

№ 537.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

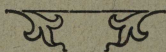
ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLV-го Семестра № 9-й.



ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1911.

ДВУХНЕДѢЛЬНЫЙ ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ

„**НОВОСТИ ТЕХНИКИ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ**“

Болѣе 400 страницъ текста въ годъ.

На Екатеринославской областной выставкѣ 1910 года журналъ награжденъ **Похвальнымъ листомъ** за **полезность** изданія.**Программа:** Сообщенія, распоряженія и узаконенія. Общества, собранія и сѣзды, Выставки, конкурсы и экспертизы. Теорія и практика въ техникѣ и промышленности. Открытія, изобрѣтенія и усовершенствованія. Критика и библиографія. Последнїе номера журналовъ. Хроника и мелкія замѣтки.**Подписная плата: ДВА РУБЛЯ** въ годъ (24 №№) съ доставкой и пересылкой. За границу 4 рубля. Наложнымъ платежемъ на 20 к. дороже.**Подписная плата можетъ быть высылаема почт. марками въ ЗАКАЗНОМЪ письмѣ. ПРОБНЫЙ НОМЕРЪ БЕЗПЛАТНО.****АДРЕСЪ РЕДАКЦИИ:** г. ЕКАТЕРИНОСЛАВЪ, Проспектъ, домъ Павловской. „Новости техники и Промышленности“ печатаются въ 1000 экземплярахъ, изъ которыхъ 500 экземпляровъ наждаго номера рассылаются бесплатно попеременно инженерамъ различныхъ специальностей, рудникамъ, заводамъ, конторамъ и Правительственнымъ учрежденіямъ**12000 адресовъ въ годъ** кромѣ постоянныхъ подписчиковъ.**ПЛАТА ЗА ОБЪЯВЛЕНІЯ:** страница среди объявленій 200 руб. въ годъ (24 раза), среди текста 400 рублей. Дробныя части страницы (половина и четверть) пропорціонально меньше. Спросъ и предложеніе труда 25 копѣекъ за одинъ разъ.**О всѣхъ книгахъ, присылаемыхъ въ редакцію, или дается отзывъ или трижды печатается въ отдѣлѣ „новыя книги“.**

Ред.-Изд. Инж.-Техн. Н. Ивановъ.

12 книгъ, до
1200 стран.,
12 приложен.,
до 500 иллюст.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1911 Г.

НА ДѢТСКІЙ

ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛЪ

4 руб.
въ годъ
съ пересыл.„**МАЯКЪ**“**3-й годъ изданія.**для дѣтей старшаго и средняго возраста
СЪ ОТДѢЛОМЪ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХЪ.**3-й годъ изданія.**

Подъ редакціей И. ГОРБУНОВА-ПОСАДОВА.

При участіи Л. Н. Толстого, Е. М. Бемъ, П. А. Буланже, Е. Е. Горбуновой, В. И. Лукьянской, И. Ф. Наживина, С. А. Порѣцкаго, С. Т. Семенова, Г. К. Соломина, А. К. Чертковой и другихъ постоянныхъ сотрудниковъ „Библиотеки Горбунова-Посадова для дѣтей и для юношества“.

Журналъ дастъ въ 1911 году 12 книгъ и 12 приложеній, содержащихъ въ себѣ разнообразный матеріалъ для дѣтскихъ занятій и развлеченій, способствующихъ умственному физическому развитію дѣтей. Въ текстѣ журнала и приложеніяхъ будетъ помѣщено много живо иллюстрацій.

Въ журналъ помѣщаются: 1) Разсказы, повѣсти и стихотворенія. 2) Географическіе очерки и путешествія. 3) Историческіе очерки и біографіи. 4) Мысли мудрыхъ людей. 5) Бесѣды по естествознанію и наблюденіямъ природы. 6) Объ изобрѣтеніяхъ и открытіяхъ. 7) Почтовый ящикъ (переписка читателей и редакціи). 8) Смѣсь (задачи, игры, шутки и т. д.).

Въ числѣ 12 приложеній будутъ даны руководства о томъ, какъ дѣтямъ самимъ дѣлать интересныя для нихъ приборы, машины, какъ дѣлать опыты и наблюденія, совѣты о рисованіи, вообще руководства къ разнымъ занятіямъ и играмъ въ комнатѣ и на воздухѣ и такъ далѣе.

Журналъ за 1909 г. допущенъ въ библиот. городскихъ училищъ.

Подписка съ пересылкой на годъ 4 р., за полгода 2 р. Въ Москвѣ безъ доставки 3 р. 50 к. Подписка приним. въ конторѣ „Маяка“: Москва, Дѣвичье поле, Трубечкой пер., 8. Въ другихъ городахъ въ конторѣ и книжн. магазин., принимающихъ подписку.

Издательница М. В. Горбунова.

Редакторъ И. И. Горбуновъ-Посадовъ.

Вѣстникъ Опытной Физики

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 537.



Содержаніе: Пространство и время съ точки зрѣнія физики. (Окончаніе).
Проф. Э. Кона. — О преподаваніи геометріи. *Проф. Ф. Клейна.* — Первый
 Всероссийскій Сѣздъ преподавателей математики. *Проф. Д. Синцова.* — Задачи
 №№ 420—425 (5 сер.). — Рѣшенія задачъ: №№ 293 и 303 (5 сер.). — Объявленія.

Пространство и время съ точки зрѣнія физики.

Проф. Э. Кона.

(Окончаніе*).

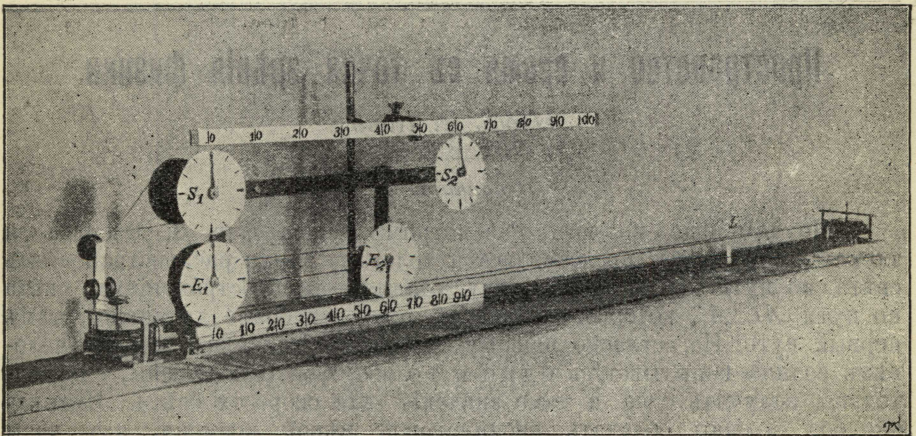
Но это еще не все. Разсмотримъ снова фиг. 3. Одинъ и тотъ же процессъ представляется человѣку земли распространеніемъ свѣта по пути ACA , а человѣку солнца — распространеніемъ свѣта по пути $AC'A$, который на фигурѣ является болѣе длиннымъ, чѣмъ первый путь. Но, согласно нашему требованію, человѣкъ земли и человѣкъ солнца испытываютъ одно и то же. Оба они должны, слѣдовательно, получить одно и тоже значеніе для скорости свѣта. Поэтому они оба должны обладать неодинаковой мѣрой времени, ихъ часы должны имѣть неодинаковый ходъ.

До сихъ поръ мы показали, и при томъ исключительно качественнымъ образомъ, къ какому роду заключеній насъ вынуждаетъ принципъ относительности. Мы не показали, что всѣ требованія, которые вытекаютъ изъ принципа относительности распространенія свѣта, могутъ быть также удовлетворены точнымъ образомъ. Но такъ оно есть въ дѣйствительности, и это возможно лишь однимъ образомъ. Прежде всего еще разъ обратимся къ постулату: „для каждой изъ двухъ системъ распространеніе свѣта въ пустомъ пространствѣ есть одинаковый процессъ; онъ совершается съ одинаковой скоростью и каждый разъ равномерно по всѣмъ направленіямъ. Ни одна изъ этихъ двухъ системъ не выдѣляется по сравненію съ другой“. Этотъ постулатъ допускаетъ очень простую математическую формулировку. Рѣшеніе вопроса выражается группой простыхъ соотношеній между координатами и временемъ

*) См. № 536 „Вѣстника“.

въ обѣихъ системахъ (см. приложеніе въ концѣ статьи). Эти уравненія выражаютъ то же самое, что модель, изображенная на нижеслѣдующей фигурѣ.

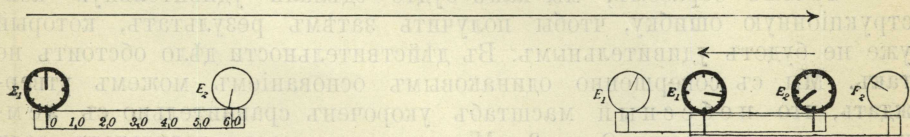
Безконечный шнуръ перекинуть черезъ два блока; мы будемъ приводить его въ движеніе, при чемъ онъ, увлекая съ собою насаженную марку (L), будетъ представлять намъ распространеніе свѣтового сигнала въ одномъ или въ другомъ направленіи. Комната и двое часовъ S_1 и S_2 , неподвижно установленные въ ней, принадлежатъ „находящейся въ покоѣ“ системѣ солнца. Каретка съ своими двумя часами E_1 и E_2 , перемѣщающаяся по рельсамъ, представить намъ „движущуюся“ систему земли. Всѣ движенія — свѣтового сигнала, каретки и стрѣлокъ на часахъ обоихъ родовъ — обусловливаются вращеніемъ одной и той же оси; ихъ скорости связаны вполне опредѣленными соотношеніями. Лишь эти соотношенія имѣютъ для насъ значеніе: то обстоятельство, что огромную скорость свѣта мы замѣнили ничтожной скоростью, равной нѣсколькимъ сантиметрамъ въ секунду, не су-



щественно; существенно, однако, то, что здѣсь мы сдѣлали скорость земли равной $\frac{3}{4}$ скорости свѣта, тогда какъ въ дѣйствительности отношеніе составляетъ лишь $\frac{1}{10\,000}$. Исключительно для болѣе удобнаго объясненія мы назовемъ „12 часами“ время оборота часовъ и, соотвѣтственно этому, будемъ говорить объ 1 часѣ, 2 часахъ. Что касается длины, то мы будемъ придерживаться обычной терминологіи. Мы обнаружимъ тогда, что какая-нибудь марка на нашей кареткѣ пробѣгаетъ разстояніе между двумя небесными часами, равное 60 см. въ $10\frac{1}{2}$ часовъ. Такова по нашей модели и на нашемъ языкѣ скорость земли относительно солнца. По отношенію къ этой модели мы находимся въ мірѣ „солнечнаго человѣка“. Мы можемъ поэтому обойтись безъ однихъ изъ двоихъ часовъ солнечной системы, такъ какъ мы непосредственно при помощи дѣйствительныхъ свѣтовыхъ сигналовъ распознаемъ, что представляютъ собою въ нашемъ мірѣ тождественныя времена въ различныхъ мѣстахъ. Но чтобы получить то же самое, что испытываетъ человѣкъ солнца, и только это, мы должны от-

влечся отъ этой способности: вѣдь для него не существуетъ болѣе скорости сигнала, чѣмъ скорость марки и шнура. Что двое часовъ солнечной системы синхроничны, доказывается для насъ, слѣдовательно, не тѣмъ, что мы одновременно взглянемъ на стрѣлки обоихъ часовъ, но скорѣе тѣмъ, что свѣтовая марка пробѣгаетъ отъ первыхъ часовъ ко вторымъ, и, обратно, отъ вторыхъ часовъ къ первымъ за одинаковое время. Это и имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности: свѣтовая марка оставляетъ первые часы, когда они показываютъ 7 ч. 40 м., и если мы сейчасъ же заставимъ ее вернуться, то она достигнетъ первыхъ часовъ, когда они будутъ показывать 3 ч. 20 м. Она, слѣдовательно, пробѣжала путь въ 60 см. оба раза за одно и тоже время, равное $7\frac{2}{3}$ часамъ *).

Съ перваго взгляда насъ поражаетъ, что двое часовъ земной системы не показываютъ одинаковаго времени: вторые часы, передніе въ направленіи движенія, отстаютъ отъ первыхъ на $5\frac{3}{4}$ часовъ. Это обнаруживается при непосредственномъ взглядѣ; это оказалось бы такъ и въ дѣйствительности, если бы мы закрѣпили земную систему, привели бы въ движеніе свѣтовую марку и затѣмъ опредѣлили бы время пути, прямого и обратнаго такъ, какъ мы это дѣлали выше. Но синхронизмъ обоихъ часовъ понимается не такъ. Они должны быть синхроничны для земного наблюдателя, который движется относительно солнечной



Фиг. 5.

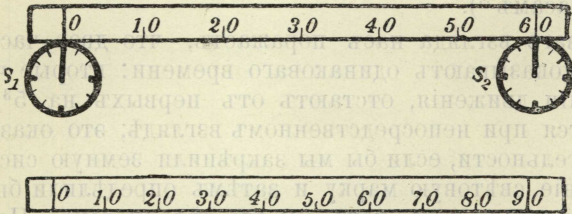
системы съ совершенно опредѣленной скоростью, равной $\frac{3}{4}$ скорости свѣта. Для него они дѣйствительно синхроничны. Доказательство состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 5 **). Свѣтовая марка оставляетъ первые часы, когда они показываютъ 12 ч.; она достигаетъ вторыхъ часовъ въ моментъ, когда послѣдніе показываютъ 7 ч. 40 м., и она на обратномъ пути встрѣчаетъ первые часы, когда они показываютъ 3 ч. 20 м. Такимъ образомъ, прямой и обратный пути опять длятся одинаковое время, равное по прежнему $7\frac{2}{3}$ часовъ. Далѣе, по масштабу земной системы разстояние между обоими часами опять равно 60 см., и (фиг. 6) такимъ образомъ, скорость свѣта въ земной системѣ снова такова же, какъ и въ солнечной: 60 см. въ $7\frac{2}{3}$ часовъ.

Но вѣренъ ли нашъ земной масштабъ? непосредственно на глазъ мы отвѣтимъ: нѣтъ, онъ укороченъ; то что онъ выдаетъ намъ за „60 см.“ покрываетъ лишь 40 см. рядомъ лежащаго солнечнаго масштаба. Это сужденіе подтвердится, если мы, отказавшись отъ нашихъ „сверхчело-

*) Числа слегка округлены.

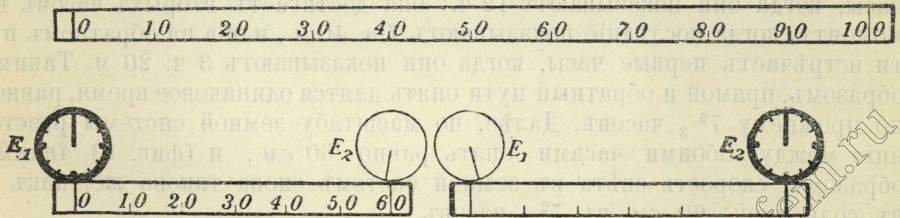
**) На фигурахъ отъ 5 до 9 начерчены жирными линиями лишь тѣ части модели, которые являются существенными для соответственнаго опыта; что-бы читателю было легче ориентироваться, остальные части намѣчены рядомъ тонкими линиями.

вѣческихъ“ способностей, будемъ пользоваться измѣрительными методами, которыми располагаетъ лишь человекъ солнца: онъ долженъ изъ двухъ мѣстъ нанести марки на проходящемъ мимо него земномъ масштабѣ, и при томъ одновременно, т. е. въ моменты, когда двое находящихся тамъ „солнечныхъ“ часовъ показываютъ одно и то же время (фиг. 6). Отрѣзокъ, который онъ такимъ образомъ отложить между мѣстами обоихъ неподвижныхъ часовъ, по земному масштабу равенъ „90 см.“, тогда какъ по солнечному масштабу разстояніе между обоими солнечными часами составляетъ лишь 60 см. Итакъ, по прежнему, земной масштаб укороченъ сравнительно съ небеснымъ въ отношеніи 2 къ 3.



Фиг. 6.

Такимъ образомъ, мы какъ будто сдѣлали удивительную конструкціонную ошибку, чтобы получить затѣмъ результатъ, который уже не будетъ удивительнымъ. Въ дѣйствительности дѣло обстоитъ не такъ. Мы съ совершенно одинаковымъ основаніемъ можемъ утверждать, что небесный масштаб укороченъ сравнительно съ земнымъ въ отношеніи 2 къ 3. Мы получимъ этотъ результатъ, если это измѣреніе будетъ выполнено земнымъ наблюдателемъ (фиг. 7). Этотъ наблюдатель долженъ изъ двухъ различныхъ мѣстъ, въ которыхъ онъ имѣетъ на нашей модели свою пару часовъ, нанести марки на проходящемъ мимо него небесномъ масштабѣ въ моменты, когда



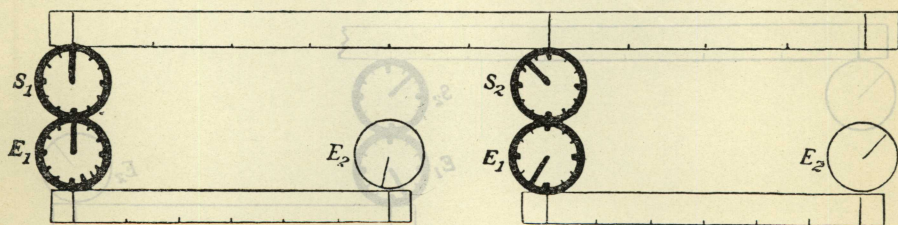
Фиг. 7.

эта пара часовъ показываетъ одно и то же время, скажемъ 12 ч. Первые часы проходятъ въ этотъ моментъ какъ разъ нулевую точку небеснаго масштаба; они достигнутъ дѣленія „90 см.“, когда вторые часы будутъ также показывать 12 ч. Но по земному масштабу разстояніе между первыми земными часами и вторыми равно лишь 60 см. Такъ это разстояніе оцѣнилъ, слѣдовательно, обитатель земли, тогда какъ, согласно небесному масштабу, оно составляетъ 90 см.

Итакъ, земные масштабы для солнечнаго человѣка и небесные масштабы для обитателя земли кажутся укороченными въ направленіи движенія въ отношеніи 2 къ 3, считая каждый разъ относительно тѣхъ значеній, которыя соотвѣтствуютъ масштабамъ въ ихъ собственномъ мірѣ.

Но спрашивается далѣе, имѣютъ ли наши часы вѣрный ходъ? Легко видѣть, что земные часы идутъ медленнѣе небесныхъ. Это же скажетъ и человѣкъ солнца, который живетъ въ одномъ мірѣ съ нами, но не обладаетъ нашимъ быстрымъ взглядомъ. Онъ наблюдаетъ показаніе земныхъ часовъ въ два различныхъ момента, т. е. онъ сравниваетъ его съ показаніемъ двухъ своихъ часовъ, когда они проходятъ мимо первыхъ. Онъ найдетъ, такимъ образомъ, (фиг. 8): стрѣлка земныхъ часовъ за время, когда эти часы проходятъ отъ первыхъ небесныхъ часовъ до вторыхъ, т. е. разстояніе 60 с.м., продвинулась на 7 часовъ; но показанія обоихъ небесныхъ часовъ въ моменты прохожденій различаются на $10\frac{1}{2}$ часовъ. Онъ дѣлаетъ поэтому такое заключеніе: событіе, которое совершается въ опредѣленномъ пунктѣ земного міра и продолжительность котораго тамъ считается равной 7 часамъ, „въ дѣйствительности“ продолжалось $10\frac{1}{2}$ часовъ.

Опять таки, какъ по оцѣнкѣ солнечнаго человѣка земные часы идутъ слишкомъ медленно, такъ солнечные часы по оцѣнкѣ земного



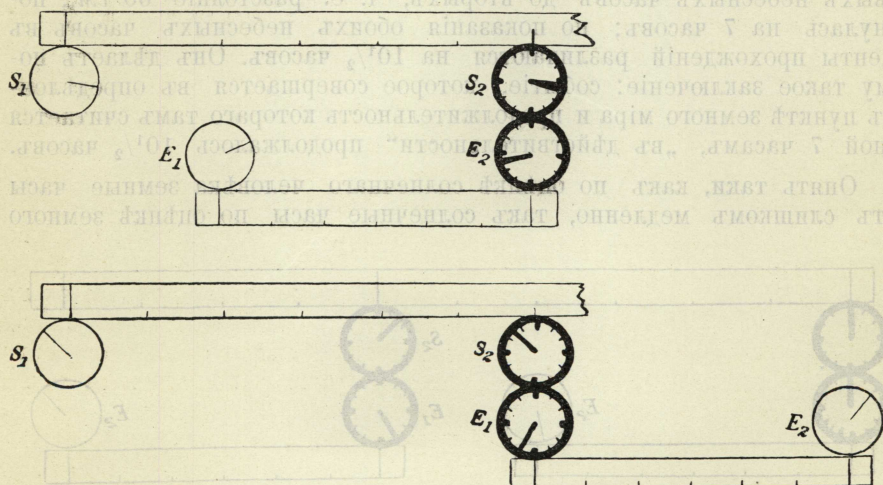
Фиг. 8.

человѣка отстаютъ въ такомъ же отношеніи 2:3. Дѣйствительно, онъ наблюдаетъ слѣдующее (фиг. 9): небесные часы (вторые на модели) проходятъ мимо обоихъ земныхъ часовъ, которые для него синхроничны; во время этого движенія небесные часы продвинутся впередъ на $\frac{2}{3}$ того количества, которое имѣло мѣсто въ предыдущемъ опытѣ, т. е. продвинутся на 7 часовъ; но двое земныхъ часовъ въ моменты прохожденій различаются на $10\frac{1}{2}$ часовъ.

Итакъ, для солнечнаго человѣка земные процессы и для человѣка земли небесные процессы кажутся замедленными въ своемъ теченіи въ отношеніи 2 къ 3.

Подведемъ итогъ. Наша модель показала намъ слѣдующее: въ двухъ равномерно движущихся другъ относительно друга системахъ S и S' мы можемъ расположить часы и масштабы такимъ образомъ, чтобы опредѣленная скорость, измѣренная посредствомъ нихъ, обнаруживала одинаковое значеніе для наблюдателя B въ системѣ S и

для наблюдателя B' въ системѣ S' безразлично, будетъ ли эта скорость имѣть такое же направленіе, какъ движеніе системы S' или же она будетъ противоположна ей; кромѣ того, наблюдатель B дѣлаетъ на измѣрительныхъ приборахъ въ системѣ S' такія же наблюденія, какъ наблюдатель B' на инструментахъ въ системѣ S . Далѣе, пусть всѣ часы въ S' , лежащіе въ плоскости, перпендикулярной къ направленію движенія, получаютъ одинаковую разность показанія относительно соответственныхъ часовъ въ S , и всѣ масштабы въ такой плоскости въ системѣ S' будутъ отмѣчены тѣми же цифрами, какъ и масштабы въ системѣ S , съ которыми они совмѣщаются. Тогда сказанное выше имѣетъ силу въ самомъ общемъ случаѣ: для любого направленія движенія и для расположенныхъ любымъ образомъ часовъ и масштабовъ. Слѣдовательно, при надлежащемъ расположеніи



Фиг. 9.

часовъ и масштабовъ процессъ, который съ системы S кажется равномернымъ распространеніемъ какого-либо состоянія по всѣмъ направленіямъ съ опредѣленной скоростью c , покажется точно тѣмъ же изъ системы S' ; при этомъ ни одна изъ этихъ системъ не выдѣляется сравнительно съ другой въ отношеніи измѣренія пространства и времени.

Принципъ относительности утверждаетъ: если системы S и S' принадлежать къ группѣ неподвижныхъ звѣздъ и если въ качествѣ скорости c выбрана скорость свѣта въ вакуумѣ, то всѣ электрическіе процессы, и въ частности также всѣ оптическіе, протекаютъ такъ, что между обѣими системами не замѣчается никакого различія.

Проvѣрка этого утвержденія совершается слѣдующимъ путемъ. Всѣ наши опыты основаны на наблюденіяхъ, которыя производятся съ одной опредѣленной системы въ группѣ неподвижныхъ звѣздъ, — съ земли. Этой системѣ принадлежатъ наши масштабы, наши часы.

При помощи этихъ масштабовъ мы прежде всего устанавливаемъ количественную сторону электро-оптическихъ явленій на земной поверхности. Теперь нашъ принципъ утверждаетъ: точно такіе же законы найдеть для явленій въ другой системѣ ея обитатель, если онъ производить измѣренія посредствомъ своихъ масштабовъ и часовъ; принципъ въ то же время указываетъ намъ, какъ мы должны произвести переоцѣнку, чтобы узнать, каковы будутъ эти явленія для насъ.

Напримѣръ, мы знаемъ*), что отъ источника свѣта, находящагося въ вакуумѣ въ покоѣ (относительно насъ), свѣтъ распространяется равномерно по всѣмъ направленіямъ со скоростью $c = 300\,000$ км./сек. Совершенно такимъ же образомъ должно происходить распространение свѣта отъ неподвижной звѣзды для ея обитателя. Тогда переоцѣнка, согласно предыдущему, приводитъ къ выводу: для насъ оно также происходитъ равномерно со скоростью c . Но переоцѣнка даетъ далѣе: направленіе излученія, доходящаго до насъ, не совпадаетъ съ прямой звѣзда-земля. Поэтому неподвижная звѣзда видна для насъ не на ея дѣйствительномъ мѣстѣ, но кажется сдвинутой въ сторону: по своей величинѣ и направленію это смѣщеніе есть то именно, которое, дѣйствительно, обнаруживаетъ намъ такъ называемая аберрація**).

Другой примѣръ: мы знаемъ, что въ спокойной водѣ (т. е. находящейся въ покоѣ относительно насъ) свѣтъ распространяется равномерно по всѣмъ направленіямъ со скоростью q , которая равна отношенію скорости свѣта c въ вакуумѣ къ показателю преломленія n воды. Какъ распространяется свѣтъ въ водяномъ столбѣ, который имѣетъ относительно насъ скорость w ? Для того, кто уносится съ водой распространение происходитъ совершенно такимъ же образомъ, какъ въ вакуумѣ. Предположимъ теперь, что распространение свѣта происходитъ спеціально въ направленіи теченія. Тогда мы могли бы совершить переоцѣнку для нашего воспріятія посредствомъ нашей модели: для этого мы должны были бы сообщить свѣтовой маркѣ скорость q (вмѣсто прежней c) относительно движущейся системы и затѣмъ посмотрѣли бы, какая скорость соответствуетъ ей въ покоящейся системѣ. Тогда оказалось бы, что эта скорость отлична отъ q , но не равна также суммѣ скорости q со скоростью теченія w : она имѣетъ нѣкоторое среднее значеніе, а именно, то, которое Физо нашель экспериментальнымъ путемъ***).

Эти примѣры иллюстрируютъ общее положеніе дѣлъ: нѣтъ ни одного электро-оптического процесса, который противорѣчилъ бы принципу относительности. Другой вопросъ, насколько этотъ принципъ доказанъ опытомъ. На это слѣдуетъ замѣтить: переоцѣнка содержитъ двѣ фазы—во-первыхъ, измѣненіе начального момента въ шкалахъ времени, и, во-вторыхъ, измѣненіе масштабовъ длины и времени. Но эти двѣ фазы въ весьма неодинаковой мѣрѣ вліяютъ на результатъ. Зависимость здѣсь такова: отношеніе скорости тѣла w къ скорости свѣта c всегда выра-

*) См. ниже стр. 224.

**) Вычисленіе см. въ приложеніи.

жается малой дробью, — около $1/10000$ въ случаѣ абераціи, и менѣе $1/3\,0000\,000$ въ случаѣ текущей воды. Съ этой дробью сравнимы, т. е. „такого же порядка величины“ суть соотвѣтственные отклоненія, вызываемыя смѣщеніемъ въ отсчетѣ времени; они еще могутъ быть измѣрены при помощи наиболѣе тонкихъ оптическихъ методовъ. Измѣненія же масштабъ влекутъ за собой отклоненія порядка $(w/c)^2$, т. е. соотвѣтственно $1/100$ миллионъ и $1/900$ биліонъ, а такія величины совершенно недоступны для нашихъ средствъ наблюденія.

То же самое относится ко всѣмъ нашимъ наблюденіямъ надъ тѣлами, которыя имѣютъ движеніе относительно земли: при движеніяхъ, которыя мы можемъ вызвать по нашему желанію, скорость всегда остается слишкомъ малой; при движеніяхъ же небесныхъ тѣлъ возможность успѣха исключается благодаря тому обстоятельству, что здѣсь мы можемъ лишь наблюдать, а не экспериментировать. Поэтому всѣ эти наблюденія могли бы ужиться съ электродинамикой, которая принимала бы принципъ относительности не въ полномъ объемѣ.

Опыты, которые повели къ установленію принципа, относятся къ распространенію свѣта относительно земли. Скорость земли относительно солнца составляетъ, какъ мы уже упомянули, $1/10000$ скорости свѣта; Майкельсону и Морлею удалось доказать*), что это движеніе не вызываетъ измѣненій распространенія свѣта, даже величиной въ $1/100$ миллионъ его значенія, или хотя бы измѣненіе, равное малой долѣ этой дроби. Итакъ, несмотря на движеніе земли, распространеніе свѣта относительно земли отличается совершенно точной равномерностью для обитателя земли. Физическое значеніе этого положенія мы сейчасъ рассмотримъ подробнѣе.

3. Принципъ относительности Лоренца-Эйнштейна, какъ общій принципъ физики.

До сихъ поръ мы говорили исключительно объ электро-оптическихъ наблюденіяхъ. Чтобы производить эти наблюденія, мы должны имѣть масштабы и часы. Мы предположили, что эти измѣрительные инструменты вѣрны и остаются вѣрными въ любомъ положеніи, во всякомъ мѣстѣ и во всякое время. Мы предполагаемъ въ частности: во-первыхъ, когда мы вращаемъ масштабъ, онъ долженъ сохранить свою длину; когда мы вращаемъ шаръ, онъ долженъ оставаться шаромъ; когда масштабъ или шаръ въ теченіе дня получаютъ безъ нашего вмѣшательства различную оріентировку относительно солнца, то они при этомъ тоже должны остаться безъ измѣненія. Во-вторыхъ, часы, которые въ опредѣленный моментъ находятся на переднемъ краю земли, спустя двѣнадцать часовъ оказываются на заднемъ краю: по нашему предположенію, они должны, однако, по прежнему вѣрно показывать время. Въ-третьихъ, благодаря совмѣстному

*) См. статью: О. Лоджъ, „Мировой эфиръ“, „Вѣстникъ“ 1910 и отдѣльное изданіе „Mathesis“, 1911.

дѣйствию движенія земли вокругъ солнца и движенія солнечной системы относительно неподвижныхъ звѣздъ получаютъ переменныя значенія для скорости земли относительно неподвижныхъ звѣздъ; но и эти измѣненія скорости не должны, по нашему предположенію, измѣнять длины нашихъ масштабовъ, а также хода нашихъ часовъ. Все это кажется самоочевиднымъ. Но по нашему принципу это не только не очевидно, но даже ложно: болѣе того, согласно принципу, самое утвержденіе, что все это вѣрно, не имѣетъ никакого смысла. Вѣдь во всѣхъ этихъ предположеніяхъ мы считаемъ, что все это вѣрно для насъ, земныхъ наблюдателей; но въ такомъ случаѣ эти предположенія не вѣрны для наблюдателя на неподвижной звѣздѣ: для него тогда масштабъ постоянно мѣняетъ свою длину, а часы — свой ходъ.

Это, дѣйствительно, вѣрно для насъ: Майкельсонъ и Морлей доказали, что масштабъ — на опытѣ въ формѣ каменнаго консоля — не измѣняется для насъ при измѣненіи его ориентировки относительно движенія земли. Онъ сохраняетъ для насъ свою длину, т. е. для насъ свѣтъ пробѣгаетъ его длину всегда за одинаковое время. Но въ такомъ случаѣ это время должно измѣняться для солнечнаго человѣка, для него, слѣдовательно, должна также измѣняться длина масштаба. — Второе утвержденіе равносильно слѣдующему. Представимъ себѣ, что горизонтальная ось находится въ состояніи длительного равномернаго вращенія; на своихъ концахъ она снабжена двумя дисками съ дѣленіями по краямъ; эти диски должны служить въ качествѣ часовъ; они синхроничны, если двѣ опредѣленныя одинаково-отмѣченныя марки на ихъ краяхъ одновременно проходятъ черезъ свое наиболѣе высокое положеніе. Утвержденіе гласитъ: эти два диска постоянно сохраняютъ синхроничность, если даже дискъ, который вначалѣ при движеніи земли шелъ впереди, спустя двѣнадцать часовъ движется позади втораго: если бы это оказалось не такъ, то это означало бы, что ось въ теченіе этого промежутка закрутилась въ опредѣленномъ направленіи. Для этого допущенія у насъ нѣтъ никакого основанія; но, конечно, когда мы утверждаемъ, что для насъ ось не закрутилась, то изъ этого слѣдуетъ, что для наблюдателя на солнцѣ ось закрутилась: дѣйствительно, относительно него шли впереди сперва одни часы, потомъ вторые. Наблюденіе такого рода никогда не было сдѣлано, — но никогда также не было установлено непосредственно, что ходъ нашихъ часовъ не зависитъ отъ движенія земли. Оба опыта, конечно, неосуществимы: но мы можемъ косвенно заключить, что результаты оказались бы вполне согласными съ этими утвержденіями: вѣдь мы видѣли, что всѣ эти утвержденія самымъ тѣснымъ образомъ связаны другъ съ другомъ.

Во всемъ изложенномъ только опытъ Майкельсона-Морлея есть фактъ, а все остальное представляетъ собою заключенія изъ принципа относительности. И теперь спрашивается еще разъ: вѣренъ ли принципъ? Положимъ, что человѣкъ солнца (или „человѣкъ“ какой-либо неподвижной звѣзды), производя измѣренія, всякій разъ при помощи своего мимоидущаго масштаба, нашелъ бы, что и для него земной масштабъ сохраняетъ свою длину, если повернуть его на 90° . Это значило бы: то самое распространеніе свѣта въ пустомъ

пространствѣ, которое для земного человѣка является равномернымъ, не равномерно для солнечнаго человѣка; — или: его собственные масштабы измѣняютъ при вращеніи свою длину, поскольку онъ судить о нихъ сообразно съ этимъ оптическимъ процессомъ. Итакъ, одно изъ двухъ: либо распространеніе свѣта на солнцѣ не равномерно (въ томъ смыслѣ, что, судя по этому процессу, не существуетъ твердыхъ тѣлъ); либо же все зависитъ отъ того, принадлежитъ ли источникъ свѣта землѣ или солнцу: общѣ говоря, распространеніе свѣта въ безвоздушномъ пространствѣ не есть нѣчто опредѣленное: чтобы быть въ состояніи опредѣлять дальнѣйшій ходъ этого процесса, необходимо знать его предыдущую исторію. Второе предположеніе находится въ противорѣчій со всей нашей оптикой; а принять первое допущеніе равносильно тому, чтобы приписывать землѣ исключительное положеніе во вселенной. — Мы отбрасываемъ оба эти допущенія. Тогда мы приходимъ къ нашему принципу прежде всего для двухъ системъ солнца и земли *). Затѣмъ слѣдуетъ далѣе — опять-таки, потому что мы не имѣемъ права приписывать землѣ исключительнаго положенія: во всякой системѣ, которая равномерно движется относительно неподвижныхъ звѣздъ, движеніе не оказываетъ вліянія на масштабы и часы, — для наблюдателя, принадлежащаго къ той же системѣ. Этимъ сейчасъ же опредѣляются измѣненія, которыя воспринимаетъ обитатель другой системы группы неподвижныхъ звѣздъ, въ частности земли. Наблюденію эти измѣненія не поддаются. Это не должно насъ удивлять: предположимъ, что мы можемъ сообщить тѣлу скорость относительно насъ, которую имѣетъ земля относительно солнца; тогда отрѣзокъ, лежащій въ направленіи движенія, сократился бы для насъ на $1/200$ миллионновъ своей длины, и въ такой же пропорціи измѣнился бы ходъ лежащихъ на немъ часовъ. Предположимъ далѣе, что это тѣло обладаетъ размѣрами земли; въ такомъ случаѣ наибольшая разница между двумя прежде синхроничными часами составляла бы для насъ 4 миллионныя доли секунды. Но въ принципѣ всѣ эти измѣненія доступны экспериментальной повѣркѣ, а именно, при помощи точно такихъ же методовъ, посредствомъ которыхъ въ нашей модели человѣкъ земли измѣрялъ міръ человѣка солнца.

Мы примемъ теперь, что принципъ Лоренца-Эйнштейна вѣренъ. Въ немъ содержится слѣдующее положеніе: если въ пустомъ пространствѣ дана свѣтовая волна, то ея распространеніе съ количественной стороны всегда представляется одинаковымъ процессомъ, гдѣ бы ни былъ ея источникъ, и изъ какой бы системы группы неподвижныхъ звѣздъ она ни наблюдалась. Для нея не существуетъ системы сравненія, относительно которой она допускала бы однозначную ориентировку. Для среды „эфиръ“, въ которой происходилъ бы этотъ процессъ, нѣтъ мѣста въ теоріи относительности. Въ противоположность старой физикѣ, для этой теоріи пустое пространство есть, дѣйствительно, ничто.

*) При этомъ предполагается далѣе, что опытъ Майкельсона далъ бы тотъ же отрицательный результатъ не только въ сколь угодно разрѣженномъ воздухѣ, но и въ совершенномъ вакуумѣ.

Это есть основное положеніе чистой электродинамики. Но изъ предыдущаго ясно, что область примѣненія принципа Лоренца-Эйнштейна, вызваннаго къ жизни требованіями электродинамики, не можетъ, однако, ограничиваться одной электродинамикой: онъ содержитъ уже въ себѣ предложенія механической природы. Совмѣстимы ли они съ извѣстными намъ основными положеніями механики? Въ началѣ статьи мы уже говорили о принципѣ относительности въ механикѣ; теперь мы приведемъ его еще разъ.

„Между всѣми системами, которыя имѣютъ другъ относительно друга постоянную скорость, ни одна не выдѣляется по сравненію съ другой: относительно каждой системы такой группы всѣ процессы протекаютъ совершенно одинаковымъ образомъ. Но между всѣми группами группа неподвижныхъ звѣздъ занимаетъ исключительное положеніе: представить факты простымъ образомъ можно лишь при томъ условіи, если мы какую-нибудь систему этой группы будемъ разсматривать, какъ находящуюся въ покоѣ; но совершенно безразлично, какую мы выберемъ систему этой группы“. Или представимъ это еще разъ въ наглядной формѣ перваго положенія: „предположимъ, что въ то время, какъ наблюдатель спитъ, весь его собственный міръ получаетъ постоянную скорость относительно „внѣшняго“ міра. Наблюдатель никогда не узнаетъ, что произошло во время его сна, если область его наблюденій ограничена его собственнымъ міромъ“. (Положеніе А).

Все это вполнѣ согласуется съ принципомъ Лоренца-Эйнштейна. Различіе выступить лишь, когда мы спросимъ, какъ будетъ судить наблюдатель, оставшійся въ покоящемся „внѣшнемъ“ мірѣ, о процессахъ въ мірѣ, пришедшемъ въ движеніе. Этотъ вопросъ до сихъ поръ не былъ поставленъ въ механикѣ, потому что отвѣтъ казался самоочевиднымъ.

„Онъ судить (принимая, конечно, въ расчетъ взаимное перемѣщеніе) точно такимъ же образомъ, какъ наблюдатель, находящійся въ движеніи, предполагая, что онъ пользуется вѣрными инструментами. Но инструменты вѣрны или невѣрны независимо отъ всего этого. Поэтому онъ вправѣ выбрать и дѣйствительно выберетъ для измѣренія тѣ инструменты, при помощи которыхъ онъ измѣрилъ свой собственный міръ — „внѣшній міръ“. (Положеніе В).

Но принципъ Лоренца-Эйнштейна отвѣчаетъ: „при пользованіи совершенно тѣми же инструментами онъ неправильно измѣритъ движущійся міръ, точнѣе говоря: иначе, чѣмъ движущійся наблюдатель. Доставляемые этими инструментами показанія длины и времени сперва должны быть переоцѣнены изложеннымъ выше образомъ; тогда лишь получатся одинаковые результаты“. (Положеніе С).

Есть ли надежда, несмотря на эту противоположность, найти единый принципъ для всей физики? Примѣнить положеніе В къ электродинамикѣ не представляется возможнымъ: въ виду того, что распространеніе свѣта въ вакуумѣ равномерно для обоихъ наблюдателей, положенія А и В взаимно исключаютъ одно другое. Поэтому остается лишь приписать положенію С совершенно всеобщую силу.

Мы уже видѣли, что ни одинъ опытъ механики не противорѣчитъ ему; но онъ подрываетъ всѣ основныя понятія механики.

Величины пространства и времени уже не могутъ быть опредѣлены однозначнымъ образомъ и независимо однѣ отъ другихъ. Понятіе твердаго тѣла становится относительнымъ; оно зависитъ отъ наблюдателя. Но дальше: масса тѣла тоже не есть величина постоянная; она зависитъ отъ движенія тѣла относительно наблюдателя. Объ этомъ мы скажемъ еще нѣсколько словъ.

Ньютоновъ законъ движенія для свободной матеріальной точки гласитъ: „сила = масса \times ускореніе“. Онъ провѣренъ для малыхъ скоростей (малыхъ относительно скорости свѣта). Предположимъ теперь, что онъ вполнѣ вѣренъ для какого-нибудь наблюдателя, когда матеріальная точка изъ покоя относительно наблюдателя переходитъ въ движеніе. Предположимъ, что точка достигла нѣкоторой скорости v ; тогда она въ этотъ моментъ находится въ покоѣ относительно другой системы сравненія, а именно относительно той, которая обладаетъ какъ разъ скоростью v относительно наблюдателя. Согласно принципу относительности въ этой системѣ сравненія старый законъ неизмѣнно сохраняется силу. Но для наблюдателя законъ уже не имѣетъ силы въ своемъ прежнемъ видѣ: для наблюдателя длины и времена, а, слѣдовательно, также скорости и ускоренія выражаются инымъ образомъ. Эти измѣненія и значенія мы можемъ указать съ точностью. Силы тоже будутъ имѣть для наблюдателя другое выраженіе; но этого послѣдняго мы, вообще, не можемъ указать: новая механика должна насъ раньше научить этому выраженію. Въ одномъ только случаѣ мы можемъ указать это выраженіе, а именно, въ случаѣ электрическихъ силъ, потому что здѣсь выраженіе для силъ находится въ тѣснѣйшей связи съ уравненіями, изъ которыхъ вытекаетъ распространеніе свѣта. Въ этомъ случаѣ намъ, слѣдовательно, извѣстны въ Ньютоновомъ уравненіи какъ „ускореніе“, такъ и „сила“ въ ихъ зависимости отъ скорости матеріальной точки относительно наблюдателя, и, слѣдовательно, намъ извѣстна также и „масса“. Оказывается, что масса возрастаетъ съ скоростью. Приращеніе оказывается исчезающе малымъ даже для скорости земли по ея орбитѣ вокругъ солнца. Но если мы представимъ себѣ подобное движеніе точки, происходящее со скоростью, которая равна $\frac{3}{4}$ скорости свѣта, то ея масса при движеніи превышаетъ уже въ $1\frac{1}{2}$ раза массу, которой она обладаетъ въ покоѣ.

По милости Фортуны намъ извѣстно нѣчто такое, что можетъ получить такія и даже еще большія скорости, и движущееся подъ вліяніемъ электрическихъ силъ: это такъ называемые электроны, очень маленькія частицы, имѣющія отрицательный электрическій зарядъ; физики познакомились съ ними въ катодныхъ лучахъ, а потомъ онѣ были открыты также въ излученіи радиоактивныхъ тѣлъ. Въ этихъ двухъ видахъ онѣ были подвергнуты изслѣдованію, которое должно было рѣшить, измѣняется ли ихъ масса. Новѣйшіе *) опыты —

*) Этотъ докладъ былъ читанъ 11 февраля 1910 г. *Ред.*

относительно радіевыхъ лучей — были произведены Бухереромъ (Bucherer), Гупка (Нирка) — относительно катодныхъ лучей. Оба они примѣнили существенно различные методы изслѣдованія; оба пришли къ одинаковому заключенію: масса измѣняется, и при томъ измѣненія въ точности соотвѣтствуютъ принципу относительности.

Итакъ, первая попытка распространить принципъ Лоренца-Эйнштейна на механику дала положительный результатъ *) Изслѣдователи ревностно ищутъ новыхъ случаевъ, которые дали бы возможность продолжать провѣрку. Предположимъ, что принципъ получить полное подтвержденіе. Тогда физика измѣнится до самаго своего основанія: ея прежнія фундаментальныя понятія, какъ постоянная масса и твердое тѣло, будутъ разжалованы въ практически годныя приближенія. Такимъ образомъ, обнаружится, что міровое зданіе не столь просто, какъ намъ казалось. Но наша картина міра станетъ болѣе цѣлостной, чѣмъ раньше: электричество и механика сольются въ ней въ одно цѣлое, но ея наиболѣе тонкія черты будутъ имѣть электрическое происхожденіе.

Приложеніе **).

Принципъ относительности требуетъ, чтобы распространеніе свѣта въ пустомъ пространствѣ удовлетворяло слѣдующимъ условіямъ:

1. Оно должно представлять собой одинаковый процессъ для всѣхъ системъ группы неподвижныхъ звѣздъ, т. е. оно должно происходить сферическими волнами съ опредѣленной скоростью $c = 300\,000$ км./сек.

2. Между всѣми системами группы неподвижныхъ звѣздъ ни одна не имѣетъ исключительнаго положенія, т. е. мы съ совершенно одинаковымъ правомъ можемъ считать либо, что система S' движется съ скоростью v относительно системы S въ опредѣленномъ направленіи, либо же, что система S движется относительно системы S' съ скоростью v въ противоположномъ направленіи.

Математическая формулировка гласитъ: если обозначимъ черезъ t, x, y, z время и координаты въ системѣ S , черезъ t', x', y', z' время и координаты въ системѣ S' , и если система S' обладаетъ относительно системы S скоростью v въ направленіи возрастающихъ координатъ x и x' , при чемъ оси y -овъ и z -овъ должны быть параллельны соотвѣтственно осямъ y' -овъ и z' -овъ, то:

*) Нужно, однако, замѣтить, что первыя весьма тщательныя изслѣдованія быстрыхъ движеній электроновъ, произведенныя Кауфманомъ, указали, правда, на увеличеніе массы, но оно не было равно въ точности той величинѣ, которая требовалась принципомъ относительности. Полнаго объясненія противорѣчія между наблюденіями пока еще не дано.

**) Изъ источниковъ назовемъ прежде всего: A. Einstein, „Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, т. 4, 1907.

1) уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ должно быть тождественно съ уравненіемъ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$, и

2) уравненія, выражающія переменныя t', x', y', z' черезъ t, x, y, z , должны превратиться въ уравненія, выражающія t, x, y, z черезъ t', x', y', z' , если замѣнимъ скорость v черезъ $-v$.

Рѣшеніе этой задачи, какъ легко провѣрить, гласитъ:

$$t' = k \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (a)$$

$$t = k \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (b)$$

$$x' = k (x - vt) \quad (c)$$

$$x = k (x' + vt')$$

$$(d)$$

$$y' = y$$

$$z' = z,$$

гдѣ

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}.$$

Эти уравненія содержатъ, во-первыхъ, все, что мы объяснили на модели. На модели $c = \frac{60 \text{ см.}}{7\frac{2}{3} h}$ и $\frac{v}{c} = \frac{3}{4}$; слѣдовательно, $k = \frac{3}{2}$ (въ круглыхъ числахъ). Предположимъ, что координаты t, x, y, z относятся къ небесной системѣ, а t', x', y', z' — къ земной.

Мы показали, что эта скорость c имѣетъ мѣсто для распространенія свѣта въ направленіи $+x$ и въ направленіи $-x$ въ небесной системѣ, и въ направленіяхъ $+x'$ и $-x'$ въ земной системѣ. Мы замѣтили далѣе, что земные часы E_1 и E_2 не синхроничны для солнечнаго человѣка: для него часы E_2 отстаютъ сравнительно съ часами E_1 на $5\frac{3}{4}$ часовъ. Это значитъ: когда

$$t_1 = t_2, \quad t'_1 - t'_2 = 5\frac{3}{4} h.$$

Но уравненіе (b) показываетъ: если $t_1 = t_2$, то

$$t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 = t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2$$

или

$$t'_1 - t'_2 = \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7\frac{2}{3}}{60} \cdot 60h = 5\frac{3}{4} h,$$

такъ какъ

$$x_2 - x_1 = 60 \text{ см.}$$

Мы показали далѣе, что человѣкъ солнца, переносящій въ одинаковыя времена t свои марки отъ точекъ „0“ и „60 см.“ солнечнаго масштаба, отложить на земномъ масштабѣ 90 см. Теперь изъ уравненія (c) вытекаетъ: при $t_1 = t_2$ имѣетъ мѣсто уравненіе

$$x'_2 - x'_1 = k (x_2 - x_1) = \frac{3}{2} \cdot 60 \text{ см.} = 90 \text{ см.}$$

Обратно, человѣкъ земли, переносящій въ одинаковыя времена t' свои

марки отъ точекъ „0“ и „60 см.“ земного масштаба, отложить на небесномъ масштабѣ 90 см. Но изъ уравненія (d) при $t'_1 = t'_2$ вытекаетъ:

$$x_2 - x_1 = k(x'_2 - x'_1) = \frac{3}{2} \cdot 60 \text{ см.} = 90 \text{ см.}$$

Мы показали, что процессу, происходящему въ определенной точкѣ земли, т. е. при определенномъ значеніи x' , и продолжающемуся здѣсь 7 часовъ, человекъ солнца припишетъ продолжительность въ $10\frac{1}{2}$ часовъ. Теперь изъ уравненія (a) вытекаетъ при $x_1 = x_2$:

$$t'_2 - t'_1 = k(t_2 - t_1) = \frac{3}{2} \cdot 7^h = 10\frac{1}{2}^h.$$

До сихъ поръ рѣчь шла о модели. То, что мы въ текстѣ называемъ „переоцѣнкой“, означаетъ слѣдующее: значеніе величины, выраженной въ зависимости отъ переменныхъ t, x, y, z (т. е. такъ, какъ B наблюдаетъ ее въ системѣ S), выразить въ функціи отъ t', x', y', z' (т. е. такъ, какъ B' наблюдаетъ ее въ S'). При этомъ имѣемъ для $v = 10 \text{ м./сек.}$ (текущая вода):

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^7}; \quad k = 1 + \frac{1}{18 \cdot 10^{14}};$$

для $v = 30 \text{ км./сек.}$ (движеніе земли относительно солнца):

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{10^4}; \quad k = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^8}.$$

Приложенія въ текстѣ относятся къ скоростямъ. Пусть будетъ нѣкоторая скорость:

u съ составляющими $u_x = \frac{x}{t}$, $u_y = \frac{y}{t}$, $u_z = \frac{z}{t}$ въ системѣ S ,

u' съ составляющими $u'_x = \frac{x'}{t'}$, $u'_y = \frac{y'}{t'}$, $u'_z = \frac{z'}{t'}$ въ системѣ S' .

Согласно уравненіямъ, приведеннымъ послѣ условія 2), имѣемъ

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{v}{c^2}x}, \quad \frac{y'}{t'} = \frac{y}{k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}, \quad \frac{z'}{t'} = \frac{z}{k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)};$$

или

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u'_y = \frac{u_y}{k\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{k\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}.$$

1) (Фиг. 10). Предположимъ, что относительно излучающей неподвижной звѣзды (S) земля (S') движется со скоростью v въ направленіи x перпендикулярно къ прямой y , соединяющей эти двѣ системы *).

*) Мы ограничимся этимъ случаемъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ мы для упрощенія не будемъ принимать во вниманія движенія всей солнечной системы относительно неподвижной звѣзды; v обозначаетъ въ такомъ случаѣ скорость земли по ея орбитѣ вокругъ солнца.

Какова скорость и направление излучения, наблюдаемая обитателем земли? Для обитателя неподвижной звёзды

$$u_x = 0, \quad u_y = c, \quad u_z = 0.$$

Отсюда:

$$u'_x = -v, \quad u'_y = \frac{c}{k}, \quad u'_z = 0.$$

Слѣдовательно,

$$u'^2 = v^2 + \frac{c^2}{k^2} = c^2, \quad \text{или} \quad u' = c = u.$$

Но (см. фиг. 10)

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{u'_x}{u'_y} = k \frac{v}{c}.$$

Уголъ абераціи α элементарнымъ образомъ получается изъ уравненія $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}$.

На основаніи наблюденія мы не имѣемъ возможности сдѣлать выборъ между этими двумя значеніями.

2) Предположимъ, что черезъ жидкость (S), текущую со скоростью w въ направленіи x , пропускается свѣтъ въ этомъ же направленіи. Скорость его распространенія въ системѣ S равна

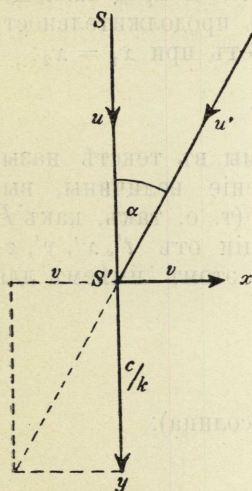
$u_x = q = \frac{c}{n}$, гдѣ n есть показатель преломленія: $u_y = u_z = 0$. Слѣдовательно, для наблюдателя, находящагося въ покоѣ въ системѣ S' , имѣемъ: ($v = -w$)

$$q' = u'_x = \frac{q + w}{1 + \frac{wq}{c^2}},$$

или также, въ виду чрезвычайно малаго значенія дроби $\frac{w}{c}$:

$$q' = q + w - w \frac{q^2}{c^2} = q + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) w.$$

Но таковъ именно результатъ опытовъ Физо.



Фиг. 10.

О преподаваніи геометріи*).

Проф. Ф. Клейна.

Нашъ очеркъ будетъ имѣть существенно историческій характеръ, еще въ бѣльшей степени, чѣмъ соотвѣтственная часть предыдущаго курса, такъ какъ геометрія вслѣдствіе своей глубокой древности имѣетъ, въ качествѣ предмета преподаванія, болѣе старыя традиціи, чѣмъ всѣ дисциплины, разсмотрѣнныя нами раньше. Если традиція, съ одной стороны, является преимуществомъ, то, съ другой стороны, она таитъ въ себѣ немалыя опасности; дѣйствительно, въ настоящее время преподаваніе геометріи страдаетъ именно благодаря своимъ старымъ традиціямъ, такъ какъ многія части, которыя теперь уже не являются жизнеспособными, пустили столь глубокіе корни, что они съ трудомъ могутъ быть устранены и всячески препятствуютъ развитію новыхъ здоровыхъ ростковъ.

Чтобы понять, какъ сложилось преподаваніе геометріи въ его современномъ видѣ, мы должны начать со времени возрожденія наукъ, т. е. съ эпохи ренессанса въ наиболѣе широкомъ смыслѣ слова (около 1200 г.). Естественно, что научная дѣятельность тогда началась съ изученія древнихъ; въ частности, „Начала“ Евклида изучались, какъ введеніе въ геометрію. Къ нимъ присоединились еще и остальные сохранившіяся части геометріи древнихъ, главнымъ образомъ, Архимедово вычисленіе π , ученіе Апполонія о коническихъ сѣченіяхъ и, наконецъ, построенія при помощи циркуля и линейки, въ томъ видѣ, какъ они были унаслѣдованы отъ школы Платона. Этотъ геометрический матеріалъ выбранъ, конечно, чрезвычайно одностороннимъ образомъ: не только интересы приложеній, но и пространственной интуиціи совершенно оттѣснены на задній планъ, и все вниманіе направлено исключительно въ сторону абстрактнаго вывода. Замѣчательно, однако, что не только изслѣдователь и ученый такимъ именно образомъ изучали геометрію: установилось мнѣніе, будто „Начала“ Евклида являются подходящимъ учебникомъ для начальнаго преподаванія! Такое недоразумѣніе было, пожалуй, для того времени естественнымъ, такъ какъ кромѣ Евклида тогда ничего не было; во всякомъ случаѣ, самъ Евклидъ въ этомъ неповиненъ, такъ какъ „элементы“, — мы никогда не должны этого забывать, — произошли изъ университетскихъ лекцій и менѣе всего представляютъ собою учебникъ для десятилѣтнихъ дѣтей. Тѣмъ не менѣе это недоразумѣніе оказывало существенное вліяніе до настоящаго времени.

Если же мы теперь спросимъ себя, что мы въ настоящее время должны требовать отъ правильнаго школьнаго преподаванія геометріи, то придемъ къ слѣдующимъ выводамъ.

*) Приложение ко второму тому лекцій, читанныхъ проф. Клейномъ въ Гёттингенѣ для учителей и выпускенныхъ въ свѣтъ подъ заглавіемъ „Элементарная математика съ высшей точки зрѣнія“.

1) Всякій согласится, что руководящую роль должны играть психологическія соображенія. Преподаваніе должно сообразоваться не только съ матеріаломъ, но, прежде всего, и съ учащимся; одинъ и тотъ же предметъ мы шестилѣтнему ребенку будемъ излагать не такъ, какъ десятилѣтнему, а взрослому человѣку — иначе, чѣмъ десятилѣтнему мальчику. Въ частности, при школьномъ преподаваніи геометріи мы всегда должны вначалѣ обращаться къ живому конкретному созерцанію, и лишь постепенно выдвигать на передній планъ логическіе элементы; вообще, единственно допустимымъ является генетическій методъ, при которомъ ученика осваиваютъ съ предметомъ весьма постепенно.

2) Что касается выбора матеріала, то изъ всей области чистой и прикладной геометріи мы постараемся отобрать такія главы, которыя наиболѣе соответствуютъ цѣли геометріи въ рамкахъ всего преподаванія, и не будемъ руководиться случайными историческими обстоятельствами. Приводить подобныя общія требованія никогда не бываетъ лишнимъ, такъ какъ они рѣдко выполняются на дѣлѣ, хотя теоретически всѣ съ ними соглашаются.

3) Что касается общей цѣли преподаванія, то я не могу здѣсь входить въ разсмотрѣніе нюансовъ, которыми отличаются другъ отъ друга различные виды школъ. Достаточно отмѣтить, что эта цѣль находится въ тѣснѣйшей зависимости отъ культурнаго направленія каждой эпохи; отнюдь не становясь на сторону поверхностнаго утилитаризма, мы можемъ сказать, что задача новой школы — приобщить широкіе круги къ современной культурной работѣ, которая направлена, главнымъ образомъ, на практическія цѣли; поэтому, въ частности, при преподаваніи математики необходимо все болѣе принимать во вниманіе интересы естествознанія и техники.

4) Я не могу здѣсь, конечно, предлагать опредѣленнаго выбора матеріала; ее можетъ сдѣлать лишь учитель-практикъ, приобрѣтшій богатый опытъ. Въ настоящемъ же курсѣ, какъ я уже многократно говорилъ, я желаю лишь дать вамъ въ формѣ общаго обзора всей чистой геометріи, также и съ разсматриваемой стороны, тотъ матеріалъ, на основаніи котораго вы впослѣдствіи составите себѣ собственное мнѣніе по данному вопросу.

5) Я желалъ бы лишь отмѣтить здѣсь одну полезную методическую точку зрѣнія, а именно неоднократно упомянутую уже тенденцію къ слитному преподаванію планиметріи и стереометріи, которое препятствовало бы одностороннему обученію планиметріи и пренебреженію къ развитію въ учащемся трехмѣрной пространственной интуиціи. Въ этомъ же смыслѣ желательно также слитное преподаваніе ариметики и геометріи, не въ томъ смыслѣ, чтобы эти двѣ области вполне слились, но такъ, чтобы онѣ не были столь рѣзко разграничены, какъ это часто дѣлается теперь въ школахъ. О томъ, что, по-моему, желательно сдѣлать въ этомъ направленіи, я говорилъ на всемъ протяженіи этого и предыдущаго курсовъ.

Если мы, исходя изъ этихъ соображеній и требованій, рассмотримъ школьную практику, какъ она есть въ дѣйствительности, то она окажется неудовлетворительной во многихъ отношеніяхъ. Трудно, конечно, произнести огульный приговоръ, такъ какъ даже въ одной и той же странѣ, въ каждой школѣ, даже можно сказать, у cadaго учителя существуютъ свои особенные приемы. Однако, я думаю, что можно установить нѣкоторыя черты, которыя въ среднемъ будутъ соответствовать дѣйствительности, хотя каждой такой характеристикѣ можно будетъ, конечно, противопоставить множество случаевъ, къ которымъ она совершенно не подходитъ.

1) Прежде всего я думаю, что сліяніе различныхъ областей въ настоящее время слишкомъ слабо проведено въ преподаваніи; я поясню это нѣсколькими отдѣльными примѣрами, которые, быть можетъ, еще живы въ вашей памяти.

а) Проектированіе и черченіе пространственныхъ фигуръ, несомнѣнно имѣющія чрезвычайно важное значеніе, не играютъ подобающей имъ роли въ современномъ преподаваніи геометріи. Внѣшнимъ образомъ они, правда, входятъ въ учебный курсъ, но они не имѣютъ съ нимъ внутренней связи. Благодаря этому обстоятельству то, что называется „духомъ новой геометріи“, не оказываетъ на преподаваніе должнаго вліянія: я имѣю въ виду идею о подвижности каждой фигуры, дающей возможность каждый разъ, восходя отъ частнаго случая усмотрѣть общій характеръ геометрическаго образа. Правда, въ учебный курсъ вошли нѣкоторыя отдѣльныя главы новой геометріи, какъ, напримѣръ, ученіе о гармоническихъ точкахъ и трансверсальныхъ; но тѣ соотношенія, которыя новая геометрія позволяетъ намъ охватить однимъ взглядомъ, обыкновенно излагаются по неподвижной евклидовой кладкѣ въ видѣ множества разрозненныхъ случаевъ.

б) Въ большинствѣ случаевъ геометрія и ариметика искусственно отдѣлены въ школѣ одна отъ другой; поучительнымъ примѣромъ можетъ служить упомянутая уже нами разработка ученія о пропорціяхъ, которое сперва излагаютъ въ арифметической формѣ, а затѣмъ въ геометрической — притомъ часто безъ всякаго отношенія къ арифметическому ученію.

в) Аналитическая геометрія съ ея основнымъ предложеніемъ, что функція $y=f(x)$ представляетъ кривую, несомнѣнно доступна пониманію мальчиковъ уже на ранней ступени, и ею могло бы и должно было бы быть проникнуто все дальнѣйшее преподаваніе геометріи. Въмѣсто этого ее возводятъ въ видѣ новаго отдѣльнаго знанія на готовомъ строеніи геометріи, и уже послѣ „синтетическаго“ (въ духѣ древнихъ!) изученія коническихъ сѣченій учащемуся показываютъ, что при помощи „новой дисциплины“ — аналитической геометріи — изложеніе можетъ быть значительно упрощено. При этомъ, конечно, не подчеркиваютъ надлежащимъ образомъ того обстоятельства, что въ своей основѣ идеи аналитической геометріи, согласно болѣе глубокому воззрѣнію современныхъ историковъ, уже были извѣстны Аполлонію.

2) Я желаю теперь вкратцѣ показать, къ какимъ послѣдствіямъ для преподаванія привела эта исторически сложившаяся разрозненность отдѣльных дисциплинъ. Конечно, элементарная геометрія, несмотря даже на свою изолированность, даетъ матеріалъ для разнообразныхъ научныхъ проблемъ. Изъ относящейся сюда литературы я укажу на рефератъ Макса Симона (Simon) „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX Jahrhundert“) и на интересный сборникъ Энрикеса (Enriques) „Questioni riguardanti la geometria elementare“**), вторая часть котораго имѣется также въ нѣмецкомъ переводѣ Флейшера (Fleischer***); наконецъ, назовемъ еще книгу Адлера (Adler) „Theorie der geometrischen Konstruktionen“****).

Къ сожалѣнію, я не могу здѣсь останавливаться на положительныхъ сторонахъ возникающихъ при этомъ проблемъ, и, напротивъ, долженъ ограничиться подчеркиваніемъ нѣкоторыхъ нежелательныхъ послѣдствій, къ которымъ привело изолированное положеніе элементарной геометріи, особнякомъ отъ общаго развитія математики: нѣкоторые вопросы, которые съ высшей точки зрѣнія представляютъ весьма незначительный интересъ, получили, однако, чрезмѣрное развитіе и вошли также въ школу.

а) Въ этомъ отношеніи я прежде всего долженъ упомянуть о той дисциплинѣ, которая въ школѣ называется алгебраической геометріей (или приложеніемъ алгебры къ геометріи) и которая учить сперва вычислять элементы треугольника или другихъ фигуръ и затѣмъ отдѣльно строить ихъ. Вы получите критерій для оцѣнки этой отрасли, если спросите себя, пользовались ли вы когда-либо ею или могли ли вы ею когда-либо пользоваться въ высшей школѣ. Отвѣтъ, конечно, будетъ отрицательный, такъ какъ вся эта отрасль есть лишь боковая вѣточка, которая культивировалась для самой себя и никогда не вступала въ живое взаимодействіе съ другими вѣтвями науки.

б) Весьма извѣстенъ также и отдѣлъ о построеніи треугольниковъ. Весьма, конечно, хорошо и полезно учить построенію фигуръ, и я всегда стою за пользованіе графическими методами, да и современная математика во всѣхъ областяхъ прибѣгаетъ къ нимъ все больше и чаще; именно здѣсь, въ Гёттингенѣ, на лекціяхъ профессора Рунге о графическихъ методахъ, вы имѣте прекрасный случай познакомиться съ многочисленными чрезвычайно остроумными методами, развитыми въ послѣднее время. Но школа занимается не этими важными и интересными вопросами: тамъ ограничиваются главнымъ образомъ построеніемъ треугольниковъ, и при

*) Jahresber. d. d. Math.-Verein. Ergänzungsband I. Leipzig, 1906.

**) Bologna, 1900.

***) „Fragen der Elementargeometrie“. Т. II: Geometrische Aufgaben, Lösung und Lösbarkeit. Leipzig, 1907. Въ послѣдніе дни на нѣмецкомъ языкѣ вышелъ и I томъ этого сборника.

****) Русскій переводъ изд. товариществомъ „Mathesis“ въ 1910 г.

томъ лишь такими задачами, которыя могутъ быть рѣшены при помощи циркуля и линейки. Какъ извѣстно, при этомъ три данныхъ элемента треугольника можно разнообразить весьма многочисленными способами и, — какъ справедливо было замѣчено, — съ „возможно болѣе нецѣлесообразностью“; къ тому же дѣйствительному выполнению найденныхъ построеній чаще всего не придаютъ никакого значенія, да на практикѣ они были бы слишкомъ сложны въ виду искусственнаго ограниченія, допускающаго пользоваться лишь циркулемъ и линейкой. Правда, съ этими построеніями связаны также весьма интересные и глубокіе вопросы, какъ тѣ, напримѣръ, которые разработаны въ названной книгѣ Энрикеса, или на нѣкоторыхъ примѣрахъ разобраны нами въ прошлый семестръ: я говорю объ алгебраическихъ доказательствахъ невозможности, показывающихъ, почему при извѣстныхъ построеніяхъ, (напримѣръ, правильнаго семиугольника или при трисекціи произвольнаго угла) недостаточно пользоваться циркулемъ и линейкой. Но объ этомъ въ школѣ обыкновенно не дѣлается даже намека; такимъ образомъ у очень многихъ вкореняется убѣжденіе, что каждая геометрическая задача должна допускать рѣшеніе при помощи циркуля и линейки. Этимъ, вѣроятно, объясняется, почему все еще не переводятся многочисленные любители, добывающіеся квадратуры круга и трисекціи угла.

с) Упомянемъ, наконецъ, еще и такъ называемую геометрію треугольника, т. е. ученіе о „замѣчательныхъ“ точкахъ и прямыхъ треугольника, развившееся въ области школьной математики въ самостоятельную дисциплину. Вы согласитесь со мною, что эта отрасль, выступающая въ школьномъ преподаваніи на передній планъ, при дальнѣйшемъ изученіи занимаетъ весьма скромное мѣсто. Мы уже видѣли выше, къ какому уголку проективной геометріи должна быть отнесена эта геометрія треугольника: вопросъ идетъ о теоріи инвариантовъ плоской фигуры, составленной изъ трехъ любыхъ точекъ и двухъ мнимыхъ круговыхъ точекъ ихъ плоскости; какъ видимъ, дѣйствительно, это вопросъ, который представляетъ лишь совершенно спеціальныи интересъ.

Ограничиваясь этими общими критическими замѣчаніями, мы теперь подробнѣе рассмотримъ, какъ сложилось современное преподаваніе геометріи; для этой цѣли мы должны отдѣльно разсматривать различныя страны, — такъ какъ въ каждой странѣ преподаваніе сложилось по своему; здѣсь мы должны, конечно, ограничиться важнѣйшими культурными странами, скажемъ, Англіей, Франціей, Италіей и Германіей. Сперва мы рассмотримъ преподаваніе геометріи въ Англіи.

I. Преподаваніе геометріи въ Англіи.

Въ Англіи преподаваніе геометріи долѣе всего находилось подъ исключительнымъ вліяніемъ Евклидовой традиціи, и отчасти еще и теперь не освободилось отъ него. Такое положеніе дѣла обусловлено организаціей англійскихъ экзаменовъ, такъ какъ прекрасный принципъ, что

учиться нужно независимо отъ экзаменовъ, какъ и много другихъ прекрасныхъ принциповъ, къ сожалѣнью, нигдѣ не примѣняется на практикѣ. Въ Англіи господствуетъ система строго централизованнаго экзамена при полной независимости отдѣльныхъ школъ, организація которыхъ совершенно предоставлена частному усмотрѣнью. Эта система противоположна нашей: у насъ въ каждой отдѣльной школѣ ученикъ экзаменуется учителями, которые хорошо его знаютъ, и при этомъ должны всесторонне принимать во вниманіе его индивидуальность; за то, однако, мы имѣемъ единообразные учебные планы, которые предписываютъ всѣмъ школамъ опредѣленные общія директивы относительно матеріала и методовъ преподаванія. Напротивъ, въ Англіи отдѣльныя школы представляютъ собою частныя учрежденія, которыя располагаютъ полной свободой дѣйствій, и по своей организаціи весьма разнородны. Но экзаменоватъ своихъ учениковъ онѣ не имѣютъ права; здѣсь господствуетъ принципъ, что экзаменаторъ не знаетъ экзаменующагося, и даже не видитъ его въ лицо, но лишь совершенно схематично оцѣниваетъ его письменную работу, которая одна рѣшаетъ исходъ экзамена. Въ Лондонѣ, Кембриджѣ и Оксфордѣ функционируютъ большія экзаменаціонныя коммиссіи, въ которыхъ держать экзаменъ абитуриенты со всей страны. Какъ сообщилъ мнѣ одинъ изъ главныхъ экзаменаторовъ, въ одномъ Лондонѣ, напримѣръ, ежегодно держатъ экзаменъ 24 000 учениковъ и всѣмъ имъ предлагаютъ однѣ и тѣ же задачи, одни и тѣ же вопросы. Для просмотра этихъ задачъ экзаменаторъ имѣетъ въ среднемъ 30 ассистентовъ; каждому ассистенту приходится, такимъ образомъ, исправлять 800 разъ одну и ту же работу; врядъ ли, конечно, нашлись бы на это охотники, если бы эта работа не оплачивалась очень щедро.

Въ математикѣ подобный своеобразный методъ возможенъ лишь при наличности нормальнаго учебника („standard-work“), который былъ-бы извѣстенъ всѣмъ экзаменующимся, такъ чтобы экзаменаторъ могъ руководиться имъ при составленіи своихъ вопросовъ; по геометріи такимъ нормальнымъ учебникомъ издавна служатъ „Начала“ Евклида. Понятно, что при такой системѣ одинъ и тотъ же учебникъ и одинъ и тотъ же методъ преподаванія должны были сохраняться столь долгое время безъ существенныхъ измѣненій; вообще, при такой системѣ реформа сопряжена съ величайшими трудностями. Дѣйствительно, экзаменаціонныя власти сами отъ себя не могутъ реорганизовать хода преподаванія во всей странѣ, такъ какъ официально онѣ не имѣютъ на него никакого вліянія; съ другой же стороны, онѣ не могутъ принимать во вниманіе интересы той или другой отдѣльной школы, которая пожелала бы на свой рискъ примѣнить въ видѣ опыта новые методы преподаванія.

Посмотримъ теперь, что представляетъ собою англійскій школьный Евклидъ; предо мною лежитъ изданіе Поттса (R. Potts*), которое въ послѣднія десятилѣтія пользовалось особеннымъ распространеніемъ. Учебникъ содержитъ, — это характерно, — книги I — VI

*) Euclid elements of geometry. London, 1869.

(планиметрію), а также XI, XII (начала стереометріи и методъ исчерпыванія), и при томъ въ дословномъ переводѣ; къ этому матеріалу присоединены объяснительныя и частью историческія примѣчанія, а также задачи. Въ сравненіи съ полными „элементами“ недостаетъ ариметическихъ книгъ VII — IX, классификаціи ирраціональностей (кн. X), и правильныхъ тѣлъ (кн. XIII). По традиціи изучаемый матеріалъ въ большей или меньшей степени заучивается наизусть, для того чтобы на экзаменѣ учащійся имѣлъ его въ головѣ. Перри (Perry) характеризуетъ этотъ методъ слѣдующимъ замѣчаніемъ: „англійская натура должна быть очень здоровой, коль скоро она безнаказанно могла переносить въ теченіе вѣковъ столь неподходящій образовательный матеріалъ“. Конечно, потребность принять во вниманіе результаты новыхъ изслѣдованій, далеко ушедшихъ отъ Евклида, не могла не чувствоваться; чтобы удовлетворить ее, пришлось втиснуть эти результаты въ рамки неподвижной Евклидовой формы, отъ чего, конечно, долженъ былъ сильно пострадать самый духъ новаго матеріала. Въ видѣ примѣра появившихся такимъ образомъ „продолженій Евклида“, такъ называемыхъ „Sequels to Euclid“, я предлагаю вамъ здѣсь книгу I. Кэзи (I. Casey*), содержащую такого рода разработку начальныхъ свѣдѣній изъ проективной геометріи.

Эта застывшая система не могла, конечно, не вызвать реакціи; начало было сдѣлано въ 1869 году великимъ англійскимъ математикомъ Сильвестромъ (Silvester), и въ 1874 г. было основано общество „для улучшенія преподаванія геометріи“ (Association for the improvement of geometrical teaching). Послѣ долгихъ трудовъ это общество издало новый нормальный учебникъ: „Элементы плоской геометріи“***). Эта книга, по существу, представляетъ собою обработку первыхъ 6 книгъ „Началъ“ Евклида, въ которой устранены или сглажены шероховатости оригинала; такъ, напримѣръ, здѣсь въ самомъ началѣ устанавливается и затѣмъ проводится понятіе о движеніи; благодаря этому устраняются упомянутыя мною шероховатости въ началѣ первой книги. Въ общемъ, однако, въ книгѣ удержался тотъ же матеріалъ и тотъ же курсъ изложенія, какъ и у Евклида, что опять-таки объясняется необходимостью приспособиться къ экзаменаціоннымъ требованіямъ. Мы видимъ, что эта реформа имѣла болѣе, чѣмъ умѣренный характеръ; тѣмъ не менѣе она вызвала рѣзкій отпоръ со стороны приверженцевъ старой Евклидовой системы. Въ видѣ примѣра я предлагаю вамъ познакомиться съ довольно забавной книгой Догсона (Dodgson): „Евклидъ и его современныя соперники“****). Авторъ ведетъ здѣсь съ „ассоціаціей“ тяжбу въ буквальномъ смыслѣ слова: въ качествѣ судьи авторъ выбралъ самого Мина, передъ которымъ говорятъ въ свою защиту Евклидъ и его соперники, т. е. авторы новыхъ учебниковъ, прежде всего Лежандръ;

*) A sequel to the first 6 book of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry. Dublin, 1900.

**) „Elements of plane geometry“, 1. 2. London, 1884, 1888.

***) Euklid his modern rivals. 2. ed. London, 1895.

изъ этого суда Евклидъ выходитъ съ честью, доводы же другихъ, въ особенности, представителей „ассоціаціи“, желающихъ улучшить Евклида, скоро оказываются несостоятельными. Я не могу здѣсь входить въ подробности и желалъ бы лишь обратить ваше вниманіе на одно обстоятельство, которое имѣетъ болѣе общее значеніе и характерно также для литературы другихъ странъ. Люди, которые пишутъ по вопросамъ преподаванія, въ большинствѣ случаевъ знаютъ лишь школьную литературу своей родной страны и ничего не знаютъ ни о параллельныхъ теченіяхъ въ другихъ странахъ, ни объ успѣхахъ чистой науки въ соответственныхъ областяхъ, т. е., въ данномъ случаѣ, въ основахъ геометріи. Это ярко видно въ книгѣ Догсона, который приводитъ лишь англійскихъ авторовъ (исключая Лежандра, стоящаго особнякомъ), и не удѣляетъ никакого вниманія успѣхамъ научной геометрической аксіоматики. Это замѣчаніе можно повторить не разъ, такъ какъ пока еще не сдѣлано сравнительнаго обзора преподаванія геометріи у различныхъ націй.

Къ несравненно большимъ результатамъ привело другое реформаторское движеніе, которое связано съ именемъ Перри и носитъ, можно сказать, революціонный характеръ. Джонъ Перри — инженеръ и преподаетъ въ одномъ изъ самыхъ большихъ техническихъ институтовъ Лондона. Онъ вызвалъ сильное движеніе, приверженцы котораго ожесточенно борются съ одностороннимъ логическимъ тренированіемъ посредствомъ изученія Евклида и предлагаютъ вмѣсто этого методъ преподаванія, который опирался бы главнымъ образомъ на интуицію и прежде всего стремился бы къ тому, чтобы учащійся овладѣлъ математической техникой (*mathematische Exekutive*). Перри приобрѣлъ извѣстность, въ качествѣ автора учебниковъ, которые имѣютъ цѣлью практическое введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ для техниковъ; особенно извѣстностью пользуются его учебникъ „*Calculus for engineers*“ (London, 1897), переведенный на нѣмецкій языкъ („*Höhere Analysis für Ingenieuren*“, переводъ Fricke и Süchting, Leipzig, 1902). Для преслѣдуемыхъ имъ тенденцій характерна также его небольшая книжка „*Practical mathematics*“ (London, 1899); это рядъ лекцій, которыя были читаны рабочимъ и въ очень искусной и увлекательной формѣ содержатъ идеи координатной системы, функціи и т. д.*); авторъ ведетъ изложеніе такимъ образомъ, чтобы оно было доступно для большой публики, и постоянно пользуется примѣрами изъ практической жизни.

Хотя все это относится не къ геометріи собственно, но подъ вліяніемъ движенія, вызваннаго Перри, началась реформа также и въ преподаваніи геометріи, въ которое ввели такъ называемый лабораторный методъ. Учащагося сначала знакомятъ съ практическимъ примѣненіемъ изучаемаго вопроса: онъ вычерчиваетъ и вымѣриваетъ кривыя на клѣтчатой бумагѣ, упражняется въ употребленіи планиметра и т. д.; о логическихъ дедукціяхъ и доказа-

*) Эти лекціи изданы въ русскомъ переводѣ подъ названіемъ „Легкая математика“.

тельствѣхъ здѣсь нѣтъ и помину, или, по крайней мѣрѣ, они отступаютъ на задній планъ, и все вниманіе здѣсь сосредоточено на практическомъ умѣньи, такъ что этотъ методъ представляется діаметрально-противоположнымъ Евклидовскому. Это направленіе нашло себѣ полное выраженіе въ учебникѣ Гаррисона (Harrison, „Practical plane and solid geometry for elementary students“, London, 1903); въ этой книжкѣ вначалѣ указывается все то, что требуется для черченія: чертежная бумага, чертежная доска, игла, которой отмѣчаются точки, карандашъ и т. д. Затѣмъ даются практическія наставленія относительно черченія, указывается, какъ нужно вывѣрить линейку, прямой уголъ; все время учащемуся приходится дѣйствительно выполнять чертежи; такимъ чисто-эмпирическимъ путемъ и при содѣйствіи интуиціи развивается ученіе о простѣйшихъ плоскихъ и пространственныхъ образахъ. Нѣсколько дальше этой совершенно элементарной книжки идетъ другой учебникъ: Harrison и Baxandall, „Practical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics“ (London, 1903), который тѣмъ же эмпирическимъ путемъ знакомитъ учащагося съ начертательной геометрией и методами графическаго исчисленія. Дальнѣйшую литературу вы можете найти въ очень интересномъ докладѣ Фрике, въ которомъ подробно излагается исторія движенія Перри (Robert Fricke, „Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England“, Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinig. 13 (1904) стр. 283 и слѣд.). Весьма интересны также доклады о дискуссіяхъ, вызванныхъ Перри на Глазговскомъ и Иоганнесбургскомъ сѣздахъ (1901 и 1905) Британской Ассоціаціи*) (учрежденія, аналогичнаго нѣмецкому Naturforscherversammlung**) и послужившихъ толчкомъ къ движенію въ пользу реформы преподаванія въ Англіи.

Эти тенденціи Перри я считаю весьма полезными для „Fortbildungsschulen“***), для низшихъ и среднихъ ремесленныхъ школъ, которыя имѣютъ цѣлью выпускать умѣлыхъ ремесленниковъ и техникувъ низшихъ разрядовъ; такъ, напримѣръ, въ школѣ для механиковъ, которая теперь учреждается здѣсь, въ Гёттингенѣ, преподаваніе математики въ духѣ Перри, несомнѣнно, окажется весьма плодотворнымъ. Для старшихъ же классовъ средней школы одностороннія практическія тенденціи Перри кажутся мнѣ недостаточными, хотя онѣ и имѣютъ несомнѣнно свои положительныя стороны; нельзя совершенно исключить изъ преподаванія математики заботу о развитіи логическаго мышленія; желательно создать нѣчто среднее между обѣими крайностями, такъ чтобы наряду съ интуитивнымъ построеніемъ геометріи, исходящимъ изъ практическаго опыта, не урѣзывалась также и ея логическая сторона.

*) Perry, „Discussion on the teaching of mathematics“. (London, 1902). — „Discussion at Iohannesburg on the teaching of elementary mechanics“. (London, 1906).

**) Или „Сѣздовъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей“.

***) Fortbildungsschulen — средняя ступень между низшей и средней школой.

Къ такому компромиссу повидимому и стремятся подъ давлѣніемъ движенія Перри Кембриджскія и Оксфордскія экзаменаціонныя вѣдомства, какъ это видно изъ новыхъ экзаменаціонныхъ правилъ *). Примѣнительно къ нимъ составленъ учебникъ Годффри (Godfrey) и Сиддонса (Siddons): „Elementary geometry practical and theoretical“ (Cambridge, 1904), который въ сравненіи съ „Началами“, выпущенными Ассоціаціей, представляетъ значительный шагъ впередъ. Книга начинается введеніемъ, которое излагается въ духѣ интуиціи (experimental geometry); это геометрическая пропедевтика для первой ступени, давно уже принятая у насъ, но являющаяся новшествомъ въ Англіи. Затѣмъ слѣдуетъ логическое изложеніе геометріи, которое по матеріалу и формѣ имѣетъ, конечно, много общаго съ Евклидомъ, но проникнуто также и новыми идеями; напримѣръ, понятіе о площади фигуры вводится такъ: ученикъ чертитъ фигуру на клѣтчатой бумагѣ и считаетъ заключенные въ ней квадратики. Эта книга, которую можно считать знаменіемъ медленной, но вѣрной модернизациі англійскаго преподаванія, сейчасъ же нашла небывалый сбытъ.

Несмотря на консервативный характеръ школьнаго дѣла въ Англіи, отдѣльные авторы развиваютъ чрезвычайно свободные и интересные взгляды относительно преподаванія, хотя непосредственно они и не могутъ или не желаютъ вызвать этимъ измѣненія въ организациі преподаванія. Въ видѣ примѣра я назову книгу Брэндфорда (Brandford): „A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic“ (Oxford, 1908). Она содержитъ чрезвычайно интересные изслѣдованія о психологическихъ условіяхъ преподаванія, и особенное вниманіе удѣляетъ параллелизму между исторіей развитія ребенка и рода; при этомъ математическое пониманіе ребенка, къ которому должно приравниваться преподаваніе, сопоставляется съ математикой дикихъ племенъ.

Назовемъ еще книгу Юнговъ (G. и W. H. Young): „The first book of geometry“ **), недавно изданную на нѣмецкомъ языкѣ проф. Бернштейномъ (Bernstein) подъ названіемъ: „Der kleine Geometer“. Авторъ желаетъ освоить ребенка съ геометріей новымъ и оригинальнымъ путемъ, при чемъ ученикъ уже на первыхъ порахъ вводится въ область трехмѣрныхъ пространственныхъ представленій. Руководящая мысль автора та, что природная интуиція пространства по необходимости будетъ ослабѣвать, если нарочно приучать ребенка исключительно къ черченію на двумѣрной бумагѣ, и такимъ путемъ искусственно ограничивать его способность къ интуиціи исключительно плоскостью. Авторъ съ самаго начала прибѣгаетъ къ интересному методу складыванія бумаги ***), который даетъ возможность

*) Ср. напримѣръ: „Regulations of the Oxford Cambridge Schools Examination board for the Year 1904“, на стр. 37 находятся спеціальныя отдѣлы о „Practical Geometry“.

**) Книга вышла недавно и по-русски: Ч. Юнгъ и У. Юнгъ. „Первая книжка по геометріи“. Переводъ съ англійскаго.

***) Ср. С. Р. о. у. „Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги“. Одесса. Mathesis, 1910.

при помощи булавок строить всевозможныя пространственныя и плоскія фигуры. При этомъ получаются также чрезвычайно наглядныя и въ то же время логически удовлетворительныя доказательства, напримеръ, доказательство Пифагоровой теоремы, и, вообще, возникаетъ новый интересный способъ построения геометріи, имѣющій значеніе не только для начальнаго преподаванія.

Но оставимъ Англію и перейдемъ къ рассмотрѣнію преподаванія геометріи во Франціи.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Первый всероссійскій съѣздъ преподавателей математики.

На этихъ дняхъ въ подлежащія инстанціи кружкомъ лицъ, живо интересующихся успѣхами преподаванія математики въ средней школѣ, представленъ на утвержденіе проектъ положенія „Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“*).

Съѣздъ предполагается созвать во время ближайшихъ рождественскихъ вакацій въ С.-Петербургѣ (съ 27 декабря по 3 января). Программа Съѣзда обнимаетъ цѣлый рядъ вопросовъ, привлекающихъ вниманіе преподавателей. Приведемъ ее полностью.

- 1) Психологическія основы обученія математикѣ (активность, наглядность, роль интуиціи и логики и т. д.).
- 2) Содержаніе курса школьной математики съ точекъ зрѣнія: а) современныхъ научныхъ стремленій, б) запросовъ жизни и в) общепедагогическихъ воззрѣній.
- 3) Согласованіе программъ математики средней школы съ программами низшихъ и высшихъ школъ.
- 4) Вопросы методики школьной математики.
- 5) Учебники и учебныя пособія.
- 6) Историческій и философскій элементы въ курсѣ математики средней школы.
- 7) Рисованіе, лѣпка и ручной трудъ, какъ вспомогательныя средства при обученіи математикѣ.
- 8) Подготовка преподавателей математики.

*) Проектъ и ходатайство подписали: членъ Государственнаго Совѣта засл. проф. А. В. Васильевъ, директоръ Педагогическаго Музея ген.-лейт. З. А. Махшеевъ, засл. проф. Петербургскаго университета К. А. Поссе, проф. С. Е. Савичъ. Въ выработкѣ программы и проекта принимали участіе сверхъ того пом. дир. Педагогическаго Музея Д. Э. Теннеръ, преподаватели: Д. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ и Д. М. Левитусъ.

При Съѣздѣ организуется выставка учебныхъ пособій, діаграммъ и литературы.

Въ своей совокупности программа затрагиваетъ почти всѣ насущные вопросы преподаванія, и попытка инициаторовъ Съѣзда уже по одному этому заслуживаетъ полного вниманія.

Но еще болѣе важною представляется она потому, что до сихъ поръ, несмотря на высказываемыя не разъ пожеланія, на нашихъ Съѣздахъ Естествоиспытателей и Врачей секціи преподаванія математики не устраивалось, въ противоположность германскимъ съѣздамъ, гдѣ соотвѣтственная секція приобрѣла право гражданства. Правда, наши съѣзды гораздо болѣе рѣдки (въ Германіи они собираются ежегодно) и потому привлекаютъ каждый разъ все большее число участниковъ и все труднѣе становится дѣло ихъ организаціи.

Поэтому, практичнѣе, конечно, не приобщать новую секцію и, слѣдовательно, новые кадры участниковъ, а устраивать сепаратные съѣзды подобно Менделѣевскимъ и Пироговскимъ.

Во время послѣдняго XII Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ Москвѣ, въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 4 января 1910 года, на которое были приглашены члены секціи математики Съѣзда, обсуждался вопросъ о Съѣздѣ преподавателей математики (см. протоколъ въ № 508 „Вѣстника“); собраніе признало желательнымъ, чтобы такой Съѣздъ состоялся въ возможно непродолжительномъ времени и чтобы онъ былъ всероссійскимъ. Позже подобныя же пожеланія высказывались во время I-го Всероссійскаго Съѣзда по экспериментальной педагогикѣ, въ частныхъ засѣданіяхъ членовъ-математиковъ и въ засѣданіяхъ Математическаго Отдѣла Рижской педагогической выставки въ апрѣлѣ текущаго года.

Но всякій первый опытъ труденъ. Чтобы I-ый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики, если онъ будетъ разрѣшенъ, на что мы питаемъ твердую надежду, былъ бы и удаченъ, необходимо, чтобы „всѣ математическія общества и отдѣльныя лица, имѣющія къ тому возможность, приложили старанія къ осуществленію Съѣзда“.

Поэтому въ предварительныхъ собраніяхъ лицъ, являющихся фактическими инициаторами Съѣзда, было рѣшено обратиться ко всѣмъ провинціальнымъ обществамъ и учрежденіямъ съ просьбою, не дожидаясь разрѣшенія Съѣзда, приступить къ подготовительной работѣ: распространять свѣдѣнія о времени, мѣстѣ и задачахъ Съѣзда, а также выяснять, какіе доклады могутъ представить лица, тяготеющія къ соотвѣтственному обществу, и принять на себя трудъ предварительнаго просмотра и одобренія этихъ докладовъ.

Съ своей стороны, организаторы предполагаютъ привлечь къ участию въ Съѣздѣ профессоровъ и педагоговъ, русскихъ и иностранныхъ, для прочтенія на Съѣздѣ докладовъ по отдѣльнымъ вопросамъ программы Съѣзда.

Въ концѣ августа, когда можно предполагать, что разрѣшеніе будетъ уже получено, намѣчено предварительное организаціонное совѣщаніе съ участіемъ, представителей различныхъ обществъ и учреждений, которыя пожелаютъ принять участіе въ подготовкѣ Сѣзда.

Тогда выяснится, вѣроятно, хотя частью, на какіе доклады можно рассчитывать и, слѣдовательно, можно будетъ приступить къ детальной разработкѣ программы Сѣзда, раздѣленію на секціи и т. д. *).

Отъ души пожелаемъ успѣха предполагаемому Сѣзду.

Проф. Д. Синцовъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 420 (5 сер.). Дана окружность O и внѣ ея двѣ точки A и B . Вписать въ эту окружность четырехугольникъ такъ, чтобы двѣ стороны его пересѣкались въ A подъ прямымъ угломъ, а двѣ другія пересѣкались въ B .

И. Александровъ (Москва).

№ 421 (5 сер.). Въ данномъ треугольникѣ ABC проводятъ биссектрису BD_1 внѣшняго угла изъ вершины B , затѣмъ въ треугольникѣ ABD_1 проводятъ биссектрису D_1D_2 внѣшняго угла изъ вершины D_1 , затѣмъ въ треугольникѣ AD_1D_2 биссектрису D_2D_3 внѣшняго угла изъ вершины D_2 и т. д. Вычислить уголъ $D_{n-1}D_nD_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) и найти его предѣлъ при безконечномъ возрастаніи n въ томъ предположеніи, что указанное выше построеніе можно продолжать безконечно. При какомъ соотношеніи между углами даннаго треугольника это построеніе для нѣкотораго изъ треугольниковъ ABC , ABD_1 , ABD_2 и т. д. прекратится само собою?

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 422 (5 сер.). Въ треугольникѣ ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Доказать, что произведеніе сторонъ треугольника $A_1B_1C_1$, вершины котораго суть основанія высотъ, равно произведенію трехъ несмежныхъ отрезковъ, на которыя стороны треугольника ABC дѣлятся высотами.

И. Поляковъ (Тифлисъ).

*) Въ теченіе лѣтнаго времени справки относительно Сѣзда даются изъ канцеляріи Педагогическаго Музея (письменно) — СПб., Фонтанка, 10.

№ 423 (5 сер.). Вычислить сумму

$$C_n^0 C_n^{2m} - C_n^1 C_n^{2m-1} + \dots + (-1)^k C_n^{2m-k} + \dots + C_n^{2m} \cdot C_n^0,$$

гдѣ C_p^q обозначаетъ вообще число сочетаній изъ p элементовъ по q и гдѣ $n < 2m$.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 424 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^3 - 100 = 225y.$$

Р. Витвинскій (Екатеринославъ).

№ 425 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 1} = 8x(x + 1).$$

N.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 293 (5 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ по периметру его $2p$ и по биссектрисѣ l прямого угла.

(Заняत्व. изъ *L'Education Mathématique*).

Пусть ABC есть искомый треугольникъ, при чемъ черезъ A обозначена вершина прямого угла, черезъ $AD = l$ — биссектриса прямого угла, а черезъ M, N, P точки касанія соответственно со сторонами AB, BC, AC круга, вписаннаго относительно треугольника ABC со стороны BC . Тогда имѣемъ:

$$BM = BN, \quad CN = CP, \quad AM = AP,$$

а потому

$$AM + AP = AB + BM + AC + CP = AB + BD + DC + AC = AB + BC + AC = 2p,$$

откуда

$$2AM = 2p, \quad AM = AP = p.$$

Изъ сказаннаго выше вытекаетъ слѣдующее построение: на сторонахъ произвольнаго прямого угла $MA'P'$ откладываемъ равные отрезки $AM = AP = p$, гдѣ p есть полупериметръ искомага треугольника, а на биссектрисѣ угла $MA'P'$ откладываемъ отрезокъ $AD = l$, гдѣ l — биссектриса искомага треугольника; затѣмъ, возставивъ изъ точекъ M и N перпендикуляры соответственно къ AM и AN , описываемъ изъ точки пересѣченія O , какъ изъ центра, окружность радиусомъ OM , которая коснется сторонъ угла MAN въ точкахъ M и N ; наконецъ, изъ точки D проводимъ касательную къ этой окружности, которая пересѣкаетъ стороны угла MAN въ точкахъ B и C . Треугольникъ ABC есть искомый. Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы точка D

лежала внѣ круга O или на его окружности, т. е. чтобы имѣло мѣсто неравенство

$$OD \geq OM,$$

или

$$OA - AD \geq OM; \quad (1)$$

такъ какъ $OM = p$, $OA = OM\sqrt{2} = p\sqrt{2}$, то неравенство (1) можно записать въ равносильной формѣ:

$$p\sqrt{2} - l \geq p,$$

или

$$l \leq p(\sqrt{2} - 1). \quad (2)$$

Замѣчаніе. Если $l < p(\sqrt{2} - 1)$ [см. (2)], то изъ точки D можно провести къ окружности O двѣ касательныя, которыя пересѣкутъ прямая AM и AN соответственно въ точкахъ B, C и B', C' ; но треугольники ABC и $AB'C'$ равны, такъ какъ точки B, C' и B', C попарно симметричны относительно прямой AO . Такимъ образомъ въ случаѣ возможности задача всегда имѣетъ лишь одно рѣшеніе.

Н. Доброгаевъ (Тульчинъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Р. Витвинскій* (Одесса).

№ 303 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ, а затѣмъ въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2x = 150.$$

Пусть x и y суть два цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ данному уравненію. Тогда

$$x + y = t, \quad (1)$$

гдѣ t есть нѣкоторое цѣлое число. Подставляя въ данное уравненіе t вмѣсто $x + y$, находимъ:

$$t^2 - t - 2x = 150. \quad (2)$$

Итакъ, цѣлые корни даннаго уравненія удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и (2) при t цѣломъ. Изъ уравненія (2) имѣемъ:

$$x = \frac{t^2 - t - 150}{2} = \frac{t(t-1)}{2} - 75, \quad (3)$$

а затѣмъ изъ уравненія (1)

$$y = t - \frac{t(t-1)}{2} - 75.$$

или

$$y = \frac{t(3-t)}{2} + 75. \quad (4)$$

Итакъ, цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія выражаются равенствами (3) и (4) въ которыхъ t — нѣкоторое цѣлое число. Наоборотъ, при всякомъ цѣломъ значеніи t числа x и y , опредѣляемыя формулами (3) и (4), удовлетворяютъ дан-

ному уравненію, такъ какъ равенства (3) и (4) равносильны системѣ уравненій (1), (2), изъ которыхъ вытекаетъ предложенное для рѣшенія уравненіе. Кромѣ того, при всякомъ цѣломъ значеніи t формулы (3) и (4) дадутъ цѣлыя же значенія для x и y , такъ какъ каждое изъ произведеній $t(t-1)$ и $t(t-3)$ при всякомъ цѣломъ t кратно 2. Итакъ, всѣ цѣлыя рѣшенія данного уравненія выражаются формулами (3) и (4), въ которыхъ t есть произвольное цѣлое число. Для того, чтобы выдѣлить среди цѣлыхъ рѣшеній разсматриваемаго неопредѣленнаго уравненія цѣлыя и положительныя рѣшенія, достаточно найти цѣлыя и при томъ положительныя значенія t (такъ какъ при $x > 0$ и $y > 0$ [см. (1)] $t > 0$), удовлетворяющія неравенствамъ

$$\frac{t(t-1)}{2} - 75 > 0, \quad \frac{t(3-t)}{2} + 75 > 0,$$

или равносильнымъ неравенствамъ:

$$t^2 - t - 150 > 0, \quad t^2 - 3t - 150 < 0, \quad (5)$$

получаемымъ послѣ обычныхъ преобразованій. Записать неравенства (5) въ видѣ:

$$(t - \frac{1}{2})^2 - 150\frac{1}{4} > 0, \quad (t - \frac{3}{2})^2 - 152\frac{1}{4} < 0,$$

мы видимъ, что искомыя значенія t суть цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія одновременно условіямъ:

$$|t - \frac{1}{2}| > |\sqrt{150\frac{1}{4}}|, \quad |t - \frac{3}{2}| < |\sqrt{152\frac{1}{4}}|,$$

которые можно записать въ видѣ:

$$|t - \frac{1}{2}| > 12 + \alpha, \quad |t - \frac{3}{2}| < 12 + \beta, \quad (6)$$

гдѣ α и β суть нѣкоторыя положительныя и меньшія единицы числа. При цѣломъ положительномъ t , меньшемъ 13, не выполняется первое, а при цѣломъ положительномъ t , большемъ 13, не выполняется второе изъ неравенствъ (6); наконецъ, при $t = 13$ выполняются оба неравенства (6). Итакъ, искомое значеніе есть $t = 13$, которому отвѣчаютъ цѣлыя положительныя рѣшенія данного уравненія

$$x = \frac{13(13-1)}{2} - 75 = 3, \quad y = \frac{t(3-t)}{2} + 75 = \frac{13(3-13)}{2} + 75 = 10.$$

Итакъ, $x = 3$, $y = 3$ есть единственная пара цѣлыхъ положительныхъ корней данного уравненія.

В. Богомоловъ (Шацкъ); Л. Богдановичъ (Ярославль); Р. Витвинскій (м. Добровеличовка).

СЕМЕЙНОЕ ВОСПИТАНІЕ

Съ 1-го января 1911 года.

Редакторъ женщина-врачъ Дернова-Яроменко.

Слѣдующія лица изъявили согласіе **принимать участіе въ журналѣ**: Проф. В. М. Бехтеревъ, В. А. Беклепова, П. А. Голубевъ, А. С. Гибшъ, Н. И. Долгополовъ, М. П. Граціонова, Е. Е. Соловьева, Н. А. Шишло, О. А. Шишло, Прив.-доцентъ Моск. У-та Н. А. Филипповъ, А. В. Якубъ и др. врачи, педагоги и родители.

Подписная цѣна на 1 годъ—3 руб., на полгода 1 р. 50 коп. съ пересылкой и доставкой. Адресъ редакціи: г. Астрахань, Демидовская ул., д. Калинина. Въ др. городахъ подписка принимается въ мѣстныхъ книжныхъ магазинахъ.

ПРОГРАММА:

1. **Отъ редакціи.** Значеніе семейнаго воспитанія. 2. **Результаты современнаго воспитанія.** Смертность, заболѣваемость и данныя изслѣдованія физическаго и психическаго состоянія дѣтей. Самоубійства дѣтей и т. п. 3. **Особенности дѣтскаго возраста.** Научныя данныя о ходѣ развитія тѣла и души дѣтей по возрастамъ. 4. **Гигіена тѣла и души ребенка.** 5. **Ненормальности дѣтскаго возраста.** Значеніе наследственности и условій жизни для развитія дѣтей. Различныя отклоненія отъ нормы Недостатки физическіе и психическіе. Пороки. Преступности. Односторонность развитія, отсталость, гениальность и т. п. 6. **Программы и способы наблюденій за дѣтьми.** Составленіе характеристикъ. 7. **Данныя экспериментальной психологіи и педагогики.** 8. **Дневники родителей и воспитателей.** Воспоминанія и личныя наблюденія изъ дѣтской жизни. 9. **Ошибки и промахи въ дѣлѣ воспитанія.** Письма родителей и воспитателей и отвѣты на нихъ. 10. **Дѣтское творчество.** Рисунки, вымыслъ, фантазія, оригиналы, игры, работы и т. п. 11. **Вліяніе семьи и ея склада на образованіе личности.** Критика и разборъ біографіи великихъ людей. Отношеніе взрослыхъ къ дѣтямъ. 12. **Половой вопросъ въ дѣлѣ воспитанія.** 13. **Фотографіи и рисунки,** характеризующіе дѣтскую жизнь и воспитательные приемы. 14. **Справочный отдѣлъ.** Таблицы, картограммы и др. данныя о правильномъ развитіи дѣтей. Общества родителей и воспитателей, ихъ цѣли, программы, дѣятельность. Литература педагогическая и дѣтская. Игрушки, пособия и предметы гигиены. Съѣзды, выставки и т. п. 15. **Критика и бібліографія.** Изъ газетъ и журн. Старыя и новыя книги. Рефераты. 16. **Сравнительная педагогика.** Постановка воспитанія у различныхъ народовъ и въ различныхъ странахъ. Вліяніе природы, общественнаго строя, религіи и семьи на образованіе народныхъ типовъ. 17. **Иностранный отдѣлъ.** Обзоръ иностранной литературы. Корреспонденціи. Статьи. Переводы.

20-й годъ
изданія.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1911 ГОДЪ
НА ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

20-й годъ
изданія.

ТЕХНИЧЕСКОЕ И КОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

Постоянною Коммиссіею по техническому образованію при Императорскомъ Русскомъ Техническомъ Обществѣ,
подъ редакціей А. Г. Неболсина, при ближайшемъ участіи А. Н. Быкова.

Журналъ посвященъ разработкѣ вопросовъ техническаго, коммерческаго, торгово-мореходнаго, сельскохозяйственнаго и промышленнаго образованія, а также разработкѣ вопросовъ внѣшкольнаго образованія взрослыхъ рабочихъ.

ПРОГРАММА ИЗДАНИЯ: I. Правительственныя распоряженія. II. Статьи по вопросамъ упомянутаго образованія. III. Хроника техническаго и Коммерческаго образованія въ Россіи и за границей. IV. Критика и бібліографія. V. Приложение: Брошюры по техническимъ знаніямъ для народа и рабочихъ.

„Техническое и Коммерческое Образованіе“ въ 1911 г. будетъ выходить ежемѣсячно кромѣ 4 лѣтнихъ мѣсяцевъ (Май—Августъ) книжками отъ 4¹/₂ до 6 печатныхъ листовъ каждая. Книжки осенняго полугодія выходятъ въ началѣ, а весенняго въ концѣ каждого мѣсяца.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: съ доставк. и перес. въ Россіи 3 р. За 1¹/₂ г. 1 р. 50 к., за 3 г. 4 р.

Подписка принимается: въ конторѣ редакціи (С.-Петербургъ, Пантелеймоновская, 2) и въ книжныхъ магазинахъ Н. П. Карбасникова, „Нов. Вр.“, Риккера и Цинзерлинга (Мелье).

Тарифъ за объявленія, печатаемые въ журналѣ.

За 8 разъ.
100 руб.

За 4 раза.
60 руб.

За 2 раза.
30 руб.

За 1 разъ.
15 руб.

1 страница впереди текста.

1¹/₂ страницы впереди текста или 1 страница позади текста.

60 руб.

35 руб.

20 руб.

10 руб.

1¹/₂ страницы позади текста.

35 руб.

20 руб.

12 руб.

5 руб.

Обложка и исключительныя страницы по соглашенію.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не
менѣе 24 стр. каждый,
подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросам преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензій о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенные въ 1910 г.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре Новая механика. — *П. Флоровъ*. Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ. — *И. Мессеримидтъ*. Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэлъ*. Марсъ. — *С. Виноградовъ*. Развѣтленіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школь. — *Е. Григорьевъ*. О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$. — Проф. *Д. Синцовъ*. Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель. — *Г. Урбанъ*. Являются ли основныя законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ*. Объ ирраціональныхъ числахъ. — *П. Ренаръ*. Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ*. Мировой эфиръ. — *К. Лебединцевъ*. Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелингъ*. Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ*. Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ*. Естественныя и искусственныя пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

44-ый семестръ.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. Прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго*. О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. Проф. *Б. К. Млодзевскаго*. Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *К. Иванова*. Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. Проф. *Д. Синцова*. Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *Н. Васильева*. Броуновское движеніе. *А. Толлоса*. Дѣленіе на 9. *А. Филиппова*. Объ ирраціональныхъ числахъ. *Е. Смирнова*. Основы беспроволочной телеграфіи. *Л. Мандельштама* и *Н. Папаллекси*. О биссектрисахъ треугольника. *Е. Томашевича*. О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. Проф. *Д. Мордухай-Болтовскаго*. Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка*. Генезисъ минераловъ. *Г. Е. Бёкке*. Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *К. Лебединцева*. Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. Прив.-доц. *А. А. Дмитровскаго*. Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій. *Т. Арльта*.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ **5% уступки.**

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.