, калія и натрія, совершенно не отклонялись магнитнымъ полемъ, и ихъ поэтому нельзя считать элоктронами. Итакъ, выдѣленіе электроновъ установлено только при реакціяхъ самыхъ электроположительныхъ металловъ съ самыми дѣятельными газами; съ уменьшеніемъ сродства реагирующихъ веществъ это выдѣленіе уменьшается, а затѣмъ и совсѣмъ прекращается.

Никакихъ оптическихъ или фотографическихъ дѣйствій выдѣляемыхъ электроновъ установить не удалось.

М. Я.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Многоуважаемый г. Редакторъ!

16—24 іюня 1913 г. въ г. Тифлисѣ соберется XIII Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Являясь завѣдующимъ секціей математики на этомъ Съѣздѣ, я имѣю честь покорнѣйше просить Васъ, уважаемый г. Редакторъ, и всѣхъ г. г. сотрудниковъ Вашихъ не отказать, во первыхъ, принять участіе докладами на Съѣздѣ и во вторыхъ намѣтить вопросы, по которымъ желательно имѣть доклады.

Кромѣ того, не согласится ли уважаемая редакція «Вѣстника» предоставить мѣсто въ своемъ журналѣ тѣмъ, которые пожелали бы принять участіе въ подготовительныхъ къ Съѣзду работахъ и печатно обсудить многіе связанные съ организаціей секціи математики вопросы.

Желательно, чтобы были сдѣланы указанія и по вопросу объ устройствѣ выставки при секціи на Съѣздѣ. Какую выставку полезно устроить? Что выставить? Гдѣ и у кого можно найти подходящіе экспонаты? Какія фирмы сами могутъ организовать свои отдѣлы на выставкѣ?

Прошу принять увѣренія въ искреннемъ уваженіи.

Завѣдующій секціей математики *М. Г. Коніевъ.*

Редакція, конечно, съ полной готовностью предоставитъ страницы журнала для обсужденія вопросовъ, связанныхъ съ организаціей математической и физической секцій Съѣзда.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этото отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ: „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Я. А. Липкинъ. «Сборникъ задачъ по математикѣ, бывшихъ темами на выпускныхъ экзаменахъ въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ Варшавскаго Учебнаго Округа за послѣдніе 14 лѣтъ». Цѣна 75 к.

Сборникъ содержитъ 101 алгебр. задачу и 111 геометрич. задачъ. Задачи распредѣлены по отдѣламъ и содержатъ отвѣты на главные и второстепенные вопросы; для трудныхъ задачъ даны указанія.

Геометрической части сборника предшествуетъ «Введеніе», содержащее рядъ теоремъ о пирамидахъ, конусахъ, шарахъ описанныхъ и вписанныхъ, представляющихъ учебный матеріалъ, полезный при рѣшеніи геометрическихъ задачъ въ 8 классѣ.

ПОПРАВКИ:

Въ № 563—564 на стр. 302 строка 17 сверху напечатано 75 000 должно быть 15 000.

Въ № 565 авторъ статьи „Изъ физики судоходства" названъ Чудновскимъ; его фамилія Чудноховскій.

Въ № 565 на стр. 23 въ подписи подъ рисункомъ 5 вмѣсто „сзади" должно быть „спереди".

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 50 (6 сер.). Доказать слѣдующее предложеніе: если каждое изъ двухъ квадратныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами имѣетъ ирраціональные корни, то сумма одного изъ корней перваго и одного изъ корней второго уравненія можетъ быть въ свою очередь корнемъ квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда произведеніе дискриминантовъ*) первыхъ двухъ квадратныхъ уравненій есть полный квадратъ.

Ю. Рабиновичъ (Одесса).

№ 51 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a.$$

При какихъ значеніяхъ a это уравненіе даетъ дѣйствительное значеніе для x?

Г. Варкентинъ (Петербургъ).

№ 52 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$a^n x + (a+1)^n y = b\left[(a+1)^n - a^n\right],$$

въ которомъ a и b суть данныя цѣлыя положительныя числа.

(Заимств.)

№ 53 (6 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$\frac{\cos(4n+1)x - \sin(4n+1)x}{\cos x - \sin x}$$

при $x = \frac{\pi}{4}$.

(Заимств.).

*) Дискриминантомъ квадратнаго уравненія $ax^2 + bx + c = 0$ называется выраженіе $4ac - b^2$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 10 (6 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^2+y^2=1, \quad x^3+y^3=1.$$

Полагая

$$x+y=u, \quad xy=v, \tag{1}$$

имѣемъ:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\,(x+y)=u^3-3uv.$$

Такимъ образомъ данную систему можно записать въ видѣ:

$$u^2-2v=1, \quad (2) \qquad u^3-3uv=1 \quad (3).$$

Изъ уравненія (2) имѣемъ:

$$v=\frac{u^2-1}{2}. \tag{4}$$

Подставивъ значеніе v изъ уравненія (4) въ уравненіе (3), получимъ: $u^3-\frac{3}{2}u\,(u^2-1)=1$, откуда послѣ обычныхъ преобразованій находимъ: $u^3-3u+2=0$, или, послѣ разложенія лѣвой части на множителей,

$$(u-1)\,(u^2+u-2)=0, \quad \text{или} \quad (u-1)^2\,(u+2)=0, \tag{5}$$

откуда находимъ два значенія для u, а именно:

$$u_1=1, \quad u_2=-2.$$

Подставивъ эти значенія u въ уравненіе (4), получимъ соотвѣтствующія значенія v,

$$v_1=0, \quad v_2=\frac{3}{2}.$$

Такимъ образомъ данная система приводится къ двумъ системамъ:

$$x+y=1, \quad xy=0; \tag{6}$$

$$x+y=-2, \quad xy=\frac{3}{2}. \tag{7}$$

Разрѣшая системы (6), (7) обычнымъ способомъ, приходимъ къ слѣдующимъ рѣшеніямъ данной системы:

$$x_1=1, \quad y_1=0; \quad x_2=0, \quad y_2=1; \quad x_3=\frac{-2+i\sqrt{2}}{2}, \quad y_3=\frac{-2-i\sqrt{2}}{2};$$

$$x_4=\frac{-2-i\sqrt{2}}{2}, \quad y_4=\frac{-2+i\sqrt{2}}{2},$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

А. Ильинъ (Астрахань); *П. Берендъ* (Кіевъ); *L. Sivian*; *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *Н. Рубачевъ* (Шуя); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ).

№ 12 (6 сер.). *Доказать, что значеніе выраженія*

$$1+2^{x}+4^{x}$$

кратно 7, *если* x *есть положительное число вида* $3n \pm 1$.

Число вида $3n+1$ положительно, если n есть цѣлое неотрицательное число. Положительное число вида $3n-1$ можно также представить въ видѣ $3n+2$, гдѣ n также цѣлое неотрицательное число. Итакъ, числа обоихъ видовъ $3n \pm 1$ можно представить въ видѣ $3n+r$, гдѣ n можетъ принимать любое цѣлое неотрицательное значеніе, а r равно 1 или 2. Поэтому при $x=3n \pm 1$ выраженіе $1+2^{x}+4^{x}$ можно представить въ видѣ:

$$1+2^{3n+r}+4^{3n+r}, \tag{1}$$

гдѣ r равно 1 или 2. Преобразовывая надлежащимъ образомъ выраженіе (1) получимъ:

$$1+2^{3n+r}+4^{3n+r}=1+8^{n}\,.\,2^{r}+64^{n}\,.\,4^{r}=8^{n}\,.\,2^{r}-2^{r}+64^{n}\,.\,4^{r}-4^{r}+$$
$$+(1+2^{r}+4^{r})=2^{r}(8^{n}-1)+4^{r}(64^{n}-1)+(1+2^{r}+4^{r}).$$

Разности $8^{n}-1$ и $64^{n}-1$ при $n=0$ обращаются въ нули и потому кратны 7 а при n цѣломъ и положительномъ эти же разности кратны соотвѣтственно разностей $8-1=7$ и $64-1=63$ и, слѣдовательно, также кратны 7. Сумма $1+2^{r}+4^{r}$ при $r=1, 2$ принимаетъ соотвѣтственно также кратныя 7 значенія 7 и 21. Итакъ, при разсматриваемыхъ нами условіяхъ выраженіе (1) всегда кратно 7.

И. Зюзинъ (Стерлитамакъ), *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *В. Тюнинъ* (Самара); *Н. Рубачевъ* (Шуя); *М. Рыбкинъ* (Ейскъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№№ 375 (5 сер.) и **18** (6 сер.). *Вывести тожество*

$$\operatorname{tg} 3a=\operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

и показать, что равенства, предложенныя для доказательства въ задачѣ № 375 (№ 529 „Вѣстника“) *суть частные случаи этого тожества.*

Преобразовывая надлежащимъ образомъ выраженіе $\operatorname{tg} 3a$, находимъ:

$$\operatorname{tg} 3a=\operatorname{tg}(a+2a)=\frac{\operatorname{tg} a+\dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^{2} a}}{1-\operatorname{tg} a \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^{2} a}}=\operatorname{tg} a \frac{3-\operatorname{tg}^{2} a}{1-3 \operatorname{tg}^{2} a}=$$

$$=\operatorname{tg} a \cdot \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a \sqrt{3}}.$$

Но $\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{3}:\cos\frac{\pi}{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, а потому

$$\operatorname{tg} 3a=\operatorname{tg} a \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \operatorname{tg} a} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \operatorname{tg} a},$$

т. е.

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right),$$

или, полагая, что уголъ a данъ въ градусахъ $\left(\text{пусть } \frac{180a}{\pi}=\beta\right)$,

$$\operatorname{tg} 3\beta = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(60^0+\beta)\operatorname{tg}(60^0-\beta).$$

Полагая въ этомъ равенствѣ β равнымъ сперва 10^0, а потомъ 5^0, получимъ:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{tg} 10^0 \operatorname{tg} 70^0 \operatorname{tg} 50^0,\quad \operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{tg} 5^0 \operatorname{tg} 65^0 \operatorname{tg} 55^0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 10^0 = \operatorname{tg} 30^0\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 70^0}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 50^0},\quad \operatorname{tg} 5^0 = \operatorname{tg} 15^0\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 55^0}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 65^0},$$

или

$$\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{tg} 20^0 \operatorname{tg} 30^0 \operatorname{tg} 40^0,\quad \operatorname{tg} 5^0 = \operatorname{tg} 15^0 \operatorname{tg} 25^0 \operatorname{tg} 35^0.$$

№ 375 (5 сер.). *М. Превратухинъ* (Козловъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Н. Широковъ* (с. Марьевка); *Р. Витвинскій* (Одесса).

№ 18 (6 сер.). *Р. Витвинскій* (Одесса): *М. Рыбкинъ* (Ейскъ).

№ 21 (6 сер.). *Опредѣлить острые углы прямоугольнаго треугольника* ВАС, *въ которомъ отношеніе радіуса* r_a *круга, внѣвписаннаго относительно гипотенузы* a, *къ радіусу* R *описаннаго круга достигаетъ maximum'а.*

Называя черезъ p полупериметръ треугольника, имѣемъ:

$$r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}. \tag{1}$$

Это соотношеніе можно вывести геометрическимъ путемъ, а также можно получить его изъ обычной формулы $r_a = s:(p-a)$, гдѣ s площадь треугольника, путемъ преобразованій

$$r_a = \frac{s}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}\cdot\frac{p}{p}} = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = p\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

гдѣ a, b, c — стороны треугольника. Для разсматриваемаго прямоугольнаго треугольника $A=\frac{\pi}{2}$, а потому формула (1) обращается въ равенство

$$r_a = p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Радіусъ R круга, описаннаго около прямоугольнаго треугольника, равенъ половинѣ гипотенузы $\frac{a}{2}$. Поэтому

$$\frac{r_a}{R} = \frac{a+b+c}{2}:\frac{a}{2} = \frac{a+b+c}{a} = 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = 1+\sin B+\cos B,$$

или

$$\frac{r_a}{R} = 1+\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) = 1+2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right).$$

Такимъ образомъ разсматриваемое отношенiе достигаетъ наибольшаго значенiя, если $\cos\left(\frac{\pi}{4} - B\right)$ обращается въ единицу. Такъ какъ уголъ B можетъ принимать различныя значенiя въ промежуткѣ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то разность $\frac{\pi}{4} - B$ принимаетъ различныя значенiя въ промежуткѣ отъ $\frac{\pi}{4}$ до $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Слѣдовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - B\right)$ можетъ обратиться въ 1 лишь при $\frac{\pi}{4} = B$, т. е., для того, чтобы отношенiе $\frac{r_a}{R}$ было наибольшимъ, уголъ B, въ градусахъ, долженъ равняться 45^0, а потому и уголъ C равенъ 45^0; такимъ образомъ, указаннымъ въ условiи задачи свойствомъ среди всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ обладаетъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ.

М. Добровольскiй (Сердобскъ); *Н. Нейцъ* (Самара); *Н. Орловскiй* (Кiевъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

Книги и брошюры, поступившiя въ редакцiю.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцiю „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманiя, будетъ данъ отзывъ.

Успѣхи бiологiи. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованiяхъ послѣдняго времени. Вып. I. Подъ ред. проф. В. В. Завьялова. Съ 24 рис. Изданiе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. IV+244 8^0. Ц. 1 р. 50 к.

Библiотека элементарной математики. Подъ общей редакцiей приватъ-доцента С. О. Шатуновскаго. № 1. В. Литцманнъ. „Теорема Пиѳагора съ приложенiемъ нѣкоторыхъ свѣдѣнiй о теоремѣ Ферма. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ 44 рисунками. Изданiе „Mathesis". Одесса, 1912. Стр. IV + 80. Ц. 40 к.

Кн. Б. Голицынъ. *Лекцiи по сейсмометрiи.* Изданiе Императорской Академiи Наукъ. С.-Петербургъ, 1912. Стр. III+654. Ц 3 р. 60 к.

Н. Н. Павловъ, инженеръ. *Разсчеты въ техникѣ и ихъ вспомогательныя средства.* Съ 39 рис въ текстѣ. Изданiе Г. В. Гольстена. С.-Петербургъ, 1912. Стр. 188. Ц. 1 р.

С. И. Шохоръ-Троцкiй. *Геометрiя на задачахъ.* (Основной курсъ). Книга для учащихся. Выпускъ первый (свыше 300 политипажей въ текстѣ). Изданiе 2-е, исправленное. Изданiе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1913. Стр. XVI+343. Ц. 90 к.

I. Штёклинъ. *Ариѳметическiй задачникъ.* Выпускъ IV. „Счисленiе въ предѣлахъ 10 000". Для 3-го года обученiя въ начальной школѣ. Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданiя Д. Л. Волковскаго. Стр. 35. Ц. 10 к.

Я. А. Липкинъ, инспекторъ Марiампольской мужской гимназiи. *Сборникъ задачъ по математикѣ,* бывшихъ темами на выпускныхъ экзаменахъ въ мужскихъ гимназiяхъ и реальныхъ училищахъ Варшавскаго Учебнаго Округа. (Для учениковъ 7-го и 8-го классовъ гимназiй и экстерновъ). Варшава, 1912. Стр. X + 105. Ц. 75 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографiя Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется