Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVII Сем. № 9.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 561.

Новыя термодинамическія теоріи.

(Теорема Нернста о теплотѣ и гипотеза о квантахъ).

М. Планка,

профессора теоретической физики въ Берлинскомъ университетѣ.

Докладъ, читанный 16 декабря 1911 г. въ Нѣмецкомъ Химическомъ Обществѣ въ Берлинѣ.

*(Окончаніе *).*

Для вычисленія коэффиціента k всего удобнѣе прибѣгнуть къ измѣренію упругости пара. Уравненіе (6) въ связи съ уравненіями (5) и (8) даетъ для равновѣсія жидкости и пара уравненія

$$\frac{r}{T} - C'_p \ln T + R \ln p - k + \int_0^T \frac{C_p}{T} dT = 0,$$

гдѣ молекулярная теплота C'_p относится къ парообразному аггрегатному состоянію.

*) См „Вѣстникъ", № 560.

Для каждой жидкости это уравненіе даетъ упругость ея насыщеннаго пара p въ функціи отъ температуры T, поскольку паръ можетъ быть разсматриваемъ, какъ идеальный газъ. Оно уже подтверждено многочисленными измѣреніями, и привело къ болѣе или менѣе приближенному вычисленію константы k для цѣлаго ряда газовъ и паровъ. Обо всемъ этомъ коллега Нернстъ скоро разскажетъ намъ, вѣроятно, гораздо обстоятельнѣе.

Теорема Нернста имѣетъ, повидимому, огромное значеніе не только для химически однородныхъ веществъ, но и для смѣсей и растворовъ. Правда, энтропія раствора даже конденсированнаго, при абсолютномъ нулѣ отлична отъ нуля, такъ какъ она находится въ опредѣленной зависимости отъ концентрацій растворенныхъ веществъ; однако, остается въ силѣ положеніе, что какъ теплоемкость, такъ и коэффиціентъ расширенія всякаго конденсированнаго раствора при нулѣ абсолютной шкалы обращается въ нуль; это вполнѣ согласно съ результатами опыта.

На нѣсколькихъ примѣрахъ покажемъ дальнѣйшія приложенія теоремы. Какъ извѣстно, для химическаго равновѣсія различныхъ взаимодѣйствующихъ видовъ молекулъ классическая термодинамика даетъ условіе закона дѣйствія массъ:

$$\frac{c_1^{V_2}\, c_2^{V_1}\, c_3^{V_3} \dots}{c_1'^{\,v_1'}\, c_2'^{\,v_2'}\, c_3'^{\,v_3'} \dots} = K,$$

гдѣ концентрація c соотвѣтствуетъ виду молекулъ, образующемуся при реакціи, концентрація c' — виду, который при реакціи исчезаетъ, а V есть число молекулъ, участвующихъ въ реакціи. Величина K не зависитъ отъ концентрацій и опредѣляется температурой и давленіемъ.

Классическая термодинамика не можетъ намъ ничего сказать объ абсолютномъ значеніи величины K, и даетъ лишь ея зависимость отъ температуры и давленія. Зависимость отъ температуры выражается извѣстной формулой Вантъ-Гоффа

$$\frac{d\ln K}{dT} = \frac{r}{RT^2}.$$

Теорема же Нернста даетъ намъ больше. Дѣйствительно, для случая конденсированнаго раствора имѣемъ непосредственно:

$$R \,.\, \ln K = \int_0^T \frac{dr}{dT} \cdot \frac{dT}{T} - \frac{r}{T},$$

такъ что для полнаго опредѣленія закона химическаго равновѣсія остается лишь измѣрить тепловой эффектъ (Wärmetönung) при различныхъ температурахъ. Въ случаѣ же газообразнаго раствора въ выраженіе величины K входятъ еще химическія константы k газообразныхъ видовъ молекулъ и давленіе p.

Особенно простымъ является случай $r = 0$, то есть случай термонейтральной реакціи. О такихъ реакціяхъ классическая термодинамика говоритъ намъ лишь, что константа K равновѣсія не зависитъ отъ температуры, и оставляетъ, слѣдовательно, ея абсолютную величину совершенно неопредѣленной. Теорема же Нернста, какъ видимъ, требуетъ, чтобы для насыщеннаго раствора $K = 1$.

Термонейтральный процессъ осуществленъ совершенно строго при переходѣ тѣла въ энантіоморфную форму, напримѣръ, при превращеніи оптически дѣятельнаго вида молекулъ въ его андиподъ. Поэтому взаимный растворъ двухъ дѣятельныхъ антиподовъ находится въ устойчивомъ равновѣсіи лишь въ томъ случаѣ, если растворъ образуетъ рацемическую оптически недѣятельную смѣсь; это требованіе подтверждается опытнымъ фактомъ, что оптически дѣятельныя соединенія при нагрѣваніи часто превращаются самопроизвольно въ рацематъ. Что это происходитъ не во всѣхъ случаяхъ и при обыкновенной температурѣ еще не имѣетъ мѣста, объясняется, какъ одно изъ множества извѣстныхъ въ термодинамикѣ явленій замедленія. Другіе переходы, обладающіе, по крайней мѣрѣ приблизительно, характеромъ термонейтралитата, изслѣдованы Вантъ-Гоффомъ въ его послѣдней работѣ, представленной въ здѣшнюю Академію Наукъ, о синтетическомъ ферментномъ дѣйствіи; провѣрка соотношенія $K = 1$ въ этихъ случаяхъ также дала положительный результатъ.

Такимъ образомъ, въ теоремѣ Нернста устанавливающей абсолютное значеніе энтропіи, мы имѣемъ принципіальное дополненіе второго начала термодинамики, допускающее въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ точную формулировку и потому также точную повѣрку. Если бы вдругъ обнаружилось хотя бы одно только исключеніе, то теорема потеряла бы свое всеобщее значеніе, совершенно такъ же, какъ и оба главныя начала. Въ этомъ и заключается огромное значеніе этой теоремы для термодинамики.

Здѣсь можно было бы не безъ основанія спросить: почему же къ первому началу непримѣнимо то, что справедливо для второго, то есть почему установленія абсолютнаго значенія энергіи, осуществимое, какъ я выше упомянулъ, посредствомъ принципа относительности, — почему оно не даетъ столь же важныхъ для термодинамики слѣдствій? Въ самомъ дѣлѣ, если возможно измѣрять абсолютную величину энергіи отдѣльно для каждаго вещества, то отсюда можно вычитаніемъ непосредственно вычислить тепловой эффектъ при реакціи между двумя веществами. Это конечно, безспорно; но, къ сожалѣнію, практическое значеніе этого предложенія гораздо ниже, чѣмъ его теоретическое значеніе, потому что для примѣненія этого метода въ термодинамикѣ необходимо умѣть измѣрять инертную массу вещества съ точностью до одной милліонной части миллиграмма. Правда, тогда мы должны были бы, конечно, получить, напримѣръ, что водяной паръ имѣетъ замѣтно меньшую массу, чѣмъ гремучій газъ при той же температурѣ. Никогда нельзя съ увѣренносчью утверждать, что нѣчто, логически допустимое, вовсе не можетъ получить осуществленія. Но пока приведенныя соображенія только лишній разъ доказываютъ, что цѣнность того или другого предложенія зависитъ не столько отъ его истинности, сколько отъ его плодотворности.

II.

Но каковъ же собственный, болѣе глубокій физико-химическій смыслъ теоремы Нернста? Въ настоящее время уже нѣтъ надобности распространяться, въ особенности предъ собраніемъ химиковъ, о томъ, что вопросъ объ атомистическомъ значеніи столь фундаментальнаго предложенія является вполнѣ умѣстнымъ и даже необходимымъ. Не потому лишь, что рѣшеніе этого вопроса обѣщаетъ сдѣлать теорему болѣе наглядной, но и потому, что только этимъ путемъ можно въ пестрой игрѣ явленій открыть закономѣрности и зависимости, которыхъ чистая термодинамика вовсе и не касается. Мы такимъ образомъ сейчасъ же вступаемъ, конечно, въ новую, чуждую область гипотезъ. Я попытаюсь повести Васъ возможно болѣе удобнымъ путемъ, но долженъ заранѣе сознаться, что замѣчательные и заманчивые виды, которые откроются намъ на этомъ пути, въ отдѣльныхъ чертахъ отнюдь еще нельзя считать ясными. Тѣмъ важнѣе поэтому подчеркнуть еще разъ, что вопросъ о примѣнимости теоремы Нернста можетъ быть разработанъ и рѣшенъ совершенно независимо отъ атомистическихъ гипотезъ. Ибо для этой цѣли вполнѣ достаточно разсмотрѣнной нами чисто-термодинамической теоріи.

Такъ какъ теорема Нернста есть предложеніе относительно энтропіи, то не подлежитъ сомнѣнію, что атомистическое значеніе теоремы можетъ быть понято только въ связи съ атомистическимъ значеніемъ энтропіи, то есть съ атомистическимъ значеніемъ второго начала термодинамики. Равнымъ образомъ послѣ основоположныхъ работъ Л. Больцмана не подлежитъ сомнѣнію, что въ свѣтѣ атомистики второе начало есть теорема о вѣроятности, а энтропія величина изъ теоріи вѣроятностей. Термодинамическое предложеніе: „во всякомъ необратимомъ процессѣ энтропія участвующихъ тѣлъ увеличивается“ въ переводѣ на атомистическій языкъ выражаетъ: черезъ всякій естественный процессъ участвующія въ немъ тѣла переводятся въ состояніе, соотвѣтствующее бо́льшей вѣроятности. Сообразно съ этимъ, энтропію слѣдуетъ считать ни чѣмъ инымъ, какъ общей мѣрой вѣроятности. Больцманъ показалъ, дѣйствительно, что энтропію газа, хорошо извѣстную въ термодинамикѣ, можно вычислить совершенно независимо отъ термодинамики, — единственно лишь посредствомъ элементарныхъ предложеній комбинаторики. Затѣмъ нужно лишь взять логариѳмъ вѣроятности состоянія; онъ пропорціоналенъ энтропіи этого состоянія. Это простое соотношеніе между энтропіей и вѣроятностью, если считать его общепримѣнимымъ, содержитъ, очевидно, полное объясненіе второго начала съ точки зрѣнія атомистики.

Для нашей цѣли особенный интересъ представляетъ аддитивная константа въ выраженіи энтропіи — константа, которой классическая термодинамика не опредѣляетъ. Въ самомъ дѣлѣ, теорема Нернста, какъ мы видѣли, дѣлаетъ возможнымъ абсолютное опредѣленіе этой константы; поэтому мы въ правѣ ожидать уясненіе атомистическаго значенія теоремы Нернста отъ рѣшенія вопроса объ атомистическомъ значеніи этой константы. Задача сводится къ тому, чтобы въ атомистическомъ образѣ, созданномъ Больцманомъ для вычисленія энтропіи, разыскать ту именно черту, которой обусловливается неопредѣленность аддитивной постоянной въ выраженіи для энтропіи.

Для этой цѣли мы должны нѣсколько подробнѣе остановиться на способѣ вычисленія вѣроятности. Предположимъ, напримѣръ, что данъ идеальный газъ объема 1 въ состояніи опредѣленной полной энергіи и требуется вычислить вѣроятность этого состоянія. Ее можно найти по Больцману слѣдующимъ путемъ. Полную энергію U газа представимъ въ видѣ прямолинейнаго отрѣзка, и этотъ послѣдній раздѣлимъ на очень большое число малыхъ отрѣзковъ одинаковой длины. Каждый изъ этихъ послѣднихъ будетъ выражать очень малый интервалъ энергіи, который простирается отъ опредѣленнаго значенія энергіи, лежащаго между 0 и U, до другого значенія, которое очень мало отличается отъ предыдущаго. Теперь мы можемъ любое состояніе газовыхъ молекулъ иллюстрировать численнымъ образомъ: представимъ себѣ, что молекулы нумерованы, и каждый интервалъ энергіи помѣчаемъ нумерами тѣхъ молекулъ, энергія которыхъ падаетъ на этотъ интервалъ. Искомой вѣроятностью будетъ число всевозможныхъ цыферныхъ знаковъ, соотвѣтствующее данной полной энергіи U газа, и энтропія пропорціональна логариѳму вѣроятности.

Въ этомъ способѣ каждый шагъ предписанъ совершенно опредѣленнымъ образомъ, за однимъ лишь исключеніемъ: недостаетъ лишь положенія относительно величины взятаго интервала энергіи. Легко, однако, понять, что вычисленная этимъ способомъ величина вѣроятности существенно зависитъ отъ числа этихъ малыхъ интерваловъ, которые служатъ мѣрой элементарныхъ областей вѣроятности: чѣмъ меньшія мы возьмемъ элементарныя области, тѣмъ больше очевидно ихъ число, и тѣмъ больше также искомая вѣроятность. Если, слѣдовательно, мы оставимъ неопредѣленной величину элементарныхъ областей, то въ выраженіи вѣроятности останется неопредѣленной нѣкоторая константа пропорціональности, а въ выраженіи энтропіи, какъ логариѳмѣ вѣроятности, нѣкоторая аддитивная константа.

Теперь мы имѣемъ, слѣдовательно, отвѣтъ на поставленный выше вопросъ. Неопредѣленная константа, оставленная классической термодинамикой въ выраженіи энтропіи, соотвѣтствуетъ съ атомистической точки зрѣнія неопредѣленности элементарныхъ областей вѣроятности, взятыхъ для вычисленія энтропіи. Такъ какъ теорема Нернста даетъ однозначное опредѣленіе этой константы, то физическое содержаніе теоремы Нернста въ самомъ общемъ смыслѣ слѣдующее: элементарныя области вѣроятности не суть произвольно малыя величины, но имѣютъ совершенно опредѣленную величину, которую во многихъ случаяхъ можно непосредственно указать.

Съ логической стороны эти мысли врядъ ли могутъ вызвать какое либо возраженіе, поскольку мы, вообще, принимаемъ Больцмановское представленіе о связи между энтропіей и вѣроятностью. Нужно, однако, сознаться, что результатъ, къ которому мы сейчасъ пришли, долженъ показаться нѣсколько страннымъ и совершенно неожиданнымъ всякому, кто ближе занимался изученіемъ молекулярныхъ процессовъ. Ибо ни одна изъ существующихъ атомистическихъ теорій не даетъ ни малѣйшаго повода къ отграниченію вполнѣ опредѣленныхъ элементарныхъ областей вѣроятности; съ перваго взгляда представляется даже весьма сомнительнымъ, если не совершенно непріемлемымъ, чтобы такое ограниченіе имѣло, вообще, физическій смыслъ. Было бы, пожалуй, рискованно, идти по этому пути еще дальше, но какъ разъ къ этому же самому пути и привели съ другой стороны изслѣдованія совершенно другого рода.

Здѣсь мы видимъ явленіе, которое въ исторіи наукъ встрѣчается довольно часто: новая способная къ развитію идея почти одновременно пускаетъ ростки въ различныхъ мѣстахъ, ничѣмъ между собой не связанныхъ; эти ростки нѣкоторое время развиваются самостоятельно и совершенно различнымъ образомъ, пока, наконецъ, повсемѣстно не будетъ сознано ихъ единство. Тогда начинается плодотворное взаимодѣйствіе идей и методовъ.

Въ теоріи теплового лучеиспусканія рѣзкое противорѣчіе между формулой излученія классической динамики, съ одной стороны, и результатами измѣреній — съ другой, тоже привело къ своеобразному слѣдствію, что для лучистой теплоты существуютъ совершенно опредѣленныя элементарныя области вѣроятности, а сравненіе съ наблюденіями дало даже способъ для довольно точнаго вычисленія величины этихъ элементарныхъ областей, — такъ называемой универсальной „кванты“ дѣйствія. Если даже признать это совпаденіе простой случайностью, то все же очень интересно сравнить эти результаты, полученные въ совершенно различныхъ областяхъ. Такое сравненіе и было произведено; принимая во вниманіе разнородность сравниваемыхъ объектовъ, можно сказать, что успѣхъ превзошелъ всякія ожиданія.

Прежде всего сравненіе законовъ излученія съ законами газовъ дало методъ для вычисленія элементарныхъ количествъ (квантъ) матеріи и электричества, который по своей точности можетъ поспорить съ самыми тонкими непосредственными измѣреніями. Неужели это совпаденіе тоже есть лишь случайность? Но мало того. Съ одной стороны, А. Эйнштейнъ, а съ другой — В. Нернстъ и Ф. А. Линдеманъ нашли, что съ помощью универсальной кванты дѣйствія можно вычислить удѣльную теплоту цѣлаго ряда твердыхъ тѣлъ какъ по абсолютной величинѣ, такъ и въ зависимости отъ температуры, если припишемъ тѣламъ нѣкоторыя собственныя молекулярныя колебанія. Вычисленныя такимъ способомъ собственныя колебанія для нѣкоторыхъ веществъ, какъ $NaCl$, KCl и KBr, со всей желательной точностью совпадаютъ съ собственными колебаніями, которыя были найдены путемъ оптическихъ измѣреній Г. Рубенсомъ (G. Rubens) и Г. Голльнагелемъ (G. Hollnagel).

Въ виду такихъ результатовъ врядъ ли здѣсь возможно говорить еще о случайности. Но какого бы взгляда мы ни держались на этотъ счетъ, представляется весьма заманчивой и многообѣщающей задачей глубже разработать и проникнуть въ физическое значенiе гипотезы, что для термодинамической вѣроятности существуютъ извѣстныя совершенно опредѣленныя элементарныя области; такъ именно я предложилъ бы формулировать содержанiе такъ называемой гипотезы квантъ.

Эта задача представляетъ чрезвычайно большiя трудности. Дѣйствительно, хотя во многихъ случаяхъ можно весьма просто вычислить элементарныя области вѣроятности — О. Закуръ (O. Sackur) недавно сдѣлалъ подобное вычисленiе для газовъ, — но вопросъ о ихъ физико-химическомъ происхожденiи отличается чрезвычайной сложностью. Задача вѣдь заключается въ томъ, чтобы изъ чисто статистическаго закона вывести заключенiе о динамическомъ законѣ, т. е. о причинной связи между отдѣльными процессами. Эта задача аналогична, напримѣръ, такой: изъ скорости химической реакцiи вывести заключенiе о химическихъ силахъ, дѣйствующихъ между участвующими въ реакцiи молекулами. Здѣсь представляется на выборъ цѣлый рядъ возможностей, и не слѣдуетъ удивляться, что взгляды различныхъ изслѣдователей на этотъ вопросъ пока еще сильно расходятся.

Самое простое и, такъ сказать, самое наивное объясненiе состояло бы въ томъ, что энергiя сама имѣетъ атомистическую структуру; этимъ непосредственно объяснялось бы, конечно, существованiе опредѣленныхъ раздѣльныхъ элементарныхъ областей вѣроятности. Но о томъ, чтобы провести такое воззрѣнiе, не можетъ быть рѣчи уже потому, что кинетическую энергiю прямолинейно происходящаго движенiя мы не можемъ представлять себѣ иначе, какъ непрерывной. Многiе держатся того взгляда, что энергiя электромагнитнаго волнового излученiя или, по крайней мѣрѣ, энергiя колебанiй электроновъ, представляющая собой вмѣстѣ съ тѣмъ и источникъ лучистой теплоты, имѣетъ атомистическую структуру, поскольку она всегда должна составлять цѣлое кратное опредѣленнаго количества энергiи. Послѣднее предположенiе я раздѣлялъ раньше самъ, но теперь его оставилъ, какъ слишкомъ радикальное, чтобы имъ пользоваться во всѣхъ случаяхъ.

Но не нужно вовсе итти такъ далеко. Гипотеза квантъ утверждаетъ лишь, что въ элементарныхъ законахъ, управляющихъ атомистическими силами, скрываются извѣстныя прерывности, изъ которыхъ вытекаетъ раздѣльность областей вѣроятности. О природѣ этихъ прерывностей нельзя ничего сказать заранѣе; слѣдуетъ замѣтить особенно, что структура въ видѣ отдѣльныхъ порцiй (квантъ) относится прежде всего не къ энергiи, но къ вѣроятности. О квантахъ энергiи можно, вообще, говорить лишь при перiодическихъ процессахъ. По моему мнѣнiю, вполнѣ согласно будетъ съ гипотезой квантъ, если мы въ случаѣ молекулярнаго осцилятора съ перiодическими колебанiями примемъ, что испусканiе энергiи происходитъ опредѣленными порцiями — квантами, тогда какъ поглощенiе совершается вполнѣ непрерывно, по крайней мѣрѣ, въ случаѣ лучистой теплоты. Для неперiодическихъ процессовъ А. Зоммерфельдъ (Sommerfeld) недавно набросалъ въ основныхъ чертахъ столь же смѣлую, сколь и интересную гипотезу квантъ, въ которой роль играютъ, понятно, лишь кванты дѣйствія, а не энергіи.

Такое пестрое разнообразіе взглядовъ не должно у насъ вызывать неблагопріярнаго сужденія о гипотезѣ квантъ. Напротивъ, пусть каждый изслѣдователь идетъ тѣмъ путемъ, который ему кажется наиболѣе надежнымъ, и не смущается упреками, если онъ находитъ ихъ неправильными, и пусть работа такимъ образомъ развивается по всевозможнѣйшимъ направленіямъ: только такъ и можетъ раскрыться истинный характеръ гипотезы. И, дѣйствительно, помимо теплового излученія и удѣльной теплоты, гипотезой квантъ постепенно начинаютъ пользоваться для множества другихъ процессовъ; сюда относятся: явленіе Допплера въ каналовыхъ лучахъ, фотоэлектрическое дѣйствіе, напряженіе іонизаціи, полученіе рентгеновскихъ и γ-лучей и обратное явленіе, т. е. возникновеніе вторичныхъ катодныхъ лучей черезъ рентгеновскіе, далѣе, сопротивленіе электрическихъ проводниковъ, тертермоэлектрическія силы, законъ образованія серій спектральныхъ линій, испусканіе электроновъ при химическихъ реакціяхъ — вездѣ можно, по крайней мѣрѣ при нѣкоторомъ стараніи, уловить вліяніе, пока еще весьма загадочное, универсальной кванты дѣйствія. Замѣчательный фактъ, установленный О. Ганомъ (Hahn) и его сотрудниками, — что всякое химически однородное радіоактивное вещество испускаетъ β-лучи совершенно опредѣленной скорости, демонстрируетъ испусканіе квантами, можно сказать, ad oculos.

Конечно, бóльшая часть работы еще впереди, и не одна многообѣщающая находка еще окажется пустоцвѣтомъ на древѣ познанія. Но начало уже сдѣлано: гипотеза квантъ уже не можетъ исчезнуть. И я могу безъ преувеличенія сказать, что эта гипотеза создала фундаментъ для теоріи, которой суждено со временемъ пролить новый свѣтъ на тонкія быстрыя явленія въ мірѣ молекулъ.

Теорема Якова Бернулли.

П. С. Флорова.

§ 1. Опредѣленіе вѣроятности.

Вѣроятностью какого либо событія, ожидаемаго при производствѣ нѣкотораго опыта, называется отношеніе числа случаевъ, благопріятствующихъ этому событію къ числу всѣхъ случаевъ, одинаково возможныхъ при данномъ опытѣ. Такъ, напримѣръ, возьмемъ кость въ видѣ правильнаго двѣнадцатигранника и пусть эта кость имѣетъ 5 бѣлыхъ граней и 7 черныхъ. При бросаніи кости на плоскость она можетъ упасть на нее каждою изъ всѣхъ своихъ 12 граней. Слѣдовательно, всѣхъ случаевъ паденія кости будетъ 12. Изъ этихъ 12 случаевъ только 5 благопріятствуютъ паденію кости на бѣлую грань. Поэтому вѣроятность паденія кости на бѣлую грань равна отношенію 5 къ 12. Совершенно также находимъ, что вѣроятность паденія кости на черную грань равна отношенію 7 къ 12.

Если бы всѣ 12 граней нашей кости были бѣлые, то число случаевъ паденія этой кости на бѣлую грань было бы 12, а соотвѣтствующая вѣроятность была бы отношеніемъ 12 къ 12, т. е. равнялась бы единицѣ. Отсюда ясно, что 1 есть символъ достовѣрности событія.

Число случаевъ паденія той же кости съ 12 бѣлыми гранями на одну изъ черныхъ граней есть 0, а соотвѣтствующая вѣроятность есть отношеніе 0 къ 12, т. е. равняется нулю. Отсюда слѣдуетъ, что 0 есть символъ невозможности событія.

§ 2. Счетъ случаевъ паденія тождественныхъ костей на произвольныя грани.

Пусть кость имѣетъ s граней и пусть будутъ равно возможны случаи паденія кости на любую изъ ея граней. При однократномъ бросаніи кости она можетъ лечь на плоскость s различными способами. Возьмемъ двѣ тождественныя кости и бросимъ ихъ на плоскость. Чтобы сосчитать число случаевъ паденія вообразимъ, что первая кость лежитъ неподвижно на одной изъ своихъ граней, а вторая переворачивается всѣми различными способами. Число такихъ способовъ есть число граней второй кости и, слѣдовательно, равно s. Послѣ этого положимъ первую кость на какую нибудь другую ея грань, а вторую кость опять перевернемъ всѣми различными способами. Такъ будемъ поступать до тѣхъ поръ, пока первая кость перебываетъ на каждой изъ своихъ граней. Первая кость можетъ быть положена на плоскость s различными способами и каждому способу будетъ соотвѣтствовать s положеній второй кости. Отсюда видно, что число случаевъ паденія на плоскость двухъ костей, при однократномъ бросаніи, равно s.

Счетъ способовъ размѣщенія трехъ тождественныхъ костей можно произвести полагая подобно предыдущему, за то одна изъ костей неподвижна. Тогда двѣ другія могутъ упасть s^2 различными способами. Такъ какъ первая кость должна быть перевернута s разъ, то число всѣхъ способовъ паденія трехъ костей равно s^3.

Подобнымъ образомъ найдемъ вообще, что число способовъ, паденія на плоскость m костей, при однократномъ ихъ бросаніи, равно s^m.

Замѣтимъ, что однократное бросаніе m тождественныхъ костей равносильно бросанію m разъ одной изъ нихъ. Отсюда слѣдуетъ, что число всѣхъ различныхъ случаевъ паденія кости съ s гранями при бросаніи ея на плоскость m разъ равно s^m.

§ 3. Счетъ случаевъ паденія тождественныхъ костей на условныя грани.

Пусть $s = a + b$, гдѣ a означаетъ число бѣлыхъ граней кости, а b число черныхъ. Пусть кость бросаютъ на плоскость m разъ; m — кратное бросаніе кости на плоскость можно замѣнить однократнымъ бросаніемъ m тождественныхъ костей. При бросаніи m костей могутъ представиться случаи, показанные въ нижеслѣдующей таблицѣ:

Число костей упавшихъ . . .	m,	m,	...	m ...	m,	m.
На бѣлую грань	0,	1,	...	i ...	$m-1$,	m.
На черную грань	m,	$m-1$,	...	$m-i$ ...	1,	0.

Предложимъ себѣ задачу произвести счетъ такихъ случаевъ, въ которыхъ i костей ложатся на бѣлую грань, а остальныя $m-i$ костей на черную. Для этого вообразимъ, что i костей уже положены на бѣлыя грани. Тогда каждая изъ остальныхъ $m-1$ костей должна лечь на черную грань. Такъ какъ число бѣлыхъ граней у каждой кости a, то каждую изъ i взятыхъ костей можно разсматривать, какъ многогранникъ, имѣющій a граней. Поэтому число способовъ паденія этихъ i костей будетъ a^i. Подобнымъ образомъ каждую изъ $m-i$ костей, долженствующихъ быть положенными на черную грань, можно разсматривать, какъ многогранникъ, имѣющій b граней. Поэтому число различныхъ способовъ размѣщенія взятыхъ $m-i$ костей на черныхъ граняхъ будетъ b^{m-i}. Каждому случаю паденія i костей на бѣлую грань соотвѣтствуетъ b^{m-i} случаевъ паденія остальныхъ $m-i$ костей на черную грань. Поэтому число случаевъ паденія взятыхъ i костей на бѣлую грань равно $a^i b^{m-i}$. Но изъ общаго числа m костей можно взять i костей столькими различными способами, сколько существуетъ сочетаній изъ m элементовъ по i. Отсюда слѣдуетъ, что число всѣхъ такихъ случаевъ, въ которыхъ изъ m брошенныхъ на плоскость костей i ложатся на бѣлую грань, а остальныя $m-i$ на черную равно

$$C_m^i a^i b^{m-i} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i} a^i b^{m-i}.$$

§ 4. Вѣроятность паденія тождественныхъ костей на условныя грани.

Если m тождественныхъ костей, имѣющихъ по a бѣлыхъ граней и по b черныхъ, бросить на плоскость, то всѣхъ возможныхъ случаевъ паденія этихъ костей на произвольныя грани будетъ (§ 2)

$$S^m = (a+b)^m.$$

Изъ нихъ паденію i костей на бѣлую грань и, слѣдовательно, паденію остальныхъ $m-i$ костей на черную грань будетъ благопріятствовать число случаевъ, опредѣляемое формулой (§ 3)

$$C_m^i a^i b^{m-i}.$$

На основаніи опредѣленія понятія о вѣроятности (§ 1) вѣроятность паденія i костей на бѣлую грань выразится такъ:

$$\frac{C_m^i a^i b^{m-i}}{(a+b)^m} = C_m^i \left(\frac{a}{a+b}\right)^i \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-i} = C_m^i p^i q^{m-i}$$

гдѣ для краткости положено

$$p=\frac{a}{a+b}, \quad q=\frac{b}{a+b}.$$

Найдемъ еще вѣроятность того, что изъ m тождественныхъ костей, брошенныхъ на плоскость, на бѣлую грань упадутъ не менѣе i костей и не болѣе k костей.

Число случаевъ паденія на бѣлую грань

$$i, \quad i+1, \quad i+2, \cdots, \quad k-2, \quad k-1, \quad k$$

костей выражается формулой

$$C_m^i a^i b^{m-i} + C_m^{i+1} a^{i+1} b^{m-i-1} + \cdots + C_m^{k-1} a^{k-1} b^{m-k+1} + C_m^k a^k b^{m-k}$$

число же всѣхъ возможныхъ случаевъ при бросаніи m тождественныхъ костей есть (§ 2)

$$S^m = (a+b)^m.$$

Поэтому искомая вѣроятность равна (§ 1)

$$\frac{C_m^i a^i b^{m-i}}{(a+b)^m} + \frac{C_m^{i+1} a^{i+1} b^{m-i-1}}{(a+b)^m} + \cdots + \frac{C_m^{k-1} a^{k-1} b^{m-k+1}}{(a+b)^m} + \frac{C_m^k a^k b^{m-k}}{(a+b)^m}$$

или

$$C_m^i p^i q^{m-i} + C_m^{i+1} p^{i+1} q^{m-i-1} + \cdots + C_m^{k-1} p^{k-1} q^{m-k+1} + C_m^k p^k q^{m-k}.$$

Введемъ обозначенія

$$q^m + C_m^1 p q^{m-1} + C_m^2 p^2 q^{m-2} + \cdots + C_m^{i-1} p^{i-1} q^{m-i+1} = x,$$

$$C_m^i p^i q^{m-i} + C_m^{i+1} p^{i+1} q^{m-i-1} + \cdots + C_m^{k-1} p^{k-1} q^{m-k+1} + C_m^k p^k q^{m-k} = y,$$

$$C_m^{k+1} p^{k+1} q^{m-k-1} + \cdots + C_m^2 p^{m-2} q^2 + C_m^1 p^{m-1} q + p^m = z.$$

Если въ формулѣ для y написать 0 вмѣсто i и $i-1$ вмѣсто k, то получится x. Если въ формулѣ для y написать $k+1$ вмѣсто i и m вмѣсто k, то получится z. Отсюда по смыслу y выясняется смыслъ x и z. Именно:

x есть вѣроятность того, что изъ m тождественныхъ костей, брошенныхъ на плоскость, на бѣлую грань упадетъ менѣе i костей;

y есть вѣроятность того, что на бѣлую грань упадетъ не менѣе i костей и не болѣе k костей;

z есть вѣроятность того, что на бѣлую грань упадетъ болѣе k костей.

§ 5. Вѣроятности событій при повтореніи опыта.

Положимъ, что производится нѣкоторый опытъ, приводящій къ двумъ взаимнопротивоположнымъ событіямъ E и F, вѣроятности которыхъ пусть будутъ p и q. Пусть число всѣхъ возможныхъ случаевъ при данномъ опытѣ будетъ $a+b$ и изъ нихъ a благопріятствуетъ событію E, а b благопріятствуетъ событію F. Тогда

$$\frac{a}{a+b}=p, \quad \frac{b}{a+b}=q, \quad p+q=1.$$

Производство опыта, въ чемъ бы онъ ни состоялъ, можно уподобить бросанію на плоскость кости, у которой a бѣлыхъ граней и b черныхъ. Повтореніе опыта m разъ равносильно бросанію на плоскость m тождественныхъ костей.

Поэтому вѣроятность того, что при m опытахъ событіе случится менѣе i разъ выразится формулой:

$$q^m + C_m^1 p q^{m-1} + C_m^2 p^2 q^{m-2} + \cdots + C_m^{i-1} p^{i-1} q^{m-i+1} = x.$$

Вѣроятность того, что при m опытахъ событіе E случится не менѣе i разъ и не болѣе k разъ выразится формулой:

$$C_m^i p^i q^{m-1} + C_m^{i+1} p^{i+1} q^{m-i-1} + \cdots + C_m^{k-1} p^{k-1} q^{m-k+1} + C_m^k p^k q^{m-k} = y.$$

Наконецъ вѣроятность того, что при m опытахъ событіе E случится болѣе k разъ выразится формулой:

$$C_m^{k+1} p^{k+1} q^{m-k-1} + \cdots + C_m^{m-2} p^{m-2} q^2 + C_m^{m-1} p^{m-1} q + p^m = z.$$

Если введемъ обозначеніе

$$t_i = C_m^i p^i q^{m-i},$$

то получимъ:

$$x = t_0 + l_1 + t_2 + \cdots + t_{i-3} + t_{i-2} + t_{i-1},$$

$$y = t_i + t_{i+1} + t_{i+2} + \cdots + t_{k-2} + t_{k-1} + t_k,$$

$$z = t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots + t_{m-2} + t_{m-1} + t_m.$$

По формулѣ бинома Ньютона имѣемъ:

$$(p\xi + q)^m = q^m + C_m^1 p q^{m-1} \xi + C_m^2 p^2 q^{m-2} \xi^2 + \cdots + p^m \xi^m,$$

что при помощи выше сдѣланнаго обозначенія приводится къ виду:

$$(p\xi + q)^m = t_0 + t_1 \xi + t_2 \xi^2 + \cdots + t_m \xi^m.$$

Положивъ здѣсь $\xi = 1$, получимъ:

$$1 = t_0 + t_1 + \cdots + t_{i-1} + t_i + \cdots + t_k + t_{k+1} + \cdots + t_{m-1} + t_m.$$

Отсюда видно, что

$$x + y + z = 1.$$

§ 6. Наиболѣе вѣроятное событіе при повтореніи испытанія.

Напишемъ два равенства (§ 5)

$$t_{i-1} = C_m^{i-1} p^{i-1} q^{m-i+1}, \quad t_i = C_m^i p^i q^{m-1}$$

и первое изъ нихъ раздѣлимъ на второе. Принявъ во вниманіе, что

$$C_m^{i-1} = \frac{m(m-1)\cdots(m--1+2)}{1.2\ldots(i-1)},\quad C_m^i = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{1.2\ldots i}$$

получимъ

$$\frac{t_{i-1}}{t_i} = \frac{iq}{(m-i+1)p}.$$

Перемѣнивъ здѣсь i на $i+1$, найдемъ:

$$\frac{t_i}{t_{i+1}} = \frac{(i+1)q}{(m-i)p}.$$

Сравненіе правыхъ частей этихъ равенствъ даетъ:

$$\frac{iq}{(m-i+1)p} < \frac{(i+1)q}{(m-i)p}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{t_{i-1}}{t_i} < \frac{t_i}{t_{i+1}}.$$

Поставимъ сюда на мѣсто i послѣдовательно

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-3,\ m-2,\ m-1$$

будемъ имѣть

$$\frac{t_0}{t_1} < \frac{t_1}{t_2} < \frac{t_2}{t_3} < \cdots < \frac{t_{m-3}}{t_{m-2}} < \frac{t_{m-2}}{t_{m-1}} < \frac{t_{m-1}}{t_m}.$$

Допустимъ, что единица находится среди членовъ этого ряда и, слѣдовательно, для нѣкотораго нумера ϱ имѣетъ мѣсто неравенство:

$$\frac{t_{\varrho-1}}{t_\varrho} < 1 < \frac{t_\varrho}{l_{\varrho+1}}$$

или, что то же

$$\frac{t_0}{t_1} < \frac{t_1}{t_2} < \cdots < \frac{t_{\varrho-1}}{l_\varrho} < 1 < \frac{t_\varrho}{t_{\varrho+1}} < \cdots \frac{t_{m-2}}{t_{m-1}} < \frac{t_{m-1}}{t_m}.$$

Въ такомъ случаѣ изъ неравенствъ

$$\frac{t_0}{t_1} < \frac{t_1}{t_2} < \cdots < \frac{t_{\varrho-2}}{t_{\varrho-1}} < \frac{t_{\varrho-1}}{t_\varrho} < 1$$

послѣдовательно найдемъ:

$$t_\varrho > t_{\varrho-1} > t_{\varrho-2} > \cdots > t_2 > t_1 > t_0,$$

а изъ неравенствъ:

$$1 < \frac{t_\varrho}{t_{\varrho+1}} < \frac{t_{\varrho+1}}{t_{\varrho+2}} < \cdots < \frac{t_{m-2}}{t_{m-1}} < \frac{t_{m-1}}{t_m}$$

послѣдовательно получимъ:

$$t_\varrho > t_{\varrho+1} > t_{\varrho+2} > \cdots > t_{m-2} > t_{m-1} > t_m.$$

Отсюда видимъ, что t_ϱ есть наибольшее изъ всѣхъ t и что наиболѣе вѣроятное событіе при m тождественныхъ испытаніяхъ есть повтореніе ϱ разъ событія E.

§ 7. Вычисленіе высшаго предѣла x.

Пусть ϱ будетъ нумеръ правдоподобнѣйшаго событія при m тождественныхъ опытахъ и пусть $i < \varrho$. Разсмотримъ сумму (§ 5):

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{i-1} = x.$$

Высшій предѣлъ ея значенія можно опредѣлить на основаніи слѣдующаго свойства ряда неравныхъ отношеній, члены коихъ суть положительныя числа: если сумму числителей раздѣлить на сумму знаменателей, то получится величина, меньшая наибольшаго изъ отношеній. Поэтому изъ ряда неравныхъ отношеній (§ 6)

$$\frac{t_0}{t_1} < \frac{t_1}{t_2} < \frac{t_2}{t_3} < \cdots < \frac{t_{i-1}}{t_i}$$

найдемъ:

$$\frac{t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{i-1}}{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_i} < \frac{t_{i-1}}{t_i}$$

что можно переписать такъ:

$$\frac{x}{x + t_i - t_0} < \frac{t_{i-1}}{t_i}.$$

Преобразовавъ это, получимъ:

$$(t_i - t_{i-1})\, x < (t_i - t_0)\, t_{i-1}.$$

Откуда и подавно

$$(t_i - t_{i-1})\, x < t_i\, t_{i-1}.$$

По условію $i < \varrho$, а это означаетъ (§ 6), что

$$t_{i-1} < t_i \quad \text{или} \quad t_i - t_{i-1} > 0.$$

Поэтому предыдущее неравенство раздѣляется на $t_i - t_{i-1}$ безъ перемѣны знака. Слѣдовательно,

$$x < \frac{t_i\, t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{или} \quad x < \frac{t_i}{\dfrac{t_i}{t_{i-1}} - 1}.$$

Мы имѣли (§ 6):

$$\frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{(m-i+1)\,p}{iq}.$$

Поэтому

$$\frac{t_i}{t_{i-1}} - 1 = \frac{(m-i+1)\,p}{iq} - 1 = \frac{(m+1)\,p - i}{iq}.$$

слѣдовательно,

$$x < \frac{iqt_i}{(m+1)p-1}.$$

Обратимся теперь къ равенству (§ 5)

$$t_i + t_{i+1} + \cdots + t_{\varrho-1} + t_\varrho + t_{\varrho+1} + \cdots + t_{k-1} + t_k = y,$$

гдѣ подъ k разумѣемъ число, большее ϱ. Если въ предыдущемъ равенствѣ отбросимъ всѣ члены, нумера которыхъ выше ϱ, то получимъ:

$$t_i + t_{i+1} + \cdots + t_{\varrho-1} + t_\varrho < y.$$

Всѣхъ членовъ въ лѣвой части этого неравенства $\varrho - i + 1$ и каждый изъ нихъ, начиная съ t_{i+1}, больше t_i. Поэтому внеся, это значенiе t_i въ формулу для x, получимъ окончательно

$$x < \frac{iq}{(m+1)p-i} \cdot \frac{y}{\varrho - i + 1}.$$

§ 8. Вычисленiе высшаго предѣла для z.

Пусть опять ϱ будетъ нумеръ наиболѣе вѣроятнаго событiя при m тождественныхъ опытахъ и пусть $k > \varrho$. Для вычисленiя высшаго предѣла ряда (§ 5)

$$t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots + t_{m-1} + t_m = z$$

воспользуемся свойствомъ ряда неравныхъ отношенiй (§ 6)

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} < \frac{t_{k+1}}{t_{k+2}} < \frac{t_{k+2}}{t_{k+3}} < \cdots < \frac{t_{m-1}}{t_m},$$

которое заключается въ слѣдующемъ: если сумму числителей раздѣлить на сумму знаменателей, то получится величина большая наименьшаго изъ отношенiй. Слѣдовательно,

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} < \frac{t_k + t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots + t_{m-1}}{t_{k+1} + t_{k+2} + t_{k+3} + \cdots + t_m}.$$

Это неравенство можно представить въ видѣ:

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} < \frac{z + t_k - t_m}{z}.$$

Отсюда получимъ:

$$(t_k - t_{k+1})\, z < (t_k - t_m)\, t_{k-1} < t_k\, t_{k+1}.$$

Замѣтивъ, что $k > \varrho$, найдемъ (§ 6):

$$t_k > t_{k+1} \quad \text{или} \quad t_k - t_{k+1} > 0.$$

Поэтому предыдущее неравенство раздѣлится на $t_k - t_{k+1}$ безъ перемѣны знака. Слѣдовательно,

$$z < \frac{t_k\, t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \quad \text{или} \quad z < \frac{t_k}{\dfrac{t_k}{t_{k+1}} - 1}.$$

Мы имѣли (§ 6)

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} = \frac{(k+1)\,q}{(m-k)\,p}.$$

Отсюда

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} - 1 = \frac{(k+1)\,q}{(m-k)\,p} - 1 = \frac{k+1-(m+1)\,p}{(m-k)\,p}.$$

Слѣдовательно,

$$z < \frac{(m-k)\,p t_k}{k+1-(m+1)\,p}.$$

Обратимся теперь къ равенству (§ 5)

$$t_i + t_{i+1} + \cdots + t_{\varrho-1} + t_\varrho + t_{\varrho+1} + \cdots + t_{k-1} + t_k = y,$$

гдѣ подъ i разумѣемъ число, меньшее ϱ. Если въ предыдущемъ равенствѣ отбросимъ всѣ члены, нумера которыхъ ниже ϱ, то получимъ:

$$t_\varrho + t_{\varrho+1} + t_{\varrho+2} + \cdots + t_{k-1} + t_k < y.$$

Всѣхъ членовъ въ лѣвой части этого неравенства $k - \varrho + 1$ и каждый изъ нихъ, кончая t_{k-1}, больше t_k. Поэтому

$$(k-\varrho+1)\,t_k < y \quad \text{или} \quad t_k < \frac{y}{k-\varrho+1}.$$

Внеся это значенiе t_k въ формулу для z, получимъ окончательно:

$$z < \frac{(m-k)\,p}{k+1-(m+1)\,p} \cdot \frac{y}{k-\varrho+1}.$$

§ 9. Вычисленiе низшаго предѣла для y.

Мы имѣли формулу (§ 5):

$$x + y + z = 1.$$

Подставивъ сюда на мѣсто x и z ихъ высшiе предѣлы (§§ 7 и 8) найдемъ:

$$\frac{iq}{(m+1)\,p - i} \cdot \frac{y}{\varrho - i + 1} + y + \frac{(m-k)\,p}{k+1-(m+1)\,p} \cdot \frac{y}{k-\varrho+1} > 1.$$

Отсюда

$$y > \frac{1}{1 + \dfrac{iq}{(m+1)\,p - i} \cdot \dfrac{1}{\varrho - i + 1} + \dfrac{(m-k)\,p}{k+1-(m+1)\,p} \cdot \dfrac{1}{k-\varrho+1}}.$$

Этой формулой опредѣляется низшiй предѣлъ вѣроятности случиться событiю E при m опытахъ не менѣе i разъ и не болѣе k разъ.

§ 10. Вычисленіе нумера наиболѣе вѣроятнаго событія.

Наиболѣе вѣроятное событіе при m опытахъ есть повтореніе ϱ разъ события E, при чемъ ϱ опредѣляется условіемъ (§ 6)

$$\frac{t_{\varrho-1}}{t_\varrho} < 1 < \frac{t_\varrho}{t_{\varrho+1}}.$$

Это условіе можно представить въ видѣ неравенства:

$$\frac{\varrho q}{(m-\varrho+1)p} < 1 < \frac{(\varrho+1)q}{(m-\varrho)p},$$

изъ котораго находимъ:

$$\varrho q < (m-\varrho+1)p, \quad \varrho(p+q) < (m+1)p$$

и

$$(m-\varrho)p < (\varrho+1)q, \quad mp-q < \varrho(p+q).$$

Принявъ во вниманіе, что $p+q=1$, получимъ:

$$-1+(m+1)p < \varrho < (m+1)p.$$

Отсюда видно, что ϱ заключается между числами, разность которыхъ единица. Значитъ, если $(m+1)p$ есть дробное число, то въ промежуткѣ между числами

$$-1+(m+1)p \quad \text{и} \quad (m+1)p$$

найдется одно и только одно цѣлое число, которое и будетъ представлять собою нумеръ наибольшей изъ вѣроятностей

$$t_0, \ t_1, \ t_2, \ \ldots, \ t_{m-1}, \ t_m.$$

Если же $(m+1)p$ будетъ цѣлымъ числомъ, то для ϱ найдутся два значенія

$$\varrho = -1+(m+1)p \quad \text{и} \quad \varrho = (m+1)p.$$

Въ этомъ случаѣ предыдущій рядъ будетъ имѣть два равныхъ между собою наибольшихъ члена.

Изъ предыдущаго видно, что вообще

$$\varrho = mp + w,$$

гдѣ w есть положительная или отрицательная правильная дробь, заключенная между предѣлами:

$$-q \leqq w \leqq p.$$

§ 11. Другая форма низшаго предѣла y.

Пусть α и β будутъ сколь угодно малыя постоянныя положительныя числа. Пусть по прежнему ϱ будетъ нумеръ наиболѣе вѣроятнаго события при m опытахъ и

$$i < \varrho, \quad \text{а} \quad k > \varrho$$

Принявъ во вниманіе (§ 10), что

$$\varrho = mp + w, \quad -q \leqq w \leqq p$$

получимъ право положить:

$$i = m(p - \alpha), \quad k = m(p + \beta).$$

Займемся отысканіемъ высшаго предѣла выраженія:

$$\frac{iq}{(m+1)p - i} \cdot \frac{1}{\varrho - i + 1}.$$

Замѣнивъ здѣсь ϱ меньшимъ числомъ по формулѣ (§ 10), найдемъ:

$$\frac{iq}{(m+1)p - i} \cdot \frac{1}{\varrho - i + 1} < \frac{iq}{[(m+1)p - i]^2}.$$

Поставивъ въ правую часть на мѣсто i его значеніе $m(p - \alpha)$ получимъ:

$$\frac{iq}{(m+1)p - i} \cdot \frac{1}{\varrho - i + 1} < \frac{mq(p-\alpha)}{(m\alpha + p)^2} < \frac{pq}{m\alpha^2}.$$

Подобнымъ образомъ, замѣнивъ въ формулѣ

$$\frac{(m-k)p}{k + 1 - (m+1)p} \cdot \frac{1}{k - \varrho + 1}$$

нумеръ ϱ большимъ числомъ по формулѣ (§ 10)

$$\varrho < (m+1)p,$$

будемъ имѣть:

$$\frac{(m-k)p}{k + 1 - (m+1)p} \cdot \frac{1}{k - \varrho + 1} < \frac{(m-k)p}{[k + 1 - (m+1)p]^2}.$$

Поставивъ въ правую часть на мѣсто k его значеніе $m(p + \beta)$ найдемъ:

$$\frac{(m-k)p}{k + 1 - (m+1)p} \cdot \frac{1}{k - \varrho + 1} < \frac{mp(1 - p - \beta)}{(m\beta + 1 - p)^2} < \frac{pq}{m\beta^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{iq}{(m+1)p - i} \cdot \frac{1}{\varrho - i + 1} + \frac{(m-k)p}{k + 1 - (m+1)p} \cdot \frac{1}{k - \varrho + 1} < \frac{pq}{m\alpha^2} + \frac{pq}{m\beta^2}.$$

Посредствомъ этого неравенства можно дать другую форму низшему предѣлу y. Съ этою цѣлью въ формулу для y (§ 9) поставимъ вмѣсто лѣвой части предыдущаго неравенства правую его часть. Получимъ:

$$y > \frac{1}{1 + \frac{pq}{m\alpha^2} + \frac{pq}{m\beta^2}}.$$

Это есть низшій предѣлъ y. Изъ равенства (§ 5)

$$x + y + z = 1$$

видно, что высшій предѣлъ y есть 1. Слѣдовательно, окончательно

$$1 > y > \frac{1}{1 + \frac{pq}{m\alpha^2} + \frac{pq}{m\beta^2}}.$$

§ 12. Теорема Якова Бернулли.

Вѣроятность случиться событію E при одномъ опытѣ равна p. Вѣроятность случится событію E при m опытахъ не менѣе i разъ и не болѣе k разъ равна y. Слѣдовательно, y есть вѣроятность случится событію E при m опытахъ такое число l разъ, которое опредѣляется неравенствомъ:

$$i \leqq l \leqq k.$$

Поставивъ сюда на мѣсто i и k ихъ значенія (§ 11), получимъ:

$$m(p - \alpha) \leqq l \leqq m(p + \beta)$$

что можно представить и въ такомъ видѣ:

$$-\alpha \leqq \frac{l}{m} - p \leqq \beta.$$

Теперь можно сказать, что y есть вѣроятность справедливости этого неравенства, т. е. вѣроятность того, что число l появленій событія E при m опытахъ опредѣляется предыдущимъ неравенствомъ. Но мы видѣли (§ 11), что

$$1 > y > \frac{1}{1 + \frac{pq}{m\alpha^2} + \frac{pq}{m\beta^2}}.$$

Отсюда заключаемъ, что какъ бы малы ни были постоянныя величины α и β число опытовъ m можно сдѣлать столь большимъ, что величина

$$\frac{pq}{m\alpha^2} + \frac{pq}{m\beta^2}$$

сдѣлается сколь угодно близкою къ нулю, а потому вѣроятность сдѣлается сколь угодно близкою къ единицѣ, т. е. къ достовѣрности (§ 1). Въ то же время мы видимъ, что разность между отношеніемъ числа появленій событія E при m опытахъ къ числу всѣхъ опытовъ и вѣроятностью p событія E заключается между $-\alpha$ и β и, слѣдовательно, вмѣстѣ съ α и β можетъ быть сдѣлана сколь угодно близкою къ нулю.

Отсюда и вытекаетъ теорема Якова Бернулли: **вѣроятность, что отношеніе числа повтореній событія къ числу опытовъ отличается отъ вѣроятности этого событія на величину, сколь угодно малую, при достаточно большомъ числѣ опытовъ дѣлается сколь угодно близкой къ достовѣрности.**

§ 13. Ариѳметическое значеніе теоремы Якова Бернулли.

Изъ равенства (§ 5)

$$(p+q)^m = t_0 + t_1 + \cdots + t_{\varrho-1} + t_\varrho + t_{\varrho+1} + \cdots + t_{m-1} + t_m = 1$$

видно, что единица разбивается на сумму $m+1$. слагаемыхъ. Ариѳметическое значенiе теоремы Якова Бернулли заключается въ томъ, что сумма однихъ тѣхъ слагаемыхъ, которые группируются около наибольшаго, при неограниченно возрастающемъ m почти равняется единицѣ, тогда какъ сумма всѣхъ прочихъ слагаемыхъ, занимающихъ крайнiя мѣста въ разложенiи, почти равняется нулю.

Разсмотримъ примѣръ. Пусть

$$p = 0{,}25, \quad q = 0{,}75, \quad m = 1\,000\,000.$$

Опредѣливъ по этимъ числамъ нумеръ ϱ (§ 10), найдемъ:

$$\varrho = 250\,001.$$

Положимъ теперь

$$i = 200\,000 \quad \text{и} \quad k = 300\,000$$

и вычислимъ низшiй предѣлъ суммы

$$y = t_{200\,000} + \cdots + t_{250\,001} + \cdots + t_{300\,000}.$$

По формулѣ (§ 9) найдемъ:

$$y > 0{,}9998.$$

Отсюда видно, что сумма 100 001 слагаемыхъ, группирующихся около наибольшаго, превосходитъ 0,9998 и, слѣдовательно, сумма всѣхъ прочихъ 900 000 слагаемыхъ меньше 0,0002.

§ 14. Практическое значенiе теоремы Якова Бернулли.

Вообразимъ правильный двѣнадцатигранникъ съ 5 бѣлыми и 7 черными гранями. Пусть опытъ состоитъ въ бросанiи многогранника на плоскость, при чемъ при каждомъ бросанiи опредѣляется цвѣтъ грани, на которую упалъ многогранникъ. По производствѣ большого числа опытовъ раздѣлимъ число паденiй многогранника на бѣлую грань на число всѣхъ бросанiй. По теоремѣ Якова Бернулли наиболѣе вѣроятное значенiе полученннаго частнаго будетъ имѣть значенiе, близкое къ $^5/_{12}$ и тѣмъ болѣе близкое, чѣмъ больше произведено испытанiй.

Разсмотримъ другой примѣръ. Пусть имѣемъ урну, въ которой лежатъ 4 бѣлыхъ и 9 черныхъ шаровъ. Пусть участники опыта по очереди подходятъ къ урнѣ и каждый изъ нихъ, вынувъ одинъ шаръ и опредѣливъ его цвѣтъ, кладетъ его обратно. Если по окончанiи опыта раздѣлить число лицъ, вынувшихъ бѣлый шаръ, на число всѣхъ участниковъ опыта, то по теоремѣ Якова Бернулли окажется, что полученное частное будетъ незначительно отличаться отъ $^4/_{13}$ и тѣмъ незначительнѣе, чѣмъ больше было участниковъ опыта.

Выходъ шара опредѣленнаго цвѣта изъ урны, паденiе кости на одинъ изъ своихъ боковъ, это совершенно случайныя явленiя. Изъ теоремы Якова Бернулли оказывается, что и случайныя явленiя, несмотря на всю ихъ кажущуюся произвольность, подчиняются особому закону, въ силу котораго должна быть соблюдена нѣкоторая пропорцiональность при повторенiи этихъ явленiй и явленiй, имъ противоположныхъ.

Ультра-фіолетовые лучи и біологическіе процессы.

Проф. Д. Бертло.

Сообщеніе, сдѣланное на торжественномъ засѣданіе Общества Сравнительной Патологіи 12-го декабря 1911 года.

Я, можетъ быть, не рѣшился бы въ качествѣ химика и физика говорить на этомъ торжественномъ собраніи, гдѣ спеціалисты разбирали тончайшіе вопросы медицины и патологіи; но изученіе исторіи наукъ давно убѣдило меня въ томъ, что однимъ изъ недостатковъ нашего времени является та спеціализація, которая такъ рѣзко отдѣлила другъ отъ друга отдѣльныя отрасли науки.

Конечно, соображенія характера какъ педагогическаго, такъ и практическаго, заставляютъ внести подраздѣленія въ науку; но примѣры прошлаго показываютъ, какъ опасно терять изъ виду искусственность этихъ подраздѣленій и пренебрегать тѣми отдаленными и глубокими — хотя не всегда объяснимыми при современномъ состояніи нашихъ знаній — аналогіями между матеріей и одушевленными тѣлами.

Можно ли забыть, что нѣкоторыя важнѣйшія открытія были неожиданнымъ плодомъ работъ въ области неорганическаго міра біологовъ, руководимыхъ часто только неяснымъ сознаніемъ соотношеній, существующихъ между матеріей организованной и неорганизованной.

Всѣ знаютъ, что открытіе электрическаго тока было слѣдствіемъ долгихъ споровъ о животномъ электричествѣ: физіологическіе опыты Гальвани и Вольта привели къ изобрѣтенію элементовъ, такъ что лягушка Гальвани оказывается предкомъ тѣхъ огромныхъ динамо-машинъ и мощныхъ альтернаторовъ, которые составляютъ гордость современныхъ центральныхъ станцій.

Самъ Вольта, въ своемъ изобрѣтеніи хотѣлъ подражать живой природѣ: въ своемъ знаменитомъ письмѣ отъ марта 1880 г., гдѣ впервые описывается его элементъ, онъ указываетъ, что подражалъ электрическимъ рыбамъ: „Приборъ, который я построилъ, по существу и даже по формѣ подобенъ естественному электрическому органу гимнота и дрожащей піявки, и я хотѣлъ бы назвать его искусственнымъ электрическимъ органомъ.

И въ наше время случилось нѣчто подобное. Наиболѣе существенная часть въ безпроволочной телеграфіи — когереръ, этотъ электрическій глазъ, указывающій тѣ электрическія волны, къ которымъ нашъ глазъ нечувствителенъ, былъ изобрѣтенъ медикомъ-физикомъ, докторомъ Бранли; и онъ указывалъ на сходство между распространеніемъ нервной волны и электрической волны, а также — на сходство между прерывчатыми проводниками, какъ трубка съ опилками въ когерерѣ, и невронами и окончаніями нервныхъ волоконъ, строеніе которыхъ было разъяснено работами Рамона-и-Кахаля (Ramon-y-Caal).

Это то убѣжденіе въ тѣсной связи механизмовъ физическихъ съ механизмами біологическими и побуждаетъ меня говорить сегодня о вопросѣ огромной практической и философской важности: объ общихъ свойствахъ ультра-фіолетовыхъ лучей и ихъ связи съ біологическими процессами.

Ультра-фіолетовые лучи, невидимые для глазъ, извѣстны уже давно: они были открыты въ 1802 г. химиками, благодаря ихъ свойству вызывать почерненіе солей серебра.

Итакъ, ультра-фіолетовые лучи не такъ юны, какъ это обычно думаютъ; но имъ пришлось въ теченіе ста лѣтъ оставаться въ физической лабораторіи, пока ихъ не извлекъ оттуда на свѣтъ Божій дерматологъ Финзенъ. Съ тѣхъ поръ ихъ примѣненіе распространилось и нынѣ они извѣстны даже читателямъ копеечныхъ листковъ.

Нельзя однако, сказать, чтобы эта неожиданная популярность была высокой пробы. Вы знаете, какъ многочисленны недавно открытые лучи — лучи α, β, γ, лучи каналовые, катодные, x-лучи, лучи урана, радія, торія, лучи первичные и вторичные, жесткіе и мягкіе, лучи Рёнтгена, лучи Беккереля и т. д. и т. д. — среди всѣхъ этихъ лучей, которые производятъ ожоги, язвы и воспаленія, ультра-фіолетовые особо выдѣляются: имъ принадлежитъ рекордъ. И что особенно удивительно въ наше время, когда одинъ рекордъ тотчасъ же побивается другими, рекордъ ультра-фіолетовыхъ лучей, повидимому, еще не такъ скоро будетъ побитъ: лучи ультра-фіолетовые наиболѣе опасны изъ всѣхъ.

Они обладаютъ удивительной способностью убивать почти мгновенно мельчайшія существа, микробы; для этого достаточно нѣсколько секундъ, будь то бацилла столбняка или же холерный вибріонъ. На этомъ то свойствѣ лучей и основано ихъ важнѣйшее примѣненіе, — а именно стерилизація.

Что касается болѣе крупныхъ существъ, какъ напримѣръ, человѣка, то дѣйствіе ультра-фіолетовыхъ лучей для него, если не столь молніеносно, то не менѣе пагубно. Достаточно въ теченіе нѣсколькихъ секундъ, смотрѣть на близкомъ разстояніи на эти лучи, чтобы получить весьма болѣзненное воспаленіе глазъ, не говоря уже о неопасномъ воспаленіи кожи. Я не знаю ни одного человѣка, работающаго съ ультра-фіолетовыми лучами, который бы хоть разъ не оказался ихъ жертвой. Я лично страдалъ три или четыре раза.

Если ощущеніе ожога кожи чувствуется немедленно, то боль въ глазахъ, при томъ очень сильная, начинается только черезъ двѣнадцать, приблизительно, часовъ. Съ теченіемъ времени она уменьшается и черезъ день или два исчезаетъ.

Если глаза были долго подвержены дѣйствію на близкомъ разстояніи лучей, то имъ угрожаетъ слѣпота.

Одинъ изъ первыхъ изслѣдователей въ области невидимаго свѣта, д-ръ Бильонъ-Дагерръ, племянникъ изобрѣтателя фотографіи, мнѣ разсказалъ случай, происшедшій съ однимъ изъ его препараторовъ, работавшимъ около ртутной лампы. Чтобы защитить глаза, онъ одѣлъ очки; этого достаточно, въ виду того, что ультра-фіолетовые лучи черезъ стекло не проходятъ. Но такъ какъ, къ своему несчатью, онъ не былъ близорукимъ, и поэтому къ очкамъ не привыкъ, то они ему мѣшали; наклонившись къ лампѣ, онъ, чтобы лучше видѣть, невольно приподнялъ очки. Вдругъ докторъ услышалъ глухой крикъ. „Что съ вами?" спросилъ онъ. „Я чувствую ужасную боль" отвѣтилъ препараторъ. Онъ лишился глаза. Это была первая жертва ультра-фіолетовыхъ лучей. Будемъ надѣяться, что ихъ число не увеличится, какъ это случилось съ лучами Рёнтгена.

Недостатокъ времени мнѣ не позволяетъ говорить о свойствѣ ультра-фіолетовыхъ лучей убивать бактеріи, о ихъ примѣненіи къ стерилизаціи жидкостей, напримѣръ воды, о ихъ большой роли при леченіи накожныхъ болѣзней, напримѣръ, волчанки; я хочу только разсмотрѣть ихъ съ точки зрѣнія философской и указать какой свѣтъ они бросаютъ на нѣкоторые весьма важные и спорные вопросы, относящіеся къ равновѣсію трехъ царствъ природы. Одно изъ замѣчательныхъ свойствъ ультра-фіолетовыхъ лучей заключается въ томъ, что благодаря имъ возродились въ новой формѣ старыя ученія, которыя видѣли въ солнцѣ источникъ жизни и возникновеніе которыхъ относится еще къ временамъ Зороастра.

Къ концу XVIII столѣтія химикъ Пристлей произвелъ двойной опытъ, сильно поразившій его современниковъ: мышь, помѣщенная подъ стеклянный колпакъ, задыхалась и умирала. То же самое угрожаетъ всѣмъ живымъ существамъ, находящимся въ замкнутомъ помѣщеніи, напримѣръ, экипажу подводнаго судна.

Затѣмъ Пристлей помѣстилъ рядомъ съ мышью зеленое растеніе. Въ темнотѣ оба умирали, но при солнечномъ свѣтѣ оба оставались живыми.

Изъ этого онъ заключилъ, что животные портятъ воздухъ, а растенія, находящіяся подъ вліяніемъ солнечнаго свѣта, очищаютъ воздухъ.

Объясненіе этого опыта было позднѣе дано Лавуазье. Этотъ знаменитый химикъ установилъ, что процессъ дыханія совершенно подобенъ сгоранію куска угля въ печи. Дыханіе есть не что иное, какъ медленное сгораніе: углеродъ нашихъ тканей соединяясь съ кислородомъ воздуха, образуетъ углекислый газъ. Этимъ объясняется опытъ Пристлея.

Мышь дышетъ и тѣмъ самымъ обращаетъ кислородъ, газъ жизни, въ углекислоту, газъ удушія и смерти. Зеленое же растеніе на солнцѣ дѣйствуетъ какъ разъ наоборотъ: оно разлагаетъ углекислоту, усваиваетъ углеродъ, а живительный газъ, кислородъ, возвращаетъ въ очищенную такимъ образомъ атмосферу.

Углеродъ есть существенная составная часть живыхъ существъ. Онъ образуетъ, такъ сказать, ихъ скелетъ и костякъ; можно сказать, что органическая химія есть химія углерода и его производныхъ. Углеродъ же существуетъ въ трехъ видахъ: минеральный углеродъ, растительный и животный.

Животный углеродъ непрерывно стремится вслѣдствіе дыханія и сгоранія перейти въ состояніи минеральнаго углерода подъ видомъ углекислоты, газа, выдѣляемаго живыми существами и непригоднаго для поддержанія жизни. Поэтому, еслибы на землѣ существовали только животныя, то количество углекислоты все время возрастало бы, равновѣсіе между міромъ органическимъ и неорганическимъ было бы нарушено и жизнь на поверхности земли стала бы невозможной.

На самомъ дѣлѣ, однако, дѣло обстоитъ не такъ благодаря растеніямъ, которыя подъ вліяніемъ свѣта, переводятъ огромные запасы минеральнаго углерода въ состояніе растительнаго углерода. Затѣмъ животныя поѣдаютъ растенія и, вслѣдствіе пищеваренія, углеродъ снова переходитъ въ минеральное состояніе; круговоротъ, такимъ образомъ, оказывается завершеннымъ.

Итакъ, существуетъ какъ бы лѣстница о трехъ ступеняхъ, или, если угодно, домъ съ нѣсколькими этажами. Внизу находится минеральный углеродъ, во второмъ этажѣ — растительный, въ третьемъ — животный. Можно перескочить изъ третьяго этажа въ первый, минуя второй; но обратный процессъ невозможенъ.

Чтобы подняться наверхъ необходимо остановиться на второмъ этажѣ. Минеральный углеродъ, который съ точки зрѣнія энергетической является формой низшей и репрессивной, можетъ вновь стать животнымъ, только пройдя стадію растительнаго.

Эта ассимилирующая способность растеній позволяетъ имъ питаться, такъ сказать, воздухомъ, тогда какъ животныя не въ состояніи этого дѣлать.

Относительно растенія можно сказать не только въ поэтическомъ но и въ дѣйствительномъ смыслѣ, что они „завтракаютъ солнцемъ“.

Но такими свойствами обладаютъ только зеленыя растенія, снабженныя хлорофилломъ. Грибы, лишенныя зеленаго красящаго вещества, не способны разлагать углекислоту воздуха и усваивать его углеродъ. Они должны питаться остатками прежде жившихъ растеній: увядшими листьями и разлагающимися растеніями. Грибы, какъ и люди, питаются трупами: извиняюсь передъ поэтами, которые обычно сравниваютъ розъ и женщинъ. Наука, увы, безпощадна.

Благодаря хлорофиллу, растенія могутъ использовать свѣтовую энергію, чтобы поднять углеродъ къ высшему химическому состоянію; они накопляютъ такимъ образомъ, нѣкоторый запасъ энергіи, которымъ могутъ въ каждый моментъ воспользоваться животныя. И этотъ запасъ полезенъ не только для животныхъ, но и для промышленности. Каменный уголь, источникъ работы нашихъ паровыхъ машинъ, есть не что иное, какъ солнечная энергія, собранная растеніями въ каменноугольный періодъ.

Зеленыя растенія оказываются такимъ образомъ, орудіями строительства и синтеза, животныя — орудіями потребленія и низведенія; они живутъ на счетъ запасовъ, накопленныхъ другими существами.

Вотъ какова роль хлорофилла въ экономіи міра; благодаря использованію благодѣтельной энергіи солнца возможна жизнь на землѣ.

Несмотря, однако, на многочисленные опыты, въ нашихъ лабораторіяхъ не удалось искусственно создать хлорофиллъ изъ мертвой матеріи.

Конечно, благодаря замѣчательнымъ синтезамъ, произведеннымъ во второй трети прошлаго столѣтія Марселеномъ Бертло, извѣстно что органическія вещества какъ растительнаго, такъ и животнаго происхожденія отнюдь не являются таинственными продуктами жизненной силы, но могутъ естественнымъ путемъ быть приготовлены въ лабораторіяхъ посредствомъ теплоты и электричества. Это былъ огромный шагъ впередъ.

Но эти синтезы были произведены при условіяхъ по большей части несовмѣстимыхъ съ жизнью: при высокихъ температурахъ, или же съ помощью энергично дѣйствующихъ веществъ, напримѣръ, удушливаго газа хлора, или ѣдкой щелочи, какъ кали, жгучихъ кислотъ, какъ сѣрной, т. е. съ такими веществами, которыя разрушаютъ животныя или растительныя ткани.

Лабораторія природы проще, въ ней нѣтъ ни печей, ни ретортъ, ни электрическихъ элементовъ, ни мощныхъ реактивовъ. Растеніе сосоздаетъ удивительное зданіе своихъ тканей на воздухѣ, на солнечномъ свѣту.

Только въ прошломъ году, въ моей лабораторіи растительной физики въ Медонѣ, мнѣ удалось воспроизвести основныя реакціи хлорофильнаго синтеза, при томъ безъ хлорофилла и живой матеріи, въ условіяхъ, чрезвычайно близко подходящихъ къ естественнымъ условіямъ, т. е. при обыкновенной температурѣ, безъ постороннихъ реактивовъ, однимъ только дѣйствіемъ обыкновенныхъ и наиболѣе распространенныхъ газовъ, содержащихся въ атмосферѣ: водяного пара, углекислоты, амміака.

Эти соединенія происходили не подъ вліяніемъ формъ энергіи, обычно употребляемыхъ химиками: теплоты и электричества. Необходимо было воспользоваться той же энергіей, которой пользуется растеніе, т. е. свѣтовой. Вся разница въ томъ, что химикъ относительно использованія этой энергіи находится въ условіяхъ, менѣе благопріятныхъ, чѣмъ растеніе. Въ самомъ дѣлѣ растенія обладаютъ ферментами и клѣточными веществами, которые дѣйствуютъ, какъ катализаторы, понижающія потенціалъ, необходимый для реакцій, что позволяетъ растеніямъ исполнять свою синтетическую роль съ помощью видимыхъ лучей, а именно желтыхъ и зеленыхъ. До этого мы еще не дошли.

Можетъ быть, со временемъ намъ и это удастся. По крайней мѣрѣ нѣкоторыя мои попытки использовать соли урана, въ качествѣ катализаторовъ, позволяютъ на это надѣяться.

Но пока что мнѣ удалось преодолѣть инертность неорганическихъ газовъ съ помощью наиболѣе дѣятельной формы энергіи ультра-фіолетовыхъ лучей, которые, хотя для глазъ и невидимы, но являются наиболѣе благородной, наиболѣе сконцентрированной формы волновой энергіи, соотвѣтствующей наиболѣе быстрымъ колебаніямъ эѳира, съ наиболѣе высокимъ термодинамическимъ потенціаломъ.

Ультра-фіолетовые лучи, которые теперь легко получаются посредствомъ кварцевыхъ ртутныхъ лампъ, и которые обладаютъ замѣчательными вышеизложенными свойствами уничтожать жизнь микробовъ, позволили воспроизвести синтезъ хлорофилла, который до сихъ поръ носилъ характеръ чисто біологическій: лучи смерти ведутъ насъ къ тайнамъ жизни.

Нѣкоторые назовутъ это парадоксомъ. Но этотъ парадоксъ болѣе мнимый, чѣмъ дѣйствительный. Врачи давно знаютъ, что для поддержанія жизни нѣтъ лучшихъ средствъ, чѣмъ яды. Мышьякъ, въ большомъ количествѣ опасный ядъ, въ маломъ — превосходное укрѣпляющее средство. Точно также, умѣреннымъ дѣйствіемъ ультра-фіолетовыхъ лучей объясняется укрѣпляющее дѣйствіе солнечныхъ волнъ, такъ охотно теперь примѣняемыхъ при такъ называемомъ „естественномъ леченіи“.

Пользуясь свѣтомъ, я могъ въ Медонѣ, работая вмѣстѣ съ г. Годшономъ, въ серіи методическихъ опытовъ, прослѣдить основные процессы растительной жизни.

Если подвергнуть дѣйствію ультра-фіолетовыхъ лучей смѣсь водяного пара и углекислоты, то сперва происходитъ двойное разложеніе: кислородъ выдѣляется изъ углекислоты, превращающейся въ окись углерода, водяной же паръ выдѣляетъ водородъ. Окись углерода является соединеніемъ неполнымъ и стремится къ насыщенію: она присоединяетъ къ себѣ, подъ вліяніемъ ультра-фіолетовыхъ лучей, водородъ и образуетъ формальдегидъ, простѣйшій изъ углеводовъ. Формальдегидъ конденсируется и полимеризуется въ сахаръ, а амиды въ клѣтчатку, т. е. въ основныя вещества растительныхъ тканей.

Такимъ образомъ и здѣсь, также, какъ въ опытѣ Пристлея, влажный испорченный дыханіемъ воздухъ очищается, благодаря дѣйствію ультра-фіолетовыхъ лучей. Углекислота разлагается, воздухъ вновь обогащается кислородомъ. Можно надѣяться, что этимъ способомъ удастся чисто физическимъ путемъ очищать воздухъ въ подводныхъ судахъ, когда его нельзя возобновить.

Но это не все. Кромѣ соединеній, состоящихъ изъ трехъ элементовъ углерода, кислорода и водорода, есть еще такіе, въ которыхъ входитъ и азотъ. Эти послѣднія образуютъ весьма важныя вещества альбуминаты, изъ которыхъ состоятъ простѣйшія организмы.

Возьмемъ смѣсь углекислоты и амміака. Въ этихъ двухъ простыхъ веществахъ содержатся всѣ четыре важнѣйшіе элементы: углеродъ, кислородъ, водородъ и азотъ. Подвергнемъ эту смѣсь дѣйствію ультра-фіолетовыхъ лучей. Углекислота разлагается, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. образуется окись углерода, это неполное соединеніе, которое по глубокому замѣчанію Марселена Бертло, является общимъ источникомъ растительнаго углерода, и соединяется съ амміакомъ простѣйшимъ способомъ, т. е. въ равныхъ объемахъ.

Это соединеніе даетъ муравьино-кислый амидъ, простѣйшее изъ соединеній четырехъ элементовъ, начало альбуминатовъ, основу протоплазмы и живой матеріи.

Такимъ образомъ, доказывается чисто физическая природа цѣлаго ряда явленій, которыя, какъ недавно еще казалось, неразрывно связаны съ жизнью.

На ряду съ формами энергіи, давно уже употребляемыхъ въ лабораторіяхъ: теплотою и электричествомъ, возникаетъ новый видъ энергіи, болѣе могущественный и тонкій — лучистая энергія.

Но можемъ ли мы удивляться могуществу? Вѣдь ею уже пользуется природа, чтобы передавать энергію черезъ міровое пространство, и она же удерживаетъ равновѣсіе трехъ царствъ природы.

Главной причиной активности ультрафіолетовыхъ лучей является, вѣроятно, ихъ весьма высокая температура. Чѣмъ выше температура какого нибудь источника, тѣмъ онъ болѣе богатъ ультра-фіолетовыми лучами. Если проектировать изображеніе ртутной лампы на солнечный дискъ, то по обращеніи линій можно замѣтить, что температура лампы выше температуры солнца.

Мы обладаемъ, слѣдовательно, источникомъ лучистой энергіи, мощность котораго больше солнечной, въ которой современная наука, согласно съ древними вѣрованіями и преданіями, видитъ очагъ и источникъ жизни. Слишкомъ ли смѣло надѣяться, что настанетъ день, когда мы, болѣе счастливые, чѣмъ Прометей, сумѣемъ вырвать у огня тайну жизни?

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Разложеніе спектральныхъ линій въ магнитномъ полѣ и его приложеніе въ астрофизикѣ. П. Зееманъ въ 1896 году показалъ, что спектральныя линіи свѣтящагося газа претерпѣваютъ измѣненія подъ дѣйствіемъ магнитнаго поля. По первоначальнымъ наблюденіямъ „явленіе Зеемана“ представлялось въ одномъ изъ двухъ слѣдующихъ видовъ: 1) въ направленіи, перпендикулярномъ къ направленію силовыхъ линій магнитнаго поля, спектральныя линіи, расщепляются каждая на три, образуя такъ называемые триплеты; средняя линія триплета оказывается поляризованной перпендикулярно къ направленію магнитнаго поля, а боковыя линіи поляризованы параллельно направленію магнитнаго поля, при чемъ средняя линія занимаетъ положеніе, соотвѣтствующее положенію неразложенной линіи (поперечное явленіе Зеемана); 2) въ направленіи, параллельномъ направленію силовыхъ линій магнитнаго поля, спектральныя линіи расщепляются каждая на двѣ, образуя такъ называемые дуплеты; обѣ линіи дуплета оказываются поляризованными по кругу, одна — по часовой стрѣлкѣ, другая — противъ часовой стрѣлки (продольное явленіе Зеемана). Поляризація свѣта можетъ считаться совершенной: Зееманъ показалъ, напримѣръ, что въ одномъ изъ изученныхъ имъ дуплетовъ 99% свѣта поляризованы по кругу.

Дальнѣйшія изслѣдованія Корню и другихъ показали, что при сильныхъ поляхъ явленіе оказывается болѣе сложнымъ. Такъ, натріевая линія *D*, даетъ не триплетъ, но квадруплетъ, такъ какъ средняя линія триплета сама раздваивается. Натріевая линія D_2 даетъ вмѣсто триплета секстетъ и вмѣсто дуплета квадруплетъ, вслѣдствіе удвоенія каждой изъ линій триплета и дуплета.

Темныя линіи поглощенія, получающіяся въ сплошномъ спектрѣ при прохожденіи бѣлаго свѣта черезъ поглощающее пламя, также даютъ такъ называемое „обратное явленіе Зеемана“ подъ дѣйствіемъ магнитнаго поля.

Теорія, данная Г. А. Лоренцомъ, предсказываетъ явленія Зеемана и она позволила, на основаніи наблюденій разложенія въ триплетъ, опредѣлить величину e/m — отношеніе заряда электрона къ его массѣ. Такія опредѣленія дали для e/m ту же величину, что и наблюденія надъ катодными лучами. Также и зарядъ электроновъ въ обоихъ случаяхъ оказался отрицательнымъ Отсюда можно было заключить, что колеблющіеся въ пламени электроны тождественны съ электронами катоднаго потока. Но теорія Лоренца оказалась приложимой лишь къ тѣмъ случаямъ, когда ширина спектральныхъ линій компонентовъ мала по сравненію съ ихъ взаимными разстояніями. При астрофизическихъ изслѣдованіяхъ это условіе не имѣетъ мѣста, но здѣсь вступаетъ въ силу болѣе общая теорія, разработанная Фойгтомъ и Лоренцемъ.

Чрезвычайно важными для астрофизики оказываются новѣйшія изысканія надъ явленіемъ Зеемана въ направленіяхъ, промежуточныхъ между двумя вышеуказанными, соотвѣтствующими продольному и поперечному явленіямъ. Уже теорія Лоренца позволяетъ предсказать, что въ направленіи, составляющемъ съ направленіемъ силовыхъ линій поля уголъ θ, долженъ наблюдаться триплетъ, средняя линія котораго поляризована прямолинейно, а крайнія — по эллипсамъ. По мѣрѣ приближенія θ къ нулю, интенсивность средней линіи падаетъ, а эллипсы приближаются къ кругамъ.

Около трехъ лѣтъ тому назадъ Гэль сдѣлалъ, по его собственному признанію, замѣчательное открытіе. Уже съ 1866 года, когда Локьеръ впервые наблюдалъ спектръ солнечныхъ пятенъ, было извѣстно, что многія темныя линіи солнечнаго спектра въ спектрѣ пятенъ оказываются расширенными. Юнгъ нашелъ, что частью эти расширенныя линіи оказываются двойными; этотъ фактъ объяснялся предположеніемъ, что на расширенныя темныя линіи налагаются свѣтлыя линіи испусканія раскаленныхъ газовъ, находящихся надъ солнечными пятнами. Въ 1892 году одновременно Гэль и Деландръ нашли способъ фотографировать солнце въ свѣтѣ отдѣльной спектральной линіи. Этимъ способомъ въ 1908 году Гэлю удалось получить прекрасныя монохроматическія изображенія солнца въ лучахъ красной водородной линіи $H\alpha$. На этихъ изображеніяхъ пятна оказались обладающими структурой, напоминающей вихревую. Гэль назвалъ эти образованія „солнечными вихрями“ и предположилъ, что въ нихъ движутся вмѣстѣ съ матеріей и электроны, что должно вызывать магнитное поле. Въ связи съ этимъ предположеніемъ онъ занялся изслѣдованіемъ спектровъ солнечныхъ пятенъ и нашелъ въ нихъ признаки обращеннаго явленія Зеемана, именно продольнаго явленія для пятенъ, находившихся посрединѣ солнечнаго диска. Отсюда Гэль заключилъ, что для пятенъ, находящихся у края диска должно наблюдаться поперечное явленіе. Кромѣ того, онъ ожидалъ измѣненія направленій круговой поляризаціи въ случаѣ измѣненія направленія вращенія въ вихрѣ. Оба предположенія Гэля блестяще подтвердились и 21 сентября 1908 г. онъ телеграфировалъ Зееману: vortices rotating opposite directions schow opposite polarities; spot lines near limb plane polarised (вихри, вращающіеся въ обратномъ направленіи, даютъ обратныя поляризаціи; линіи солнечныхъ пятенъ у края поляризованы прямолинейно).

Такимъ образомъ были открыты на солнцѣ продольное и поперечное явленія Зеемана. Сравненіе разложеній, наблюденныхъ на солнцѣ съ полученными въ лабораторіи, позволило опредѣлить величины силъ поля въ солнечныхъ пятнахъ Наибольшая величина, полученная Гэлемъ, равняется 4300 гауссамъ.

Наблюденія показали, что въ большинствѣ случаевъ, даже въ среднихъ областяхъ солнечнаго диска, магнитныя силовыя линіи направлены не по радіусу солнца, т. е. составляютъ съ линіей зрѣнія нѣкоторый уголъ, лежащій между 0° и 90°. Иначе говоря, обычно наблюдаются лишь триплеты, внѣшнія линіи которыхъ поляризованы по эллипсамъ, какъ этого требуетъ и теорія. Изслѣдованіе подобныхъ триплетовъ даетъ возможность построить карту магнитныхъ полей на солнцѣ.

Изслѣдованія этого рода непрерывно продолжаются и Зееманъ высказываетъ смѣлую надежду, что, можетъ быть, удастся открыть такимъ путемъ магнитныя поля въ спиральныхъ туманностяхъ, столь еще загадочныхъ по своей природѣ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 29 (6 сер.). Даны уголъ XOY и постоянная точка P. Черезъ точку P проводятъ перемѣнную прямую, встрѣчающую прямыя OX и OY соотвѣтственно въ точкахъ A и B; затѣмъ на OX берутъ точку A' и на OY точку B' такъ, чтобы выполнялись равенства:

$$OA' = mOA, \quad OB' = nOB,$$

гдѣ m и n данныя числа. Доказать, что прямая $A'B'$ проходитъ черезъ постоянную точку.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 30 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$35x^3 - 28x^2 + 15x - 12 = 0.$$

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 31 (6 сер.). Данъ секторъ MON съ угломъ $MON = 60^\circ$ при вершинѣ Построить правильный шестиугольникъ $ABCDEF$, вписанный въ данный секторъ, такъ, чтобы вершины A п B шестиугольника лежали на радіусѣ OM, вершины C и D — на дугѣ MN, а вершины E и F — на радіусѣ ON.

№ 32 (6 сер). Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы многочленъ

$$x^2 + y^2 - 1 + \lambda(x^2 + 2axy - y^2),$$

въ которомъ a есть данное число, разлагался на два многочлена первой степени относительно x и y.

(Заимств).

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 13) 1°. Найти соотношеніе, которому должны удовлетворять коэффиціенты многочлена $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ для того, чтобы онъ могъ быть представленъ въ видѣ:

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + \delta x^2,$$

гдѣ α, β, γ, δ суть надлежащія постоянныя.

2°. Предполагая, что это соотношеніе выполняется, найти корни уравненія $f(x) = 0$. Примѣнить полученныя формулы къ случаю, когда $a = 2$, $c = 8$ и изслѣдовать условія дѣйствительности корней соотвѣтственнаго уравненія въ зависимости отъ измѣненія коэффиціента b.

(Заимств.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 456 (5 сер.). *Доказать справедливость тожества*

$$\frac{bc}{p^2 + r_a^2} + \frac{ca}{p^2 + r_b^2} + \frac{ab}{p^2 + r_c^2} = 1,$$

гдѣ a, b, c, p, r_a, r_b, r_c *суть соотвѣтственно полупериметръ и радіусы внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.*

Называя черезъ s площадь треугольника, имѣемъ:

$$p^2 + r_a^2 = p^2 + \frac{s^2}{(p-a)^2} = p^2 + \frac{p(p-a)p-b(p-c)}{(p-a)^2} = p^2 + \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} =$$

$$= p \cdot \frac{p(p-a) + (p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{p(p^2 - pa + p^2 - pb - pc + bc)}{p-a} =$$

$$= \frac{p[2p^2 - p(a+b+c) + bc]}{p-a} = \frac{pbc}{p-a},$$

откуда

$$\frac{bc}{p^2 + r_a^2} = \frac{p-a}{p}. \qquad (1)$$

Подобнымъ же образомъ выводимъ равенства:

$$\frac{ca}{p^2 + r_b^2} = \frac{p-b}{p}, \qquad (2)$$

$$\frac{ab}{p^2 + r_c^2} = \frac{p-c}{p}. \qquad (3)$$

Сложивъ равенства (1), (2), (3), получимъ:

$$\frac{bc}{p^2+r_a^2}+\frac{ca}{p^2+r_b^2}+\frac{ab}{p^2+r_c^2}=\frac{3p-(a+b+c)}{p}=\frac{3p-2p}{p}=1.$$

Л. Марголинъ (Петербургъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Ющенко* (Чита); *Ш. Дволайцкій* (Митава); *С. Розенблатъ* (Армавиръ).

№ 457 (5 сер.) *Доказать, что всякій многочленъ четвертой степени* f(x) *при произвольныхъ значеніяхъ* a *и* b *удовлетворяетъ равенству*

$$f(a)-f(b)=\frac{a-b}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right],$$

въ которомъ f′(x) *обозначаетъ производную функціи* f(x).

Предложенное для доказательства тожество можно установить путемъ непосредственной провѣрки, полагая

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 суть данныя числа, и производя всѣ вычисленія отдѣльно въ лѣвой и въ правой части. Но такой путь слишкомъ долгъ, и его можно упростить. Введемъ обозначенія

$$\varphi_4(x)=x^4,\quad \varphi_3(x)=x^3,\quad \varphi_2(x)=x^2,\quad \varphi_1(x)=x.\quad \varphi_0(x)=1. \qquad (1)$$

Тогда оказывается, что многочленъ $f(x)$ можно записать въ видѣ:

$$f(x)=a_0\varphi_4(x)+a_1\varphi_3(x)+a_2\varphi_2(x)+a_1\varphi_3(x)+a_4\varphi_0(x), \qquad (2)$$

откуда вытекаетъ, что подлежащее доказательству тожество должно быть справедливо для всякаго многочлена четвертой степени, если только оно вѣрно для многочленовъ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, если доказаны тожества

$$\varphi_i(a)-\varphi_i(b)=\frac{a-b}{6}\left[\varphi'_i(a)+\varphi'_i(b)+4\varphi_i\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (3)$$

при $i=0$, 1, 2, 3, 4, то, умножая эти тожества соотвѣтственно на a_{4-i} ($i=0$, 1, 2, 3, 4), складывая результаты и принимая во вниманіе равенство (2) и выводимое изъ него путемъ дифференцированія равенство

$$f'(x)=a_0\varphi'_4(x)+a_1\varphi'_3(x)+a_2\varphi'_2(x)+a_3\varphi'_1(x)+a_4\varphi'_0(x),$$

мы приходимъ къ тожеству, предложенному для доказательства. Итакъ, достаточно провѣрить тожества (3). Такъ какъ [см. (1)]

$$\varphi'_0(x)=0,\ \varphi'_1(x)=1,\ \varphi'_2(x)=2x,\ \varphi'_3(x)=3x^2,\ \varphi'_4(x)=4x^3,$$

то тожества (3) имѣютъ видъ:

$$1-1=\frac{a-b}{6}(0+0+0),\quad a-b=\frac{a-b}{6}(1+1+4),$$

$$a^2-b^2=\frac{a-b}{6}\left(2a+2b+4\cdot 2\,\frac{a+b}{2}\right),$$

$$a^3-b^3=\frac{a-b}{6}\left[3a^2+3b^2+4\cdot 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right],$$

$$a^4-b^4=\frac{a-b}{6}\left[4a^3+4b^3+4\cdot 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right],$$

и они всѣ, дѣйствительно, вѣрны, въ чемъ убѣждаемся, выполняя всѣ дѣйствія въ правыхъ частяхъ. Напримѣръ, правая часть послѣдняго равенства даетъ намъ послѣ обычныхъ преобразованій

$$\frac{a-b}{6}[4a^3+4b^3+2(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)]=\frac{a-b}{6}\cdot 6(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4.$$

Простое доказательство разсматриваемаго предложенія даетъ также строка Тайлора для полиномовъ. Полагая $a=b+h$, имѣемъ:

$$f(a)=f(b)+hf'(b)+\frac{h^2}{2}f''(b)+\frac{h^3}{6}f'''(b)+\frac{h^4}{24}f^{IV}(b), \qquad (4)$$

$$f'(a)=f'(b)+hf''(b)+\frac{h^2}{2}f'''(b)+\frac{h^4}{6}f^{IV}(b), \qquad (5)$$

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{b+h+b}{2}\right)=f'\left(b+\frac{h}{2}\right)=f'(b)+\frac{h}{2}f''(b)+\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}f''(b)+$$

$$+\left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6}f^{IV}(b),$$

т. е.,

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(b)+\frac{h}{2}f''(b)+\frac{h^2}{8}f'''(b)+\frac{h^3}{48}f^{IV}(b), \qquad (8)$$

гдѣ $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ обозначаетъ вообще вторую, третью и четвертую производныя многочлена четвертой степени. Изъ равенства (4), (5), (6) имѣемъ:

$$f(a)-f(b)=hf'(b)+\frac{h^2}{2}f''(b)+\frac{h^3}{6}f'''(b)+\frac{h^4}{24}f^{IV}(b), \qquad (7)$$

$$f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=6f'(b)+3hf''(b)+h^2f'''(b)+\frac{h^3}{4}f^{IV}(b). \qquad (8)$$

Помножая равенство (8) на тожество $\frac{a-b}{6}=\frac{h}{6}$, получимъ [см. (7)]:

$$\frac{a-b}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]=hf'(b)+\frac{h^2}{2}f''(b)+\frac{h^3}{6}f'''(b)+$$

$$+\frac{h^4}{24}f^{IV}(b)=f(a)-f(b).$$

О. Вольбергъ (Череповецъ); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Ющенко* (Чита); *В. Рутковскій* (Одесса); *Ш. Дволайцкій* (Митава); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется