№ 526—527.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIV-го Семестра № 10—11-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIV Сем. № 10—11.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 526—527.

Генезисъ минераловъ.

Г. Е. Бёкке.

Взгляды на происхожденіе минераловъ, основанные на точномъ наблюденіи природы и комбинированіи фактовъ, имѣютъ за собой не болѣе ста лѣтъ. До того времени въ рѣшеніи этихъ вопросовъ видную роль играли часто фантастическія теоріи греческихъ и римскихъ философовъ.

Въ минералогіи, какъ и во всѣхъ отрасляхъ естествознанія, XIX-й вѣкъ является блестящей эпохой. Въ началѣ его шелъ ожесточенный споръ объ основномъ вопросѣ ученія о породахъ и минералахъ: съ одной стороны, плутонисты принимали происхожденіе всѣхъ породъ изъ огненной магмы, съ другой стороны, нептунисты полагали, что образованіе породъ происходитъ исключительно воднымъ путемъ. Даже Гете заявляетъ себя рѣшительнымъ сторонникомъ нептунистовъ: какъ приверженецъ эволюціонной идеи, онъ не можетъ мириться съ преобладающимъ значеніемъ катастрофъ, какъ это принимаютъ плутонисты. Во второй части «Фауста», въ разговорѣ между Анаксагоромъ и Ѳалесомъ объ этомъ вопросѣ, дѣятельность природы характеризуется слѣдующимъ образомъ:

Sie bildet regelnd jegliche Gestalt,
Und selbst im Grossen ist es nicht Gewalt.

Теперь эти споры должны казаться намъ совершенно праздными, такъ какъ въ настоящее время извѣстные минералы одновременно являются какъ плутоническими, такъ и нептуническими. Минералоги принимаютъ теперь, что огненно-жидкія массы при своемъ отвердѣваніи дали минералы, что изъ магмъ потекли горячіе растворы, которые при своемъ охлажденіи отложили разнообразныя минеральныя образованія, и, наконецъ, что циркулирующія воды при перекристаллизаціи существовавшихъ уже образованій часто придавали имъ новыя формы. Какое множество вліяній можетъ вызывать все новыя и новыя превращенія! Образовавшись при высокой температурѣ, минералы потеряли послѣ охлажденія свое равновѣсіе, главнымъ образомъ, въ борьбѣ съ разлагающимъ вліяніемъ атмосферныхъ газовъ; уже одно это обусловливаетъ разнообразныя новообразованія. Еще быстрѣе дѣйствуетъ послѣдующее сильное нагрѣваніе, напримѣръ, вслѣдствіе вулканическихъ прорывовъ породъ, которые часто сопровождаются пропитываніемъ минераловъ газовыми испареніями магмы. Этому метаморфизму мы обязаны самыми цѣнными изъ нашихъ минераловъ, — напримѣръ, мраморомъ, гранатомъ, топазомъ и множествомъ другихъ драгоцѣнныхъ камней. Наряду со всѣми этими преобразующими факторами слѣдуетъ упомянуть и о дѣйствіи сильнаго „горнаго давленія“; этотъ дѣятель еще мало изслѣдованъ, и вліяніе его часто чрезмѣрно преувеличается, но нерѣдко, можетъ быть, оцѣнивается и слишкомъ мало.

Наша задача заключается въ изслѣдованіи закономѣрностей этихъ явленій.

Сперва я желалъ бы разсмотрѣть ближе образованіе минераловъ изъ огненно-жидкихъ потоковъ, а затѣмъ перейти къ возникновенію минераловъ изъ водныхъ растворовъ и паровъ. Въ заключеніе я разсмотрю еще нѣкоторые преобразовательные процессы, имѣющіе весьма большое значеніе для исторіи земли.

Вслѣдствіе сложности матеріала вывести упомянутыя законообразности изъ общихъ законовъ очень трудно. Еще въ 1893 г. Ф. Циркель (F. Zirkel), говоря о послѣдовательномъ порядкѣ выдѣленія минераловъ изъ расплавленнаго потока, вынужденъ былъ выразиться слѣдующимъ образомъ: «имѣемъ ли мы здѣсь дѣло съ общими всеобъемлющими законами, остается еще открытымъ вопросомъ, на который слѣдуетъ, повидимому, дать скорѣе отрицательный, чѣмъ положительный отвѣтъ» [1]). Конечно, въ настоящее время мы уже можемъ выразить твердую увѣренность, что законы физической химіи всѣ безъ исключенія остаются въ силѣ также и въ жизни горныхъ породъ. Но при провѣркѣ этихъ законовъ здѣсь приходится преодолѣвать чрезвычайно большія экспериментальныя затрудненія. Приходится добиваться очень высокихъ температуръ плавленія и точно измѣрять ихъ; часто расплавленная масса обладаетъ большой вязкостью, и процессы кристаллизаціи весьма замедляются: часто даже кристаллизаціонный процессъ не наступаетъ вовсе, такъ что послѣ охлажденія получается лишь стеклообразная масса. Поэтому мы должны открыть законы последовательной кристаллизаціи сперва на такихъ тѣлахъ, съ которыми легко оперировать въ лабораторіяхъ, какъ, напримѣръ, на соляхъ (хлоридахъ и нитратахъ) и металлахъ.

---

[1]) „Petrographie“, I, 726.

Руководительницей въ этихъ изслѣдованіяхъ служила термодинамика. Изъ основныхъ законовъ термодинамики можно вывести, какимъ образомъ простыя вещества и смѣси при произвольныхъ температурахъ и давленіяхъ приходятъ въ состояніе внутренняго равновѣсія. Онѣ распадаются при этомъ на жидкость и паръ или на жидкость и кристаллы и часто одновременно на большее еще число различныхъ аггрегативныхъ формъ, въ зависимости отъ господствующей температуры и давленія. Геніальный Джибсъ (Williard Gibbs), которому мы обязаны разработкой термодинамики, далъ глубокимъ результатамъ своихъ изысканій такую абстрактную форму, что лишь 25 лѣтъ спустя они сдѣлались извѣстными болѣе широкимъ кругамъ; но отъ взгляда фанъ-деръ-Ваальса (van-der-Vaals) они не ускользнули. Своимъ знакомствомъ съ послѣднимъ Баквисъ Рузебумъ (Bakhuis Roozeboom)[1]) обязанъ своимъ знаніемъ общихъ правилъ ученія о фазахъ*), которое онъ положилъ въ основаніе своихъ блестящихъ опытныхъ изслѣдованій. Такимъ образомъ былъ проложенъ путь и для систематическаго пониманія образованія породъ, и уже въ 1889 г. ректоръ лейденскаго университета фанъ-Беммеленъ (van-Bemmelen) въ своей публичной ректорской рѣчи обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что изслѣдованія Рузебума открываютъ новые пути также въ минералогіи и петрографіи. Еща раньше Гётри (Guthrie)[2]) и Тиллъ (Teall)[3]) примѣняли понятіе «эвтектикумъ» къ нѣкоторымъ горнымъ породамъ, въ особенности къ письменному граниту. Замѣчено было, что при охлажденіи раствора соли или смѣси двухъ металловъ въ окончательномъ результатѣ образуется соединеніе тѣсно сросшихся кристалловъ двоякаго рода,— напримѣръ, льда и соли; эта смѣсь получила названіе кріогидрата или эвтектикума. Сростокъ кварца съ полевымъ шпатомъ, называющійся вслѣдствіе сходства съ письменами письменнымъ гранитомъ, вполнѣ правильно разсматривался, какъ послѣдній продуктъ отвердѣванія магмы, состоящей изъ вещества кварца и полевого шпата. При этомъ изслѣдователи уже стали на правильную точку зрѣнія, согласно которой между такъ называемыми растворами (напримѣръ, растворами солей) и расплавленными веществами нѣтъ принципіальнаго различія.

Но долгое время мнѣнія петрографовъ, занимавшихся этими изслѣдованіями, были еще сбивчивы и часто произвольны. Въ послѣднія же два десятилѣтія взгляды по этому вопросу получили большую ясность. Фохтъ (Vogt)[4]) и Дёлтеръ (Doelter[5]) опубликовали уже обширныя теоретическія и экспериментальныя изысканія, а изслѣдованія, производящіяся въ институтѣ Кэрнеджи въ Вашингтонѣ, владѣющемъ самыми богатыми приспособленіями, въ значительной степени способствуютъ правильному пониманію возникновенія минераловъ изъ потоковъ расплавленныхъ силикатовъ.

---

[1]) Ср. Bakhuis Rooseboom: „Die heterogenen Gleichgewichte“, I, стр. 7, 1906.

*) Ср. учебникъ физики Лоренца, изд. „Mathesis“, т. I.

[2]) „Philos. Magaz.“ (4), 49, 20. 1875.

[3]) „British Petrography“. 1888.

[4]) „Die Silikatschmelzlösungen“, I и II. (1903—1904), и рядъ статей въ „Min. Mitt.“ Чермака.

[5]) Множество статей въ „Min. Mitt.“ Чермака и въ другихъ журналахъ.

Я упомянулъ уже вкратцѣ, какія обстоятельства чрезвычайно затрудняютъ экспериментированіе съ силикатами въ цѣляхъ изученія явленій кристаллизаціи. Помимо необходимыхъ для этого высокихъ температуръ, трудности обусловливаются въ особенности наклонностью къ переохлажденію и вязкостью расплавленныхъ веществъ. Чтобы дать понятіе объ этой вязкости, я приведу одинъ опытъ Дэя (Day) и Эллена (Allen)[1]. Они расплавили кристаллы натроннаго полевого шпата въ «жидкость», которая имѣла при 1300° столь большую вязкость, что сдѣланная изъ нея балка, подпертая на двухъ концахъ, не прогибалась. Если платиновой проволокой давить по срединѣ смѣси расплавленнаго вещества и вкрапленныхъ въ него кристаллическихъ обломковъ при указанной температурѣ и расположеніи опыта, то кристаллы и жидкость гнутся въ одинаковой мѣрѣ.

Вѣроятнѣе всего этой вязкости слѣдуетъ приписать наклонность расплавленныхъ силикатовъ къ переохлажденію съ образованіемъ стекла. Тамманъ (Tammann)[2] глубоко изучилъ законы переохлажденія и подтвердилъ ихъ множествомъ чрезвычайно поучительныхъ опытовъ. Главными факторами при кристаллизаціи является число кристаллическихъ ядеръ, образующихся въ единицу времени, и скорость роста этихъ ядеръ. Если температура расплавленнаго вещества ниже той температуры, при которой жидкость и кристаллы находятся въ постоянномъ устойчивомъ равновѣсіи, т. е. если расплавленное тѣло переохлаждено, то число образующихся въ единицу времени кристаллическихъ ядеръ возрастаетъ съ этимъ переохлажденіемъ. Скорость же роста этихъ ядеръ, напротивъ, быстро падаетъ съ уменьшеніемъ температуры и скоро понижается до нуля. Такимъ образомъ, два фактора, отъ совмѣстнаго вліянія которыхъ зависитъ тенденція къ кристаллизаціи, — число ядеръ и скорость роста ядеръ, дѣйствуютъ въ противоположныхъ направленіяхъ. Легко понять, что при этомъ можетъ наступить нѣкоторый максимумъ кристаллизаціи. Этотъ максимумъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ проявляется поразительнымъ образомъ; напримѣръ, если довести температуру стекла натріеваго силиката, приблизительно, до 500°, то вслѣдствіе устраненія переохлажденія наступаетъ внезапное разстеклевываніе[3]. Нѣсколько разъ Тамманнъ достигалъ переохлажденія вещества въ нажимныхъ аппаратахъ подъ давленіемъ въ нѣсколько тысячъ атмосферъ; при нѣкоторой опредѣленной степени охлажденія кристаллизація наступала съ такой быстротой, что весь тяжелый аппаратъ дрожалъ, какъ если бы происходило землетрясеніе[4]. Въ иныхъ случаяхъ подобныя же причины можетъ быть, въ самомъ дѣлѣ дѣйствуютъ при землетрясеніяхъ.

Изображенныя здѣсь обстоятельства, столь сильно затрудняющія изученіе явленій равновѣсія въ силикатахъ, съ большой ясностью обнаружились также и въ природѣ при образованіи породъ и минераловъ. Когда отвердѣваніе совершалось съ достаточно большой скоростью, какъ при изверженіяхъ лавы, то часто огромнѣйшія массы уклонялись отъ кристаллизаціи, и онѣ лежатъ теперь въ видѣ стеклообразныхъ породъ.

---

[1]) Am. I. of. Science (4) 19, 93. 1905.

[2]) „Kristallisieren und Schmelzen“, стр. 148. 1903.

[3]) Guertler, „Zeitschrift f. Anorg. Chemie“, 40, 268. 1904.

[4]) Объ этомъ онъ сообщилъ мнѣ устно.

Въ природѣ замѣчается еще одно отклоненіе отъ равновѣсія, которое до сихъ поръ еще не удалось воспроизвести лабораторнымъ путемъ. Я подразумѣваю подъ этимъ недостатокъ пространственной однородности, дифференцированіе породъ. Мнѣнія по этому поводу пока еще сильно расходятся. Когда дѣйствующій вулканъ выбрасываетъ наружу одну за другой лавы совершенно различнаго химическаго состава, то мы еще можемъ думать, что вулканъ питается изъ различныхъ очаговъ. Но если въ породѣ, которая, повидимому, отвердѣла изъ однообразной массы, находятся обширныя мѣста со скопленіемъ особаго минерала (или минеральнаго комплекса), то такое явленіе до сихъ поръ еще не получило удовлетворительнаго объясненія. Произошли ли химическія дифференцировки уже въ самой магмѣ? Или передъ нами лишь кристаллизаціонное явленіе? Не дѣйствовали ли здѣсь совершенно особые факторы,—напримѣръ, электрическія разности потенціаловъ? Здѣсь остаются еще открытыми и ждутъ своего разрѣшенія фундаментальные вопросы.

До сихъ поръ я говорилъ все время объ образованіи минераловъ изъ огненножидкихъ магмъ, но какое множество минераловъ обязано своимъ происхожденіемъ кристаллизаціи изъ водныхъ растворовъ! Часто растворы были горячи и вытекали изъ магмы, нагруженные многими веществами, для растворенія которыхъ въ значительныхъ количествахъ требуется именно высокая температура. При охлажденіи осѣли сульфиды, силикаты, горный хрусталь, часто въ удивительно красивыхъ кристаллахъ. Но испареніе растворовъ при обыкновенной температурѣ также порождало массы минераловъ. Подобныя образованія минераловъ часто можно прослѣдить съ большой ясностью,—напримѣръ, образованіе известняка (вслѣдствіе улетучиванія углекислоты, которой обусловливается довольно большая растворимость углекислаго кальція) и отложеніе каменной соли. Послѣднее явленіе мы разсмотримъ нѣсколько ближе. При видѣ мощныхъ отложеній соли сейчасъ же приходитъ мысль объ испареніи морской воды. Но откуда взялась соль океана? Фонъ-Рихтгофенъ (von-Richthofen) вычислилъ, что при испареніи всей морской воды всю поверхность земли можно было бы покрыть слоемъ соли въ 40 *м.* толщиною. Если предположить, что эта масса соли накопилась благодаря процессу выщелачиванія породъ, то приблизительно одна пятая часть высоты материка должна была бы быть унесенной водой въ видѣ соли. Этому противорѣчитъ то обстоятельство, что въ свѣжихъ породахъ мы находимъ совершенно ничтожныя количества хлористаго натрія и другихъ хлоридовъ и сульфатовъ. Поэтому соль въ океанѣ должна происходить изъ другого источника. Представляютъ себѣ, что до отвердѣнія земной коры атмосфера содержала соли въ формѣ паровъ, какъ теперь имѣетъ мѣсто въ атмосферѣ солнца. При образованіи твердой земной оболочки соль должна была выдѣлиться изъ атмосферы, сгустившись либо въ видѣ горячихъ капель, либо же, что болѣе вѣроятно, въ формѣ снѣга. При дальнѣйшемъ охлажденіи изъ атмосферы выдѣлились сгустившіяся въ воду пары, при чемъ растворилась осѣвшая соль. Согласно этому представленію океанъ долженъ былъ содержать въ себѣ соль съ самаго момента своего возникновенія.

Въ весьма отдаленную отъ насъ геологическую эпоху физическое состояніе Сѣверной Германіи допускало выдѣленіе легко растворяющихся калійныхъ и магніевыхъ солей изъ высыхающаго моря. Эти отложенія сохранились въ цѣлости, такъ какъ они были защищены водонепроницаемыми слоями глины.

Въ высокой степени интересная, съ точки зрѣнія физической химіи, задача о кристаллизаціи столь сложнаго раствора, какимъ является морская вода, побудила Вантъ-Гоффа (Vant-Hoff) заняться подробнымъ изслѣдованіемъ этого вопроса. Послѣ десятилѣтней работы Вантъ-Гоффъ[1]) и его ученики нынѣ подарили міру полное рѣшеніе поставленной задачи. Результаты, полученные ими, вполнѣ совпадаютъ съ естественными процессами; тѣ пункты, въ которыхъ наблюдаются отклоненія, могутъ быть объяснены удовлетворительнымъ образомъ. Здѣсь въ первый разъ въ наукѣ великая минерало-геологическая проблема получила экспериментальное рѣшеніе, — событіе исторической важности въ естествознаніи!

Образованія минераловъ изъ расплавленнаго потока и изъ водныхъ растворовъ исчерпываютъ собой главнѣйшіе способы возникновенія минераловъ. Образованіе черезъ возгонку (сублимацію) при нѣкоторыхъ условіяхъ тоже имѣетъ большое значеніе; въ особенности при вулканическихъ процессахъ можно наблюдать въ большихъ размѣрахъ выдѣленіе продуктовъ возгонки изъ горячихъ паровъ — какъ-то: сѣры, хлоридовъ, — и, при дѣйствіи на послѣдніе водяныхъ паровъ, окисловъ, — напримѣръ, окисловъ мѣди и желѣза.

Указанные до сихъ поръ способы образованія минераловъ можно довольно ясно понять и даже воспроизвести искусственнымъ путемъ, но есть большая группа породъ, возникновеніе которыхъ составляетъ предметъ большихъ разногласій. Я говорю о группѣ кристаллическихъ сланцевъ. Какъ показываетъ самое названіе, онѣ представляютъ собою вполнѣ кристаллизованныя породы, какъ медленно отвердѣвавшія въ глубинахъ изъ магмы, и въ то же время параллельнымъ расположеніемъ своихъ слоевъ онѣ сходны съ осадочными породами. Предположивъ даже, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ явленія теченія въ магмѣ вызвали параллельное расположеніе кристалловъ, которое осталось закрѣпленнымъ благодаря отвердѣванію, мы все же вынуждены допустить, что возникновеніе кристаллическихъ сланцевъ въ огромномъ большинствѣ случаевъ было вызвано перекристаллизаціей образовательнаго матеріала. То обстоятельство, что кристаллическіе сланцы часто встрѣчаются въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ господствовало, какъ можно доказать, сильное одностороннее давленіе, заставляетъ предположить, что кристаллическая сланцеватость является результатомъ одностороннягo давленія. Извѣстно, что растворимость тѣла въ опредѣленной жидкости зависитъ отъ давленія, и при неравномѣрномъ давленіи растворимость въ общемъ имѣетъ наибольшіе размѣры въ направленіи давленія. Бёкке (Becke), Бервертъ (Berwerth), Грубенманъ (Grubenmann)[2]) и др. приложили этотъ принципъ къ породамъ. Обыкновенно въ породахъ находится горная влажность, которая можетъ служить достаточно сильнымъ растворителемъ: если при этомъ порода подвержена одностороннему длительному давленію, какое имѣетъ мѣсто при горообразованіяхъ, то произойдетъ перекристаллизація, сопровождаемая параллельнымъ расположеніемъ частицъ. Согласно этому взгляду кристаллическіе сланцы возникли какъ изъ изверженныхъ породъ, такъ и изъ осадочныхъ путемъ метаморфизма; дѣйстви-

[1]) „Ozeanische Salzablagerungen.", 1905. Подробно въ 52 статьяхъ въ протоколахъ засѣданій Берлинской Академіи Наукъ.

[2]) Grubenmann, „Die kristallinen Schiefer", I и II. (1904—1907).

тельно, въ природѣ мы находимъ ясные переходы какъ въ одну, такъ и въ другую сторону.

Основными изысканіями въ этой области мы обязаны, главнымъ образомъ, Розенбушу; Ринне (Rinne)[1]) тоже много содѣйствовалъ развитію современныхъ взглядовъ на кристаллическіе сланцы.

Дѣйствіе горнаго давленія при метаморфизмѣ минераловъ въ большомъ масштабѣ доказано и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ. Такъ, Пенсильванскія каменноугольныя поля, относящіяся къ каменноугольному періоду, перешли въ антрацитъ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ, какъ въ Аллеганскихъ горахъ, дѣйствовало сильное горообразовательное давленіе, тогда какъ въ западной части Пенсильваніи, въ мѣстахъ, не тронутыхъ давленіемъ, мы находимъ битуминозные (смолистые) каменные угли. Вѣроятно, горообразованіе временно вызвало повышеніе температуры слоевъ и такимъ образомъ помогло образованію антрацита; промежуточное же вмѣшательство энергіи другого рода слѣдуетъ считать несущественнымъ; главнымъ дѣятелемъ является здѣсь давленіе.

Итакъ, на примѣрѣ кристаллическихъ сланцевъ мы видѣли группу породъ, которыя обязаны образованіемъ своихъ минераловъ позднѣйшему превращенію имѣвшагося уже твердаго матеріала. Подобныя превращенія и вторичныя образованія минераловъ встрѣчаются въ природѣ очень часто и въ разнообразнѣйшихъ видахъ. Вспомнимъ только о всѣхъ тѣхъ процессахъ, которые соединяются подъ общимъ названіемъ вывѣтриванія. Минералы изверженныхъ породъ возникли при высокой температурѣ магмы, и при этихъ обстоятельствахъ образовали систему, которая находится въ равновѣсіи въ своей совокупности, а также и съ водой и углекислотой, которыя несомнѣнно находились въ магмѣ. Но съ паденіемъ температуры условія равновѣсія измѣняются; въ особенности вода и углекислота развиваютъ энергичную метаморфическую дѣятельность. Вслѣдствіе этого порода покрывается болѣе рыхлымъ слоемъ, на которомъ могутъ произрастать растенія, и возникаютъ соединенія,— вѣроятно, цеолитическіе силикаты, отличающіеся своей дѣятельной химической природой. И въ этой области много неизслѣдованныхъ вопросовъ ждутъ еще разработки: чистая радость изслѣдователя здѣсь еще усугубляется высокой культурной важностью проблемъ.

Въ заключеніе я желалъ бы упомянуть еще объ одномъ интересномъ родѣ минераловъ, имѣющемъ не земное, но небесное происхожденіе; я имѣю въ виду метеориты. Долгое время сомнѣвались въ ихъ небесномъ происхожденіи; приблизительно сто лѣтъ тому назадъ Парижская Академія оффиціально высказала мнѣніе, что съ неба не падаютъ камни. 14 дней спустя въ Нормандіи на земную поверхность посыпался дождь метеоритовъ. Съ теченіемъ времени все сильнѣе утвердилось убѣжденіе, что метеориты дѣйствительно представляютъ собою космическія образованія, и вслѣдствіе этого усилился интересъ къ ихъ изученію.

То обстоятельство, что минералы метеорическихъ камней, — напримѣръ, оливинъ, авгитъ и бронзитъ, — совершенно сходны съ земными минералами, ясно указываетъ, что условія образованія этихъ продуктовъ природы не имѣютъ специфически земного характера. Этому факту придавали особенно

[1]) Ср. „Praktische Gesteinskunde", 3-е изд., 1908.

большое значеніе въ тѣ времена, когда космическая физика была еще слабо развита.

Еще большій интересъ, чѣмъ метеорные камни, представляетъ метеорическое желѣзо благодаря своей замѣчательной структурѣ: на полированной поверхности его послѣ непродолжительной обработки кислотой выступаютъ такъ называемыя Видманштетовы фигуры. Это строеніе обусловливается сростаніемъ составныхъ частей метеорита, состоящаго, главнымъ образомъ, изъ желѣза и никкеля въ различныхъ отношеніяхъ. Въ лабораторіи Таммана были изучены явленія кристаллизаціи смѣсей желѣза и никкеля, но метеорической структуры не удалось получить. Усерднымъ изслѣдователямъ метеоритовъ тоже пока еще не удалось дать удовлетворительное объясненіе этому загадочному явленію или воспроизвести его искусственнымъ путемъ.

Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ.

К. Лебединцева.

(По поводу возраженія г. Смирнова въ № 521 „Вѣстника").

Въ статьѣ «Объ ирраціональныхъ числахъ», помѣщенной въ № 521 «Вѣстника», г. Смирновъ даетъ разъясненія къ своей первой статьѣ въ № 511 «Вѣстника» и дѣлаетъ нѣкоторыя замѣчанія по поводу предложеннаго мною въ № 513 изложенія того же вопроса. Разъясненіе его сводится къ слѣдующему: онъ утверждаетъ, что можно опредѣлять ирраціональное число z, какъ предѣлъ перемѣнныхъ раціональныхъ чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$; такъ какъ «смыслъ разностей $z-\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}-z$ для учениковъ совершенно ясенъ: онѣ будутъ представителями безконечно-малыхъ разностей соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, и, какъ таковые, сами должны будутъ разсматриваться, какъ безконечно-малыя» (стр. 113). Но тутъ и кроется логическій кругъ: смыслъ разности $z-\frac{x}{n}\left(\text{и } \frac{x+1}{n}-z\right)$ можетъ считаться яснымъ только тогда, когда будетъ опредѣлено, какимъ образомъ число $z-\frac{x}{n}$ составляется изъ чиселъ z и $\frac{x}{n}$ $\left(\text{и число } \frac{x+1}{n}-z \text{ изъ чиселъ } \frac{x+1}{n} \text{ и } z\right)$; а какъ можно это сдѣлать, если сперва не дать числу z самостоятельнаго опредѣленія?

Я и старался изложить въ № 513 «Вѣстника», какое именно опредѣленіе слѣдуетъ давать ирраціональному числу и какъ этотъ вопросъ разрабатывать въ школѣ. По поводу предложеннаго мною способа г. Смирновъ дѣлаетъ нѣкоторыя возраженія; я постараюсь дать на нихъ отвѣтъ.

Конечно, при рѣшеніи задачи объ удвоеніи квадрата, которое цитируетъ г. Смирновъ на стр. 114 «Вѣстника», сперва дѣлается предположеніе, что сторона искомаго квадрата x выражается цѣлымъ или дробнымъ числомъ. Исходя изъ этого предположенія, мы имѣемъ право составить уравненіе $x^2 = 2$ и преобразовать его къ виду $x = \sqrt{2}$, гдѣ знакъ $\sqrt{\ }$ понимается въ обычномъ значеніи: искомое x должно быть равно такому числу, которое по возвышеніи въ квадратъ давало бы 2. Но такъ какъ не существуетъ цѣлаго или дробнаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 2, то видимъ, что наше первоначальное предположеніе должно быть отвергнуто: сторона искомаго квадрата не можетъ быть выражена никакимъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ (извѣстный пріемъ «reductio ad absurdum»; замѣтимъ, что запись $x = \sqrt{2}$ можетъ быть и вовсе опущена въ этомъ пунктѣ, и тѣ же разсужденія могутъ быть произведены по поводу уравненія $x^2 = 2$). Такимъ образомъ, первое возраженіе устраняется.

Далѣе я излагаю рѣшеніе той же задачи геометрическимъ построеніемъ, и тутъ г. Смирновъ дѣлаетъ мнѣ второе возраженіе: именно онъ ставитъ мнѣ въ упрекъ, что я считаю возможнымъ приписать названіе «квадратный корень изъ двухъ» и обозначеніе «$\sqrt{2}$» тому особому числу, которое должно выразить длину стороны AM построеннаго квадрата. Но въ тѣхъ самыхъ моихъ строкахъ, которыя цитируетъ г. Смирновъ на стр. 115 «Вѣстника», совершенно ясно сказано, что термину «квадратный корень изъ двухъ» и символу «$\sqrt{2}$» я приписываю здѣсь новое значеніе, пока не совпадающее съ обычнымъ; поэтому неправильно утвержденіе г. Смирнова, будто я примѣняю здѣсь этотъ терминъ въ обычномъ его значеніи, и неправильны его выводы, построенные на этомъ утвержденіи. Такимъ образомъ, по данному пункту мой уважаемый оппонентъ можетъ возражать мнѣ только слѣдующее: допустимо ли, чтобы терминъ и символъ, примѣняемые въ совершенно опредѣленномъ одномъ значеніи, употреблялись также и въ другомъ, несходномъ съ первымъ значеніемъ? На этотъ вопросъ я могу отвѣтить только: да, допустимо, и привести цѣлый рядъ соотвѣтствующихъ примѣровъ изъ математической практики: мы употребляемъ термины «квадратъ» и «кубъ» то въ смыслѣ геометрическихъ объектовъ, то въ смыслѣ второй и третьей степени числа; мы приписываемъ словамъ «прибавить» и «умножить» различныя значенія, смотря по тому, идетъ ли рѣчь о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми или дробными, положительными или отрицательными числами; мы заставляемъ учащихся въ выраженіи $5-(-3)$ отчетливо различать, который изъ двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ минусовъ является «знакомъ дѣйствія», и который «знакомъ количества» и т. д. Является теперь вопросъ: цѣлесообразно ли такое употребленіе термина «квадратный корень изъ двухъ» и символа «$\sqrt{2}$»? Да, цѣлесообразно, потому что впослѣдствіи (послѣ изученія смысла дѣйствій надъ ирраціональными числами) можно будетъ показать учащимся, что $(\sqrt{2})^2 = 2$, и они убѣдятся, что новое опредѣленіе термина «квадратный корень изъ двухъ» и символа «$\sqrt{2}$» согласуется съ прежнимъ.

Можно было бы, конечно, въ данномъ вопросѣ идти иначе: ввести для новаго числа существенно новый терминъ (напримѣръ, «радикалъ изъ двухъ» или «ирраціоналъ изъ двухъ») и существенно новое обозначеніе (напримѣръ, R(2) или что-нибудь подобное). Но сомнѣваюсь, что бы это было болѣе цѣлесообразно, такъ какъ впослѣдствіи (послѣ изученія дѣйствій надъ ирраціональными числами) эти новыя слова и символы все же пришлось бы замѣнить обычными обозначеніями.

Въ заключеніе замѣчу, что г. Смирновъ долженъ былъ бы сопоставить мои строки, цитируемыя имъ на стр. 115 «Вѣстника», не съ тѣмъ моимъ опредѣленіемъ корня, которое (какъ я показалъ) сюда не относится, а съ продолженіемъ того же моего текста; тогда онъ нашелъ бы двумя страницами далѣе («Курсъ алгебры», ч. II, стр. 48, изд. 1910 г.) слѣдующія строки: «... Условимся теперь квадратный корень изъ всякаго неполнаго квадрата ($\sqrt{3}$, $\sqrt{20}$, ...) считать особымъ числомъ, бо́льшимъ всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго менѣе подкоренного количества, и меньшимъ всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго болѣе подкоренного количества...»; а затѣмъ онъ долженъ былъ бы сопоставить съ этими строками свое собственное опредѣленіе (второе опредѣленіе ирраціональнаго числа z): «число z есть число, бо́льшее всѣхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, квадраты которыхъ меньше A, и меньшее всѣхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, квадраты которыхъ больше A» («Вѣстникъ», № 511, стр. 169). Ясно, что эти опредѣленія говорятъ одно и то же, и разница только въ терминологіи.

Такимъ образомъ, я не могу признать въ предлагаемомъ мною способѣ наличности логическаго дефекта. Готовъ признать дефектъ терминологіи, но принимаю его сознательно, и указываю, почему не избралъ иного пути.

О вписанныхъ четырехугольникахъ.

Д. Ефремова.

(Окончаніе).*

Китайская теорема.

25. Докажемъ предварительно слѣдующую старую, но мало извѣстную теорему:

Теорема. Центры четырехъ круговъ, вписанныхъ въ треугольники, изъ которыхъ каждый составленъ двумя послѣдовательными сторонами вписаннаго четырехугольника и одною изъ (внутреннихъ) діагоналей его, суть вершины прямоугольника, стороны котораго параллельны биссектрисамъ угловъ между діагоналями четырехугольника.

Вписанный четырехугольникъ $ABCD$ дѣлится его діагоналями AC и BD на треугольники ACB и ACD, BDA и BDC (фиг. 5).

*) См. „Вѣстникъ", № 525.

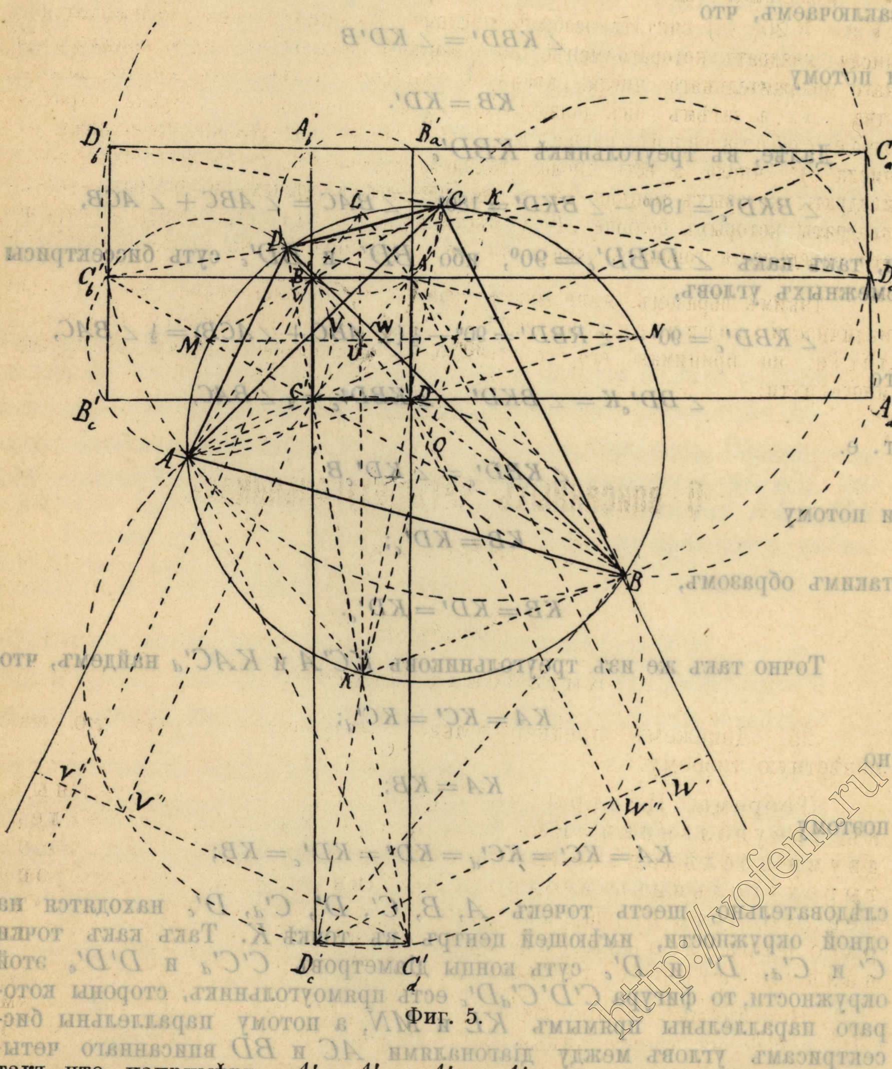
Обозначимъ центры вписанныхъ и внѣвписанныхъ круговъ

для треугольника ABC черезъ D', D'_a, D'_b, D'_c,

" " BCD " A', A'_b, A'_c, A'_d,

" " CDA " B', B'_c, B'_d, B'_a,

" " DAB " C', C'_d, C'_a, C'_b,



Фиг. 5.

такъ что, напримѣръ, A', A'_b, A'_c, A'_d суть центры вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ треугольника BCD, касающихся извнѣ его сторонъ CD, DB и BC, противолежащихъ вершинамъ B, C и D.

Обозначимъ середины дугъ AB, CD, AD и BC соотвѣтственно черезъ K, L, M и N. Замѣтивъ, что въ треугольникѣ BKD'

$$\angle BKD' = \angle BAC,$$

$$\angle KBD' = \tfrac{1}{2} \angle ABC + \tfrac{1}{2} \angle ACB = \tfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

и

$$\angle KDB = 180^0 - (\angle BKD' + \angle KBD') = \tfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB),$$

заключаемъ, что

$$\angle KBD' = \angle KD'B$$

и потому

$$KB = KD'.$$

Далѣе, въ треугольникѣ KBD'_c

$$\angle BKD'_c = 180^0 - \angle BKD' = 180^0 - \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB,$$

и, такъ какъ $\angle D'BD'_c = 90^0$, ибо BD' и BD'_c суть биссектрисы смежныхъ угловъ,

$$\angle KBD'_c = 90^0 - \angle RBD' = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \tfrac{1}{2} \angle BAC,$$

то

$$\angle BD'_cK = \angle BKD' - \angle KBD'_c = \tfrac{1}{2} \angle BAC,$$

т. е.

$$\angle KBD'_c = \angle KD'_cB$$

и потому

$$KB = KD'_c;$$

такимъ образомъ,

$$KB = KD' = KD'_c.$$

Точно такъ же изъ треугольниковъ $KC'A$ и KAC'_d найдемъ, что

$$KA = KC' = KC'_d;$$

но

$$KA = KB;$$

поэтому

$$KA = KC' = KC'_d = KD' = KD'_c = KB;$$

слѣдовательно, шесть точекъ A, B, C', D', C'_d, D'_c находятся на одной окружности, имѣющей центръ въ точкѣ K. Такъ какъ точки C' и C'_d, D' и D'_c суть концы діаметровъ $C'C'_d$ и $D'D'_c$ этой окружности, то фигура $C'D'C'_dD'_c$ есть прямоугольникъ, стороны котораго параллельны прямымъ KL и MN, а потому параллельны биссектрисамъ угловъ между діагоналями AC и BD вписаннаго четырехугольника (13).

Тѣ же разсужденія въ примѣненіи къ тремъ парамъ другихъ треугольниковъ, именно BCD и BCA, CDB и CDA, DAB и DAC, приводятъ къ тому, что четырехугольники $A'D'A'_dD'_a$, $A'B'A'_bB'_a$ и $B'C'B'_cC'_b$ суть также прямоугольники, стороны которыхъ параллельны прямымъ KL и MN. Изъ этого слѣдуетъ, что двѣ системы точекъ B', C', D'_c, A'_b и A', D', C'_d, B'_a расположены на двухъ параллеляхъ прямой KL, а двѣ другія системы — A', B', C'_b, D'_a и C', D', A'_d, B'_c — на двухъ параллеляхъ прямой MN. Но KL и MN взаимно перпендикулярны; слѣдовательно, фигура $A'B'C'D'$ — прямоугольникъ.

Такъ какъ противоположныя стороны этого прямоугольника дѣлятся пополамъ прямыми KL и MN, то точка пересѣченія этихъ прямыхъ V совпадаетъ съ пересѣченіемъ діагоналей прямоугольника $A'C'$ и $B'D'$.

26. Обозначимъ черезъ K' точку, діаметрально противоположную съ K. Биссектриса $C'_bDC'_a$ (фиг. 5) угловъ, смежныхъ съ угломъ ADB, будучи перпендикулярна къ биссектрисѣ DK этого угла, проходитъ черезъ K'; кромѣ того AC'_b и BC'_a соотвѣтственно перпендикулярны къ прямымъ $AC'C'_a$ и $BC'C'_b$; поэтому

$$K'A = K'B = K'C'_a = K'C'_b;$$

подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$K'A = K'B = K'D'_a = K'D'_b;$$

слѣдовательно, точки C'_b, D'_a, C'_a, D'_b суть вершины прямоугольника, вписаннаго въ кругъ, центръ котораго находится въ K'; стороны этого прямоугольника, очевидно, параллельны прямымъ KL и MN.

Такимъ путемъ М. Нейбергъ (M. Neuberg) приходитъ къ выводу *), что изъ 16 центровъ

$$B',\quad A',\quad D'_a,\quad C'_b,$$

$$C',\quad D',\quad A'_d,\quad B'_c,$$

$$D'_c,\quad C'_d,\quad B'_d,\quad A'_c,$$

$$A'_b,\quad B'_a,\quad C'_a,\quad D'_b,$$

каждые четыре, расположенные въ одной строкѣ, находятся на одной прямой, параллельной MN, а каждые четыре, расположенные въ одномъ столбцѣ, находятся на одной прямой, параллельной KL.

27. Обозначимъ черезъ R — радіусъ окружности $ABCD$ и черезъ $2l$, $2m$, $2n$, $2p$ — дуги ея AB, BC, CD и DA. Такъ какъ треугольникъ $C'KD'$ — равнобедренный, то

$$A'B' = C'D' = 2LA' \sin\angle KLB = 2LA' \sin\frac{l}{2} = 2LC \,.\, \sin\frac{l}{2};$$

*) „Mathesis", 1906. № 1.

но

$$LC = 2R \cdot \sin\frac{n}{2};$$

поэтому

$$A'B' = C'D' = 4R \cdot \sin\frac{l}{2}\sin\frac{n}{2}$$

и, по аналогіи,

$$B'C' = A'D' = 4R \cdot \sin\frac{m}{2}\sin\frac{P}{2}.$$

Эти формулы были указаны Каталаномъ (Katalan); изъ нихъ слѣдуетъ, что

$$\text{пл. } A'B'C'D' = 16R^2 \cdot \sin\frac{l}{2}\cdot\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}\sin\frac{P}{2}.$$

Замѣтивъ еще, что

$$\angle K'C'_bD'_a = \angle DKL = \frac{n}{2},$$

находимъ, что

$$C'_bD'_a = 2K'C'_b \cdot \cos\angle K'C'_bD'_a = 2K'C'_b\cos\frac{n}{2} = 2K'A \cdot \cos\frac{n}{2};$$

но

$$K'A = 2R\cos\frac{l}{2};$$

слѣдовательно,

$$C'_bD'_a = C'_aD'_b = 4R\cos\frac{l}{2}\cos\frac{n}{2}$$

и, по аналогіи,

$$A'_bD'_c = B'_aC'_d = 4R\cos\frac{m}{2}\cos\frac{P}{2}.$$

По этимъ формуламъ находимъ, что

$$\text{пл. } A'_bB'_aC'_dD'_c = 16R^2\sin\frac{l}{2}\sin\frac{n}{2}\cos\frac{m}{2}\cos\frac{P}{2},$$

$$\text{пл. } C'_bD'_aA'_dB'_c = 16R^2\sin\frac{m}{2}\sin\frac{P}{2}\cos\frac{l}{2}\cdot\cos\frac{n}{2},$$

$$\text{пл. } A'_cB'_dC'_aD'_b = 16R^2\cos\frac{l}{2}\cos\frac{m}{2}\cos\frac{n}{2}\cdot\cos\frac{P}{2}.$$

28. Китайская теорема. Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть радіусы круговъ, вписанныхъ въ треугольники BCD, CDA, DAB и ABC, сторонами которыхъ служатъ двѣ послѣ-

довательныя стороны и одна изъ діагоналей вписаннаго четырехугольника $ABCD$, то

$$a + \gamma = \beta + \delta.$$

Такъ какъ суммы $a + \gamma$ и $\beta + \delta$ равны соотвѣтственно проекціямъ діагоналей прямоугольника $A'C'$ и $B'D'$ (фиг. 5) на направленія, перпендикулярныя къ BD и AC, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что эти діагонали составляютъ равные углы съ BD и AC, т. е. что

$$\angle B'VC = \angle A'WD,$$

гдѣ V и W суть точки пересѣченія прямыхъ $B'D'$ съ AC и $A'C'$ съ BD. Но углы $\angle B'VC$ и $\angle A'WD$ суть внѣшніе для треугольниковъ $B'VA$ и $A'WB$, которые равноугольны, ибо

$$\angle VAB' = \angle CAL = \angle DBL = \angle WBA'$$

и

$$\angle AB'C' = \angle ADC' = \angle ADK = \angle BCK = \angle BCD' = \angle BA'D';$$

кромѣ того, $\angle C'B'D' = \angle D'A'C'$ и потому $\angle AB'D' = \angle BA'C'$; слѣдовательно,

$$\angle B'VC = \angle A'WD,$$

и теорема доказана*).

29. М. Нейбергъ обобщилъ эту теорему для радіусовъ внѣвписанныхъ круговъ тѣхъ же треугольниковъ. Обозначивъ радіусы вписанныхъ и внѣвписанныхъ круговъ для треугольника

ABC черезъ δ, δ_a, δ_b, δ_c,

BCD „ a, a_b, a_c, a_d,

CDA „ β, β_c, β_d, β_a,

DAB „ γ, γ_d, γ_a, γ_b,

изъ прямоугольниковъ $A'_bB'_aC'_dD'_c$, $C'_bD'_aA'_dB'_c$ и $A'_cB'_dC'_aD'_b$,

*) Изложенное доказательство принадлежитъ японцамъ Матсуо (Matsuo) и Омори (Omori). Т. Гаяши (Hayaschi), проф. въ Токіо, сомнѣвается въ китайскомъ происхожденіи этой теоремы. Онъ утверждаетъ, что она встрѣчается въ одной японской книгѣ, относящейся къ 1806 году. По его словамъ, М. К. Нагасава (М. К Nagasawa), доказавшій эту теорему, сообщилъ о ней китайскому математику М Чу-та (M. Chou-ta), который въ свою очередь предложилъ для нея два доказательства и распространилъ ее на вписанный многоугольникъ. Гаяши сообщаетъ пять доказательствъ этой теоремы, принадлежащихъ различнымъ авторамъ. (Mathésis, 1906, № 12).

примѣняя къ нимъ разсужденія, аналогичныя предыдущему, онъ доказалъ, что

$$\alpha_b + \gamma_d = \beta_a + \delta_c,$$

$$\alpha_d + \gamma_b = \beta_c + \delta_a,$$

$$\alpha_c + \gamma_a = \beta_d + \delta_b.$$

30. Черезъ точки B' и A' проведемъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ AD и BC, и изъ точекъ C'_d и D'_c опустимъ на нихъ перпендикуляры C'_dV' и D'_cW' (фиг. 5).

Такъ какъ прямая KL параллельна биссектрисѣ угла, составленнаго продолженіями AD и BC (13), то углы, составленные прямыми $B'C'_d$ и $A'D'_c$ съ AD и BC, также равны; поэтому

$$\angle V'B'C'_d = \angle W'A'D'_c.$$

Въ треугольникахъ $V'B'C'_d$ и $W'A'D'_c$, кромѣ того, гипотенузы $B'C'_d$ и $A'D'_c$ равны, какъ діагонали прямоугольника; слѣдовательно,

$$C'_dV' = D'_cW';$$

но

$$C'_dV' = \gamma_d - \beta \quad \text{и} \quad D'_cW' = \delta_c - \alpha;$$

поэтому

$$\gamma_d - \beta = \delta_c - \alpha,$$

или

$$\alpha - \beta = \delta_c - \gamma_d.$$

Проведя еще параллели къ AD и BC черезъ точки C' и D' и опустивъ на нихъ перпендикуляры C'_dV'' и D'_cW'' изъ точекъ C'_d и D'_c, изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ $C'V''C'_d$ и $D'W''D'_c$ найдемъ также, что

$$\gamma_d - \gamma = \delta_c - \delta,$$

или

$$\delta - \gamma = \delta_c - \gamma_d.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$\alpha - \beta = \delta - \gamma,$$

т. е.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta,$$

что составляетъ содержаніе китайской теоремы (28).

31. М. И. Миками (M. Y. Mikami) для доказательства той же теоремы пользуется равенствомъ

$$r = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2},$$

гдѣ r и R суть радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для треугольника ABC. Равенство это можно получить слѣдующимъ образомъ. Соединивъ центръ I круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC, съ его вершинами, получимъ

$$r = AI \,.\, \sin\frac{A}{2} = BI \,.\, \sin\frac{B}{2} = CI \,.\, \sin\frac{C}{2},$$

откуда

$$r^3 = AI \,.\, BI \,.\, CI \,.\, \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2};$$

но *)

$$AI = \sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}}, \quad BI = \sqrt{\frac{ca\,(p-b)}{p}}, \quad CI = \sqrt{\frac{ab\,(p-c)}{p}};$$

поэтому

$$AI \,.\, BI \,.\, CI = \sqrt{\frac{a^2b^2c^2\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^3}} = \frac{abc \,.\, \Delta}{p^2},$$

гдѣ Δ — площадь треугольника. Такъ какъ

$$\frac{\Delta}{p} = r \quad \text{и} \quad \frac{abc}{\Delta} = 4R,$$

то это равенство принимаетъ видъ:

$$AI \,.\, BI \,.\, CI = 4Rr^2;$$

слѣдовательно,

$$r^3 = 4R \,.\, r^2 \,.\, \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2},$$

отсюда

$$r = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Примѣняя эту формулу къ треугольникамъ BCD и ABC, на которые вписанный четырехугольникъ $ABCD$ дѣлится діагональю BD, и имѣя въ виду, что (27)

$$\angle ACB = \angle ADB = l, \quad \angle BAC = \angle BDC = m,$$

$$\angle CDB = \angle CAD = n, \quad \angle DCA = \angle DBA = p,$$

получимъ:

$$\alpha = 4R \,.\, \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin\,(l+p),$$

$$\gamma = 4R \,.\, \sin l \,.\, \sin p \,.\, \sin\,(m+n);$$

отсюда

$$\alpha + \gamma = 4R\,(\sin l \,.\, \sin m \,.\, \sin n \,.\, \cos p + \sin p \,.\, \sin l \,.\, \sin m \,.\, \sin n +$$

$$+ \sin n \sin p \sin l \,.\, \cos m + \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin p \,.\, \cos l).$$

---

*) См. „Новая геометрія треугольника“ Д. Ефремова, VIII, 18.

Вторая часть этого равенства симметрична относительно дугъ, на которыя дѣлится окружность вершинами вписаннаго четырехугольника; поэтому она останется безъ перемѣны, если въ первой части равенства $\alpha + \gamma$ замѣнимъ черезъ $\beta + \delta$; слѣдовательно,

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

32. Аналогичнымъ пріемомъ получается и обобщеніе китайской теоремы, указанное Нейбергомъ (29). Съ этою цѣлью выведемъ слѣдующее соотношеніе между радіусами r_a и R круговъ внѣвписаннаго и описаннаго для треугольника ABC:

$$r_a = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Обозначимъ черезъ I_a центръ круга, внѣвписаннаго въ треугольникъ ABC и касающагося извнѣ стороны его BC. Такъ какъ

$$r_a = AI_a \sin\frac{A}{2} = BI_a \,.\, \sin\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = CI_a \,.\, \sin\left(90^0 - \frac{C}{2}\right),$$

то

$$r_a^3 = AI_a \,.\, BI_a \,.\, CI_a \,.\, \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

но *)

$$AI_a = \sqrt{bc\frac{p}{p-a}},\quad BI_a = \sqrt{ac\frac{p-c}{p-a}},\quad CI_a = \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}};$$

поэтому

$$AI_a \,.\, BI_a \,.\, CI_a = abc\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)^3}} = \frac{abc}{(p-a)^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{abc \,.\, \Delta}{(p-a)^2} = \frac{4R\Delta^2}{(p-a)^2} = 4Rr^2{}_a;$$

слѣдовательно,

$$r_a = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Примѣняя эту формулу къ треугольникамъ BCD и ABD (фиг. 5) и принимая во вниманіе, что (27)

$$\angle BCD = l + p,\quad \angle CBD = n,\quad \angle BDC = m,$$

$$\angle BAD = m + n,\quad \angle ABD = p,\quad \angle ADB = l,$$

получимъ:

$$\alpha_c = 4R\sin(l + p) \,.\, \cos m \,.\, \cos n,$$

$$\gamma_a = 4R\sin(m + n) \,.\, \cos l \,.\, \cos p$$

*) Ib., VIII, 19.

и

$$\alpha_c + \gamma_a = 4R(\sin l \,.\, \cos m \,.\, \cos n \,.\, \cos p + \sin m \,.\, \cos n \,.\, \cos p \,.\, \cos l +$$
$$+ \sin n \,.\, \cos p \,.\, \cos l \,.\, \cos m + \sin p \,.\, \cos l \,.\, \cos m \,.\, \cos n);$$

отсюда, вслѣдствіе симметричности второй части относительно l, m, n, p, заключаемъ, что

$$\alpha_c + \gamma_a = \beta_d + \delta_b.$$

33. Тотъ же способъ примѣнимъ и къ доказательству равенствъ вида

$$\alpha - \beta = \delta_c - \gamma_d.$$

Дѣйствительно, изъ треугольниковъ BCD и ACD по формулѣ

$$r = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

находимъ, что

$$\alpha = 4R \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin(l+p).$$

$$\beta = 4R \sin n \,.\, \sin p \,.\, \sin(l+p);$$

поэтому

$$\alpha - \beta = 4R \,.\, \sin l \,.\, \sin n \,.\, \sin(m-p).$$

Изъ треугольниковъ же ABC и ABD по формулѣ

$$r_a = 4R \,.\, \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

имѣемъ, что

$$\delta_c = 4R \,.\, \sin l \,.\, \cos m \,.\, \cos(n+p);$$

отсюда

$$\delta_c - \gamma_d = 4R \,.\, \sin l \,.\, \sin n \,.\, \sin(m-p),$$

и потому

$$\alpha - \beta = \delta_c - \gamma_d.$$

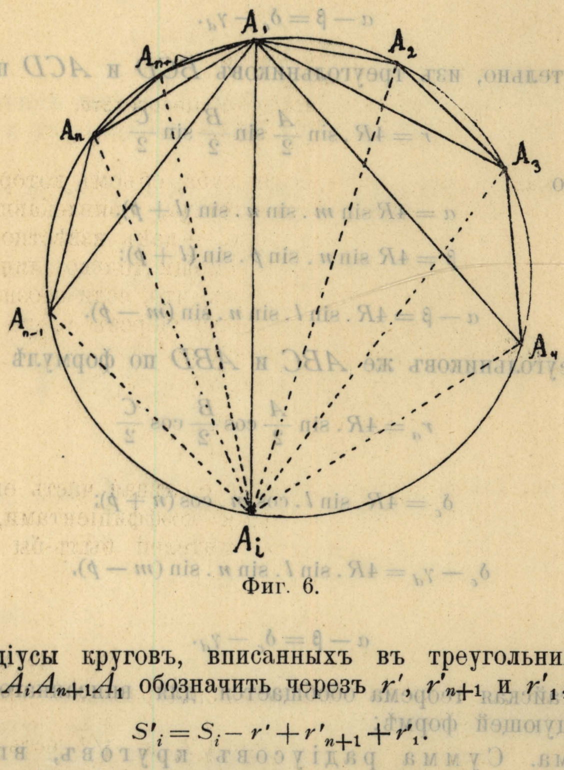
34. Китайская теорема обобщается для вписаннаго многоугольника въ слѣдующей формѣ:

Теорема. Сумма радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ треугольники, на которые дѣлится вписанный многоугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины его, не зависитъ отъ выбора этой вершины. (Чу-та).

Положимъ, что A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_{n-1}$, A_n суть вершины вписаннаго n-угольника (фиг. 6). Если изъ какой-нибудь вершины его A_1 проведемъ всѣ діагонали его, то онъ разобьется на треугольники $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $\ldots$, $A_1A_iA_{i+1}$, $\ldots$, $A_1A_{n-1}A_n$; обозначимъ сумму радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ эти треугольники черезъ S_1. Обозначивъ еще черезъ S_i сумму радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ треугольники $A_iA_1A_2$, $A_iA_2A_3$, $\ldots$, $A_iA_{n-1}A_n$, $A_iA_nA_1$, на которые многоугольникъ разбивается его діагоналями, проведенными изъ другой какой-нибудь его вершины A_i; предположимъ, что $S_1 = S_i$. Взявъ на окружности еще точку A_{n+1} и соединивъ ее съ сосѣдними вершинами многоугольника A_n и A_1, получимъ другой многоугольникъ; суммы радіусовъ, соотвѣтственныя S_1 и S_i для этого многоугольника, пусть будутъ S_1' и S_i'. Очевидно, что

$$S_1' = S_1 + r_{n+1},$$

гдѣ r_{n+1} есть радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ $A_1 A_n A_{n+1}$



Фиг. 6.

Если же радіусы круговъ, вписанныхъ въ треугольники $A_i A_n A_1$, $A_i A_n A_{n+1}$ и $A_i A_{n+1} A_1$ обозначить черезъ r', r'_{n+1} и r'_1, то

$$S'_i = S_i - r' + r'_{n+1} + r'_1.$$

Но, примѣнивъ китайскую теорему (28) къ четырехугольнику $A_1 A_i A_n A_{n+1}$, получимъ:

$$r' + r_{n+1} = r'_{n+1} + r'_1,$$

откуда

$$r_{n+1} = -r' + r'_{n+1} + r'_1;$$

по предположенію же $S_1 = S_i$; слѣдовательно,

$$S'_1 = S'_i.$$

Итакъ, если теорема вѣрна для n-угольника, то она оказывается доказанною и для $(n+1)$-угольника: но для четырехугольника теорема доказана (28); значитъ, она доказана и для пятиугольника и вообще для какого угодно многоугольника.

Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба.

Доложено въ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 29 октября 1910 года.

А. А. Дмитровскаго,

прив.-доц. Московскаго Университета.

Классическая задача о построеніи куба, объемъ котораго былъ бы вдвое больше объема даннаго куба, — задача, привлекавшая къ себѣ вниманіе древнихъ и новыхъ геометровъ, — какъ извѣстно, не можетъ быть рѣшена элементарно, т. е. при помощи только линейки и циркуля. Причина этого заключается въ томъ, что, если обозначимъ ребро даннаго куба черезъ a, а ребро искомаго черезъ x, то для опредѣленія x будемъ имѣть кубическое уравненіе:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2 = 0,$$

при чемъ уравненіе это неприводимое, т. е. лѣвая часть его не разлагается на множители съ раціональными коэффиціентами, такъ какъ въ противномъ случаѣ одинъ изъ множителей былъ-бы первой степени вида

$$\frac{x}{a} - \alpha,$$

и тогда одинъ изъ корней даннаго уравненія равнялся бы раціональному числу α, между тѣмъ какъ $\frac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$, а $\sqrt[3]{2}$ есть число ирраціональное. Но корень неприводимаго уравненія можетъ быть построенъ съ помощью линейки и циркуля лишь въ томъ случаѣ, если степень этого уравненія равна степени числа 2.

Существуетъ цѣлый рядъ рѣшеній этой задачи при помощи коническихъ сѣченій и кривыхъ высшихъ порядковъ, есть приборы для механическаго ея рѣшенія, и, наконецъ, было предложено нѣсколько приближенныхъ рѣшеній, выполняемыхъ посредствомъ линейки и циркуля. Таковы рѣшенія Варгіу (Vargiù), Буонафалче (Buonafalce), Боккали (Boccali) и др. (см. Enriques, „Questioni riguardanti la geometria elementare“, Bologna, 1900, p. 437 — 445). Эти рѣшенія весьма различны какъ по простотѣ построенія, такъ и по степени достигаемой ими точности. Но общее у нихъ то, что для опредѣленія степени точности всегда приходится выполнить болѣе или менѣе длинный рядъ вычисленій,—главнымъ образомъ, приближенныхъ извлеченій квадратныхъ корней со многими десятичными знаками.

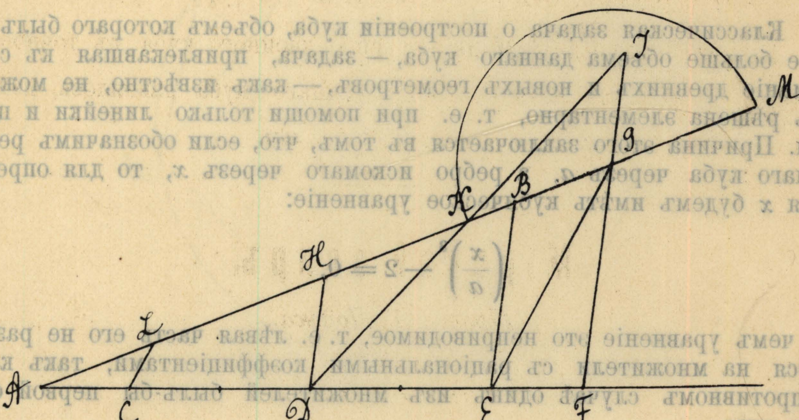
Приводимое ниже рѣшеніе, при достаточной простотѣ построенія, даетъ значительную степень точности, которая прямо видна безъ всякихъ вычисленій.

Извѣстно, что

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots$$

Поэтому, если мы положимъ

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}26,$$



то допущенная при этомъ ошибка будетъ менѣе 0,00008, или менѣе $\frac{1}{12500}$, и, значитъ, если a есть ребро даннаго куба, то

$$x = 1{,}26\,a$$

представитъ собою ребро двойного куба съ погрѣшностью, меньшей, чѣмъ $\frac{a}{12500}$. Все сводится теперь къ тому, чтобы построить x возможно проще. Мы имѣемъ:

$$x = 1{,}2\,a + 0{,}06\,a,$$

или, положивъ $1{,}2a = b$,

$$x = b + \frac{1}{20}b = b + \frac{1}{4}b - \frac{1}{5}b.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее построенiе.

Пусть $AB = a$ есть ребро даннаго куба.

Продолживъ AB и проведя черезъ точку A произвольную прямую, отложимъ на ней отъ A шесть равныхъ отрѣзковъ, соединимъ конецъ E пятаго отрѣзка съ точкой B и проведемъ черезъ конецъ D третьяго отрѣзка и черезъ конецъ F шестого — прямыя DH и FG, параллельныя EB, на продолженiи FG отложимъ $GI = DH$, соединимъ D съ I и пусть DI пересѣкаетъ AB въ точкѣ K, отложимъ $GM = KG$ и, соединивъ E съ G, проведемъ черезъ конецъ C перваго отрѣзка прямую CL, паралельную EG. Тогда $LM = x$. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что

$$AG = 1\tfrac{1}{5}\,a = b;\quad AH = HG = \tfrac{1}{2}\,b;\quad KG = GM = \tfrac{1}{4}\,b$$

(изъ равенства треугольниковъ HDK и KIG),

$$AM = b + \tfrac{1}{4}\,b,\ AL = \tfrac{1}{5}\,b \quad\text{и}\quad LM = b + \tfrac{1}{4}\,b - \tfrac{1}{5}\,b = x.$$

Такимъ образомъ, LM даетъ ребро двойного куба съ точностью до $\frac{1}{12500}$, такъ что, если бы ребро даннаго куба равнялось, напримѣръ, 10 *м.*, то ошибка была бы менѣе 1 *мм.*

Мiровой эѳиръ.

Проф. О. Лоджа.

(Окончанiе).*

Энергiя эѳира.

Итакъ, вмѣсто того, чтобы говорить, что плотность эѳира велика, гораздо проще будетъ сказать, что плотность обыкновеннаго вещества мала. Точно такъ же мы можемъ сказать, что плотность видимаго мiра мала, хотя въ отдѣльныхъ мѣстахъ плотность его сравнима съ плотностью желѣза или скалы.

Рискуя впасть въ повторенiе, я объяснялъ это нѣсколько разъ, такъ какъ по этому поводу могутъ возникнуть недоразумѣнiя. Что же на самомъ дѣлѣ важно относительно эѳира, такъ это не столько его плотность, сколько энергiя, необходимо связанная съ плотностью по

*) См. № 523 „Вѣстника“.

Сочиненiе О. Лоджа „Мiровой эѳиръ“ содержитъ въ себѣ еще двѣ главы (9-ую и 10-ую) и три приложенiя; но въ виду болѣе спецiальнаго характера ихъ редакцiя не считаетъ возможнымъ удѣлить имъ мѣсто на страницахъ „Вѣстника“. Этотъ матерiалъ будетъ помѣщенъ въ отдѣльномъ изданiи того же сочиненiя, выпускаемомъ книгоиздательствомъ „Mathesis“ въ Одессѣ.

всякой кинетической теоріи упругости. Ибо не невозможно — сколько бы безнадежнымъ это ни казалось теперь, — что когда-нибудь ничтожную долю этой энергіи можно будетъ использовать.

Основы кинетической теоріи упругости лорда Кельвина — вещь сложная, и я затрону этотъ предметъ лишь вкратцѣ. Но предварительно я желалъ бы устранить возраженіе, которое иногда даетъ себя чувствовать, — какимъ образомъ среда столь большой плотности можетъ имѣть характеръ легко проницаемой жидкости, лишенной тренія или вязкости и не оказывающей сопротивленія движущимся сквозь нее тѣламъ. — Собственно говоря, между плотностью и вязкостью по существу дѣла нѣтъ рѣшительно никакой связи.

„Плотность" и „вязкость" — двѣ совершенно различныя вещи; и если вязкости (или внутренняго тренія жидкости) нѣтъ, то жидкость можетъ быть сколь угодно плотной, не оказывая никакого препятствія постоянной скорости. Ускоренію она, дѣйствительно, оказываетъ препятствіе, но это послѣднее является по существу частью инерціи или массы движущагося тѣла. Оно вліяетъ на количество движенія тѣла; и если жидкость заполняетъ все пространство, то часть инерціи, зависящая отъ перемѣщенія жидкости, и часть, принадлежащая движущемуся тѣлу, настолько между собою сливаются, что ихъ невозможно ни различить, ни изслѣдовать порознь, — развѣ только теоретически.

Что касается упругости эѳира, то ее сразу можно опредѣлить по скорости, съ которой онъ передаетъ волны. Эта скорость — скорость свѣта — извѣстна въ точности и составляетъ 3×10^{10} *см.* въ секунду. А отношеніе упругости, или твердости, къ плотности равно квадрату этой скорости; это значитъ, что упругость должна въ 9×10^{20} разъ превосходить плотность, т. е. составлять 10^{33} CGS единицъ. Это — непосредственное слѣдствіе изъ оцѣнки плотности и изъ существованія скорости свѣта; и если допустить, что оцѣнка плотности сдѣлана правильно, то нельзя возражать и противъ величины, полученной для упругости.

Но мы должны задаться вопросомъ, — откуда же берется такая упругость? Если эѳиръ не состоитъ изъ частей и если онъ представляетъ собою жидкость, то какъ можетъ онъ обладать упругостью, соотвѣтствующей твердому тѣлу, и переносить поперечныя волны? Для отвѣта на этотъ вопросъ мы должны сослаться на кинетическую теорію упругости лорда Кельвина: по этой теоріи упругость сводится къ вращательному движенію, — внутреннему, подраздѣленному на мелкія части движенію, охватывающему все протяженіе эѳира; движеніе это не имѣетъ характера поступательнаго движенія, представляя собою циркуляцію по замкнутымъ возвращающимся въ себя кривымъ, — вихревое движеніе гораздо болѣе тонкой структуры, чѣмъ всякія свѣтовыя волны, а также атомныя или даже электронныя образованія.

И вотъ, если упругость какой-нибудь среды можно объяснить такимъ кинетическимъ способомъ, то отсюда, какъ необходимое слѣдствіе, вытекаетъ, что скорость этого внутренняго движенія должна быть сравнима со скоростью распространенія волнъ; т. е. то внутреннее вращательное движеніе, та циркуляція, которой подвержена всякая часть эѳира, необходимо протекаетъ со скоростью того же порядка, какъ и скорость свѣта.

Такова теорія, сводящая упругость къ движенію и въ соединеніи съ оцѣнкой плотности приводящая къ столь колоссальной величинѣ для энергіи эѳира. Вѣдь въ каждомъ кубическомъ *мм.* пространства, съ этой точки зрѣнія, заключена масса, равносильная тысячѣ тоннъ обыкновенной матеріи, и каждая часть этой массы совершаетъ внутреннее вращательное движеніе со скоростью близкой къ скорости свѣта; отсюда вытекаетъ, что въ ничтожной части пространства, равной 1 *кб. мм.*, содержится запасъ энергіи порядка 10^{29} эрговъ, или, что то же самое, $3 . 10^{11}$ килоуаттъ-столѣтій; энергію эту возможно было бы получить отъ станціи въ милліонъ лошадиныхъ силъ, работающей непрерывно въ теченіе сорока милліоновъ лѣтъ.

Краткій обзоръ положеній, касающихся эѳира.

(Обзоръ этотъ былъ сообщенъ авторомъ Британской Ассоціаціи въ Лейчестерѣ въ 1907 году).

1. Теорія, утверждающая, что электрическій зарядъ долженъ обладать свойствомъ, эквивалентнымъ инерціи, была ясно изложена Дж. Дж. Томсономъ въ „Philosophical Magazine“ за апрѣль 1881 г.

2. Открытіе массъ, меньшихъ, чѣмъ атомы, было сдѣлано опытнымъ путемъ Дж. Дж. Томсономъ и сообщено секціи *A* въ Доверѣ въ 1899 году.

3. Положеніе, что открытыя такимъ образомъ корпускулы состоятъ всецѣло изъ электрическаго заряда, поддерживалось многими изслѣдователями и было окончательно установлено Кауфманомъ въ 1902 году.

4. Концентрація іоннаго заряда, потребная для полученія наблюденной инерціи корпускулъ, легко можетъ быть вычислена; отсюда опредѣляется объемъ электрической единицы, или электрона.

5. Старинная точка зрѣнія на магнитное поле, какъ на явленіе кинетическое, развивалось лордомъ Кельвиномъ, Хевизайдомъ (Heaviside), Фицъ-Джеральдомъ (Fitz-Gerald), Гиксомъ (Hicks), и Ларморомъ (Larmor); большинство изъ нихъ смотрѣло на магнитное поле, какъ на потокъ вдоль силовыхъ магнитныхъ линій, хотя, быть можетъ, съ одинаковымъ удобствомъ можно считать его потокомъ, перпендикулярнымъ къ силовымъ линіямъ и направленнымъ по вектору Пойнтинга. Ларморъ отдаетъ предпочтеніе первой доктринѣ, какъ согласной съ принципомъ наименьшаго дѣйствія и съ абсолютно-неподвижнымъ характеромъ эѳира какъ цѣлаго; второй взглядъ, повидимому, болѣе совпадаетъ съ теоріями Дж. Дж. Томсона.

6. Движущійся зарядъ, какъ хорошо извѣстно, окруженъ магнитнымъ полемъ; энергію движенія заряда можно выразить черезъ энер-

гію этого сопутствующаго поля, а послѣднюю, въ свою очередь, слѣдуетъ считать за кинетическую энергію потока эѳира.

7. Сопоставляя вышесказанное и считая эѳиръ по существу несжимаемымъ (на основаніи электрическаго опыта Кавендиша, фактовъ тяготѣнія и общей идеи о связующей непрерывной средѣ), авторъ приходитъ къ заключенію, что для динамическаго трактованія эѳира слѣдуетъ приписывать ему плотность порядка 10^{12} *гр.* на 1 *кб. см.*

8. Существованіе поперечныхъ волнъ внутри жидкости можетъ быть объяснено только на основаніи принципа гиростата, т. е. съ помощью кинетической или вихревой упругости лорда Кельвина. Скорость же внутренняго вращенія такой жидкости должна быть сравнима съ скоростью передачи такихъ волнъ.

9. Сопоставляя эти факты, приходимъ къ заключенію, что внутренняя энергія эѳира, или энергія основного эѳирнаго вихря, должна быть порядка 10^{33} эрговъ на 1 *кб. см.*

Заключеніе. Итакъ, каждый *кб. мм.* мірового эѳира долженъ быть эквивалентенъ тысячѣ тоннамъ, и каждая часть его должна совершать внутреннее вихревое движеніе со скоростью свѣта.

VIII.

Эѳиръ и матерія.

Механическая необходимость существованія непрерывной среды, наполняющей пространство.

Въ этой главѣ я имѣю въ виду собрать и изложить въ простой и послѣдовательной формѣ большую часть соображеній, которыми я уже пользовался раньше. Тридцать лѣтъ тому назадъ Клеркъ Максвеллъ сдѣлалъ въ Великобританской Королевской Академіи Наукъ замѣчательный докладъ о „Дѣйствіи на разстояніи“. Докладъ этотъ напечатанъ въ „Журналѣ Академіи Наукъ“ (томъ VII), и на него я желалъ бы обратить вниманіе. Большинство естествоиспытателей-философовъ считаютъ и прежде считали, что дѣйствіе на разстояніи черезъ пустое пространство невозможно; иными словами, что матерія можетъ дѣйствовать только тамъ, гдѣ она есть и не можетъ дѣйствовать тамъ, гдѣ ея нѣтъ. Но тутъ возникаетъ дальнѣйшій вопросъ: „Гдѣ же она есть?“—вопросъ, заслуживающій вниманія и требующій не поверхностнаго только отвѣта. Вѣдь и на основаніи гидродинамической, или вихревой теоріи матеріи, и на основаніи электрической теоріи можно доказывать, что каждый атомъ вещества производитъ повсемѣстное, хотя и безконечно-малое, вліяніе и потому какъ-бы простирается всюду; ибо возмущеніе, вызванное его присутствіемъ, не имѣетъ опредѣленной рѣзкой границы, или предѣла. Силовыя линіи изолированнаго электрическаго заряда распространяются по всему безпредѣльному пространству. И хотя зарядъ противоположнаго знака искривляетъ и собираетъ ихъ, тѣмъ не менѣе возможно разсматривать оба заряда по методу наложенія, считая, что каждый изъ нихъ существуетъ въ отдѣльности, независимо отъ другого.

Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, сколь бы далеко ни простиралось ихъ вліяніе, эти единицы не производятъ „дѣйствія на разстояніи“ въ научномъ смыслѣ слова.

Нѣкоторые философы находятъ основанія утверждать, что умъ можетъ дѣйствовать на другой умъ прямо, безъ посредства промежуточнаго механизма, — и часто про это говорили, какъ про подлинное дѣйствіе на разстояніи; однако, невозможно создать себѣ подходящаго представленія или физической модели этого процесса, и вмѣстѣ съ тѣмъ неясно, имѣютъ ли „пространство“ и „разстояніе“ какое-нибудь опредѣленное значеніе въ области психологіи. Связь между двумя умами, вѣроятно, представляетъ собою нѣчто совершенно иное, чѣмъ физическая близость; и отрицая дѣйствіе на разстояніи черезъ пустое пространство, я не отрицаю телепатіи и другихъ проявленій не-физическаго свойства. Правда, возбужденіе мозга есть несомнѣнно процессъ физическій и необходимо сопутствуетъ умственнымъ актамъ отправленія или полученія; но вѣдь изъ ученія о теплотѣ, напримѣръ, мы знаемъ, что движеніе матеріи можетъ возникнуть въ данномъ мѣстѣ на счетъ соотвѣтствующаго движенія въ другомъ безъ матеріальной передачи или матеріальной связи между обоими мѣстами: вѣдь то, что передается черезъ пустоту, не есть теплота.

Однако, во всѣхъ случаяхъ, когда замѣшано движеніе въ физическомъ смыслѣ слова, я долженъ представлять себѣ среду. Среда эта можетъ быть даже и не матеріей, но чѣмъ-нибудь она во всякомъ случаѣ должна быть; связь какого бы то ни было рода необходима, иначе передачи быть не можетъ. Не можетъ быть притяженія черезъ пространство пустое въ полномъ смыслѣ этого слова. И если даже есть матеріальное промежуточное звено, такъ что связь очевидна, то и тогда объясненіе не обладаетъ еще всей необходимой полнотой. Если вникуть въ механизмъ притяженія, то окажется, что тѣло движется въ дѣйствительности только потому, что его что-то толкаетъ сзади. Сила въ природѣ есть по существу vis a tergo. Когда мы находимъ „зацѣпки“ или открываемъ связующія нити, мы все еще прибѣгаемъ къ слову „сцѣпленіе“; поэтому слѣдуетъ выработать въ себѣ способность понимать его настоящее значеніе. Почему должна двигаться вся палка, когда тянутъ за ея конецъ, — это вопросъ, требующій разъясненія; и единственное объясненіе, какое только возможно дать, вводитъ, въ той или иной формѣ, непрерывную среду, связывающую отдѣльныя и разрозненныя частицы или атомы матеріи.

Что собственно оказывается носителемъ натяженія, когда сгибаютъ или свертываютъ стальную пружину? Не атомы, — атомы только перемѣщаются; натяженіе же испытываютъ связующія нити, соединяющая среда, — эѳиръ. Искривленіе пружины на самомъ дѣлѣ есть искривленіе эѳира. Всякое натяженіе существуетъ только въ эѳирѣ. Матерія можетъ лишь двигаться. Соприкосновенія нѣтъ между атомами, какими мы ихъ знаемъ; чтобы частица матеріи когда-либо соприкасалась съ другой частицей, — столь же сомнительно, какъ и то, что комета касается солнца въ тотъ моментъ, когда она повидимому отъ него отскакиваетъ; атомы связаны другъ съ другомъ, какъ и комета съ солнцемъ, средою, заполняющей пространство сплошь, безъ всякихъ разрывовъ и пробѣловъ, каковы бы они ни были. Матерія воздѣйствуетъ на матерію только черезъ эѳиръ. Но есть ли матерія вещь совершенно отличная и отдѣльная отъ эѳира, или же она представляетъ собою особымъ образомъ видоизмѣненную часть его—видоизмѣненную такъ, чтобы она способна была двигаться съ мѣста на мѣсто, не представляя собою въ то же время прерывности во всемъ остальномъ эѳирѣ, простирающемся повсюду и, можно сказать, далеко за предѣлы видоизмѣненной и ощутимой части,—вотъ вопросы, требующіе отвѣта и находящіеся, по моему мнѣнію, на пути къ разрѣшенію.

Каждый отвѣтъ такого рода заключаетъ въ себѣ извѣстную точку зрѣнія на всеобщую, можетъ быть, безпредѣльную, однородную, вездѣсущую связующую среду, — міровой эѳиръ.

Говорили, и при томъ до нѣкоторой степени саркастически, что эѳиръ былъ сдѣланъ въ Англіи. Утвержденія это есть лишь неудачное выраженіе истины. Я могъ бы доказать даже, что онъ былъ сработанъ, главнымъ образомъ, въ Королевской Академіи Наукъ; въ подтвержденіе этого я постараюсь собрать здѣсь главные пункты, на которыхъ основываются вѣра въ его существованіе и свѣдѣнія о немъ.

Прежде всѣхъ Ньютонъ сознаъ необходимость среды, объясняющей тяготѣніе. Въ своихъ „Оптическихъ вопросахъ“ онъ указываетъ, что, если давленіе этой среды около плотныхъ тѣлъ меньше, чѣмъ на большихъ разстояніяхъ отъ нихъ, плотныя тѣла будутъ тянуться другъ къ другу; и что если уменьшеніе давленія обратно пропорціонально разстоянію отъ плотнаго тѣла, то законъ дѣйствія силы будетъ закономъ обратной пропорціональности квадрату разстоянія, а это есть законъ тяготѣнія.

Итакъ, для объясненія тяжести необходимо лишь допустить уменьшеніе давленія, или увеличеніе натяженія, вызванное образованіемъ матеріальной единицы, то есть электрона или корпускулы. И хотя мы до сихъ поръ еще не знаемъ, что такое электронъ, — есть ли онъ центръ натяженія, или какая бы то ни было своеобразная особенность въ эѳирѣ, — однако, не встрѣчаетъ никакихъ затрудненій предположеніе, что при зарожденіи электрона въ эѳирѣ происходитъ небольшое, почти безконечно-малое натяженіе, или ничтожное разряженіе, которое можетъ выравняться только вмѣстѣ съ уничтоженіемъ или разрушеніемъ электрона. Собственно говоря, онъ представляетъ собою не настоящее натяженіе (strain), а лишь проявленіе силы (stress): потому что здѣсь имѣется не освобожденіе пути (yield), а лишь тяга (pull or tension), распространяющаяся во всѣхъ направленіяхъ до безконечности.

Каждая матеріальная единица должна производить тягу почти до смѣшного малую, и все таки въ такомъ скопленіи, какъ планета, тяга эта становится колоссальной.

Сила, съ которой луна удерживается на своей орбитѣ, достаточна для того, чтобы разорвать стальную балку толщиною въ четыреста миль, способную выдержать 30 тоннъ на каждый квадратный дюймъ; если бы луна и земля были связаны не тяготѣніемъ, а сталью, то понадобился бы цѣлый лѣсъ балокъ, толщиною въ бревно, чтобы сохранить систему при оборотѣ ея одинъ разъ въ мѣсяцъ вокругъ общаго центра тяжести. Такая сила неоходимо приводитъ къ громадному натяженію или давленію въ средѣ. Максвеллъ вычисляетъ, что вблизи земли то натяженіе невидимой среды, какое слѣдуетъ предположить въ ней для объясненія силы тяжести, въ 3.000 разъ превосходитъ натяженіе, которое могла бы выдержать сталь; а вблизи солнца оно было бы еще въ 2.500 разъ больше.

У меня зародился вопросъ: что если бы вся доступная чувствамъ вселенная, которую лордъ Кельвинъ счелъ эквивалентной тысячѣ милліоновъ солнцъ, была собрана въ одно тѣло, при чемъ можно было бы произвольно назначить его плотность*), то не оказалось ли бы тогда натяженіе въ эѳирѣ достаточно большимъ для того, чтобы произвести разрывъ эѳира? Разрывъ этотъ привелъ бы къ всеразбрасывающему взрыву и къ новому разсѣянію частицъ въ глубинахъ пространства въ видѣ колоссальной туманности и разныхъ осколковъ. Вѣдь натяженіе было бы наибольшимъ внутри такой массы; и если бы оно возросло до велинины 10^{33} динъ на квадратный сантиметръ, то что-нибудь должно было бы произойти. Я не думаю, чтобы это соображеніе было убѣдительно, но можно все таки предполагать, что здѣсь можетъ заключаться нѣкоторое основаніе для разсѣяннаго состоянія вѣсомой матеріи.

Слишкомъ мало, однако, извѣстно о механизмѣ тяготѣнія, чтобы можно было выставлять это свойство, какъ главный аргументъ въ пользу существованія эѳира. Первое основательное и послѣдовательное изслѣдованіе эѳирной среды опирается на волнообразную теорію свѣта, однимъ изъ творцовъ которой былъ Томасъ Юнгъ, профессоръ естественной философіи въ Королевской Академіи Наукъ въ началѣ истекшаго столѣтія.

Ни одно изъ обычныхъ веществъ не способно передавать тѣхъ волненій или дрожаній, которыя мы называемъ свѣтомъ. Скорость движенія волнъ, ихъ родъ и легкость, съ которой онѣ распространяются въ пустотѣ,—вотъ причины, почему это невозможно.

Настолько яснымъ и распространеннымъ сдѣлалось представленіе, что эти волны должны быть волнами чего-нибудь, и при томъ чего-нибудь отличнаго отъ обыкновенной матеріи, что лордъ Салисбери

---

*) Производя вычисленіе, однако, я нашелъ, что сгущеніе матерій необходимо до нелѣпости большое: это показываетъ, что вся данная масса слишкомъ еще недостаточна.

въ своей президентской рѣчи къ Британской Ассоціаціи въ Оксфордѣ выразился, что эѳиръ есть нѣчто немного большее, чѣмъ именительный падежъ отъ глагола волноваться. И, дѣйствительно, онъ есть именно это, и при томъ, пожалуй, даже нѣчто большее; для иллюстраціи этой яркой характеристики я приведу отрывокъ изъ лекціи Клерка Максвелла, на которую я уже ссылался:

„Необозримыя междупланетныя и междузвѣздныя области нельзя уже разсматривать, какъ пустыя мѣста вселенной, которыя Творецъ оказался неспособенъ наполнить многообразными проявленіями Своего величія. Мы должны признать, что они уже наполнены этой чудесной средой; наполнены до такой степени, что никакими человѣческими силами нельзя удалить эту среду хотя бы изъ малѣйшей части пространства, или произвести ничтожнѣйшій потокъ въ ея безконечномъ протяженіи. Отъ звѣзды къ звѣздѣ она тянется безъ всякихъ перерывовъ, и когда на Сиріусѣ колеблется водородная молекула, среда получаетъ отъ этихъ колебаній импульсы и, неся ихъ въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ въ своихъ безпредѣльныхъ нѣдрахъ, доставляетъ въ надлежащей послѣдовательности, въ правильномъ порядкѣ и полнымъ счетомъ къ спектроскопу м-ра Хеггинса (Huggins) въ Тулсъ-Гиллѣ“.

Этого достаточно для того, чтобы отмѣтить фактъ, что глазъ есть поистинѣ органъ чувствъ для воспріятія эѳира, и при томъ единственный органъ, какимъ мы обладаемъ, единственный путь, какимъ эѳиръ можетъ на насъ воздѣйствовать; и что обнаруженіе дрожаній въ этой средѣ, воспріятіе направленія, въ которомъ они идутъ, и нѣкоторые выводы о качествѣ предмета, испускающаго ихъ—покрываютъ собою все, что мы подразумѣваемъ подъ словами—„видѣть“ и „смотрѣть“.

Перейду теперь къ другой функціи эѳира — къ электрическимъ и магнитнымъ явленіямъ, которыя въ немъ разыгрываются. Здѣсь я позволю себѣ привести только очень коротенькую цитату изъ сочиненій Фарадея, вся жизнь котораго, можно сказать, имѣла своей задачей лучшее пониманіе этихъ эѳирныхъ явленій. Поистинѣ статую во входномъ дворѣ Королевской Академіи можно считать статуей человѣка, открывшаго электрическія и магнитныя свойства міровового эѳира.

Фарадей предположилъ, что та же самая среда, которая передаетъ свѣтъ, можетъ играть роль и въ электромагнитныхъ явленіяхъ. „Что касается меня“, говоритъ онъ, „то разсматривая соотношеніе между пустотою и магнитной силой и общій характеръ магнитныхъ явленій, происходящихъ внѣ магнита, я гораздо болѣе склоненъ признать, что при передачѣ силы имѣется дѣйствіе внѣшнее по отношенію къ магниту, а не простое притяженіе и отталкиваніе на разстояніи. Такое дѣйствіе можетъ быть функціей эѳира; ибо, повидимому, естественно было бы эѳиру, если онъ существуетъ, служить еще для чего-нибудь, а не только для переноса лучей“.

Эта догадка нашла себѣ широкое подтвержденіе въ послѣдующихъ изслѣдованіяхъ.

Теперь открывается еще новая функція эѳира: выясняется, что изъ эѳира составлена матерія, — чрезвычайно интересная тема, надъ которой въ настоящее время трудятся много дѣятельныхъ работниковъ. Я сдѣлаю небольшую цитату изъ проф. сэра Дж. Дж. Томсона, гдѣ онъ формулируетъ заключенiе, которое всѣмъ намъ представляется чѣмъ-то мерцающимъ вдали; до сихъ поръ оно еще не вполнѣ доказано, и не всякiй выразилъ бы его такимъ образомъ:

„Вся масса тѣла есть какъ разъ та масса эѳира, окружающаго тѣло, которая переносится Фарадеевскими трубками, связанными съ атомами тѣла. На самомъ дѣлѣ, всякая масса есть масса эѳира; всякое количество движенiя — количество движенiя эѳира; и всякая кинетическая энергiя — кинетическая энергiя эѳира. Слѣдуетъ сказать, что эта точка зрѣнiя требуетъ, чтобы плотность эѳира была неизмѣримо больше, чѣмъ плотность всякаго извѣстнаго вещества“.

Да, гораздо больше; эѳиръ долженъ быть до такой степени плотенъ, что матерiя наряду съ нимъ кажется подобной паутинѣ, неосязаемому туману или млечному пути. Матерiю нельзя назвать ни нереальной ни неважной: вѣдь и паутина реальна и для нѣкоторыхъ существъ важна, но массивной или плотной ее не назовешь; матерiя же, даже платина, не плотна въ сравненiи съ эѳиромъ. Но лишь недавно я вычислилъ*), какова въ дѣйствительности должна быть плотность эѳира, по сравненiю съ тѣмъ его видоизмѣненiемъ, которое воздѣйствуетъ на наши чувства, какъ матерiя, и которое по этой причинѣ сосредоточиваетъ на себѣ наше вниманiе.

Нѣтъ ли еще какой-нибудь функцiи эѳира, не открытой до сихъ поръ, но открытiе которой въ будущемъ не выходило бы изъ границъ вѣроятнаго? Я думаю, что такая функiя существуетъ, но упоминанiе о ней было бы слишкомъ необоснованнымъ; достаточно сказать, что на вѣроятности ея настаивали авторы „Невидимаго мiра“, Максвеллъ же сдѣлалъ попытку указать на нее въ слѣдующихъ выраженiяхъ:

„Приспособлено ли это безпредѣльное, однообразное пространство однородной матерiи только для того, чтобы быть посредникомъ физическихъ взаимодѣйствiй между удаленными тѣлами и выполнять другiя физическiя функцiи, о которыхъ мы, можетъ быть, до сихъ поръ не имѣемъ никакого понятiя, или же оно можетъ также образовывать матерiальные организмы существъ, одаренныхъ жизнью и разумомъ столь же или даже еще болѣе развитыми, чѣмъ наши въ настоящее время — это вопросъ, далеко выходящiй изъ предѣловъ физическаго умозрѣнiя“.

На этомъ я оставлю теперь эту сторону вопроса.

Эѳиръ и матерiя.

Постараюсь теперь разъяснить нѣкоторыя соотношенiя между эѳиромъ и матерiей.

Часто задается вопросъ, есть ли эѳиръ — матерiя. Это, главнымъ образомъ, вопросъ словъ и соглашенiя. Несомнѣнно, эѳиръ принадле-

*) См. Lodge, „Philosophical Magazine“, April, 1907.

житъ къ матеріальному, или физическому міру, но при этомъ представляетъ собою не простую матерію. Я предпочелъ бы говорить, что онъ вовсе не есть „матерія". Онъ, можетъ быть, представляетъ собою то вещество, тотъ субстратъ или матеріалъ, изъ котораго составлена матерія; однако, если бы мы были лишены возможности дѣлать различіе между матеріей, съ одной стороны, и эѳиромъ, съ другой, то это повело бы къ путанницѣ и неудобствамъ. Если вы завяжете узелъ въ кускѣ шнурка, то узелъ состоитъ изъ шнурка, но шнурокъ не состоитъ изъ узловъ. Если передъ вами въ воздухѣ дымное или вихревое кольцо, то вихревое кольцо сдѣлано изъ воздуха, но атмосфера не есть вихревое кольцо; и если бы кто-нибудь утверждалъ послѣднее, то изъ этого вышла бы только путанница.

Существенная разница между матеріей и эѳиромъ состоитъ въ томъ, что матерія движется, т. е. обладаетъ свойствомъ перемѣщаться и можетъ производить толчки и удары; между тѣмъ какъ характерной чертой эѳира является то, что онъ находится въ состояніи натяженія и имѣетъ свойство порождать упругую силу и возвращеніе къ равновѣсію. Всякая потенціальная энергія заключена въ эѳирѣ. Онъ можетъ колебаться и вращаться, но въ смыслѣ перемѣны мѣста онъ недвижимъ, — онъ самое недвижимое тѣло изъ всѣхъ намъ извѣстныхъ; онъ, можно сказать, абсолютно недвижимъ; это — нашъ образецъ покоя.

Все, что мы сами можемъ дѣлать въ матеріальномъ мірѣ — это измѣнять движеніе и расположеніе матеріальныхъ массъ; мы можемъ двигать матерію своими мускулами, но это и все, что мы можемъ сдѣлать непосредственно; все остальное мы дѣлаемъ не непосредственно.

Но теперь возникаетъ вопросъ: какъ же это возможно, чтобы матерія состояла изъ эѳира? Возможно ли, чтобы твердое тѣло было сдѣлано изъ жидкости? Твердое тѣло обладаетъ свойствами сохраненія формы, непроницаемости, упругости и тому подобными; какъ можетъ поддѣлаться подъ нихъ идеальная жидкость, — а таковою именно долженъ быть эѳиръ.

Отвѣтъ состоитъ въ томъ, что эти свойства можетъ воспроизвести жидкость въ движеніи; мы утверждаемъ это на основаніи результатовъ большей части трудовъ лорда Кельвина.

Положеніе это можно иллюстрировать нѣсколькими опытами.

Колесо со спицами, прозрачное или проницаемое въ неподвижномъ состояніи, становится непроницаемымъ во время вращенія, такъ что брошенный въ него мячъ не пролетаетъ насквозь, а отскакиваетъ. Движеніе вліяетъ только на проницаемость для матеріи; прозрачность для свѣта остается неизмѣненной.

Шелковый шнурокъ, свѣшивающійся съ блока, становится твердымъ и вязкимъ, если его привести въ быстрое движеніе; импульсы или волны, которыя можно возбудить въ шнуркѣ, перемѣщаются вдоль него со скоростью, равной его собственной скорости, какова бы она ни была; они поэтому какъ бы стоятъ на мѣстѣ. Это подлинный случай кинетической твердости; и фактъ, что скорость передачи волны равна быстротѣ вращенія матеріала, типиченъ и важенъ; дѣйствительно, во всѣхъ случаяхъ кинетической упругости эти двѣ скорости оказываются одного и того же порядка величины.

Гибкая цѣпь, закрученная, какъ веретено, можетъ стоять на концѣ, пока продолжается движеніе.

Струя воды достаточной быстроты выдерживаетъ ударъ молотка и оказываетъ достаточное сопротивленіе ударамъ сабли.

Вращающійся бумажный дискъ становится упругимъ, какъ гибкій металлъ и можетъ сойти за круглую пилу. Сэръ Вилліамъ Хуайтъ (W. White) сообщаетъ мнѣ, что въ кораблестроительномъ дѣлѣ стальные листы рѣжутъ при помощи быстро-вращающагося диска изъ мягкаго желѣза.

Вихревое кольцо, выброшенное изъ эллиптическаго отверстія, колеблется около устойчивой круговой формы совершенно такъ, какъ колебалось бы кольцо изъ резины; здѣсь передъ нами превосходный примѣръ кинетической упругости, и мы ясно видимъ, какъ жидкость подражаетъ нѣкоторымъ свойствамъ твердаго тѣла.

Дальнѣйшимъ примѣромъ можетъ быть модель пружинныхъ вѣсовъ, сдѣланная лордомъ Кельвинымъ исключительно изъ неизмѣняющихъ своей формы твердыхъ тѣлъ, приведенныхъ въ вращательное движеніе. Приспособленіе это использустъ прецессіонное движеніе уравновѣшенныхъ гиростатовъ; они спрятаны въ ящикѣ и поддерживаютъ книгу, имитируя такимъ образомъ дѣйствіе спиральной пружины, могущей поддерживать ту же самую книгу.

Итакъ, если бы можно было привести эѳиръ во вращеніе, то мы могли бы надѣяться заставить его воспроизвести нѣкоторыя свойства матеріи, или даже построить съ его помощью матерію. Но какъ намъ заставить его вертѣться? Матерія сама по себѣ, повидимому, ничуть не увлекаетъ его. Какъ уже описано, я вертѣлъ стальные диски по аршину въ діаметрѣ со скоростью 4000 разъ въ минуту, пускалъ между ними свѣтъ нѣсколько разъ туда и сюда и старательно искалъ хотя бы малѣйшаго дѣйствія на эѳиръ. Ни малѣйшаго дѣйствія замѣтить нельзя было. Закрутить эѳиръ механическимъ способомъ мы не можемъ.

Но мы можемъ заставить его производить электрическія колебанія; каждый источникъ лучей дѣлаетъ это. Электрическій зарядъ, приведенный въ достаточно быстрое колебаніе представляетъ собой единственный извѣстный намъ источникъ эѳирныхъ волнъ; если же электрическій зарядъ внезапно останавливается, то онъ производитъ въ эѳирѣ импульсы, извѣстные подъ названіемъ *X*-лучей; они являются результатомъ столкновенія. Не самая скорость, а внезапное измѣненіе скорости есть необходимое условіе для возбужденія въ эѳирѣ волнъ электрическимъ способомъ.

Мы можемъ также придти къ заключенію о существованіи нѣкотораго рода вращательнаго движенія въ эѳирѣ; однако, у насъ нѣтъ такихъ простыхъ средствъ для обнаруженія вращенія, какъ зрѣніе, служащее намъ для открытія нѣкоторыхъ родовъ колебаній. Предполагается, что вращеніе существуетъ вездѣ, гдѣ электрическій зарядъ находится въ сосѣдствѣ съ магнитнымъ полюсомъ. Вокругъ соединяющей ихъ линіи эѳиръ вертится, какъ волчокъ. Я не говорю, что онъ вертится быстро: это зависитъ отъ его плотности; на самомъ дѣлѣ онъ вертится чрезвычайно медленно, но все же вертится съ опредѣленнымъ моментомъ количества движенія. Теорія Дж. Дж. Т о м с о н а приравниваетъ его моментъ количества движенія величинѣ *em*, т. е. произведенію изъ заряда на полюсъ, при чемъ зарядъ измѣряется въ электростатическихъ единицахъ, а полюсъ въ магнитныхъ.

Какъ доказать это на опытѣ? Допустимъ что у насъ есть вращающійся волчокъ, заключенный въ ящикъ, такъ что вращеніе нельзя обнаружить обыкновенными способами; тогда для открытія вращенія можно было бы воспользоваться его гиростатическими свойствами. Если начать наклонять ось волчка (возбудить прецессію), то въ отвѣтъ получится движеніе, перпендикулярное къ отклоняющей силѣ. То же самое съ зарядомъ и магнитнымъ полюсомъ. Попробуйте внезапно сдвинуть зарядъ, и онъ тотчасъ же сдвинется въ перпендикулярномъ направленіи. Движущійся зарядъ есть токъ, а полюсъ и токъ стремятся вращаться другъ около друга; фактъ этотъ можно разсматривать, какъ проявленіе настоящаго гиростатическаго дѣйствія, происходящаго отъ вращенія эѳира; обнаружить это вращеніе инымъ путемъ нельзя. Фактъ такого магнитнаго вращенія былъ открытъ Ф а р а д е е м ъ.

Я знаю, что обычно это явленіе трактуется иначе, — разсматриваются силовыя линіи и остальная часть замкнутаго тока; но я представляю себѣ токъ, какъ рядъ послѣдовательно брошенныхъ электрическихъ зарядовъ; вѣроятно, ни одинъ способъ разсмотрѣнія такого явленія не исчерпываетъ истины до конца и не можетъ исключить другихъ способовъ, одинаково цѣнныхъ. Какъ бы то ни было, какимъ бы способомъ это явленіе ни разсматривать, оно представляетъ собою примѣръ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ векторовъ.

Три взаимно-перпендикулярныхъ вектора, — ихъ можно обозначить словами Токъ, Магнетизмъ и Движеніе или болѣе общими символами E, H и V, — изображаютъ собою самое основное соотношеніе между эѳиромъ и матеріей и образуютъ связь между Электричествомъ, Магнетизмомъ и Механикой. Гдѣ есть какіе-нибудь два изъ нихъ, третій является необходимымъ слѣдствіемъ. Этотъ принципъ лежитъ въ основаніи всѣхъ динамо-машинъ, электродвигателей, свѣта, телеграфіи и многихъ другихъ вещей. Поистинѣ можно задаваться вопросомъ, не составляетъ ли онъ основы всего, что намъ извѣстно въ физическомъ мірѣ, и не на немъ ли покоится наше представленіе о трехъ измѣреніяхъ пространства.

Наконецъ, есть еще одно фундаментальное свойство матеріи, называемое и н е р ц і е й; до извѣстной степени его можно объяснить съ электромагнитной точки зрѣнія, наградивъ эѳиръ плотностью порядка 10^{12} *гр.* на 1 *кб. см.* Тогда упругость эѳира окажется порядка

10^{33} *CGS*; и если эта упругость обязана своимъ происхожденіемъ внутренней сумятицѣ, то скорость вихревого или вращательнаго движенія эѳира должно быть того же порядка, что и скорость свѣта. Это слѣдуетъ изъ законовъ гидродинамики; аналогичный случай былъ упомянутъ выше: импульсъ движется по бѣгущей гибкой безконечной веревкѣ, натяженіе которой всецѣло обусловливается центробѣжной силой движенія, со скоростью, въ точности равной скорости самой веревки. Итакъ, съ нашей теперешней точки зрѣнія, внутренняя энергія строенія эѳира невѣроятно и ужасно велика: каждый *кб. мм.* пространства обладаетъ такой массой, которая, будучи матеріальной, составляла бы 1000 тоннъ, и такой энергіей, которая эквивалентна работѣ станціи въ 1 000 000 лошадиныхъ силъ въ теченіе 40 милліоновъ лѣтъ.

Вселенная, въ которой мы живемъ, необычайна, а наше изслѣдованіе ея только-что началось. Мы знаемъ, что матерія имѣетъ психическое значеніе въ томъ случаѣ, если она можетъ образовать мозгъ, составляющій звено между физическимъ и психическимъ міромъ. Если кто-нибудь думаетъ, что эѳиръ, со всею его массивностью и энергіей, по всей вѣроятности, не имѣетъ никакого психическаго значенія, то согласиться съ нимъ я лично не могу.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Двойное преломленіе жидкостей въ магнитномъ полѣ. Въ обыкновенномъ состояніи жидкость, по существу своему изотропная по всѣмъ направленіямъ, не можетъ обладать двойнымъ преломленіемъ. Давно, однако, извѣстны случаи, когда жидкости проіобрѣтаютъ это свойство. Въ канадскомъ бальзамѣ, напримѣръ, какъ наблюдалъ уже Максвеллъ (Maxwell), достаточно передвигать лопаточку, чтобы свѣтовой лучъ, проходящій черезъ него, испытывалъ двойное преломленіе. Въ данномъ случаѣ дѣйствуетъ механическое натяженіе. Колебанія свѣтового луча вдоль направленія натяженія распространяются съ иной скоростью, чѣмъ колебанія, нормальныя къ этому направленію. Отсюда и получается двойное преломленіе. Другой еще болѣе извѣстный случай представляетъ электрооптическое явленіе Керра (Kerr). Въ 1875 году этотъ англійскій физикъ впервые наблюдалъ, что, если пропускать свѣтъ черезъ жидкость, помѣщенную между двумя параллельными пластинками заряженнаго конденсатора, то свѣтовой лучъ, проходя нормально къ силовымъ линіямъ электрическаго поля, показываетъ двойное преломленіе. Направленіе силовыхъ линій въ оптическомъ отношеніи оказывается отличнымъ отъ другихъ направленій въ жидкости; оно подобно оптической оси однооснаго кристалла: свѣтъ, поляризованный параллельно этому направленію, распространяется съ иной скоростью, чѣмъ поляризованный нормально къ тому же направленію.

При опытѣ обыкновенно черезъ жидкость, подверженную дѣйствію электрическаго поля, нормально къ силовымъ линіямъ пропускаютъ лучъ, предварительно прошедшій черезъ николь и поляризованный подъ угломъ въ 45° къ силовымъ линіямъ. Такой лучъ мы можемъ себѣ представить при входѣ въ жидкость разложеннымъ на два луча, одинъ — поляризованный вдоль силовыхъ линій и другой — поляризованный нормально къ нимъ. Такъ какъ эти два луча распространяются съ разной скоростью, то при выходѣ изъ жидкости одинъ изъ нихъ будетъ замедленъ сравнительно съ другимъ; оба луча благодаря этому при сложенiи даютъ уже не прямолинейно-поляризованный лучъ, а эллиптически поляризованный, при чемъ эксцентриситетъ эллипсиса колебанiй зависитъ отъ разности хода между обоими лучами, т. е. отъ того, на какую долю длины волны одинъ лучъ отсталъ отъ другого. Прямолинейно-поляризованный свѣтъ послѣ прохода черезъ жидкость получается только въ частныхъ случаяхъ, когда разность хода будетъ кратнымъ полуволны. При разности хода въ $^1/_4$ длины волны (также $^3/_4$ и т. д.) получается круговая поляризацiя. Если наблюдать свѣтъ, прошедшiй черезъ поляризующiй николь, черезъ жидкость и черезъ второй николь-анализаторъ, скрещенный съ первымъ, то поле зрѣнiя, темное, пока въ жидкости не возбуждено электрическое поле, въ общемъ болѣе или менѣе просвѣтляется, какъ только пластинкамъ конденсатора, между которыми находится жидкость, при помощи, напримѣръ, электростатической машины, сообщается достаточно высокая разность потенцiаловъ. Для количественнаго опредѣленiя величины двойного преломленiя, т. е. разности хода двухъ упомянутыхъ лучей, существуютъ разные способы. Одинъ изъ нихъ, напримѣръ, состоитъ въ томъ, что эллиптически-поляризованный свѣтъ, выходящiй изъ жидкости, пропускаютъ черезъ пластинку слюды, дающую, въ свою очередь, по двумъ перпендикулярнымъ другъ къ другу направленiямъ колебанiй разность хода въ $^1/_4$ длины волны. Если эти два главныхъ направленiя колебанiй пластинки будутъ совпадать съ осями эллипсиса колебанiй вышедшаго изъ жидкости луча, то эллиптически-поляризованный лучъ будетъ вновь превращенъ въ линейно-поляризованный, но съ нѣкоторымъ отклоненiемъ отъ того направленiя колебанiй, которое было дано поляризаторомъ. Анализаторъ, слѣдовательно, можно будетъ повернуть такъ, чтобы поле зрѣнiя было опять темно; но при этомъ положенiе анализирующаго николя будетъ на нѣкоторый уголъ отличаться отъ того, при которомъ онъ скрещенъ съ поляризаторомъ. Опредѣливъ этотъ уголъ, легко вычислить разность хода лучей при прохожденiи черезъ жидкость.

Оказывается, что величина двойного преломленiя пропорцiональна длинѣ пути луча въ жидкости, обладающей двойнымъ преломленiемъ, и квадрату силы электрическаго поля. Коэффицiентъ пропорцiональности (т. е. та разность хода, которая получилась бы при единицѣ пути черезъ жидкость, подверженную электрическому полю, сила котораго равна единицѣ) такъ называемая, постоянная Керра, для разныхъ жидкостей разный. Особенно великъ онъ въ нитробензолѣ, обладающемъ двойнымъ преломленiемъ, въ 100 разъ большимъ, чѣмъ сѣроуглеродъ, который тоже уже выдается среди другихъ жидкостей и къ которому, какъ наиболѣе точно изслѣдованному въ этомъ отношенiи веществу, принято относить постоянныя Керра для другихъ жидкостей. Среди одноосныхъ кристаловъ, какъ извѣстно, различаютъ „положительные" и „отрицательные", смотря по тому, обладаетъ ли большей скоростью въ нихъ (меньшимъ показателемъ преломленiя) лучъ обыкновенный или необыкновенный. Принимая въ жидкости, въ которой возбуждено электрическое поле, направленiе силовыхъ линiй за оптическую ось, мы о жидкостяхъ можемъ сказать, что однѣ изъ нихъ подобны положительнымъ, другiя отрицательнымъ кристалламъ. Въ однихъ большей скоростью обладаетъ лучъ, поляризованный параллельно силовымъ линiямъ, въ другихъ — лучъ поляризованный нормально къ силовымъ линiямъ.

На этихъ давно установленныхъ фактахъ я остановился подробнѣе потому, что за послѣднiе годы найдено и изслѣдуется совершенно аналогичное явленiю Керра явленiе при прохожденiи свѣта черезъ жидкости, подверженныя дѣйствiю поперечнаго магнитнаго поля. Исходя, съ одной стороны, изъ электрооптическаго явленiя Керра, съ другой — изъ извѣстнаго явленiя Фарадея — вращенiя плоскости поляризацiи поляризованнаго свѣта при прохожденiи его черезъ жидкость вдоль силовыхъ линiй магнитнаго поля, давно уже искали двойного преломленiя въ жидкостяхъ подъ дѣйствiемъ поперечнаго магнитнаго поля. Въ 1902 году Майорана (Majorana) нашелъ такое явленiе въ растворахъ желѣза, но впослѣдствiи оказалось, что въ данномъ случаѣ двойное преломленiе не есть свойство чистой жидкости, а обусловлено коллоидальнымъ характеромъ этихъ желѣзныхъ растворовъ, присутствіемъ въ нихъ микроскопическихъ или ультрамикроскопическихъ частицъ, которыя, по теоріи Коттона (Cotton) и Мутона (Mouton), оріентируются опредѣленнымъ образомъ въ магнитномъ полѣ, благодаря чему жидкость теряетъ свою изотропность. Тѣ же физики, однако, въ 1907 г. нашли, наконецъ, и двойное преломлеіе въ поперечномъ магнитномъ полѣ въ чистыхъ жидкостяхъ, а въ текущемъ году опубликовали обширную работу, посвященную этому явленію. По сравненію съ электрическимъ двойнымъ преломленіемъ оно такъ мало, что въ позднемъ его открытіи нѣтъ ничего удивительнаго. Найдено оно Коттономъ и Мутономъ сначала въ нитробензолѣ, затѣмъ во всѣхъ изслѣдованныхъ органическихъ жидкостяхъ, представляющихъ ароматическія соединенія, т. е. по структурной формулѣ содержащихъ ядро бензола или отъ него происходящее. Соединенія эти отличаются сильнымъ поглощеніемъ лучей ультра-фіолетовой области спектра и похоже на то, что между этимъ свойствомъ и новонайденнымъ магнитнымъ двойнымъ преломленіемъ существуетъ связь. Во всякомъ случаѣ магнитное двойное преломленіе является какъ будто характерной особенностью этихъ ароматическихъ жидкостей, такъ какъ оно — въ отличіе отъ явленія Керра, наблюдавшагося почти во всѣхъ жидкостяхъ — не было получено Коттономъ и Мутономъ ни въ одной органической жидкости предѣльнаго ряда, за единственнымъ пока исключеніемъ сѣроуглерода. Въ то время, какъ всѣ ароматическія жидкости дали двойное преломленіе подобно положительнымъ кристалламъ, сѣроуглеродъ показалъ отрицательное двойное преломленіе. (Въ электрическомъ же полѣ сѣроуглеродъ положителенъ). Не дали магнитнаго двойного преломленія и изслѣдованныя минеральныя жидкости, напримѣръ, вода, гдѣ (несмотря на затрудненія, которыя представляетъ ея электропроводность) наблюдалось весьма значительное двойное преломленіе въ электрическомъ полѣ. Однако, конечно, не исключено, что и помимо сѣроуглерода найдутся еще жидкости внѣ класса ароматическихъ соединеній, тоже показывающія новое явленіе. Замѣтимъ еще, что нитробензолъ, хотя и даетъ магнитное двойное преломленіе, значительно большее, чѣмъ большинство другихъ жидкостей, но въ этомъ отношеніи все же далеко не такъ выдѣляется среди нихъ, какъ въ электрическомъ двойномъ преломленіи.

Въ количественномъ отношеніи Коттонъ и Мутонъ установили тотъ же законъ, какъ для явленія Керра: разность хода лучей, поляризованныхъ нормально и параллельно силовымъ линіямъ магнитнаго поля, пропорціональна длинѣ пути черезъ находящуюся въ полѣ жидкость и квадрату силы поля. Далѣе они же, а также американскіе физики Скиннеръ (Skinner) и Макъ-Комбъ (Mc. Comb) дали цѣнныя изслѣдованія зависимости величины двойного преломленія, какъ магнитнаго, такъ и электрическаго, отъ длины волны падающаго свѣта, т. е. опредѣлили дисперсію этихъ явленій. И то и другое явленіе усиливаются (т. е. постоянная Керра и аналогичная постоянная магнитнаго двойного преломленія растутъ), если переходить отъ краснаго конца спектра къ фіолетовому. Тутъ получился замѣчательный результатъ, что, несмотря на совершенно разную величину обоихъ видовъ двойного преломленія, даже на разность знака ихъ у сѣроуглерода, законъ дисперсіи для обоихъ одинъ и тотъ же.

Электрическое и магнитное двойное преломленіе можно объяснить, исходя изъ электронной теоріи, дѣйствіемъ соотвѣтствующаго поля на колебанія электроновъ въ молекулахъ жидкости, подобно тому, какъ объясняется явленіе Зеемана, явленіе Фарадея и т. п. Эта электронная теорія, однако, не даетъ отчета о подробностяхъ явленій, въ особенности о законѣ дисперсіи и о совпаденіи этого закона для обоихъ видовъ двойного преломленія. Этотъ законъ количественно правильно представляетъ формула, выведенная Хевлокомъ (Havelock) на основаніи иной гипотезы, а именно, что подъ дѣйствіемъ поля самыя молекулы жидкости группируются въ ней анизотропно располагаясь гуще (или, наоборотъ, рѣже) вдоль силовыхъ линій, чѣмъ нормально къ нимъ. Коттонъ и Мутонъ въ своей работѣ предлагаютъ третью гипотезу, которая, какъ они показываютъ, даетъ для дисперсіи ту же формулу, какъ предположеніе Хевлокка. Исходя изъ своего объясненія явленія Маіораны, какъ основаннаго на оріентировкѣ коллоидальныхъ частицъ, они предлагаютъ подобное же объясненіе двойного преломленія въ чистыхъ жидкостяхъ, лишь съ той существенной разницей, что здѣсь электрической или магнитной силой оріентируются не крупныя частицы, а самыя молекулы жидкости. Для нагляднаго примѣра можно себѣ представить молекулы продолговатыми эллипсоидами, стремящимися установиться своей большой осью параллельно силовымъ линіямъ. Такому стремленію препятствуетъ до извѣстной степени тепловое движеніе молекулъ (а въ явленіи Маіораны — броуновское движеніе коллоидальныхъ частицъ желѣза), благодаря чему, при доступныхъ намъ силахъ магнитнаго поля, оріентировка молекулъ далеко не полная и продолжаетъ усиливаться вмѣстѣ съ усиленіемъ поля. Для явленія же Маіораны достигается дѣйствительно „насыщеніе", т. е. максимумъ двойного преломленія, въ поляхъ въ 20000 гауссовъ. Тутъ дальнѣйшее усиленіе поля уже не увеличиваетъ двойного преломленія, и по теоріи Коттона и Мутона надо поэтому полагать, что коллоидальныя частицы всѣ полностью оріентированы въ такихъ поляхъ.

А. Іоллосъ.

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 29 октября 1910 г.

1) А. А. Дмитровскій сдѣлалъ сообщеніе: „Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба" *).

2) Н. А. Извольскій сдѣлалъ сообщеніе: „Отношеніе двухъ отрѣзковъ и основная теорема о пропорціональныхъ отрѣзкахъ".

Послѣ приведенія классическихъ опредѣленій понятія объ отношеніи, принадлежащихъ Евклиду и Лейбницу, и опредѣленій, данныхъ въ учебникахъ геометріи, докладчикъ высказываетъ сомнѣніе въ необходимости давать такое опредѣленіе для учащихся.

Подобно тому, какъ мы пользуемся цѣлыми числами для оцѣнки мощности группы объектовъ и оперируемъ надъ этими числами, не имѣя опредѣленія понятія о цѣломъ числѣ, точно такъ же мы можемъ пользоваться понятіемъ объ отношеніи двухъ отрѣзковъ для цѣлей измѣренія, не опредѣляя этого понятія. Здѣсь, по мѣрѣ разработки вопроса, въ сознаніи учащихся создается убѣжденіе, что задача измѣренія одного отрѣзка другимъ всегда ведетъ къ опредѣленному результату, или, что то же самое, что для всякой пары двухъ отрѣзковъ понятіе объ отношеніи имѣетъ опредѣленный смыслъ.

Развитіе статьи объ отношеніи можно обосновать 1) на умѣніи откладывать одинъ отрѣзокъ на другомъ и 2) на умѣніи дѣлить отрѣзокъ на сколько угодно равныхъ частей.

Является возможнымъ установить слѣдующіе факты:

1) Если два отрѣзка A и B соизмѣримы, то можно геометрическими средствами связать ихъ равенствомъ

$$A = \frac{m}{n} B,$$

---

*) Это сообщеніе напечатано полностью въ настоящемъ номерѣ (см. стр. 269).

гдѣ m и n суть цѣлыя числа. Здѣсь дробь $\frac{m}{n}$ есть число, полученное отъ измѣренія отрѣзка A отрѣзкомъ B, или, что то же самое, есть отношеніе отрѣзковъ A и B. Аналогія съ ариѳметикой позволяетъ ввести условіе — писать это же равенство въ формѣ $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$.

2) Если отрѣзки A и B несоизмѣримы, то можно построить два новыхъ отрѣзка A_1 и A_2, соизмѣримыхъ съ B, изъ которыхъ одинъ меньше A, а другой больше A, такъ, чтобы разность между ними была равна опредѣленной долѣ B. Тогда приходимъ къ неравенствамъ:

$$\frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B,$$

которыя можно понимать въ томъ смыслѣ, что отношеніе A къ B больше числа $\frac{m}{n}$ и меньше числа $\frac{m+1}{n}$. Тѣ же неравенства, по аналогіи съ ариѳметикой, можно условиться писать въ формѣ

$$\frac{m}{n}<\frac{A}{B}<\frac{m+1}{n}.$$

Здѣсь выясняется возможность установить о всякомъ данномъ числѣ $\frac{p}{q}$, будетъ ли оно больше или меньше отношенія $\frac{A}{B}$. Здѣсь же возникаетъ потребность обобщить понятіе о числѣ, чтобы для всякаго отношенія двухъ отрѣзковъ можно было признавать, что оно равно опредѣленному числу.

Признакъ равенства двухъ отношеній, согласно вышеизложенному, слѣдуетъ дать въ такой формѣ: если нельзя найти такого числа, чтобы оно было меньше одного изъ данныхъ отношеній и больше другого, то эти два отношенія равны. Пользуясь имъ, докладчикъ доказалъ теорему, что двѣ параллельныя линіи отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональные отрѣзки; было также выяснено, что отношеніе двухъ наклонныхъ не равно отношенію ихъ проекцій.

РЕЦЕНЗІИ.

Книги для современной школы. **Дм. Ройтманъ,** преподаватель астрономіи въ С.-Петербургскомъ Женскомъ Педагогическомъ Институтѣ, математики и космографіи въ С.-Петербургскомъ Учительскомъ Институтѣ и гимназіи К. Мая. — *Курсъ элементарной геометріи со включеніемъ началъ тригонометріи* (плоской и сферической), изложенный по измѣненной системѣ и приспособленный для самостоятельнаго изученія. — Основная часть курса содержитъ только теоремы и задачи, составляющія необходимыя звенья неразрывной логической цѣпи заключеній. Число теоремъ значительно уменьшено безъ ущерба для возможной строгости изложенія. — Приложенія: общая теорія симметріи и подобія, способъ предѣловъ, законъ Кавальери, измѣреніе многогранныхъ угловъ. Второе изданіе, значительно переработанное и дополненное. Москва, 1910.

О содержаніи книги можно судить по слѣдующему ея оглавленію: Необходимое предисловіе (стр. V—XXVI). Введеніе. Основныя понятія (стр. 1—26). Отдѣлъ первый. Условія равенства треугольниковъ и основныя задачи на построеніе (стр. 24—46). Отдѣлъ второй. Взаимное положеніе прямыхъ на плоскости (стр. 46—65). Отдѣлъ третій. Нѣкоторыя соотношенія между элементами треугольника и параллелограмма (стр. 65—81). Отдѣлъ четвертый. О кругѣ и объ окружности (81—92). Приложеніе 1-е. О равныхъ и симметричныхъ фигурахъ на плоскости (стр. 92—100). Отдѣлъ пятый. Измѣреніе отрѣзковъ. Пропорціональные отрѣзки. Подобіе треугольниковъ (стр. 100—130). Отдѣлъ шестой. Измѣреніе угловъ. (стр. 130—147). Отдѣлъ седьмой. Измѣреніе площадей плоскихъ прямолинейныхъ фигуръ (стр. 147—163). Приложеніе 2-е. Общія свойства подобныхъ фигуръ на плоскости (стр. 163—184). Отдѣлъ восьмой. Теорема Пиѳагора и ея слѣдствія (стр. 184—199). Отдѣлъ девятый. Зависимость между элементами треугольника. Возможность вычислять эти элементы (начала тригонометріи, стр. 199—232). Отдѣлъ десятый. Взаимное положеніе прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ (стр. 232—269). Отдѣлъ одиннадцатый. Измѣреніе поверхностей и объемовъ простѣйшихъ геометрическихъ тѣлъ (стр. 269—287). Приложеніе 3-е. Первоначальныя понятія объ измѣреніи длины окружности и площади круга при помощи вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ. Способъ предѣловъ (287—309). Приложеніе 4-е. Вычисленіе по способу предѣловъ длины окружности, площади круга, объема пирамиды, поверхностей и объемовъ цилиндра, конуса и шара (стр 309—338). Приложеніе 5-е. Законъ Кавальери и его приложеніе къ вычисленію площадей плоскихъ фигуръ и объемовъ тѣлъ (стр. 338—348). Приложеніе 6-е. Объ измѣреніи многогранныхъ угловъ и частей неограниченнаго трехмѣрнаго пространства. Основныя формулы сферической тригонометріи (стр. 348—367). Приложеніе 7-е. О тѣлахъ равныхъ, симметричныхъ и подобныхъ (стр. 367—385). Заключеніе. О строѣ систематическаго курса геометріи. Объ опредѣленіяхъ, аксіомахъ, теоремахъ и доказательствахъ. Общія свойства пространства (стр. 385—405).

Въ концѣ каждаго отдѣла приложены задачи для упражненія (390 задачъ).

Второе изданіе разсматриваемой книги, по заявленію автора въ концѣ предисловія, отличается отъ перваго тѣмъ, что „кромѣ существенныхъ передѣлокъ, исправленій и дополненій во введеніи, въ ученіи объ окружности, въ началѣ стереометріи, особенно же въ отдѣлахъ объ измѣреніи отрѣзковъ и площадей и началахъ тригонометріи, прибавлены пять приложеній: о симметричныхъ и равныхъ фигурахъ на плоскости, о подобныхъ плоскихъ фигурахъ, о законѣ Кавальери, объ углахъ многогранныхъ и основныхъ формулахъ сферической тригонометріи, о равныхъ, симметричныхъ и подобныхъ тѣлахъ. Первое и второе приложенія 1-го изданія слиты въ одно (третье)“.

Въ 1-мъ изданіи „Курсъ геометріи“ г. Ройтмана былъ весьма обстоятельно разобранъ въ апрѣльской книгѣ „Журнала Мин. Народн. Просв.“ за 1908 г. г. Н. С., при чемъ рецензентъ, разобравъ книгу съ принципіальной стороны, указалъ и на замѣченныя имъ ошибки. Другія ошибки были указаны гг. Фохтомъ и Кояловичемъ въ майской книгѣ того же журнала за тотъ же годъ. Такъ какъ во 2-мъ изданіи ошибки, указанныя названными рецензентами, уже не встрѣчаются, то мы остановимся лишь на новыхъ приложеніяхъ, не вошедшихъ въ 1-е изданіе.

Приложеніе 1-е заканчивается слѣдующимъ неправильно выраженнымъ заключеніемъ относительно плоскихъ фигуръ: „если двѣ плоскія фигуры таковы, что для любой системы точекъ, взятой на одной изъ нихъ, можно построить совершенно одинаковую (?) систему точекъ, одинаково расположенныхъ и находящихся на соотвѣтственно равныхъ разстояніяхъ въ другой фигурѣ, то фигуры равны, т. е. при наложеніи должны совмѣститься“. Это заключеніе короче можно выразить такъ: если двѣ фигуры равны, то онѣ равны.

Въ приложеніи 2-мъ говорится (§ 91): „обыкновенно мы не можемъ прямо измѣрить (!) данную реальную величину и прибѣгаемъ къ измѣренію косвенному, строя фигуру, подобную той, которую наблюдаемъ въ дѣйствительности“. Спрашивается, по какимъ же даннымъ строится эта фигура, подобная наблюдаемой въ дѣйствительности? Если авторъ имѣлъ въ виду мензульную съемку, то этимъ пріемомъ можно пользоваться далеко не всегда.

Немного далѣе дается неправильное опредѣленіе выпуклой ломанной и выпуклой кривой линіи; именно сказано: „выпуклой кривой линіей называется такая, которая вся лежитъ по одну сторону каждой изъ своихъ касательныхъ“*); аналогичное опредѣленіе дается и для выпуклой ломанной линіи. Значитъ, спираль Архимеда и вписанную въ нее ломанную линію нельзя назвать выпуклыми? Очевидно, авторъ имѣлъ въ виду или замкнутую кривую, или только часть кривой.

То же слѣдуетъ сказать относительно опредѣленія касательной къ кривой, какъ „такой прямой, которая имѣетъ съ этой кривой одну и только одну общую точку“. По этому опредѣленію выходитъ, что спираль Архимеда, напримѣръ, ни въ одной изъ своихъ точекъ не имѣетъ касательной! Тутъ же приводится слѣдующее, очевидное, по словамъ автора, свойство выпуклой кривой: „отрѣзокъ прямой, соединяющей двѣ ея точки, не имѣетъ съ кривой никакихъ другихъ общихъ точекъ. Такой отрѣзокъ называютъ хордой, а всю прямую — сѣкущей линіей“. Все это было бы понятно и правильно, если бы авторъ оговорился, что онъ имѣетъ въ виду лишь небольшія выпуклыя части кривыхъ; безъ этой же оговорки приведенныя опредѣленія вызываютъ только недоумѣніе.

Ограничиваясь этими указаніями на наиболѣе крупные промахи автора, замѣтимъ, что приложеніе 5-е, въ которомъ излагается законъ Кавальери, составляетъ весьма важное и полезное прибавленіе къ курсу геометріи.

Д. Еф—овъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 360 (5 сер.). Построить выпуклый четырехугольникъ $ABCD$ по четыремъ даннымъ сторонамъ, если дано, что діагональ AC разбиваетъ его на два равновеликихъ треугольника.

Е. Рѣзницкій (ст. Михайлово).

№ 361 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль).

---

*) Такое опредѣленіе встрѣчается и въ нѣкоторыхъ другихъ учебникахъ геометріи.

№ 362 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему уравненій

$$\frac{xy}{x+y}=z,\quad \frac{xy}{x-y}=u.$$

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 363 (5 сер.). Выразить сумму

$$s=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\cdots+\operatorname{tg}t\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v,$$

въ которой $x, y, z, \ldots, t, u, v$ суть послѣдовательные члены ариѳметической прогрессіи, черезъ x, v и r, гдѣ r — разность прогрессіи.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 364 (5 сер.). Существуетъ ли такой треугольникъ, въ которомъ, какъ стороны его, такъ и углы составляютъ ариѳметическую прогрессію?

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 365 (5 сер.). Привести къ логариѳмическому виду выраженіе

$$1+2\cos 2a+2\cos 4a+\cos 6a+\cos 8a+\cos 10a.$$

Я. Назаревскій (Харьковъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 193 (5 сер.). *Въ одной плоскости даны двѣ параллельныя прямыя и окружность. Построить сѣкущую, параллельную данному направленію и отсѣкающую между данными параллельными прямыми и внутри данной окружности отрѣзки равной длины.*

Проведемъ какую-либо прямую, параллельную данному направленію, и назовемъ черезъ M и N точки встрѣчи ея съ данными параллельными прямыми. Отложивъ въ данной окружности хорду AB, равную отрѣзку MN, опустимъ изъ центра окружности O перпендикуляръ OP и опишемъ изъ O радіусомъ OP новую окружность, а затѣмъ построимъ къ ней касательныя, параллельныя данному направленію; каждая изъ этихъ касательныхъ даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи. Для того, чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы данное направленіе не было параллельно заданнымъ параллельнымъ прямымъ и чтобы отрѣзокъ MN не превышалъ діаметра даннаго круга; въ частности, если отрѣзокъ MN равенъ діаметру даннаго круга, обѣ искомыя прямыя сливаются, обращаясь въ прямую, проходящую черезъ центръ O даннаго круга параллельно данному направленію.

В. Моргулевъ (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

№ 219 (5 сер.). *Доказать слѣдующій общій признакъ дѣлимости на* 43 *или на* 7: *вычтемъ изъ числа всѣхъ сотенъ даннаго числа утроенное число, составленное двумя послѣдними цифрами даннаго числа; данное число дѣлится или нѣтъ на* 43 *(или* 7*), смотря по тому, будетъ ли полученная разность кратна* 43 *(или* 7*).*

Назовемъ черезъ a число всѣхъ сотенъ даннаго числа, а черезъ b сумму его десятковъ и единицъ, т. е. число, составленное его двумя послѣдними цифрами. Тогда искомое число есть $100a+b$, а разность между числомъ сотенъ и утроеннымъ числомъ, составленнымъ двумя послѣдними цифрами даннаго числа, есть $a-3b$. Изъ тожества

$$3(100a+b)+(a-3b)=301a=43 \,.\, 7a,$$

мы, принимая во вниманіе, что число $301a$ кратно 43 и 7, дѣлаемъ слѣдующіе выводы. Если данное число $100a+b$ кратно 43 (или 7), то и число $3(100a+b)$ кратно 43 (или 7), а потому и число $a-3b$ кратно 43 (или 7). Если число $a-3b$ кратно 43 (или 7), то и число $3(100a+b)$ кратно 43 (или 7), а потому и данное число $100a+b$ кратно 43 (или 7), такъ какъ 3 есть число взаимно простое съ числами 43 и 7. Итакъ, необходимое и достаточное условіе дѣлимости даннаго числа $100a+b$ на 43 (или 7) состоитъ въ томъ, чтобы число $a-3b$ было кратно 43 (или 7).

Б. Двойринъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *H. Howsepheanz* (Владикавказъ); *А. Фельдманъ* (Одесса).

№ 237 (5 сер.). *Дано, что ирраціональное число* $\sqrt{N}$ *разлагается въ безконечную непрерывную дробь вида*

$$\sqrt{N}=a+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cdots}}}},$$

при чемъ N, a, x *и* y *суть положительныя раціональныя числа. Требуется выразить* N *въ функціи* x *и* y.

Называя безконечную періодическую дробь

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cdots}}}}$$

черезъ u, имѣемъ $u=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+u}}$, откуда $xu^2+xyu+u=y+u$, или

$$xu^2+xyu-y=0. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, u есть положительный корень квадратнаго уравненія (1), т. е

$$u=\frac{-xy+\sqrt{x^2y^2+4xy}}{2x}=-\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}},$$

а потому

$$\sqrt{N}=a-\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}},$$

откуда

$$\frac{y}{2}+\sqrt{N}=a+\sqrt{\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}}. \qquad (2)$$

Такъ какъ a, x и y суть, по условію, числа раціональныя, а $\sqrt{N}$ — число ирраціональное, то равенство (2) возможно лишь тогда, если раціональное число $\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}$ есть неточный квадратъ и если имѣютъ мѣсто отдѣльно равенства

$$\frac{y}{2}=a \quad \text{и} \quad \sqrt{N}=\sqrt{\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}},$$

откуда

$$N=\frac{x^2y^2+4xy}{4x^2}=\frac{y^2}{4}+\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Равенство (3) даетъ выраженіе для N въ функціи x и y.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Г. Варкентинъ* (Вальдгеймъ).

№ 243 (5 сер). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[m]{(x+a)^3}+2\sqrt[m]{x^3}=3\sqrt[m]{x^2(x+a)}.$$

Раздѣливъ обѣ части на $\sqrt[m]{x^3}$, приводимъ уравненіе къ виду:

$$\left(\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}}\right)^3+2=3\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}},$$

или, полагая

$$\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}}=y, \tag{1}$$

— къ виду $y^3-3y+2=0$; разлагая лѣвую часть этого уравненія на множителей, находимъ:

$$y^3-3y+2=(y-1)(y^2+y-2)=(y-1)(y-1)(y+2)=(y-1)^2(y+2)=0,$$

откуда $y=1$ или $y=-2$. Итакъ [см. (1)],

$$\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}}=1 \quad \text{или} \quad \sqrt[m]{\frac{x+a}{x}}=-2, \quad \text{откуда} \quad \frac{x+a}{x}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x+a}{x}=(-2)^m,$$

т. е.

$$x+a=x \tag{2}$$

или

$$x+a=(-2)^m x. \tag{3}$$

Равенство (2) возможно лишь при $a=0$; легко провѣрить, что въ этомъ случаѣ предложенное для рѣшенія уравненіе обращается въ тожество. Равенство же (3) даетъ:

$$x=\frac{a}{(-2)^m-1}.$$

Замѣчаніе. Дѣля обѣ части разсматриваемаго уравненія на $\sqrt[m]{x^3}$, мы полагали, что $x \neq 0$. Пробуя положить $x = 0$, мы видимъ, что это возможно лишь при $a = 0$; въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, уравненіе обращается въ тожество.

В. Моргулевъ (Одесса); *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *А. Луканинъ* (Астрахань); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *И. Чижевскій* (Александрія); *Л. Цивьянъ* (Либава); *И. Поляковъ* (Тифлисъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *А. Лежнева* (Богучаръ); *С. Лѣсюкъ* (Вилькомиръ); *С. Розенблатъ* (Балта); *А. Масловъ* (Москва); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Е. Бабицкій* (Минскъ); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *В. Бунятянцъ* (Шуша); *Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *С. Сейгель* (Кіевъ); *Н. Шулѣповъ* (Петропавловскъ)

№ 244 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^4 = ax^2 + by^2, \quad y^4 = bx^2 + ay^2.$$

Полагая $x^2 = z$, $y^2 = u$, приводимъ данную систему къ виду:

$$z^2 = az + bu, \tag{1}$$

$$u^2 = bz + au. \tag{2}$$

Вычитая изъ равенства (1) равенство (2), получимъ:

$$z^2 - u^2 = a(z-u) - b(z-u) = (a-b)(z-u),$$

или

$$(z-u)(z+u) = (a-b)(z-u) = 0, \quad (z-u)[z+u-(a-b)] = 0,$$

откуда вытекаетъ одно изъ равенствъ

$$z - u = 0, \tag{3}$$

$$z + u - (a-b) = 0. \tag{4}$$

Подставляя значеніе u, найденное изъ равенства (3), въ равенство (1), получимъ: $z^2 = (a+b)z$, откуда $z_1 = 0$, $z_2 = a+b$, т. е., согласно съ подстановкой $x^2 = z$, $y^2 = u$ и равенствомъ (3), приходимъ къ двумъ рѣшеніямъ:

$$x_1 = 0, \ y_1 = 0; \quad x_2 = \pm\sqrt{a+b}, \ y_2 = \pm\sqrt{a+b}, \tag{5}$$

при чемъ выборъ знаковъ при радикалахъ безразличенъ [такъ что формулы (5) даютъ, собственно, всего 5 рѣшеній]. Изъ равенства (4) имѣемъ:

$$u = a - b - z. \tag{6}$$

Подставляя это значеніе u въ уравненіе (1), получимъ:

$$z^2 = az + b(a-b) - bz, \quad z^2 - (a-b)z - b(a-b) = 0,$$

откуда [см. (6)]

$$z = \frac{a-b \pm\sqrt{(a-b)^2 + 4b(a-b)}}{2} = \frac{a-b\pm\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2},$$

$$u = \frac{a-b\mp\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}. \tag{7}$$

Такъ какъ $x^2 = z$, $\quad = u$, то

$$x = \pm\sqrt{\frac{a - b \pm \sqrt{a^2 + 2ab - b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{a - b \mp \sqrt{a^2 + 2ab - 3b^2}}{2}}. \quad (8)$$

Въ этой новой группѣ рѣшеній можно произвольно выбирать знаки передъ наружными радикалами, но передъ внутренними радикалами надо взять одновременно либо верхніе, либо нижніе знаки; такимъ образомъ, формулы (8) даютъ восемь новыхъ рѣшеній.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *А. Д.* (Лодзь); *А. Луконинъ* (Астрахань); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *И. Чижевскій* (Александрія); *Л. Цивьянъ* (Либава); *И. Поляковъ* (Тифлисъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *С. Лѣсюкъ* (Вилькомиръ); *С. Розенблатъ* (Балта); *А. Масловъ* (Москва); *С. Слугиновъ* (Казань); *Е. Бабицкій* (Минскъ); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *С. Сейгель* (Кіевъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Н. Шулѣповъ* (Петропавловскъ); *Е. Доманицкій* (Каменецъ-Подольскъ).

№ 247 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{\sqrt[p]{\mathrm{b} + \mathrm{x}}}{\mathrm{b}} + \frac{\sqrt[p]{\mathrm{b} + \mathrm{x}}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{c}\sqrt[p]{\mathrm{x}}}{\mathrm{a}}.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)\sqrt[p]{b + x} = \frac{b + x}{bx}\sqrt[p]{b + x} = \frac{c\sqrt[p]{x}}{a},$$

и возвысивъ обѣ части въ p-ую степень, получимъ:

$$\frac{(b + x)^p (b + x)}{b^p x^p} = \frac{c^p x}{a^p}, \text{ откуда } \frac{(b + x)^{p+1}}{x^{p+1}} = \left(\frac{cb}{a}\right)^p,$$

$$\left(\frac{b + x}{x}\right)^{p+1} = \left(\frac{cb}{a}\right)^p, \quad \frac{b + x}{x} = \left(\frac{cb}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}, \quad b + x = \left(\frac{cb}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} x.$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ:

$$x = \frac{b}{\left(\frac{cb}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} - 1},$$

при чемъ, вычисляя x, можно воспользоваться любымъ изъ $p + 1$ значеній выраженія

$$\left(\frac{cb}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} = \sqrt[p+1]{\left(\frac{cb}{a}\right)^p}.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *И. Чижевскій* (Александрія); *А. Луконинъ* (Астрахань); *Б. Двойринъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *И. Лурье* (Смоленскъ); *С. Розенблатъ* (Балта); *С. Слугиновъ* (Казань); *Е. Бабицкій* (Минскъ); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *А. Д.* (Лодзь).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. И. Гольденбергъ. *Программа обученія счисленію въ начальной школѣ.* Четвертый годъ обученія. Посмертное изданіе. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 28. Ц. 10 к.

А. Адлеръ. *Теорія геометрическихъ построеній.* Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. С. О. Шатуновскаго. Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1910. Стр. VIII + 325. Ц. 2 р. 25 к.

Проф. Лёбъ. *Динамика живого вещества.* Переводъ подъ редакціей проф. В. В. Завьялова. Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1910. Стр. VI + 352. Ц. 2 р. 50 к.

Проф. Содди. *Радій и его разгадка.* Переводъ съ англійскаго подъ редакціей Д. Д. Хмырова, лаборанта Императорскаго Новороссійскаго Университета. Съ 31 рис. Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1910. Стр. XV + 185 Ц. 1 р. 25 к.

В. П. Вахтсмутъ. *Методическое руководство къ практическимъ занятіямъ по общей химіи* для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе книжнаго магазина Г. Леффлера. Рига, 1910. Стр. 62.

Б. А. Гернъ. *Учебникъ физики.* Изданіе 1-е. Москва, 1910. Стр. XII+394. Ц. 2 р. 20 к.

Ир. Скворцовъ, проф. *Новая Космологія.* (Жизнь и развитіе Вселенной). Съ рисунками. Издательство „Вѣстника Знанія“ (В. В. Битнера). СПБ., 1910. Стр. 100.

Строй и жизнь Земли. Очеркъ геофизики и геохиміи, какъ введеніе въ общую геологію. Издательство „Вѣстника Знанія“ (В. В. Битнера). СПБ., 1910. Стр. 88.

П. И. Межеричеръ. *Механика* для ремесленныхъ, техническихъ и др. училищъ, гдѣ преподается механика, и для самообученія. Съ 125 фигурами въ текстѣ и многими упражненіями. Изданіе А. Ф. Девріена. СПБ., 1910. Стр. VIII+226. Ц. 1 р. 60 к.

С. Щербаковъ. *Курсъ космографіи* для среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе 9-е. Складъ изданія въ книжныхъ магазинахъ Н. П. Карбасникова. Нижній-Новгородъ, 1910. Стр. 228. Ц. 1 р. 10 к.

Гриньонъ (Grignon). *Уроки космографіи.* Переводъ I. Е. и Д. А. Александровыхъ. Съ дополненіями, необходимыми для русской школы. Учебная книга для женскихъ гимназій, женскихъ институтовъ и епархіальныхъ училищъ. Пособіе для самообразованія. Изданіе помѣщается въ книжномъ складѣ типографіи М. Стасюлевича. СПБ., 1911. Стр. XII+240. Цѣна въ переплетѣ 1 р.

В. В. Егоровъ, Н. И. Жуковъ, П. А. Карасевъ, А. А. Либерманъ и П. И. Потоцкій, преподаватели коммерческаго имени Цесаревича Алексѣя училища М. О. Р. К. О. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ съ правилами и опредѣленіями ариѳметики.* Приложеніе: стѣнная таблица русскихъ и метрическихъ мѣръ. Для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и другихъ училищъ съ соотвѣтствующимъ курсомъ ариѳметики. Складъ изданія у т-ва И. Н. Кушнеревъ и К°. Москва. 1910. Стр. VIII+274. Цѣна 90 к.

Н. Н. Аменицкій, преподаватель Московской женской гимназіи Винклеръ. *Новый сборникъ ариѳметическихъ задачъ* въ связи съ теоретическими опредѣленіями и правилами ариѳметики.

II. *Пропорціи и общія правила*: тройное, процентныхъ вычисленій, учета векселей, пропорціональнаго дѣленія и смѣшенія. Для гимназій, институтовъ, реальныхъ и коммерческихъ училищъ, второклассныхъ учительскихъ школъ, училищъ духовныхъ и по Положенію 1872 г. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1911. Стр. IV+127. Цѣна 35 к.

С. И. Бондаревъ. *Какъ строятся и рѣшаются задачи.* (Методическое руководство для первоначальнаго обученія ариѳметикѣ). Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1911. Стр. 119. Цѣна 25 к.

А. Г. Фонъ-Стааль. *Новые принципы математики.* Часть 3-я. „Стереометрія". Изданіе автора. Кисловодскъ, 1910. Стр. 16. Цѣна 40 коп.

Физико-математическій сборникъ, издаваемый Управленіемъ Кавказскаго Учебнаго Округа. № 3. Тифлисъ, 1910. Стр. 136.

А. О. Филипповъ. *Введеніе въ алгебру* для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Съ 8-ью чертежами въ текстѣ. Книгоиздательство „Сотрудникъ". Петербургъ-Кіевъ, 1910. Стр. 49. Цѣна 40 коп.

Н. Рождественскій, преподаватель Новочеркасскаго Коммерческаго Училища А. Ф. Абраменкова. *Сборникъ задачъ и вопросовъ по природовѣдѣнію.* Для низшихъ классовъ общеобразовательной школы. Изданіе 2-е, т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1911. Стр. 103. Цѣна 25 к.

Проф. Kammerer. *Прогрессъ техники.* Перевелъ и дополнилъ инженеръ I. А. Сегалъ. Изданіе Товарищескаго Кружка Инженеровъ Екатеринославскаго района. Екатеринославъ, 1910. Стр. 24. Ц. 35 коп.

Н. Кашинъ. *Программа по математикѣ* для VIII класса Московской 2-й гимназіи. 1909—10 учебный годъ.

А. П. Охитовичъ. *Доказательство великой теоремы Ферматa.* Казань, 1910. Стр. 51. Ц. 50 коп.

Alexander Ochitowitsch. *Beweis des grossen Fermatschen Satzes.* Autorisierte Übersetzung aus dem Russischen. Kazan, 1910. S. 50. Preis 1 Mark.

N. A. Morosoff. *Die Evolution der Materie auf den Himmelskörpern.* Eine theoretische Ableitung des periodischen Systems. Autorisierte Übersetzung von B. Pines und Dr. A. Orechoff. Dresden, 1910. Verlag von Theodor Steinkopff. S. 41. Preis M. 1. 50.

Heinrich Koppe. *Mathematische Modelle zum Selbstanfertigen.* Verlag von Jul. Koppe. Nordhausen.

Prof. Heinrich Dressler. Oberlehrer am Seminar Dresden-Plauen. *Die Lehre von der Function.* Theorie und Aufgabensammlung für alle höheren Lehranstalten (Mittelschulen). 24 Figuren, 1 graphischer Fahrplan. Verlag der Dürr'schen Buchhandlung. Leipzig, 1908. S. 93. Preis gebunden 1 M. 60 Pf.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.