№ 512.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIII-го Семестра № 8-й.

ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1910.

XLIII Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 512.

Міровой эѳиръ.

Проф. О. Лоджа *).

I.

Свѣтоносный эѳиръ и современная теорія свѣта.

Самой старой и наиболѣе извѣстной функціей, какую только приписывали эѳиру, является перенесеніе свѣта, почему онъ и названъ былъ „свѣтоноснымъ"; теперь, однако, извѣстно много другихъ функцій эѳира, а со временемъ почти навѣрное ихъ будетъ открыто еще больше.

Для начала лучше всего будетъ почерпнуть о междузвѣздномъ эѳирѣ всѣ свѣдѣнія, какія только возможно, именно изъ явленій свѣта.

Почти цѣлое столѣтіе существуетъ волнообразная теорія свѣта; и волнообразная теорія свѣта, безъ сомнѣнія, совершенно вѣрна.

*) Сэръ Оливеръ Лоджъ (O. Lodge), профессоръ и ректоръ Бирмингамскаго Университета, является приверженцемъ матеріальнаго взгляда на эѳиръ, — точка зрѣнія, наиболѣе распространенная въ Англіи. 21-го февраля 1908 г. онъ произнесъ въ Королевскомъ Институтѣ рѣчь въ защиту этого взгляда; извлеченіе изъ этой рѣчи было напечатано въ 10-мъ томѣ „Физическаго Обозрѣнія". Въ настоящее время Лоджъ выпустилъ небольшую книгу, которая содержитъ обстоятельное изложеніе современнаго состоянія ученія объ эѳирѣ. Переводъ этого сочиненія мы и намѣрены здѣсь помѣстить.

Ред.

Можно доказать прямо, что свѣтъ состоитъ изъ волнъ того или иного рода и что эти волны движутся съ хорошо извѣстной скоростью, пробѣгая каждую секунду разстояніе, равное семь разъ взятой окружности земного шара; путешествіе изъ Нью-Іорка въ Лондонъ и обратно онѣ совершили бы въ тридцатую долю секунды; а на путь отъ солнца до земли имъ требуется всего лишь восемь минутъ. Такое распространеніе во времени волнообразнаго возмущенія необходимо требуетъ существованія среды. Если волны, исходящія изъ солнца, существуютъ въ пространствѣ восемь минутъ, прежде чѣмъ онѣ достигаютъ нашихъ глазъ, то въ пространствѣ непремѣнно должна быть нѣкоторая среда, въ которой онѣ существуютъ и которая ихъ передаетъ. Волны возможны только при условіи, что это будутъ волны чего-нибудь.

Ни одно обыкновенное вещество не въ состояніи передавать волны со скоростью, хотя бы приблизительно равной скорости свѣта: скорость, съ которой передаетъ волны м а т е р і я, есть скорость звука; она представляетъ собой величину порядка, примѣрно, одной милліонной скорости свѣта. Значитъ, свѣтоносная среда должна быть веществомъ особаго рода; вотъ его-то и называютъ э ѳ и р о м ъ. Прежде его было принято называть с в ѣ т о н о с н ы м ъ эѳиромъ, потому что перенесеніе свѣта было единственной извѣстной тогда его способностью; теперь это прилагательное можетъ быть отброшено, такъ какъ выяснилось, что эѳиръ выполняетъ много разныхъ другихъ функцій. Но въ виду того, что названіе „эѳиръ" примѣняется также къ извѣстному органическому соединенію, мы можемъ для отличія называть ультраматеріальную свѣтоносную среду міровымъ эѳиромъ.

Свѣтъ навѣрное есть волнообразное движеніе въ эѳирѣ; но что же слѣдуетъ понимать подъ словомъ „волна"? Я полагаю, всякій попросту представляетъ себѣ волну, какъ что-то колыхающееся вверхъ и внизъ, а можетъ быть, какъ что-то, ударяющее о берегъ. Но если вы спросите математика, что онъ подразумѣваетъ подъ волною, онъ, вѣроятно, отвѣтитъ, что наиболѣе общая волна есть функція отъ x, y и t, удовлетворяющая дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

между тѣмъ какъ простѣйшая волна есть

$$y = a \sin (x - vt).$$

Возможно, что онъ откажется дать какой-либо иной отвѣтъ.

И онъ будетъ совершенно правъ, отказываясь дать какой-либо иной отвѣтъ, чѣмъ этотъ, или чѣмъ отвѣтъ, равносильный этому, но только выраженный обычными словами; это есть именно то, что понимается подъ терминомъ „волна", и что-либо менѣе общее не вмѣщаетъ въ себѣ всего, что разумѣютъ подъ этимъ терминомъ физики и математики.

Въ переводѣ на обычный языкъ эта фраза выражаетъ съ точностью и исчерпывающей полнотою всѣ детали „возмущенія, періодическаго въ пространствѣ и во времени". То, что обладаетъ такой двоякой періодичностью, есть волна; и всѣ волны — будутъ ли то волны въ воздухѣ, какъ волны звука, или въ эѳирѣ, какъ свѣтовыя волны, или на поверхности воды, какъ волны океана — могутъ быть объединены въ этомъ опредѣленіи.

Какія свойства существенны для среды, способной передавать волнообразное движеніе? Грубо говоря, ихъ два: упругость и инерція. Упругость въ какой-либо формѣ, или что-нибудь ей равносильное, нужна для того, чтобы среда могла накоплять въ себѣ запасы энергіи и производить отдачу, возвращеніе въ первоначальное состояніе; инерція же нужна для того, чтобы смѣщенное вещество могло перейти за предѣлы обычнаго своего положенія и колебаться взадъ и впередъ около положенія равновѣсія. Всякая среда, обладающая этими двумя свойствами, можетъ передавать волны; если же среда не обладаетъ этими свойствами въ той или иной формѣ или чѣмъ-либо имъ равносильнымъ, то можно, пожалуй, поручиться, что она волнъ передавать не въ состояніи. Утверждая это, нужно имѣть, однако, въ виду, что термины „упругость" и „инерція" здѣсь нужно разумѣть въ самомъ широкомъ смыслѣ слова, включая въ нихъ, соотвѣтственно, какъ всѣ возможные виды возстановляющей силы, такъ и всякаго рода стремленіе къ сохраненію движенія.

Можно разнообразно иллюстрировать такого рода вещества, но можетъ быть, достаточно будетъ представить себѣ отягченную грузомъ дранку или пружину. Оттяните ее въ сторону, и ея упругость будетъ стремиться возвратить ее обратно; пустите ее, и ея инерція заставитъ ее перемахнуть за ея нормальное положеніе. Вотъ что такое инерція: способность переходить за мѣтку, или, точнѣе, способность двигаться нѣкоторое время даже противъ удерживающей силы, способность взбираться на гребень. Обѣ причины вмѣстѣ заставляютъ пружину качаться туда и сюда, пока ея энергія не будетъ исчерпана. Это — возмущеніе, періодическое только во времени. Правильный рядъ такихъ пружинъ, размѣщенныхъ на равныхъ разстояніяхъ и колеблющихся черезъ правильные промежутки времени одна за другой, обладалъ бы періодичностью также и въ пространствѣ; и, такимъ образомъ, эти пружины могли бы послужить типомъ волны, не хватало бы только непрерывности. Рядъ маятниковъ дастъ ту же картину; если они будутъ колебаться въ послѣдовательномъ порядкѣ, то сразу получится наглядный примѣръ волнообразнаго движенія, которое даже случайный наблюдатель долженъ будетъ признать за таковое. Рядъ пружинъ, очевидно, обладаетъ, упругостью и инерціей; и каждая передающая волны среда точно такъ же должна обладать въ какой-либо формѣ и упругостью и инерціей.

Но теперь умѣстно спросить, что же такое этотъ эѳиръ, колебанія котораго даютъ явленіе свѣта? Что соотвѣтствуетъ упругому смѣщенію и обратному возвращенію пружины или маятника? Что соотвѣтствуетъ инерціи, благодаря которой они переходятъ черезъ свое положеніе равновѣсія. Познаемъ ли мы эти свойства эѳира какимъ-нибудь инымъ путемъ?

Отвѣтъ, данный впервые Клеркомъ Максвелломъ и съ тѣхъ поръ многократно провѣренный и подтвержденный опытами во всѣхъ важныхъ лабораторіяхъ міра, гласитъ:

Упругое смѣщеніе соотвѣтствуетъ электростатическому заряду, или, грубо говоря, электричеству.

Инерція соотвѣтствуетъ магнетизму.

Вотъ основаніе современной электромагнитной теоріи свѣта.

Позвольте мнѣ сдѣлать попытку освѣтить смыслъ этого утвержденія, пересмотрѣвъ нѣкоторые основные электрическіе факты съ точки зрѣнія нижеслѣдующихъ аналогій.

Старая и общеизвѣстная операція заряженія лейденской банки, накопленіе энергіи въ формѣ напряженія діэлектрика, всякое электростатическое заряженіе — совершенно аналогичны нажатію нашей упругой пружины. Упругостью эѳира мы пользуемся здѣсь, какъ причиной, вызывающей стремленіе къ возвращенію въ первоначальное состояніе. Спускъ пружины аналогиченъ разряду банки: напряженному діэлектрику предоставляется возможность придти въ обычное состояніе — уничтожить электростатическое возмущеніе.

Почти во всѣхъ опытахъ по электростатикѣ проявляется упругость эѳира.

Разсмотримъ теперь инерцію. Какимъ образомъ, напримѣръ, можно было бы сдѣлать очевиднымъ фактъ, что вода обладаетъ инерціей — способностью упорствовать въ своемъ движеніи при встрѣчѣ съ препятствіями, способностью сохранить кинетическую энергію? Наиболѣе прямой путь былъ бы — взять потокъ воды и попытаться сразу остановить его. Откройте водопроводный кранъ, а затѣмъ внезапно закройте его. Натискъ, или импульсъ, задержанной воды проявляется въ трубѣ сильнымъ ударомъ, съ которымъ каждый долженъ быть знакомъ. Этимъ импульсомъ воды инженеры пользуются въ „водяномъ таранѣ".

Совершенно аналогичный опытъ въ области электричества представляетъ собою то, что Фарадей назвалъ „экстра-токомъ". Пропустите токъ по катушкѣ изъ проволоки, намотанной вокругъ куска желѣза, или возьмите какое угодно другое приспособленіе для возбужденія сильнаго магнетизма, а затѣмъ внезапно остановите токъ посредствомъ размыканія цѣпи. Появляется сильная искра, если остановка была сдѣлана достаточно внезапно, — искра, обозначающая прорывъ изолирующаго воздушнаго промежутка накопленнымъ электромагнитнымъ импульсомъ. Научное названіе для электрической инерціи есть „самоиндукція".

Коротко говоря, почти всѣ электромагнитные опыты иллюстрируютъ существованіе инерціи эѳира.

Вернемся теперь къ тому, что происходитъ, когда заряженный проводникъ (напримѣръ, лейденская банка) разряжается. Возвращеніе напряженнаго діэлектрика къ обычному состоянію производитъ токъ, инерція этого тока заставляетъ его перейти за предѣлы нормальнаго положенія, и на мгновеніе зарядъ банки становится обратнымъ; теперь токъ идетъ назадъ и заряжаетъ банку опять такъ же, какъ съ самаго начала; затѣмъ токъ снова мѣняетъ направленіе, и такъ далѣе, заряжая и перезаряжая банку, производя быстрыя колебанія до тѣхъ поръ, пока вся энергія не разсѣется, перейдя въ форму тепла. Весь этотъ процессъ вполнѣ аналогиченъ тому, который происходитъ, когда мы освобождаемъ нажатую пружину или ударяемъ о натянутую струну.

Но разряжающееся тѣло, приведенное тѣмъ самымъ въ сильное электрическое колебаніе, погружено во всепроникающій эѳиръ; а мы только-что видѣли, что эѳиръ обладаетъ двумя свойствами, необходимыми для возникновенія и передачи волнъ,—именно, упругостью и инерціей или плотностью; значитъ, подобно тому, какъ камертонъ, колеблющійся въ воздухѣ, возбуждаетъ воздушныя волны, или звукъ, такъ точно разряжающаяся лейденская банка въ эѳирѣ возбуждаетъ эѳирныя волны, или свѣтъ.

Эѳирныя волны, значитъ, дѣйствительно могутъ быть произведены непосредственно электрическими средствами. Вотъ я разряжаю банку, и комната на мгновеніе наполняется свѣтомъ. Я говорю—свѣтомъ, хотя вы ничего подобнаго и не видите. Конечно, вы можете видѣть и слышать искру; но это не болѣе, какъ вторичное явленіе, который мы можемъ пока оставить безъ вниманія, такъ какъ я имѣю въ виду не какой-нибудь вторичный эффектъ. Я разумѣю настоящія эѳирныя волны, посылаемыя электрическими колебаніями, происходящими по близости отъ успокаивающагося діэлектрика. Вы сжимаете вилку камертона, и отпускаете ее: слѣдуютъ колебанія, и появляется звукъ. Заряжаете лейденскую банку и производите разрядъ: слѣдуютъ колебанія, и возникаетъ свѣтъ.

Свѣтъ этотъ ничѣмъ не хуже всякаго другого свѣта. Онъ распространяется съ тою же скоростью, отражается и преломляется по тѣмъ же законамъ; всѣ извѣстные опыты по оптикѣ могутъ быть воспроизведены съ этой эѳирной радіаціей, возбужденной электрическимъ способомъ,—и тѣмъ не менѣе вы не можете этого свѣта видѣть. Почему же это? Не потому, чтобы былъ какой-либо недостатокъ въ самомъ свѣтѣ: дефектъ (если можно здѣсь говорить о дефектѣ) заключается въ нашемъ глазу. Сѣтчатая оболочка не можетъ воспринимать этихъ колебаній,—они слишкомъ медленны. Колебанія, возникающія при разрядѣ этой большой банки, происходятъ съ быстротою отъ ста тысячъ до милліона въ секунду, но это слишкомъ медленно для сѣтчатой оболочки. Она отзывается только на колебанія въ предѣлахъ отъ 400 билліоновъ до 700 билліоновъ въ секунду. Для уха же, которое ощущаетъ только колебанія въ промежуткѣ между 40 и 40 000 въ секунду, колебанія эти слишкомъ быстры. Между наиболѣе высокимъ слышнымъ и наиболѣе низкимъ видимымъ колебаніемъ до сихъ поръ былъ большой пробѣлъ, который эти электрическія колебанія заполняютъ теперь почти цѣликомъ. Большой пробѣлъ былъ здѣсь просто потому, что у насъ нѣтъ промежуточнаго органа чувствъ для обнаруженія колебаній въ предѣлахъ между 40 000 и 400 000 000 000 000 въ секунду. Потому-то здѣсь и была неизслѣдованная область. Волны имѣлись здѣсь постоянно въ любомъ количествѣ, но мы о нихъ не думали и не обращали на нихъ вниманія.

Случилось такъ, что мнѣ самому удалось содѣйствовать полученію электрическихъ колебаній настолько медленныхъ, что ихъ можно слышать, — самыя низкія, какія я получилъ въ 1889 году, происходили въ количествѣ 125 въ секунду, а при колебаніяхъ, немного болѣе частыхъ, искры издаютъ музыкальный тонъ; но никому еще до сихъ поръ не удалось прямо произвести видимыя электрическія колебанія,— хотя косвеннымъ путемъ всякій дѣлаетъ это, зажигая свѣчу.

Легко, однако, устроить электрическій вибраторъ, совершающій 300 милліоновъ колебаній въ секунду и испускающій электрическія волны въ аршинъ длиною. Весь промежутокъ между музыкальными тонами и нѣсколькими тысячами милліоновъ колебаній въ секунду въ настоящее время заполненъ.

Посредствомъ большихъ конденсаторовъ и самоиндукцій, примѣняемыхъ въ современной кабельной телеграфіи, легко получить послѣдовательный рядъ великолѣпныхъ по своей правильности и постепенно замирающихъ электрическихъ колебаній, съ періодомъ въ двѣ или три секунды, отмѣчаемыхъ обыкновеннымъ сигнальнымъ аппаратомъ или сифоннымъ регистрирующимъ приборомъ.

Эти электромагнитныя волны съ теоретической стороны извѣстны были уже съ 1865 года, но интересъ къ нимъ неизмѣримо повысился съ открытіемъ пріемника, или детектора, для нихъ. Великое, хотя и простое, открытіе Герца въ 1888 году, открытіе „электрическаго глаза“, по выраженію лорда Кельвина, впервые сдѣлало опыты надъ этими волнами легкими или даже вообще возможными. Съ этого времени мы пріобрѣли нѣчто въ родѣ искусственнаго органа чувства для ихъ воспріятія — электрическое приспособленіе, которое дѣйствительно способно „видѣть“ эти промежуточные періоды колебаній.

Вслѣдъ за тѣмъ Бранли (Branly) открылъ, что металлическій порошокъ можетъ служить необычайно чувствительнымъ детекторомъ и на основаніи этого открытія мною былъ примѣненъ „когереръ“ для сигнализаціи на разстояніи посредствомъ электрическихъ или эѳирныхъ волнъ; теперь же въ различныхъ системахъ безпроволочной телеграфіи примѣняется много другихъ детекторовъ.

Съ герцовскими волнами можно продѣлать всѣ оптическіе опыты. Ихъ можно отражать отъ плоскихъ металлическихъ листовъ, собирать параболическими зеркалами, преломлять призмами и концентрировать линзами. Я устроилъ, напримѣръ, большую линзу изъ смолы, вѣсомъ болѣе восьми пудовъ, чтобы собирать эти лучи въ фокусѣ. Можно заставить ихъ интерферировать, и этимъ способомъ длина волны ихъ была точно измѣрена. Они задерживаются всѣми проводниками и пропускаются всѣми изоляторами. Металлы для нихъ непрозрачны; но даже несовершенные изоляторы, какъ дерево или камень, прозрачны въ высокой степени; находясь въ одной комнатѣ, можно получать волны отъ источника, находящагося въ другой, хотя бы дверь, раздѣляющая эти комнаты, и была закрыта.

Дѣйствительная природа непрозрачности металловъ и прозрачности діэлектриковъ давно была ясна съ точки зрѣнія Максвелловой теоріи свѣта, и эти волны, полученныя электрическимъ способомъ, только иллюстрируютъ и собираютъ въ одно цѣлое хорошо извѣстные факты. Опыты Герца, дѣйствительно, представляютъ собой апоѳеозъ теоріи Максвелла.

Итакъ, блестящая интуиція или математическая дедукція Клерка Максвелла о дѣйствительной природѣ свѣта, относящаяся къ 1865 году, во всѣхъ отношеніяхъ вполнѣ подтверждается; и на первое время у насъ есть теорія свѣта въ настоящемъ значеніи этого слова, которая не основана уже ни на аналогіи со звукомъ ни на предполагаемыхъ свойствахъ какого-либо студня или упругаго твердаго тѣла и которую можно трактовать, исходя изъ ея собственныхъ, прочно обоснованныхъ началъ, въ связи съ ученіями объ электричествѣ и магнетизмѣ.

Свѣтъ — это электромагнитное возмущеніе эѳира. Оптика — вѣтвь электричества. Выдающіяся по трудности задачи оптики въ настоящее время быстро рѣшаются, потому что у насъ есть средства возбуждать свѣтъ опредѣленнымъ образомъ, съ полнымъ пониманіемъ того, что мы дѣлаемъ, и съ точнымъ знаніемъ рода его колебаній.

Остается найти способъ укоротить волны — ускорить колебанія до такой степени, чтобы свѣтъ сдѣлался видимымъ. Не хватаетъ только болѣе быстрыхъ формъ колебаній. Нужно примѣнять вибраторы меньшихъ размѣровъ, — вибраторы во много разъ меньшіе, не превышающіе значительно размѣровъ молекулъ. По всей вѣроятности, — а иной, можетъ быть, скажетъ, что почти навѣрное, — обыкновенный свѣтъ есть результатъ электрическихъ колебаній въ молекулахъ или атомахъ горячихъ тѣлъ, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ и не горячихъ, какъ, напримѣръ, при явленіи фосфоресценціи.

Непосредственное возбужденіе видимаго свѣта электрическими средствами, которое сдѣлается возможнымъ въ томъ случаѣ, если мы научимся получать колебанія необходимой быстроты, будетъ имѣть чрезвычайно важныя практическія послѣдствія; вопросъ этотъ первоначально былъ разобранъ мною въ отдѣлѣ о добываніи свѣта въ § 149 главы XIV „Современныхъ взглядовъ на электричество“. Здѣсь мы не будемъ входить въ дальнѣйшее разсмотрѣніе этой стороны нашего обширнаго предмета.

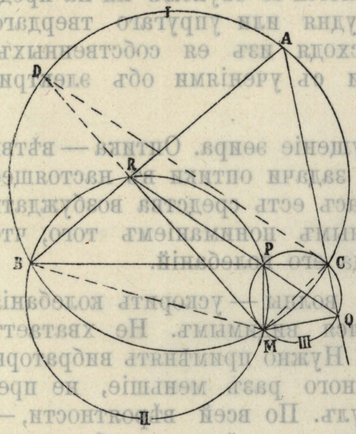
(Продолженіе слѣдуетъ).

Прямая и обратная теорема о прямой Симсона и ихъ обобщеніе.

(Докладъ, прочитанный въ Московскомъ Математическомъ кружкѣ 19 февраля 1910 г.)

Н. Извольскаго.

Пусть имѣемъ $\triangle ABC$ (черт. 1), вписанный въ кругъ I; тогда имѣетъ мѣсто теорема:



Черт. 1.

Если изъ точки круга, описаннаго около треугольника, опустить перпендикуляры на его стороны, то основанія этихъ перпендикуляровъ расположены на одной прямой (прямая Симсона).

Простѣйшее доказательство этой теоремы слѣдующее: кромѣ круга I, проходящаго черезъ A, C, M и B, мы можемъ построить еще 3 круга: кругъ II, проходящій черезъ B, R, P и M (его центръ расположенъ въ серединѣ BM), кругъ III, проходящій черезъ M, P, C и Q (его центръ — въ серединѣ MC), и кругъ IV, проходящій черезъ M, R, A и Q (его центръ — въ серединѣ MA), — на чертежѣ MP, MQ и MR суть перпендикуляры изъ M соотвѣтственно на BC, AC и AB. Тогда имѣемъ: $\angle RPB = \angle RMB$ (изъ круга II), $\angle CPQ = \angle CMQ$ (изъ круга III), но $\angle BMC = 2d - \angle A$ (изъ круга I) и $\angle RMQ = 2d - \angle A$ (изъ круга IV); слѣдовательно, $\angle BMC = \angle RMQ$; отнимая отсюда ихъ общую часть $\angle RMC$, имѣемъ: $\angle RMB = \angle CMQ$, а поэтому $\angle RPB = \angle CPQ$, т. е. линія RPQ есть прямая.

Я. Штейнеромъ (J. Steiner) была предложена изящная, хотя и простая задача:

Найти на окружности, описанной около даннаго треугольника, такую точку, чтобы соотвѣтствующая ей прямая Симсона была параллельна данной прямой.

Рѣшеніе этой задачи вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Продолжимъ MR до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ D и соединимъ C съ D; тогда $\angle RPB = \angle RMB$ (изъ II круга) $= \angle DCB$ (изъ I круга). Слѣдовательно, прямая CD должна быть параллельна прямой Симсона RQ. Поэтому надо изъ вершины треугольника провести прямую, параллельную данной, и изъ другой точки пересѣченія ея съ окружностью опустить перпендикуляръ на одну изъ сторонъ треугольника и т. д.

Обратная теорема. Если изъ какой-либо точки плоскости треугольника опущены перпендикуляры на его стороны и если ихъ основанія расположены на одной прямой, то общая точка этихъ перпендикуляровъ расположена на кругѣ, описанномъ около треугольника.

Доказательство ясно. Мы здѣсь имѣемъ только круги II, III и IV. Тогда $\angle RMQ = 2d - \angle A$ (изъ IV круга), $\angle RMB = \angle RPB$ (изъ II круга) и $\angle CMQ = \angle CPQ$ (изъ III круга), но теперь мы знаемъ, что $\angle RPB = \angle CPQ$ (ибо линія RPQ, по условію, прямая); слѣдовательно и $\angle RMB = \angle CMQ$, откуда вытекаетъ, что $\angle BMC = \angle RMQ = 2d - \angle A$, т. е. точка M лежитъ на I кругѣ.

Анализируя эти доказательства, мы прежде всего можемъ подмѣтить, что одинъ кругъ здѣсь лишній: можно, напримѣръ, обойтись безъ IV круга. Въ самомъ дѣлѣ, изъ II круга имѣемъ: $\angle RMP = \angle B$ (внутренній уголъ $\triangle ABC$), а изъ III круга: $\angle PMQ = \angle C$ (тоже внутренній уголъ); слѣдовательно, $\angle RMQ = \angle B + \angle C = 2d - \angle A$, т. е. то же, что мы получили раньше изъ IV круга. Поэтому теорему можно выразить въ такой формѣ:

Если изъ точки окружности, описанной около треугольника, опустить перпендикуляръ на одну изъ его сторонъ (на какую — безразлично) и описать два круга, вмѣщающіе полученные прямые углы, то эти круги пересѣкаютъ другія двѣ стороны треугольника въ точкахъ, которыя 1) служатъ основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ той же точки окружности на эти стороны и 2) лежатъ на одной прямой съ основаніемъ перваго перпендикуляра.

Далѣе, можно подмѣтить, что для установленія равенствъ угловъ, необходимыхъ для доказательства и прямой и обратной теоремъ, несущественнымъ является, что MB и MC служатъ діаметрами нашихъ круговъ II и III.

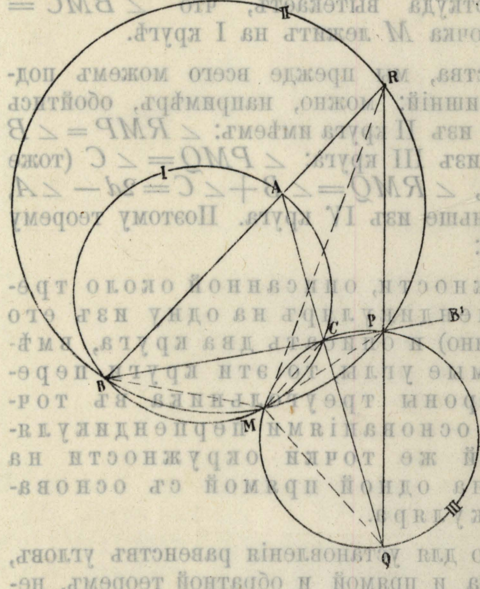
Поэтому мы можемъ на сторонахъ треугольника получить три точки, также лежащія на одной прямой, слѣдующимъ построеніемъ.

Пусть имѣемъ $\triangle ABC$ (чер. 2), вписанный въ I кругъ. Возьмемъ двѣ точки: одну M — на кругѣ и другую P — гдѣ-либо на одной изъ сторонъ $\triangle ABC$; на чертежѣ 2 эта точка взята на продолженіи стороны BC. Построимъ затѣмъ кругъ II около $\triangle MPB$ и кругъ III около $\triangle MPC$; тогда эти круги пересѣкутъ еще AC и AB въ точкахъ Q и R такъ, что RPQ должна быть прямою. Доказательство является повтореніемъ прежняго: $\angle QPB' = \angle CMQ$ (кругъ III), $\angle BPR = \angle BMR$ (кругъ II); но $\angle RMP = \angle B$ (кругъ II) и $\angle PMQ = \angle C$ (кругъ III); слѣдовательно, $\angle RMQ = \angle B + \angle C = 2d - A = \angle BMC$, откуда слѣдуетъ, что $\angle BMR = \angle CMQ$, а поэтому и $\angle QPB' = \angle BPR$, т. е. линія QPR есть прямая.

Можно точку P взять и на иной сторонѣ треугольника; доказательство существенно не измѣнится.

Полученный результатъ можно выразить, напримѣръ, въ слѣдующей словесной формѣ:

Если даны четыре вершины полнаго четырехсторонника A, B, C и P (конечно, не всѣ 4 вершины лежатъ на одной прямой, но одна изъ нихъ P лежитъ на прямой, соединяющей двѣ другія B и C), то взявъ на кругѣ, проходящемъ черезъ какія-либо три изъ нихъ, — напримѣръ, A, B и C — какую-либо точку M, можемъ получить двѣ остальныя вершины четырехсторонника построеніемъ двухъ круговъ: одного черезъ точки M, P и B и другого черезъ точки M, P и C.



Чер. 2.

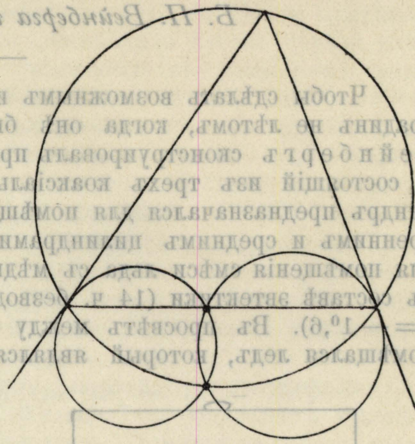
Ясно видна теперь справедливость и обратной теоремы.

Если даны 4 пересѣкающихся прямыхъ AB, BC, AC и RQ, составляющія полный четырехсторонникъ, то, описавъ круги II и III, которые пересѣкаются, напримѣръ, въ M, найдемъ: $\angle RMP = \angle B$ (изъ II круга), $\angle PMQ = \angle C$ (изъ III круга): слѣдовательно, $\angle RMQ = \angle B + \angle C = 2d - \angle A$, т. е. точка M лежитъ на кругѣ IV, описанномъ около $\triangle ARQ$; но $\angle BMR = \angle BPR$ (изъ II круга) и $\angle CMQ = 2d - \angle CPQ$ (изъ III круга), и такъ какъ, по условію, линія RPQ есть прямая, то $\angle BPR = 2d - \angle CPQ$ и, слѣдовательно, $\angle BMR = \angle CMQ$, откуда слѣдуетъ, что $\angle BMC = \angle RMQ = 2d - \angle A$, т. е. точка M лежитъ на I кругѣ, описанномъ около $\triangle ABC$. Поэтому имѣемъ:

Если данъ полный четырехсторонникъ и если описать 4 круга около каждаго изъ 4 треугольниковъ, образованныхъ сторонами четырехсторонника, то всѣ 4 круга проходятъ черезъ одну точку.

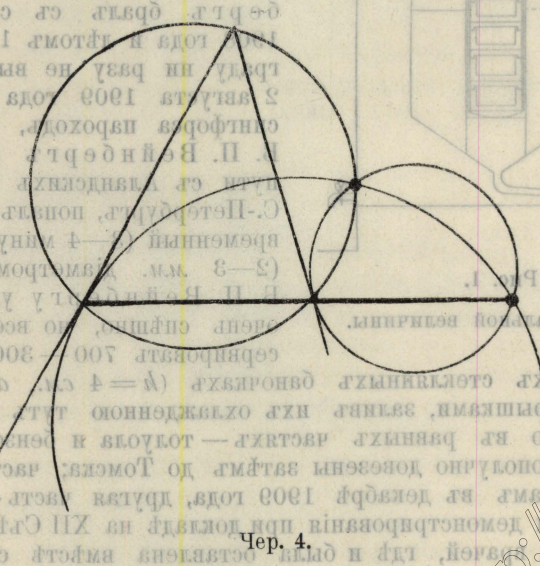
Разсмотримъ еще частный случай, когда точка Q приближается къ C и, наконецъ, съ ней совпадаетъ (удобнѣе построить здѣсь чертежъ 2 такъ, чтобы точка P располагалась между B и C); точка P находится гдѣ-либо на прямой BC, а такъ какъ точка R должна лежать на прямой AB и на прямой RPQ, то непремѣнно точка R должна совпасть съ точкой B; тогда круги II и III станутъ касательными къ прямымъ AB и AC, но они попрежнему должны проходить черезъ точку M, лежащую на кругѣ I и черезъ точку P, расположенную на прямой BC. Поэтому здѣсь получимъ 2 теоремы:

Прямая. Два круга, касающіеся сторонъ угла и пересѣкающіеся на окружности, проходящей черезъ вершину угла и точки касанія круговъ, должны второй разъ пересѣкаться на прямой, соединяющей точки касанія (черт. 3 и 4).



Чер. 3.

Обратная. Два круга, касающіеся сторонъ угла и пересѣкающіе прямую, соединяющую точки касанія, въ одной и той же точкѣ,



Чер. 4.

второй разъ пересѣкаются на кругѣ, проходящемъ черезъ вершину угла и черезъ точки касанія.

Консервированіе градинъ и изученіе ихъ микроструктуры.

Б. П. Вейнберга и В. Д. Дудецкаго.

Чтобы сдѣлать возможнымъ изученіе структурныхъ особенностей градинъ не лѣтомъ, когда онѣ быстро обтаиваютъ, а зимою, Б. П. Вейнбергъ сконструировалъ приборъ, изображенный на рисункѣ 1 и состоящій изъ трехъ коаксіальныхъ цилиндровъ. Внутренній цилиндръ предназначался для помѣщенія градинъ. Просвѣтъ между внутреннимъ и среднимъ цилиндрами и ихъ крышками предназначался для помѣщенія смѣси льда съ мѣднымъ купоросомъ — приблизительно въ составѣ эвтектики (14 ч. безводнаго $CuSO_4$ на сто частей льда, $t = -1^0,6$). Въ просвѣтъ между среднимъ и наружнымъ цилиндрами помѣщался ледъ, который являлся какъ бы предохранительною рубашкою: малая разность температуръ между нею и содержимымъ слѣдующаго просвѣта обусловливала въ послѣднемъ медленное таяніе льда и раствореніе мѣднаго купороса.

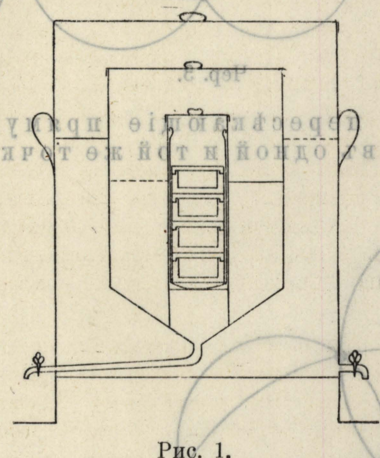


Рис. 1.

1/10 натуральной величины.

Приборъ этотъ Б. П. Вейнбергъ бралъ съ собою лѣтомъ 1908 года и лѣтомъ 1909 года, но граду ни разу не выпало. Только 2 августа 1909 года вблизи Гельсингфорса пароходъ, на которомъ Б. П. Вейнбергъ находился по пути съ Аландскихъ острововъ въ С.-Петербургъ, попалъ подъ кратковременный (3—4 минуты) и мелкій (2—3 *мм.* діаметромъ) градъ, и Б. П. Вейнбергу удалось, хоть и очень спѣшно, но все-таки законсервировать 700 — 300 *гр.* градинъ въ нѣсколькихъ стеклянныхъ баночкахъ ($h = 4$ *см.*, $d = 7$ *см.*) съ притертыми крышками, заливъ ихъ охлажденною тутъ же смѣсью — приблизительно въ равныхъ частяхъ — толуола и бензола. Градины эти были благополучно довезены затѣмъ до Томска; часть ихъ была изслѣдована тамъ въ декабрѣ 1909 года, другая часть — отправлена въ Москву для демонстрированія при докладѣ на XII Съѣздѣ естествоиспытателей и врачей, гдѣ и была оставлена вмѣстѣ съ приборомъ въ метеорологической обсерваторіи университета; часть сохранилась до недавнихъ оттепелей въ Томскѣ. Такимъ образомъ самая возможность консервировать и перевозить градины оказалась вполнѣ [подтвержденною на опытѣ.

Что касается изученія микроструктуры градинъ, то для этого надо было научиться приготовлять шлифы ихъ желаемой тонины, — и въ этомъ отношеніи В. Д. Дудецкій пришелъ къ слѣдующимъ практическимъ пріемамъ. При шлифовкѣ градинъ на морозѣ (для этого была устроена особая холодная лабораторія — небольшой деревянный неотапливаемый домикъ), отдѣливъ градину отъ общей массы, зажимали ее въ зажимъ между пробками и подравнивали о кусокъ грубой наждачной бумаги или же оплавляли пальцемъ съ удаленіемъ воды плавленія другимъ пальцемъ или кусочкомъ фильтровальной бумаги. Затѣмъ эта градина накладывалась подшлифованною поверхностью на предметное стеклышко, къ которому примораживалась такъ: палецъ держали или водили съ другой стороны стеклышка, пока градина не начинала плавиться, и, по удаленіи излишка воды, если прикосновеніе пальца было слишкомъ долговременнымъ, давали системѣ охладиться. Такимъ же образомъ подравнивалась далѣе наружная сторона, — и шлифовка заканчивалась на болѣе мелкой наждачной бумагѣ. При нѣкоторомъ навыкѣ можно получать шлифы до десятой миллиметра толщины и тоньше. Шлифы эти окружались кольцомъ изъ бумаги или просто валикомъ изъ канадскаго бальзама, покрывались покровнымъ или вторымъ предметнымъ стеклышкомъ, заклеивались бальзамомъ и могли сохраняться въ такомъ видѣ недѣлю-другую. Примораживаніе и шлифовка шли тѣмъ легче, чѣмъ ниже была температура воздуха, и были настолько затруднительными при температурахъ между 0^{0} и -5^{0}, что тогда предпочитали прибѣгать къ искусственному охлажденію при помощи смѣси снѣга и льда. Такое охлажденіе дало возможность производить тѣ же операціи (примѣняя деревянныя дощечки, покрытыя шкуркою, снабженныя ручками и тоже охлажденныя) и при комнатной температурѣ, что можетъ позволить изученіе структуры градинъ и лѣтомъ при отсутствіи спеціальнаго прибора для ихъ консервированія.

Шлифы изучались или на морозѣ при помощи поляризаціоннаго микроскопа или въ аудиторіи при помощи обыкновеннаго проекціоннаго фонаря. Въ послѣднемъ случаѣ расположеніе приборовъ было таково: фонарь, снабженный кюветкою съ водой для уменьшенія нагрѣванія, николь-поляризаторъ, приспособленіе для проектированія прозрачныхъ горизонтальныхъ объектовъ, охладительная камера съ шлифомъ градины (рис. 2), объективъ, призма полнаго внутренняго отраженія, николь-анализаторъ. Получавшееся дѣйствительное изображеніе шлифа либо изучалось визуально, либо фотографировалось (въ натуральныхъ цвѣтахъ). Охладительная камера, во внѣшній просвѣтъ которой помѣщалась смѣсь снѣга съ солью, очень хорошо держала низкую температуру, а благодаря двойному дну изъ двухъ пластинокъ — плоско-параллельнаго стекла съ промежуточнымъ слоемъ воздуха — не происходило никакого запотѣванія, сильно мѣшающаго при иныхъ способахъ проектированія холодныхъ предметовъ.

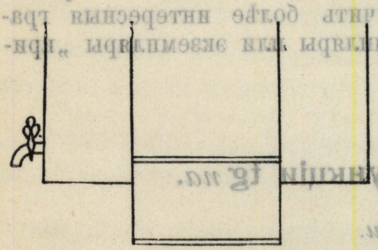


Рис. 2.

$^{1}/_{5}$ натуральной величины.

Изслѣдованіе законсервированныхъ 2.IX.09 градинъ показало, что въ громадномъ большинствѣ случаевъ это были одиночныя недѣлимыя — подобно „искусственнымъ градинамъ“, получавшимся путемъ замораживанія капелекъ воды, подвѣшенныхъ въ смѣси коричнаго и льняного масла того же удѣльнаго вѣса. Въ градинахъ же, состоявшихъ изъ нѣсколькихъ недѣлимыхъ, оріентировка граней этихъ недѣлимыхъ и ихъ оптическихъ осей не представляла никакой правильности, ни по сравненію съ сосѣдними недѣлимыми, ни по отношенію къ молочному ядру градины, которое въ шлифѣ представлялось въ видѣ ряда пузырьковъ воздуха различной величины.

Изъ приведенныхъ данныхъ видно, что, если заранѣе поставить себѣ цѣлью изученіе микроструктуры градинъ и держать наготовѣ подходящія приспособленія, то можно безъ особаго труда законсервировать до зимы выпавшій лѣтомъ градъ или изслѣдовать его лѣтомъ же. Замѣтимъ, что во избѣжаніе смерзанія градинъ мы совѣтуемъ брать ихъ всего нѣсколько десятковъ и помѣщать ихъ на разстояніи другъ отъ друга въ какую-нибудь очень вязкую жидкость близкой плотности. Очень подходящимъ является, по наблюденіямъ В. Д. Дудецкаго, такъ называемое цилиндровое масло; пригодны также вазелинъ, касторовое масло, а для кратковременнаго храненія годятся также керосинъ, прованское масло, деревянное масло. Передъ примораживаніемъ слѣдуетъ лишь тщательно очистить градины отъ масла. Консервированіе, вѣроятно, возможно и безъ особыхъ приборовъ, если сдѣлать въ большомъ кабанѣ льда углубленіе достаточныхъ размѣровъ, помѣстить туда погруженныя въ соотвѣтствующую среду градины въ стеклянныхъ банкахъ съ притертыми пробками или крышками и закрыть углубленіе возможно плотно пригнанною толстою пластиною льда.

Будемъ надѣяться, что сдѣланная попытка не останется одиночною и что другимъ изслѣдователямъ удастся найти болѣе совершенные пріемы и законсервировать или изучить болѣе интересныя градины, — напримѣръ, особо крупные экземпляры или экземпляры „кристаллическихъ“ градинъ.

Общее выраженіе функціи tg *na*.

Г. Андреоли.

Въ курсѣ тригонометріи обыкновенно излагается слѣдующій выводъ. Полагая $b = (n+1)\,a$ въ формулахъ:

$$\sin(b+a) + \sin(b-a) = 2\sin b\cos a$$
$$\cos(b+a) + \cos(b-a) = 2\cos b\cos a,$$

получаемъ:

$$\sin(n+2)\,a = \sin(n+1)\,a\,.\,2\cos a - \sin na$$
$$\cos(n+2)\,a = \cos(n+1)\,a\,.\,2\cos a - \cos na.$$

Это привело меня къ общему выраженію функціи $\operatorname{tg} na$ въ видѣ непрерывной дроби. Если въ непрерывной дроби

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} \dot{+} \frac{b_2}{a_2} \dot{+} \cdots = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$$

обозначимъ черезъ $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ $(n+1)$-ую подходящую дробь, то будемъ имѣть:

$$P_{n+2} = P_{n+1}\, a_{n+2} + P_n\, b_{n+2}, \quad Q_{n+2} = Q_{n+1}\, a_{n+2} + Q_n\, b_{n+2}.$$

Сравнивая это выраженіе съ найденнымъ выше и полагая

$$P_{n+2} = \sin(n+2)a; \; Q_{n+2} = \cos(n+2)a; \; a_{n+2} = 2\cos a; \; b_{n+2} = -1,$$

мы найдемъ, что

$$R_{n+2} = \operatorname{tg}(n+2)a, \quad n \geqq 0.$$

Чтобы $R_n = \operatorname{tg} na$ при $n \geqslant 0$ необходимо, кромѣ того, чтобы

$$\operatorname{tg} 0 = 0 = R_0; \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{P_1}{Q_1};$$

отсюда:

$$R_0 = a_0 = 0; \quad P_1 = \sin a = a_0\, a_1 + b_1; \quad b_1 = \sin a.$$

Слѣдовательно $(n+1)$-ая подходящая смѣшанной періодической дроби

$$0 \dot{+} \frac{\sin a}{\cos a} \dot{-} \frac{1}{2\cos a} \dot{-} \frac{1}{2\cos a} \dot{-} \cdots \text{ есть } \operatorname{tg} na.$$

Можно провѣрить эту формулу на частныхъ случаяхъ:

$$R_0 = \operatorname{tg} 0; \quad R_1 = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a;$$

$$R_2 = \cfrac{\sin a}{\cos a - \cfrac{1}{2\cos a}} = \frac{2\cos a \sin a}{2\cos^2 a - 1} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \operatorname{tg} 2a;$$

$$R_3 = \cfrac{\sin a}{\cos a - \cfrac{1}{2\cos a - \cfrac{1}{2\cos a}}} = \cfrac{\sin a}{\cos a - \cfrac{2\cos a}{4\cos^2 a - 1}} =$$

$$= \frac{(4\cos^2 a - 1)\sin a}{4\cos^3 a - 3\cos a} = \frac{(3 - 4\sin^2 a)\sin a}{\cos 3a} = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \operatorname{tg} 3a \text{ и т. д.}$$

Отчеты о засѣданіяхъ Московскаго Математическаго Кружка.

1. Въ засѣданіи, происходившемъ 29 января 1910 г., Е. С. Томашевичъ сдѣлалъ сообщеніе: „О взаимоотношеніи между углами треугольника и ихъ биссектрисами“, причемъ предложилъ два доказательства теоремы о томъ, что при равенствѣ биссектрисъ двухъ угловъ треугольникъ долженъ быть равнобедреннымъ. Оба доказательства, данныя референтомъ, — отъ противнаго; недостаткомъ ихъ, по указанію самого докладчика, является то, что они не вполнѣ примѣнимы къ случаю, когда бе-

рутся биссектрисы внѣшнихъ угловъ треугольника. Въ обсужденіи доклада приняли участіе многіе члены Кружка. Въ виду интереса, представляемаго теоремой, которой коснулся въ своемъ докладѣ Е. С. Томашевичъ, было рѣшено продолжить бесѣду о ней и въ слѣдующемъ засѣданіи.

Б. К. Млодзѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О наибольшей площади четырехугольника, даннаго своими сторонами", причемъ далъ чисто геометрическое доказательство теоремы, что maximum площади четырехугольникъ будетъ имѣть тогда, когда около него можно описать окружность. При этомъ референтъ исходилъ изъ 2 леммъ: 1) площадь треугольника, двѣ стороны котораго даны, будетъ maximum, когда эти стороны составляютъ прямой уголъ; 2) аналогично, площадь многоугольника будетъ maximum, когда онъ можетъ быть вписанъ въ кругъ, діаметромъ котораго служитъ послѣдняя сторона.

2. Въ засѣданіи, происходившемъ 19 февраля 1910 г., К. Ѳ. Лебединцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Программа и методъ преподаванія алгебры въ средней школѣ".

По мнѣнію докладчика, программа по алгебрѣ, дѣйствующая въ нашей средней школѣ, и методъ изложенія этой науки — основаны на традиціонномъ воззрѣніи, что математика должна изучаться въ цѣляхъ общаго умственнаго развитія учащихся, и что эта цѣль вѣрнѣе всего достигается при абстрактно-дедуктивномъ изложеніи математическихъ истинъ. Однако, такой взглядъ не можетъ считаться обоснованнымъ, такъ какъ нельзя, напримѣръ, допустить, чтобы изученіе математики, при которомъ преобладаютъ дедуктивные процессы мышленія, могло укрѣплять и способность къ индуктивному мышленію, необходимому при ознакомленіи со многими иными отраслями знанія. Поэтому референтъ полагаетъ, что роль математики въ системѣ общаго образованія важна, главнымъ образомъ, благодаря ея значенію въ культурной жизни человѣчества, и она должна изучаться не только, какъ научная система, но и какъ могущественное орудіе міропониманія. Съ этой точки зрѣнія въ дѣйствующихъ программахъ по алгебрѣ должны быть сдѣланы существенныя измѣненія: необходимо опустить всѣ тѣ вопросы, которые не имѣютъ непосредственнаго приложенія въ жизни и не служатъ въ то же время для теоретическаго обоснованія и развитія предмета (напримѣръ, сложныя и искусственныя преобразованія алгебраическихъ выраженій, рѣшеніе возвратныхъ, двучленныхъ и трехчленныхъ уравненій, неопредѣленныя уравненія, непрерывныя дроби и пр.). Взамѣнъ же исключенныхъ отдѣловъ желательно ввести ознакомленіе съ понятіями о функціи и о функціональной зависимости, съ системою декартовыхъ координатъ на плоскости, съ понятіями о производной и объ интегралѣ и съ простѣйшими приложеніями этихъ понятій въ математикѣ и др. наукахъ. При этомъ желательно, чтобы элементы высшаго анализа не выдѣлялись въ особыя главы, а проходились бы въ тѣсной связи съ основнымъ курсомъ алгебры. Методъ изложенія всѣхъ изучаемыхъ истинъ долженъ быть не абстрактно-дедуктивный, какъ въ настоящее время, а конкретно-индуктивный. Докладчикъ пояснилъ свой взглядъ многочисленными примѣрами методическаго характера и въ заключеніе принесъ въ даръ Математическому Кружку нѣсколько экземпляровъ составленной имъ въ духѣ изложенныхъ идей книги: „Курсъ алгебры". Части I и II. 1910 г. Кіевъ. Изданіе „Сотрудника". Цѣна I-й ч. 80 коп.; цѣна II-й ч. 1 р. 10 коп.

Н. А. Извольскій сдѣлалъ сообщеніе: „Прямая и обратная теоремы Симсона и ихъ обобщеніе" *). Сущность доклада состоитъ въ слѣдующемъ. Въ простѣйшемъ доказательствѣ теоремы о томъ, что основанія трехъ перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны треугольника изъ какой-либо точки описанной около него окружности, лежатъ на одной прямой, можно подмѣтить, что здѣсь имѣются элементы, не существенные для дѣлаемаго заключенія. Поэтому какъ прямая, такъ и обратная теорема могутъ быть обобщены: 1) можно опустить перпендикуляръ лишь на одну сторону треугольника и описать окружности около двухъ полученныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, и тогда эти окружности пересѣкутъ остальныя двѣ стороны треугольника въ точкахъ, служащихъ основаніями двухъ другихъ

*) Помѣщено въ настоящемъ номерѣ.

перпендикуляровъ. 2) Обобщеніе обратной теоремы позволяетъ получить слѣдующую извѣстную теорему: 4 круга, описанные около 4 треугольниковъ, составленныхъ сторонами полнаго четырехсторонника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Какъ частный случай этого второго обобщенія, является теорема: два круга, касающіеся сторонъ угла и пересѣкающіеся на кругѣ, проходящемъ чрезъ вершину угла и чрезъ точки касанія, второй разъ пересѣкаются на прямой, соединяющей точки касанія круговъ, и обратно.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Метеорологическія наблюденія при прохожденіи кометы Галлея. Вмѣстѣ съ приближеніемъ времени появленія кометы Галлея близъ земли растетъ и литература, касающаяся какъ астрономическихъ условій прохожденія кометы, такъ и тѣхъ явленій, которыя могутъ при этомъ наблюдаться въ атмосферѣ.

Въ американскомъ журналѣ „Science“ (11 февраля 1910 г.) помѣщена статья Гёмпрейза (Humphreys), принадлежащаго къ составу Mount Weather Observatory въ Вашингтонѣ, подъ заглавіемъ „Some suggestions for the study of comets“. Въ статьѣ перечислены тѣ явленія, которыя въ большей или меньшей степени заслуживаютъ наблюденія при прохожденіи кометы. Авторъ раздѣляетъ эти наблюденія на двѣ группы: астрофизическія и метеорологическія. Къ первымъ принадлежатъ наблюденія надъ внѣшнимъ видомъ кометы и ея хвоста; спектральныя изслѣдованія свѣта различныхъ ея частей; поляризація этого свѣта; подробныя наблюденія надъ колебаніями свѣта, испускаемаго кометой (что можетъ быть связано съ размѣрами и положеніемъ солнечныхъ пятенъ). Ко второй группѣ относятся тѣ электрическія, магнитныя и оптическія явленія, которыя могутъ быть вызваны въ атмосферѣ близостью хвоста кометы. Возможно измѣненіе іонизаціи атмосферы, съ чѣмъ будетъ связано измѣненіе въ силѣ электрическаго земного поля; возможны также нарушенія въ дѣйствіи безпроволочнаго телеграфа. Съ электрическими свойствами хвоста кометы будутъ связаны также измѣненія въ земныхъ токахъ, въ суточномъ ходѣ элементовъ земного магнетизма, въ возникновеніи сіяній, подобныхъ сѣверному. Далѣе въ зависимости отъ возможнаго измѣненія состава верхнихъ слоевъ атмосферы и отъ ихъ помутнѣнія слѣдуетъ ожидать измѣненій въ земныхъ линіяхъ и полосахъ поглощенія въ спектрѣ и вообще въ условіяхъ прозрачности атмосферы; возможны метеорные потоки, появленіе круговъ Бишопа, измѣненіе цвѣта солнца и условій поляризаціи свѣта небеснаго свода; особая окраска зари, свѣтящіяся облака, усиленіе зодіакальнаго свѣта и пр.

Проф. Биркелендомъ (Birkeland) изъ Христіаніи присланъ циркуляръ, въ которомъ онъ объявляетъ о своемъ намѣреніи, вмѣстѣ съ ассистентомъ Крогнесомъ (Krogпes) производить магнитныя и атмосферныя наблюденія въ теченіе періода съ 7 мая по 1 іюня 1910 г. нов. ст. въ сѣверной Норвегіи въ Кааѳіордѣ. Въ предположеніи, что хвостъ кометъ состоитъ изъ электрическихъ матеріальныхъ лучей, слѣдуетъ ожидать при движеніи хвоста до земли, благодаря ея магнитному состоянію, явленій, подобныхъ сѣверному сіянію Въ циркулярѣ помѣщены рисунки, показывающіе, какихъ именно явленій сіянія можно при этомъ ожидать. Эти рисунки составлены на основаніи извѣстныхъ опытовъ Биркеленда искусственнаго воспроизведенія сіяній и показываютъ, что возможно возникновеніе полярныхъ спиралей свѣта, экваторіальнаго свѣтового кольца и полярныхъ истеченій. Для полярныхъ явленій условія для наблюденія будутъ лучше въ южномъ полушаріи, гдѣ въ маѣ будетъ ночь.

Биркелендъ указываетъ также на то, что при близкомъ прохожденіи кометнаго хвоста мимо Венеры (1—2 мая нов. ст.) возможно и тамъ возникновеніе сіяній, если только Венера намагничена, подобно землѣ.

(„*Метеорологическій Вѣстникъ*“).

РЕЦЕНЗІИ.

Харьковская математическая библіотека. № 1. Якобъ Штейнеръ. „Геометрическія построенія, выполняемыя посредствомъ прямой линіи и неподвижнаго круга, какъ предметъ преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и для практическаго примѣненія“. Переводъ студ. П. М. Ерохина и Р. И. Гольдберга, подъ редакціей проф. Д. М. Синцова. Съ приложеніемъ біографическаго очерка Штейнера. Харьковъ, 1910. XVI + 96 стр.

Какъ видно изъ приведеннаго заглавія, настоящая брошюра должна открыть собою серію математическихъ сочиненій подъ общимъ заглавіемъ: „Харьковская математическая библіотека“. Нечего и говорить, что такое начинаніе будутъ горячо привѣтствовать всѣ, кому дорого распространеніе у насъ математическихъ знаній. Всякій университетскій преподаватель очень хорошо знаетъ, какъ важно въ дѣлѣ математическаго образованія, чтобы студентъ читалъ не однѣ только литографированныя лекціи и въ лучшемъ случаѣ учебники, а научился бы также разбираться въ оригинальныхъ мемуарахъ, въ первоисточникахъ математическаго творчества. Но это, конечно, не легко. Не легко потому, что новые мемуары посвящены текущимъ вопросамъ математической литературы, до которыхъ нашъ студентъ не добирается; не легко потому, что математики имѣютъ дурную привычку писать такъ, что ихъ трудно понять и спеціалисту, а не только начинающему; наконецъ, русскому студенту это особенно трудно потому, что приходится имѣть дѣло, почти исключительно, съ работами, написанными на иностранномъ языкѣ. Есть, однако, въ литературѣ не мало такихъ мемуаровъ, которые можно дать въ руки хорошему студенту, въ особенности, если снабдить ихъ пояснительными примѣчаніями. Если настоящая брошюра начнетъ собою серію такихъ мемуаровъ въ русскомъ переводѣ, то этимъ будетъ оказана огромная услуга дѣлу преподаванія математики. Но врядъ ли для начала могъ быть сдѣланъ болѣе удачный выборъ. Изъ всѣхъ классиковъ математической литературы имя Штейнера у насъ, быть можетъ, наименѣе извѣстно. Я думаю это обуславливается, главнымъ образомъ, тѣмъ, что у насъ давно преобладаетъ аналитическое направленіе, и геометрія не въ фаворѣ. Между тѣмъ Штейнеръ одинъ изъ наиболѣе блестящихъ математическихъ талантовъ. Двѣ черты особенно характерны для Штейнера. Во-первыхъ, это геометръ чистой крови; и геометръ онъ не только, какъ одинъ изъ творцовъ современной синтетической геометріи; онъ остается геометромъ, когда рѣшаетъ труднѣйшіе вопросы варіаціоннаго исчисленія. Во-вторыхъ, Штейнеръ всегда работаетъ необычайно элементарными средствами; гдѣ другіе прибѣгаютъ ко всему аппарату анализа, Штейнеръ умѣетъ справиться самыми простыми средствами; это дано немногимъ.

Однимъ изъ лучшихъ перловъ элементарнаго геометрическаго разсужденія является статья „геометрическія построенія, выполняемыя посредствомъ прямой линіи и неподвижнаго круга“. Цѣль статьи заключается въ томъ, чтобы показать, что всѣ построенія, выполняемыя циркулемъ и линейкой, могутъ быть выполнены одной только линейкой, если въ плоскости дана одна неподвижная окружность. Но въ дѣйствительности этотъ мемуаръ Штейнера содержитъ гораздо больше. Прямая линія есть представительница проективной геометріи, а Штейнеръ, какъ мы уже сказали, есть одинъ изъ отцовъ этой геометріи. Онъ вплетаетъ поэтому въ свое изложеніе основныя понятія проективной геометріи (ученіе о гармоническомъ пучкѣ) и показываетъ, какъ ими воспользоваться для требуемыхъ построеній, хотя онъ тутъ же даетъ пріемы для производства тѣхъ же построеній и безъ этихъ средствъ. Попутно разсматриваются также свойства системы круговъ. Любопытно, что въ § 19 содержатся также идеи, въ которыхъ нельзя не усмотрѣть зародыша современной геометрографіи.

Все это изложено съ такой ясностью и простотой, что хорошій гимназистъ не встрѣтитъ здѣсь затрудненія, а всякій, въ комъ есть геометрическое чутье, испытаетъ при чтеніи этой работы глубокое эстетическое наслажденіе.

Таково небольшое сочиненіе, переведенное студентами П. М. Ерохинымъ и Р. И. Гольдбергомъ подъ редакціей проф. Д. М. Синцова. Проредактированъ переводъ чрезвычайно тщательно; кое-гдѣ вставлены примѣчанія; редакторомъ перевода составлена также краткая біографія Штейнера. Намъ казалось бы только, что къ книжкѣ въ видѣ приложенія слѣдовало бы прибавить изложеніе тѣхъ пріемовъ рѣшенія задачи Штейнера, которые были предложены позже.

Мы горячо рекомендуемъ эту небольшую книгу всякому любителю геометріи и надѣемся, что „Харьковская математическая библіотека" дастъ въ руки русскимъ учащимся еще не одно цѣнное произведеніе математическаго генія.

В. Каганъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе

№ 282 (5 сер.). Геометрическая фигура состоитъ изъ 9 точекъ и 9 прямыхъ отрѣзковъ. Черезъ каждую точку проходятъ 3 отрѣзка, и на каждомъ отрѣзкѣ лежатъ 3 точки. Какова эта фигура? Сколько точекъ въ этой фигурѣ можетъ быть взято произвольно? Къ какой геометрической задачѣ приводится построеніе остальныхъ точекъ?

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 283 (5 сер.). Найти основаніе системы логариѳмовъ, въ которой логариѳмъ всякаго числа меньше отношенія этого числа къ основанію.

П. Флоровъ (ст. Урюпинская).

№ 284 (5 сер.). Доказать тожество

$$\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)=4,$$

гдѣ a, b, c, r_a, r_b, r_c суть стороны и радіусы внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.

П. Богомоловъ (Шацкъ).

№ 285 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$4x^4 - 16x^3 + 27x^2 - 21x + 9 = 0.$$

А. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 286 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$3^{x+a} = 9(x+a),$$

гдѣ a опредѣляется равенствами $b - 3a = 1$, $2^b = 4b$.

Н. Мануйловичъ (м. Млыновъ, Волынской губ.).

№ 287 (5 сер.). Пусть $F(z)$ обозначаетъ трехчленъ второй степени относительно z. Доказать, что выраженіе

$$F(x)F''(y) + F'(x)F'(y) + F''(x)F(y)$$

равно значенію нѣкотораго другого трехчлена второй степени при $z = x + y$ [$F'(z)$, $F''(z)$ суть первая и вторая производныя по z трехчлена $F(z)$].

(Заимств).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 196 (5 сер.). *Три прямыя выходящія изъ точки* O, *пересѣкаются двумя сѣкущими соотвѣтственно въ точкахъ* A *и* A′, B *и* B′, C *и* C′. *Доказать, что имѣетъ мѣсто соотношеніе:*

$$\frac{AO}{CO} : \frac{A'O}{C'O} = \frac{AB}{BC} : \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Сравнивая площади паръ треугольниковъ AOB, BOC и $A'OB'$, $B'OC'$, имѣющихъ соотвѣтственно общую вершину и основанія, лежащія на одной прямой, находимъ:

$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл. } BOC} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{\text{пл. } A'OB'}{\text{пл. } B'OC'} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

откуда, раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ:

$$\frac{\text{пл. } AOB \,.\, \text{пл. } B'OC'}{\text{пл. } BOC \,.\, \text{пл. } A'OB'} = \frac{AB}{BC} : \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{\text{пл } AOB}{\text{пл. } A'OB'} : \frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл. } B'OC'}. \qquad (1)$$

Сравнивая теперь площади паръ треугольниковъ AOB, $A'OB'$ и BOC, $B'OC'$, имѣющихъ соотвѣтственно по общему углу при вершинѣ O, имѣемъ:

$$\frac{\text{пл } AOB}{\text{пл. } A'OB'} = \frac{AO \,.\, BO}{A'O \,.\, B'O}, \quad \frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл. } B'OC'} = \frac{BO \,.\, CO}{B'O \,.\, C'O},$$

откуда

$$\frac{\text{пл. } AOB}{\text{пл } A'OB'} : \frac{\text{пл. } BOC}{\text{пл } B'OC'} = \left(\frac{AO}{A'O} \cdot \frac{BO}{B'O}\right) : \left(\frac{BO}{B'O} \cdot \frac{CO}{C'O}\right) = \frac{AO}{A'O} : \frac{CO}{C'O} = \frac{AO}{CO} : \frac{A'O}{C'O}.$$

Слѣдовательно [см. (1)],

$$\frac{AO}{CO} : \frac{A'O}{C'O} = \frac{AB}{BC} : \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Н. Доброгаевъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

№ 197 (5 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$2^{x-y+1} x - 3 \cdot 2^{x-y} \cdot y - 2x - 2^{x-y} + 3y + 1 = 0.$$

Выведемъ за скобку въ первомъ, второмъ и четвертомъ членахъ множитель 2^{x-y}. Тогда уравненіе приметъ видъ:

$$2^{x-y}(2x - 3y - 1) - (2x - 3y - 1) = 0, \text{ или } (2^{x-y} - 1)(2x - 3y - 1) = 0,$$

откуда

$$2^{x-y} - 1 = 0, \text{ или } 2x - 3y - 1 = 0.$$

Первое уравненіе рѣшается въ цѣлыхъ числахъ лишь при $x = y = t$, гдѣ t — произвольное цѣлое число. Рѣшая обычнымъ способомъ въ цѣлыхъ числахъ второе уравненіе, находимъ:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 2t,$$

гдѣ t — произвольное цѣлое число.

А. Масловъ (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *А. Д.* (Лодзь); *А. Фельдманъ* (Одесса); *N. N.*; *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *В. Бунятянцъ* (Шуша).

№ 199 (5 сер.). *Вычислить* $\sin^2 2x$, *если дано, что*

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$\frac{\mathrm{cotg}^2 x + \mathrm{tg}^2 x}{(\mathrm{tg}\, x \,\mathrm{cotg}\, x)^2} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{cotg}^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \mathrm{cosec}^2 x - 1 + \sec^2 x - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 2\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 2 =$$

$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 = \frac{2 \cdot 4}{4 \sin^2 x \cos^2 x} - 2 = \frac{8}{\sin^2 2x} - 2 = 7, \text{ находимъ:}$$

$$\frac{8}{\sin^2 2x} = 9, \quad \sin^2 2x = \frac{8}{9}.$$

В. Моргулевъ (Одесса); *А. Масловъ* (Москва); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *А. Григоренко* (Харьковъ); *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Б. Прозоровъ* (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Двойринъ* (Одесса); *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *В Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ); *П. Прозоровскій* (Тамбовъ); *В. Колодій* (Нѣжинъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 202 (5 сер.). *Доказать, что*

$$2^{2n+2}\,3^{n+1}-11n+109$$

кратно 121 *при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ* n.

Представивъ данное выраженіе въ видѣ:

$$(2^2)^{n+1}.3^{n+1}-11n+121-12=(2^2.3)^{n+1}-11n-12+121=$$

$$=(12)^{n+1}-11n-12+121=(11+1)^{n+1}-11n-12+121.$$

Разлагая членъ $(11+1)^{n+1}$ по формулѣ бинома, находимъ (при $n>0$):

$$2^{2n+2}.3^{n+1}-11n+109=11^{n+1}+(n+1)11^n+\cdots,+\frac{(n+1).n}{2}11^2+$$

$$+(n+1)\,11+1-11n-12+11^2=[11^{n+1}+(n+1)11^n+\cdots+\frac{(n+1)n}{2}11^2+11^2]+$$

$$+11n+11+1-11n-12=11^{n+1}+(n+1)\,11^n+\cdots+\frac{(n+1)\,n}{2}11^2+11^2.$$

Такъ какъ всѣ члены послѣдняго выраженія кратны числа $11^2=121$, то и предложенное выраженіе кратно 121 при n цѣломъ и положительномъ. При $n=0$ данное выраженіе равно 121, а потому тоже кратно 121.

В. Моргулевъ (Одесса); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Л. Богданоовичъ* (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Б. Шуръ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ); *В. Колодій* (Нѣжинъ).

№ 203 (5 сер.). *Данъ кругъ радіуса* r. *Требуется 1) построить квадратъ* ABCD *такъ, чтобы вершины его* A *и* D *лежали на кругѣ и чтобы сторона* BC *касалась круга и 2) вычислить сторону этого квадрата.*

Пусть BC касается круга въ T, и пусть діаметръ TS, проходящій черезъ точку касанія, встрѣчаетъ AD въ точкѣ M. Прямая TM, перпендикулярная къ BC, перпендикулярна и къ AD, и дѣлитъ сторону AD, какъ хорду, пополамъ. Называя сторону AB искомаго квадрата черезъ x, имѣемъ: $AB=TM=x$, $AM=\frac{x}{2}\cdot$ Такъ какъ $\overline{AM}^2=TM.MS$, то $\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\,(2r-x)$, откуда $x^2-8rx+4x^2=0$, или $5x^2-8rx=0$. Корень $x=0$ не даетъ рѣшенія, имѣющаго геометрическій смыслъ, а потому $5x=8r$, откуда $AB=x=\frac{8r}{5}\cdot$ Такъ какъ $TB=CT=\frac{x}{2}=\frac{4r}{5}$, то для построенія искомаго квадрата достаточно провести къ данному кругу касательную въ нѣкоторой точкѣ его T и отложить отъ T по обѣ стороны отрѣзки $TB=CT=\frac{4r}{5}\cdot$ Возставивъ изъ B и C перпендикуляры къ BC до встрѣчи (во второй разъ) въ точкахъ A и D съ окружностью, получимъ искомый квадратъ $ABCD$. Еще проще воспользоваться методомъ подобія: отложивъ на касательной въ точкѣ T отрѣзокъ $TB'=\frac{TO}{2}=\frac{r}{2}$, строимъ прямоугольникъ $A'B'TO$ и продолжаемъ прямую TA' до встрѣчи съ окружностью во второй точкѣ A. Проведя хорду AD, параллельную $B'T$, опускаемъ изъ A и D перпендикуляры AB и DC на $B'T$; квадратъ $ABCD$ есь искомый.

В. Моргулевъ (Одесса): *А Фельдманъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ): *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ); *П. Прозоровскій* (Тамбовъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 205 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(b^2z^2 - a^2)^2 - 4ab\,(bz^3 - a)\,(az - b) = 0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$(bz+a)^2\,(bz-a)^2 - 4a^2b^2z^4 + 4a^3bz + 4ab^3z^3 - 4a^2b^2 = (bz+a)^2\,(bz-a)^2 -$$

$$- 4a^2b^2z^4 + 4a^3bz + 4ab^3z^3 - 4a^2b^2 - 8a^2b^2z^2 + 8a^2b^2z^2 = (bz+a)^2\,(bz-a)^2 -$$

$$- (4a^2b^2z^4 + 8a^2b^2z^2 + 4a^2b^2) + (4ab^3z^3 + 8a^2b^2z^2 + 4a^3bz) = (bz+a)^2\,(bz-a)^2 -$$

$$- 4a^2b^2\,(z^4 + 2z^2 + 1) + 4abz\,(b^2z^2 + 2abz + a^2) = (bz+a)^2\,(bz-a)^2 + 4abz(bz+a)^2 -$$

$$- 4a^2b^2\,(z^2+1)^2 = (bz+a)^2\,[(bz-a)^2 + 4abz] - 4a^2b^2\,(z^2+1)^2 =$$

$$= (bz+a)^2\,(b^2z^2 - 2abz + 4abz + a^2) - 4a^2b^2\,(z^2+1)^2 = (bz+a)^2\,(bz+a)^2 -$$

$$- 4a^2b^2\,(z^2+1)^2 = (bz+a)^4 - 4a^2b^2\,(z^2+1)^2 =$$

$$= [(bz+a)^2 - 2ab\,(z^2+1)]\,[(bz+a)^2 + 2ab\,(z^2+1)] = 0,$$

мы видимъ, что данное уравненіе распадается на два квадратныхъ

$$(bz+a)^2 - 2ab\,(z^2+1) = 0, \quad (bz+a)^2 + 2ab\,(z^2+1) = 0,$$

или же

$$(b^2 - 2ab)z^2 + 2abz + a^2 - 2ab = 0, \quad (b^2 + 2ab)z^2 + 2abz + a^2 + 2ab = 0$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$z_{1,2} = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 - (b^2-2ab)\,(a^2-2ab)}}{b^2-2ab},\quad z_{3,4} = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 - (b^2+2ab)(a^2+2ab)}}{b^2+2ab},$$

или, послѣ раскрытія скобокъ подъ знаками радикаловъ и приведенія,

$$z_{1,2} = \frac{-ab \pm \sqrt{2ab\,(a^2 - 2ab + b^2)}}{b^2-2ab} = \frac{-ab \pm (a-b)\sqrt{2ab}}{b^2-2ab},$$

$$z_{3,4} = \frac{-ab \pm \sqrt{-2ab\,(a^2 + 2ab + b^2)}}{b^2+2ab} = \frac{-ab \pm (a+b)\sqrt{-2ab}}{b^2+2ab}.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль; *А. Масловъ* (Москва); *И. Грушинъ* (Троицкъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *С. Розенблатъ* (Балта); *В. Богомоловъ* (Шацкъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Харьковская математическая библіотека. № 1. **Якобъ Штейнеръ**. *Геометрическія построенія, выполняемыя посредствомъ прямой линіи и неподвижнаго круг , какъ предметъ преподаванія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и для практическаго примѣненія.* Переводъ студ. П. М. Ерохина и Р. И Гольдберга подъ редакціей проф. Д. М. Синцова. Съ приложеніемъ біографическаго очерка Штейнера. Харьковъ. 1910. Стр. 108.

В. И. Лорченко и Н. В. Оглоблинъ. *Четырехзначныя логариѳмическія таблицы. Съ приложеніемъ физическихъ и астрономическихъ таблицъ.* Кіевъ, 1910. Стр. 36. Ц. 55 к.

Вѣра Шиффъ. *Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ.* Часть II. *Приложеніе анализа безконечно-малыхъ къ геометріи и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.* С.-Петербургъ. 1910. Стр. 484.

Роберто Бонола, профессоръ Scuola Normale въ Павіи. *Неевклидова геометрія.* Критико-историческое изслѣдованіе ея развитія, дополненное замѣтками проф. А. В. Васильева „Объ отношеніи Н. И. Лобачевскаго къ теоріи параллельныхъ линій до 1825 г." и приложеніями автора. Перевелъ съ италіанскаго съ разрѣшенія автора А. Р. Кулишеръ. С.-Петербургъ. 1910. Стр. 223. Ц. 1 р. 50 к.

Н С. Лукьяновъ, директоръ Проскуровскаго Алексіевскаго реальнаго училища. *Физическій кабинетъ среднихъ учебныхъ заведеній.* Устройство и оборудованіе помѣщеній, описаніе физическихъ приборовъ и опытовъ съ ними. Руководство къ экспериментированію для преподавателей физики. Выпускъ V. Опыты по лучистой энергіи. Стр. 201—558. Полтава. 1909. Ц. 3 р.

R. Blondlot, professeur à la faculté des sciences de Nancy, correspondant de l'Institut. *Introduction à l'étude de la thermodynamique.* Paris, 1909. Ed. II. Стр. 122.

Max Planck, Dr. Professor an der Universität Berlin. *Acht Vorlesungen über Theoretische Physik, gehalten an der Columbia University in the City of New-Iork im Frühjahr* 1909. Leipzig, 1910. Стр. 127.

Sir Oliver Lodge. *The ether of space.* New-York and London, Harper & Brothers. 1909. Стр. 155.

W. M. S. Franklin und Barry Macnutt. *Light and Soud.* A textbook for colleges and technical schools. New-York, 1909. Стр. 344.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 1-.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается БЕЗПЛАТНО по первому требованію.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1909 г.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ*. Лекціи по ариѳметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай*. Благородные и радіоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ*. О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби*. Безпроволочный телефонъ.—*А. Филипповъ*. О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ*. Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкарэ*. Математическое творчество.—*П. Зееманъ*. Происхожденіе цвѣтовъ спектра.—*В. Гернетъ*. Объ единствѣ вещества.—*С. Ньюкомъ*. Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ*. Линейные спектры и строеніе атомовъ.—*А. Кирилловъ*. Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри*. Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннэи*. О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель*. Методъ работы Пуанкаре.—Литература великой теоремы Ферма та.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія.—*П. В. Шепелеевъ*. Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.—*Э. Пикаръ*. Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.—Проф. *Ф. Содди*. Отецъ радія.—*К. Граффъ*. Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.—*А. Долговъ*. О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо.—Проф. *Ф. Содди*. Къ вопросу о происхожденіи радія.—Прив.-доц. *В. Каганъ*. Что такое алгебра?—Проф. *К. Делтеръ*. Искусственные драгоцѣнные камни.—*Л. Видеманъ*. По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ.—Проф. *Г. Кайзеръ*. Современное развитіе спектроскопіи.—Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ.—*Д. Ефремовъ*. О четырехугольникахъ.—*А. Пугаченко*. Приближенное дѣленіе угла на *n* равныхъ частей при помощи циркуля и линейки.—Опыты проф. І. І. Косоногова по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа.—Проф. *А. Беккеръ* Сжиженіе газовъ.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**