Марс, сатурн

№ 508.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIII-го Семестра № 4-й.

ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1910.

XLIII Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 508.

Задача Паппа — чистымъ построеніемъ *).

И. И. Александрова.

Задача Паппа **) „черезъ данную точку въ данномъ углѣ провести прямую данной длины" лежитъ на рубежѣ элементарной и высшей математики и принадлежитъ къ тѣмъ задачамъ, которыя, будучи легко разрѣшаемы приложеніемъ алгебры къ геометріи ***), могутъ долго не поддаваться чистому геометрическому построенію. Выбравъ на этотъ разъ сравнительно узкую и замкнутую тему, я руководился слѣдующими соображеніями. Мнѣ хотѣлось вновь указать на интересъ и силу чисто геометрическихъ построеній; мнѣ думалось, что будутъ

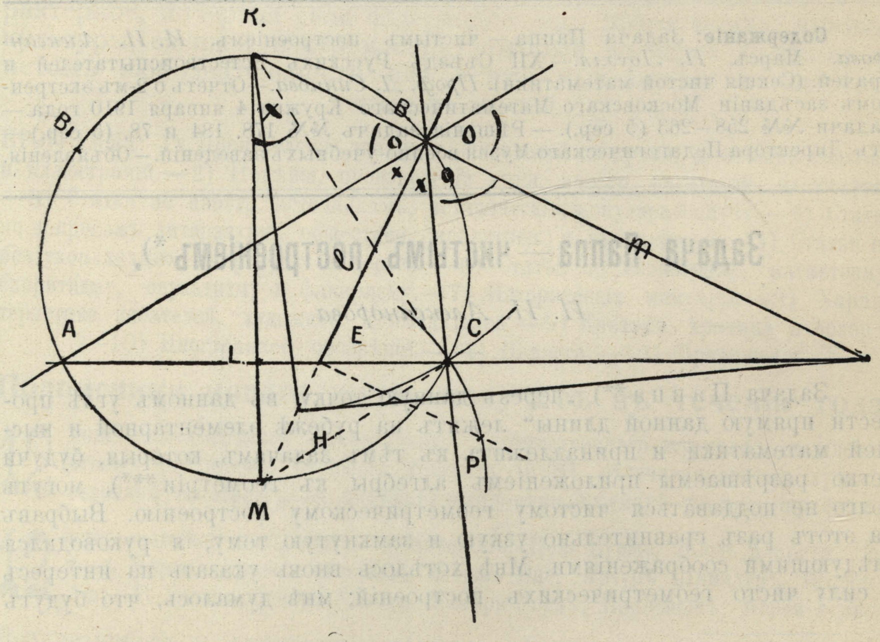
*) Въ существенныхъ чертахъ доложено 4 января 1910 г. въ Московскомъ Математическомъ Кружкѣ съ участіемъ членовъ XII Съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей.

**) Александрійскій геометръ III вѣка послѣ Р. Хр. Главнѣйшія сочиненія: Комментаріи къ „Альмагесту" Птоломея, къ „Аналеммѣ" Діодора и къ „Началамъ" Евклида и, главнымъ образомъ, „Собранія". Большая часть этихъ трудовъ дошла до насъ въ отрывкахъ или отрывочныхъ свѣдѣніяхъ. Въ научномъ отношеніи весьма цѣнны задачи самого Паппа въ духѣ высшей геометріи.

***) Если (рис. 4) $BC = a$, $\angle BCO = x$ и k — разстояніе точки G отъ боковъ даннаго прямого угла, то уравненіе $a \sin 2x = 2k\,(\sin x + \cos x)$ — легко рѣшается возведеніемъ въ квадратъ. Въ общемъ случаѣ задача приводится къ уравненію вида $\cos^2 2x + a \cos x - b = 0$, которое легко рѣшается. Этимъ отчасти объясняется то, что этой задачей мало занимались въ смыслѣ чистаго построенія.

интересными не столько мои построенія, которыя появляются въ печати, какъ мнѣ кажется, въ первый разъ*), сколько тѣ общіе вопросы, къ которымъ они приводятъ; имѣло значеніе и то обстоятельство, что я разсматриваю задачу для двухъ ея случаевъ; наконецъ, и главнымъ образомъ, я имѣлъ въ виду еще разъ подчеркнуть неоднократныя указанія на неправильную постановку геометрическихъ задачъ на построеніе въ нашихъ школахъ, которыя въ лучшемъ случаѣ обрываютъ эти задачи тамъ, гдѣ онѣ только начинаютъ проявлять свойственную имъ педагогическую громадную силу.

Приступая затѣмъ къ самому рѣшенію, я долженъ сказать, что я получилъ совершенно такое же рѣшеніе отъ Д. А. Аитова (Парижъ). Если рѣшеніе начинать съ построенія даннаго отрѣзка, то задачу

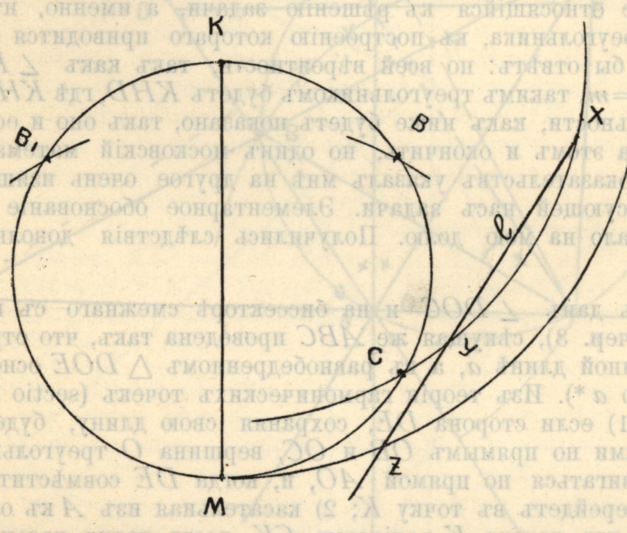


Чер. 1.

*) Весьма возможно, что я въ этомъ плохо освѣдомленъ, или что-либо проглядѣлъ, или плохо помню. Въ задачникѣ Пржевальскаго (300, III) эта задача рѣшена для частнаго случая – когда данный уголъ прямой — рѣшеніе алгебраическое. Въ моемъ задачникѣ (7, IV) задача рѣшена въ общемъ видѣ, но, къ сожалѣнію, съ помощью квадратнаго уравненія, между тѣмъ какъ этотъ недостатокъ можно устранить. Въ извѣстной книгѣ Ю. Петерсена рѣшенія не дано, но указано, что задача Паппа въ общемъ видѣ приводится къ пересѣченію конхоиды и независящей отъ нея прямой, и что поэтому задача можетъ быть разрѣшена циркулемъ и линейкой только для нѣкоторыхъ положеній данной точки, напримѣръ, когда данная точка лежитъ на биссекторѣ угла. Нѣсколько статей напечатано въ „Вѣстникѣ Опытной Физикѣ и Элементарной Математики“ и во французскихъ журналахъ, но онѣ не касаются чистаго

удобно выразить въ такой формѣ: „построить треугольникъ, зная основаніе, противоположный ему уголъ и биссекторъ этого угла**).

Пусть $\triangle ABC$ — искомый (чер. 1.), такъ что AC, B и биссекторъ $EB = l$ имѣютъ данныя значенія. Описавъ на AC дугу, вмѣщающую уголъ B, проводимъ діаметръ MK и изъ подобія $\triangle\triangle\, KMB$ и LEM находимъ: $KM : BM = EM : LM$, откуда $(EM + l) . EM = KM . LM = MC^2$. Отсюда видно, что BM есть гипотенуза треугольника, у котораго одинъ катетъ равенъ MC, а проекція второго катета на гипотенузу равна l. Построить такой треугольникъ легко — это задача извѣстная. Описываемъ изъ центра K радіусомъ KC (чер. 2) дугу, откладываемъ въ ней, гдѣ угодно, хорду $XY = l$ и продолжаемъ ее до встрѣчи въ точкѣ Z съ концентрической окружностью радіуса KM. Тогда $XZ = MB$. Остается изъ центра M провести дугу радіусомъ, равнымъ XZ, — получимъ двѣ искомыя точки B и B_1.



ЧЕР 2.

Если допустить въ этомъ рѣшеніи излишнюю роскошь, именно, спросить, нѣтъ ли на рисункѣ 1 того треугольника, къ построенію котораго свелась вся задача, то для рѣшенія этого вопроса у насъ имѣ-

построенія. Вотъ все, что я могу припомнить по этому поводу изъ литературы предмета. Приложенія задачи Паппа къ другимъ задачамъ на построеніе встрѣчаются чаще.

**) Изъ предыдущаго примѣчанія видно, что данная точка можетъ лежать только на биссекторахъ даннаго угла и угла смежнаго съ нимъ, или на самой сторонѣ.

ются указанія: проекціей катета должна быть прямая EB, гипотенузой — MB, а другимъ катетомъ — MC. Поэтому весьма вѣроятно, что искомый треугольникъ есть $\triangle MPB$, гдѣ $PE \perp MB$ и P лежитъ на окружности, центръ которой — M, а радіусъ — MC. Что это дѣйствительно такъ, ниже будетъ доказано.

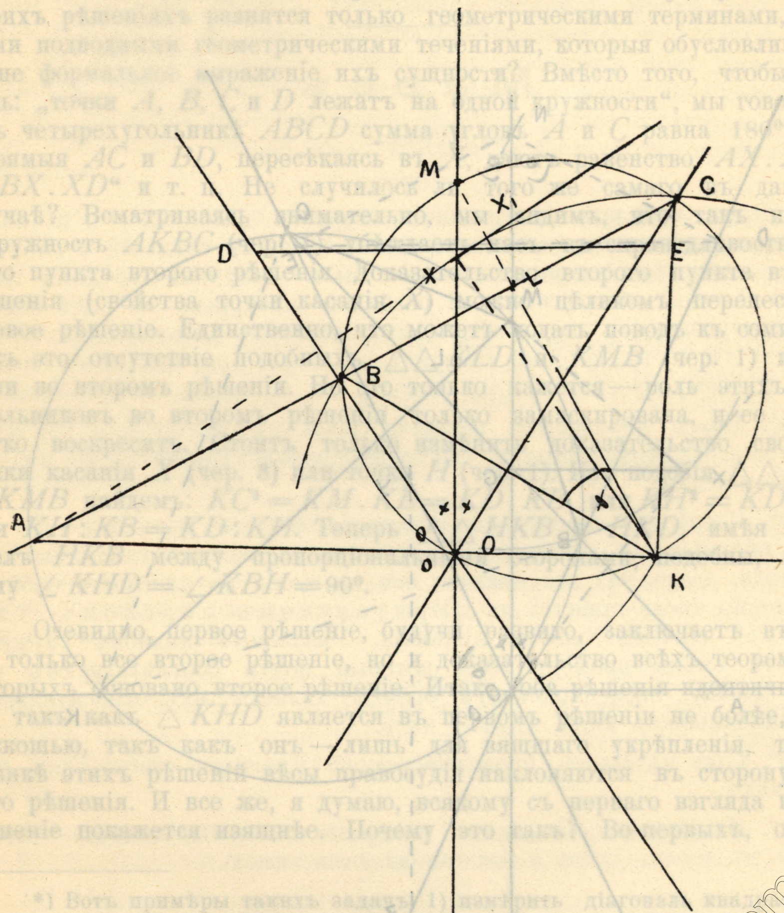
Если вмѣсто биссектора BE данъ биссекторъ смежнаго угла $BD = m$, то замѣчаемъ, что продолженіе DB должно попасть въ точку K, потому что $\angle MBD$ и $\angle KBM$ порознь должны быть прямыми. Тогда изъ подобія $\triangle\triangle KDL$ и KBM находимъ: $KD:KL = KM:KB$, откуда $(BK + m)BK = KM.KL = CK^2$.

Изъ этого равенства видно, что прямая KD есть гипотенуза треугольника, у котораго одинъ катетъ равенъ CK, проекція же второго катета на гипотенузу равна m. Задача приведена къ той же задачѣ, какъ въ предыдущемъ случаѣ. Если бы мы задали вопросъ, собственно не относящійся къ рѣшенію задачи, а именно, нѣтъ ли на рисункѣ треугольника, къ построенію котораго приводится задача, то получился бы отвѣтъ: по всей вѣроятности, такъ какъ $\angle KBM$ прямой и $BD = m$, такимъ треугольникомъ будетъ KHD, гдѣ $KH = KC$. Въ дѣйствительности, какъ ниже будетъ показано, такъ оно и есть. Можно было бы на этомъ и окончить, но одинъ московскій математикъ безъ всякихъ доказательствъ указалъ мнѣ на другое очень изящное рѣшеніе интересующей насъ задачи. Элементарное обоснованіе этого рѣшенія выпало на мою долю. Получились слѣдствія довольно поучительныя.

Пусть данъ $\angle DOC$ и на биссекторѣ смежнаго съ нимъ угла точка A (чер. 3), сѣкущая же ABC проведена такъ, что отрѣзокъ BC равенъ данной длинѣ a, а въ равнобедренномъ $\triangle DOE$ основаніе DE тоже равно a *). Изъ теоріи гармоническихъ точекъ (sectio harmonica) извѣстно: 1) если сторона DE, сохраняя свою длину, будетъ скользить концами по прямымъ OB и OC, вершина O треугольника DOE начнетъ двигаться по прямой AO, и, когда DE совмѣстится съ BC, точка O перейдетъ въ точку K; 2) касательная изъ A къ окружности, описанной изъ центра K радіусомъ CK, дастъ точку касанія X, приходящуюся на $OM \perp AK$. Такимъ образомъ, въ прямоугольномъ $\triangle AXK$ извѣстны: одинъ катетъ $XK = OE$ и проекція $AO = m$ другого катета на гипотенузу. Послѣ этого задача приведена къ той же задачѣ, что и въ первомъ рѣшеніи. Докажемъ сначала, что это рѣшеніе справедливо. Изъ чертежа (1) мы видимъ, что, если прямая AC начнетъ скользить концами по сторонамъ неподвижнаго угла ABC, то концы діаметра KM должны скользить по биссекторамъ BM и BD, потому что концы биссекторовъ должны проходить черезъ середины повертывающихся дугъ AKC и AMC. Затѣмъ, пусть окружность, описанная (чер. 3) изъ центра K радіусомъ OE встрѣчаетъ OM въ точкѣ X, а съ прямою AX даетъ вторую точку пересѣченія X_1. Вслѣдствіе равенства угловъ BOC и BKC точки O, B, C и K должны быть на

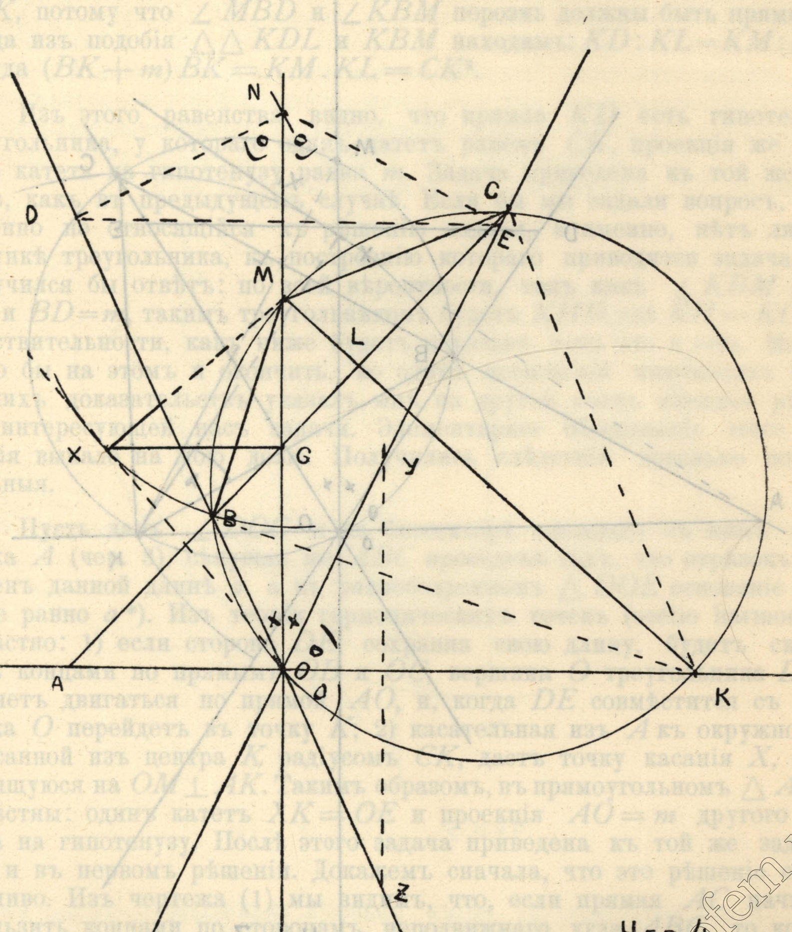
*) Ввести въ чертежъ такой треугольникъ весьма естественно.

одной окружности, а потому $AO.AK = AC.AB$, но въ то же время $AX.AX_1 = AC.AB$; слѣдовательно, $AX.AX_1 = AO.AK$, изъ чего видно, что точки O, K, X и X_1 лежатъ на одной окружности; діаметръ этой послѣдней долженъ быть равенъ XK, потому что $\angle XOK = 90^0$. Такимъ образомъ, двѣ окружности BXX_1C и XOK, отношеніе діаметровъ которыхъ равно 2, при чемъ центръ второй



Чер. 3.

окружности находится въ серединѣ радіуса первой, имѣютъ двѣ общія точки X и X_1, чего быть не можетъ. Поэтому, прямая AX есть касательная къ окружности BXC, и второе рѣшеніе справедливо. Если данная точка находится на биссекторѣ даннаго угла въ точкѣ G, то надо (чер. 4) повертывать $\triangle DNE$, равный равнобедренному $\triangle YOZ$, въ которомъ $YZ = DE = BC = a$; затѣмъ, когда $\triangle DNE$ приметъ положеніе треугольника BMC, надо описать изъ центра M окружность радіусомъ $MC = NE$ и провести къ ней касательную OX. Точка касанія X придется на перпендикулярѣ къ OM въ точкѣ G, и задача приведется къ построенію $\triangle OXM$, въ которомъ одинъ катетъ XM равенъ сторонѣ равнобедреннаго треугольника NE, а проекція второго катета равна биссектору $OG = l$. Доказательство совершенно то же.



ЧЕР. 4.

Такимъ образомъ, оба рѣшенія приводятъ къ построенію треугольника по однимъ и тѣмъ же даннымъ. Такого согласія нельзя не признать замѣчательнымъ. Любителямъ геометрическихъ задачъ на построеніе хорошо извѣстно, что два различныхъ по идеѣ рѣшенія могутъ привести къ одной и той же задачѣ по существу данныхъ;

за это, напримѣръ, ручается цѣлый классъ задачъ, изъ которыхъ каждая приводится сама къ себѣ *). Но чтобы два рѣшенія одной задачи различными методами привели къ двумъ задачамъ, въ которыхъ данныя одинаковы по существу и размѣру, — не знаю, возможно ли; во всякомъ случаѣ такой фактъ противорѣчилъ бы всей моей геометрической опытности. Не проще ли сдѣлать другое предположеніе? Не въ томъ ли дѣло, что оба рѣшенія одинаковы, что разсужденія въ обоихъ рѣшеніяхъ разнятся только геометрическими терминами, а не тѣми подводными геометрическими теченіями, которыя обусловливаютъ наше формальное выраженіе ихъ сущности? Вмѣсто того, чтобы сказать: „точки A, B, C и D лежатъ на одной кружности“, мы говоримъ: „въ четырехугольникѣ $ABCD$ сумма угловъ A и C равна 180^0“ или „прямыя AC и BD, пересѣкаясь въ X, даютъ равенство $AX.XC = BX.XD$“ и т. п. Не случилось ли того же самаго въ данномъ случаѣ? Всматриваясь внимательно, мы видимъ, что такъ и есть. Окружность $AKBC$ (чер. 1) убѣждаетъ насъ въ справедливости перваго пункта второго рѣшенія. Доказательство второго пункта второго рѣшенія (свойства точки касанія X) можно цѣликомъ перенести въ первое рѣшеніе. Единственно, что можетъ подать поводъ къ сомнѣнію, такъ это отсутствіе подобныхъ $\triangle\triangle\, KLD$ и KMB (чер. 1) и ихъ роли во второмъ рѣшеніи. Но это только кажется — роль этихъ треугольниковъ во второмъ рѣшеніи только замаскирована, и ее очень легко воскресить. Стоитъ только измѣнить доказательство свойства точки касанія X (чер. 3) или точки H (чер. 1). Изъ подобія $\triangle\triangle\, KLD$ и KMB найдемъ: $KC^2 = KM.KL = KD.KB$, или $KH^2 = KD.KB$, или $KH:KB = KD:KH$. Теперь $\triangle\triangle\, HKB$ и HKD, имѣя общій уголъ HKB между пропорціональными сторонами, подобны, и потому $\angle KHD = \angle KBH = 90^0$.

Очевидно, первое рѣшеніе, будучи развито, заключаетъ въ себѣ не только все второе рѣшеніе, но и доказательство всѣхъ теоремъ, на которыхъ основано второе рѣшеніе. Итакъ, оба рѣшенія идентичны **); но, такъ какъ $\triangle\, KHD$ является въ первомъ рѣшеніи не болѣе, какъ роскошью, такъ какъ онъ — лишь для вящшаго укрѣпленія, то при оцѣнкѣ этихъ рѣшеній вѣсы правосудія наклоняются въ сторону перваго рѣшенія. И все же, я думаю, всякому съ перваго взгляда второе рѣшеніе покажется изящнѣе. Почему это такъ? Во-первыхъ, оттого,

---

*) Вотъ примѣры такихъ задачъ: 1) измѣрить діагональ квадрата стороною; 2) построить $\triangle ABC$, зная b по величинѣ и положенію, $a+c$ и прямую, на которой лежитъ вершина B. Перенесемъ точку C въ C_1, симметричную относительно данной прямой. Задача приводится къ построенію треугольника ABC_1; данныя въ этомъ треугольникѣ тѣ же, что и въ искомомъ, но размѣръ и положеніе данныхъ уже не тѣ.

**) Считаю себя обязаннымъ прибавить слѣдующее. Второе рѣшеніе я просилъ разсмотрѣть Д. А. Аитова (Парижъ). Полученный уже послѣ моего доклада отзывъ совершенно совпадаетъ съ моимъ докладомъ, иногда — даже въ деталяхъ. Такое, на первый взглядъ, удивительное совпаденіе не должно изумлять лицъ, правильно оцѣнивающихъ многолѣтнюю совмѣстную, но самостоятельную работу.

что по мѣрѣ углубленія въ нѣдра математики, ея языкъ дѣлается короче и внушительнѣе, ея термины пріобрѣтаютъ все бóльшую емкость и концентрацію; а, во-вторыхъ, — мнѣ снова *) приходится прибѣгнуть къ изреченію „на всякаго мудреца довольно простоты“ — во-вторыхъ, оттого, что я не догадался во время сдѣлать то, чего теперь мы вмѣстѣ съ вами не забудемъ. Поверните чертежи 3 и 4 на нѣкоторый уголъ; тогда всѣ три рисунка (1, 3 и 4) станутъ одинаковыми.

Марсъ.

П. Лоуэля **).

Слѣдуя приглашенію редакціи журнала „Scientia“, я посылаю настоящее резюме современнаго состоянія нашихъ свѣдѣній о планетѣ Марсъ, — по тѣмъ даннымъ, какія были получены трудами Лоуэльской (Lowell) обсерваторіи. Я разбиваю матеріалъ на рядъ короткихъ нумерованныхъ параграфовъ, что позволитъ читателю безъ труда выдѣлить тѣ части, которыя говорятъ въ пользу того или иного заключенія, и формулировать самому выводы, къ которымъ онѣ приводятъ.

1°. Марсъ обращается вокругъ своей оси въ 24 часа 37 мин. 22, 65 сек. Такимъ образомъ, его сутки приблизительно на 40 минутъ длиннѣе нашихъ.

2°. Послѣднее опредѣленіе положенія его оси, произведенное на нашей обсерваторіи на основаніи лучшихъ наблюденій, сдѣланныхъ до 1905 года, даетъ 24° для наклона оси вращенія къ плоскости орбиты. Это именно число принято въ „Британскомъ морскомъ Альманахѣ“ (British Nautical Almanac). Указанный наклонъ служитъ причиной смѣны временъ года, которыя почти соотвѣтствуютъ нашимъ; однако, эксцентриситетъ орбиты дѣлаетъ ихъ относительную продолжительность иной, чѣмъ у насъ.

3°. Годъ на Марсѣ продолжается 687 нашихъ сутокъ или 669 тамошнихъ.

4°. На Марсѣ наблюдаются полярные сегменты, которые растаиваютъ въ теченіе лѣта и возстановляются зимою.

---

*) См. мою статью „О составленіи и рѣшеніи задачъ на вращеніе“ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“ за 1895 годъ № 204.

**) Статья Мессершмита въ предыдущемъ номерѣ „Вѣстника“ была уже набрана, когда мы получили послѣднюю книжку журнала „Scientia“, въ которомъ помѣщена статья Лоуэля переводъ которой мы здѣсь печатаемъ. Лоуэль (P. Lowell) является однимъ изъ наиболѣе выдающихся въ настоящее время изслѣдователей этого вопроса. Въ прошломъ году онъ опубликовалъ обширную книгу о Марсѣ, переводъ которой въ настоящее время издается книгоиздательствомъ „Mathesis“. Въ настоящей статьѣ Лоуэль въ сжатой, но точной научной формѣ даетъ резюме того, что можно въ настоящее время сказать о планетѣ Марсъ. Мы рѣшили поэтому напечатать настоящую статью, несмотря на то, что мы помѣстили уже статью Мессершмита.

5°. Въ началѣ своего образованія, сегментъ слабо очерченъ. Это — бѣлое, туманное пятно, которое постепенно сливается съ окрестностями.

6°. Напротивъ того, сегментъ, который начинаетъ таять, окруженъ голубымъ кольцомъ, сопровождающимъ самый сегментъ, когда онъ начинаетъ сокращаться. Послѣднее обстоятельство доказываетъ, что кольцо образуется насчетъ уничтоженія сегмента. Кромѣ того этотъ фактъ указываетъ на невозможность предположенія, что кольцо состоитъ изъ угольной кислоты, такъ какъ послѣдняя подъ давленіями меньшими, чѣмъ тѣ, которыя имѣютъ мѣсто на Марсѣ, переходитъ изъ твердаго состоянія непосредственно въ газообразное. Остается, по нашимъ свѣдѣніямъ, только вода, которая можетъ быть причиной такого явленія.

7°. Сильное таяніе, которому подвержены полярные снѣга, указываетъ на то, что они не должны быть обильны, несмотря на свое значительное протяженіе; это заставляетъ предполагать, что толщина ихъ невелика.

8°. Поверхность Марса состоитъ изъ областей цвѣта красноватой охры и другихъ областей голубовато-зеленаго цвѣта; наибольшимъ протяженіемъ отличаются тѣ, которыя окрашены въ красновато-зеленый цвѣтъ. Послѣднія имѣютъ сходство съ нашими красноватыми пустынями, а характеръ ихъ склоняетъ къ заключенію, что это, дѣйствительно, пустыни.

9°. Голубовато-зеленыя пространства, которыя прежде обыкновенно разсматривались, какъ скопленія воды, теперь не признаются за таковыя, такъ какъ они усѣяны линіями и кружками, сохраняющими неизмѣнное расположеніе, чего не могло бы быть, еслибы это были озера или моря.

10°. Видъ этихъ областей мѣняется вмѣстѣ съ временами года на Марсѣ; онѣ исчезаютъ въ зимніе мѣсяцы, и цвѣтъ ихъ темнѣетъ въ лѣтніе. Вообще, все происходитъ съ ними такъ, какъ еслибы это была растительность; и всѣ факты говорятъ въ пользу этого предположенія.

11°. Тотъ фактъ, что полярные сегменты растаиваютъ, а потомъ возстановляются, докаываетъ, что въ атмосферѣ Марса имѣется вода.

12°. Присутствіе водяныхъ паровъ обнаруживается непосредственно въ спектрограммахъ, полученныхъ однимъ изъ насъ, д-ромъ Слиферомъ (Slipher). Спектры Луны и Марса были зарегистрованы при одной и той же высотѣ свѣтилъ надъ горизонтомъ, на однѣхъ и тѣхъ пластинкахъ. Линія „*a*“ водяныхъ паровъ болѣе рѣзка въ спектрѣ Марса. Всего было использовано восемь снимковъ.

13°. Эти снимки были изучены профессоромъ Ф. В. Вери (Frank W. Very); въ результатѣ этихъ наблюденій, можно опредѣлить въ 14 *мм.* среднюю толщину водяного слоя, который получится, если собрать всю воду, находящуюся въ атмосферѣ Марса. Соотвѣтствующая средняя величина для земли, вѣроятно, въ 3 или 4 раза больше.

14^0. Измѣненія, которыя происходятъ на поверхности планеты, подтверждаютъ существованіе на Марсѣ атмосферы.

15^0 Боковое сіяніе, которое наблюдается на краяхъ Марсова диска, служитъ другимъ доводомъ въ пользу этого заключенія.

16^0. Малая величина альбедо Марса доказываетъ, что его атмосфера гораздо менѣе плотна, чѣмъ наша.

17^0. Это заключеніе подтверждается существованіемъ сумерекъ.

18^0. Болѣе значительное, по сравненію съ сѣверо-полярнымъ сегментомъ, таяніе южно-полярнаго, повидимому, указываетъ на то, что толщина обоихъ невелика (см. мой мемуаръ, представленный Philosophical Society).

19^0. Всѣ эти факты согласно приводятъ къ слѣдующимъ заключеніямъ: Марсъ имѣетъ атмосферу, которая содержитъ водяные пары, а потому должна, согласно кинетической теоріи газовъ, содержать также тяжелые газы: азотъ, кислородъ и угольную кислоту.

20^0. Далѣе: имѣющееся тамъ количество водяныхъ паровъ болѣе приближается къ тому, которое мы наблюдаемъ надъ нашими пустынями, чѣмъ къ количеству паровъ надъ остальной частью земной поверхности.

21^0. Наконецъ, мы можемъ заключить, что вся вода, имѣющаяся на Марсѣ, содержится въ его атмосферѣ и въ полярныхъ снѣгахъ. Такимъ образомъ, Марсъ есть планета, скудно снабженная водою; послѣдняя можетъ появляться на поверхности только вслѣдствіе таянія полярныхъ снѣговъ. Ходъ явленій на полярныхъ сегментахъ — если исходить изъ предположенія, что они могутъ состоять только изъ инея или снѣга, — даетъ намъ первое указаніе на то, что температура на Марсѣ не можетъ быть очень низкой.

22^0. Тотъ фактъ, что отступленіе снѣжныхъ сегментовъ останавливается только у 87^0 широты, а иногда еще далѣе, говоритъ ясно за то, что въ нѣкоторые періоды температура на Марсѣ должна быть высокой.

23^0. Это заключеніе подтверждается опубликованнымъ нами въ „Philosophical Magazine" математическимъ изслѣдованіемъ о величинѣ, которой можетъ достигнуть температура на Марсѣ, если принять въ разсчетъ всѣ существуюшія тамъ условія. Нѣкоторыя изъ условій не принимались во вниманіе въ прежнихъ вычисленіяхъ. Въ результатѣ этого изслѣдованія получается 8^0 *C*. для вѣроятной средней температуры на Марсѣ. Эта температура немногимъ ниже средней земной температуры, которая принимается обыкновенно въ 15^0 *C*.

24^0. Явленія, наблюдаемыя на дискѣ Марса, приводятъ къ подтвержденію этого вывода: время, когда начинается таяніе снѣговъ, моментъ, соотвѣтствующій приблизительно 20 августа нашего календаря, когда оно прекращается, (это именно и есть моментъ появленія перваго зимняго снѣга) — все склоняетъ къ мысли, что средняя температура должна быть недалека отъ той, которую даетъ теорія.

25⁰. Разница въ температурѣ лѣта и зимы должна быть, однако, очень велика, благодаря разрѣженности марсовой атмосферы; это подтверждается и временемъ года, когда происходитъ первое выпаденіе снѣга, захватывающее къ тому же районъ ниже 60-го слишкомъ градуса широты.

26⁰. Однако, разрѣженность воздуха не служитъ препятствіемъ для существованія растительности, такъ какъ климатъ Марса приближается къ климату плоскогорій, а не горныхъ вершинъ, что далеко не одно и тоже. Эти два фактора — достаточное количество воды и тепла — показываютъ, что условія, существующія на поверхости Марса являются вполнѣ подходящими для обитанія на немъ организмовъ того или иного вида. Таковы результаты, установленные наблюденіями на Лоуельской обсерваторіи, въ теченіе послѣднихъ пятнадцати лѣтъ.

Мы дошли теперь до того момента, когда можемъ поставить себѣ вопросъ, дѣйствительно ли Марсъ обитаемъ живыми существами — вопросъ, наиболѣе интересующій широкую публику. Органическая жизнь требуетъ воды. Мы видѣли, что таковая имѣется на Марсѣ, но въ количествѣ весьма незначительномъ, такъ что жизнь, если она проявляется тамъ въ какомъ-нибудь видѣ, должна — поскольку дѣло касается снабженія водой — существенно зависѣть отъ періодическаго таянія полярныхъ сегментовъ черезъ каждые полгода; тѣмъ болѣе, что на Марсѣ нѣтъ такой части поверхности, которая ими не покрывалась бы. Однако, изслѣдованія послѣднихъ лѣтъ, начинающіяся со Скіапарелли въ 1877 году, и развитыя затѣмъ въ Флагстафѣ много далѣе, показали слѣдующее.

27⁰. Поверхность планеты любопытнѣйшимъ образомъ изборождена мелкой сѣтью линій и кружковъ.

28⁰. Чѣмъ лучше удавалось разглядѣть планету, тѣмъ явственнѣе выступала эта замѣчательная сѣть. Точно вуаль покрываетъ всю поверхность Марса.

29⁰. Каждая изъ линій сѣти удивительно прямая, какъ будто она проведена съ величайшей точностью.

30⁰. Эти линіи встрѣчаются въ точкахъ, очень ясно различаемыхъ; бываетъ, что ихъ сходятся до 14 въ одной и той же точкѣ.

31⁰. Каждая линія на всемъ своемъ протяженіи имѣетъ одинаковую ширину, насколько объ этомъ можно судить изъ наблюденія.

32⁰. Однако, между собой эти линіи различаются; однѣ изъ нихъ длиннѣе и явственнѣе, чѣмъ другія.

33⁰. Средняя ихъ ширина, повидимому, заключается между 15 и 25 *км.*; во всякомъ случаѣ она не превосходитъ второго изъ указанныхъ чиселъ и падаетъ до 2-3 *км.* для наиболѣе тонкихъ линій.

34⁰. Въ мѣстахъ, гдѣ линіи сходятся, имѣются небольшія темныя пятнышки, которыя мы назвали оазисами.

35⁰. Оазисы бываютъ различной величины.

36⁰. Замѣчено, что сѣть распространяется не только на ту часть диска, которая окрашена въ цвѣтъ красновато-желтый, но и на голубовато-зеленую. Повидимому ни одна часть планеты не свободна отъ этой сѣти.

37°. Линіи обрываются, упираясь въ тотъ или другой изъ полярныхъ сегментовъ.

38°. Онѣ имѣютъ форму, въ такой мѣрѣ геометрически правильную, что внушаютъ мысль объ искусственномъ происхожденіи ихъ.

39°. Эта гипотеза замѣчательно подтверждается характеромъ ихъ измѣненій.

40°. Зимой, въ той части планеты, въ которой наблюдаются линіи, онѣ чрезвычайно тонки и могутъ быть замѣчены только при особенно тщательномъ наблюденіи.

41°. По мѣрѣ того, какъ подвигается весна, и полярный сегментъ таетъ, мы замѣчаемъ, что линіи удлиняются, исходя изъ сегмента, темнѣютъ и разростаются здѣсь болѣе, чѣмъ въ какой бы то ни было другой части Марсова диска.

42°. Съ теченіемъ времени, темнѣютъ послѣдовательно тѣ линіи, которыя соединяютъ первоначальныя.

43°. Это продолжается до тѣхъ поръ, пока указанное потемнѣніе не достигаетъ экватора и не переходитъ въ другое полушаріе планеты.

44°. Въ то же время каналы — арктическіе или антарктическіе, смотря по обстоятельствамъ — свѣтлѣютъ, а за этимъ просвѣтленіемъ опять слѣдуетъ потемнѣніе, которое ему предшествовало.

45°. Черезъ 6 мѣсяцевъ послѣ того, какъ это явленіе наблюдается вблизи одного сегмента, совершенно такая же волна распространяется по диску, отправляясь отъ другого сегмента въ противоположномъ направленіи. Такимъ образомъ, въ теченіе каждаго марсова года на каналы распространяются двѣ волны потемнѣнія, исходящія поперемѣнно изъ того или другого сегмента, и это правильное чередованіе, повидимому, точно совпадаетъ съ послѣдовательной смѣной временъ года на планетѣ.

46°. Оазисы подвергаются аналогичнымъ измѣненіямъ. Вначалѣ они имѣютъ величину булавочнаго острія; затѣмъ растутъ, превращаясь въ круглыя пятна замѣтныхъ размѣровъ; наконецъ, когда это время года близится къ концу, они сокращаются, и вновь принимаютъ прежній видъ.

Итакъ, мы видимъ, если принять во вниманіе внѣшній видъ этой сѣти линій и точекъ, равно какъ ея правильныя измѣненія, то можно замѣтить, что ея геометрическая форма, сохраняющаяся во время такихъ разнообразныхъ измѣненій, исключаетъ возможность происхожденія отъ естественной причины; съ другой стороны, картина какъ разъ такова, какая получилась бы, если бы это была система искусственнаго орошенія, основанная на таяніи полярныхъ снѣговъ. Такъ какъ добыть воду можно только въ такой періодъ, когда она находится въ свободномъ состояніи, и такъ какъ вода эта необходима для живыхъ организмовъ, то она не можетъ быть получена никакимъ другимъ путемъ, какъ черезъ заимствованіе отъ тающихъ полярныхъ сегментовъ. Такимъ образомъ, если Марсъ обитаемъ, то мы должны были бы найти тамъ именно такую любопытную систему орошенія; это объясненіе кажется единственнымъ, вытекающимъ изъ наблюдаемыхъ фактовъ.

Упомянутыя линіи именно и представляютъ собой то, что называютъ каналами Марса. Сомнительно, чтобы различаемая нами сѣть представляла собою самую систему каналовъ. Напротивъ, характеръ линій повидимому, указываетъ на то, что мы наблюдаемъ растительность. Но растительность можетъ развиваться только тогда, когда она питается водой. То, что мы видимъ, походитъ скорѣе на ежегодное разлитіе Нила, которое для наблюдателя, помѣщеннаго въ пространствѣ, не позволяло бы разглядѣть рѣку, слишкомъ узкую, чтобы быть замѣченной, но показало бы ему, съ другой стороны, зеленѣющія поля на ея берегахъ. Мы думаемъ, что именно такъ обстоитъ дѣло на Марсѣ.

Наука еще не въ состояніи сказать окончательно, проведена ли вода черезъ закрытыя трубы — что представляется вѣроятнымъ — или черезъ открытые каналы, но результаты этого проведенія такъ осязательны, такъ точно согласуются съ тѣмъ, что мы должны были бы видѣть, если бы подобная система орошенія существовала, что мы принуждены принять эту канализацію за истинную причину наблюдаемыхъ нами явленій.

XII Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Секція чистой математики.

После длиннаго перерыва, наконецъ состоялся XII-й Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ Москвѣ и привлекъ громадное число участниковъ. Какъ сообщилъ на заключительномъ собраніи дѣлопроизводитель Съѣзда проф. Э. Е. Лейстъ, число членовъ достигло 5303 человѣкъ. Съѣздъ, кромѣ 3 общихъ собраній и ряда засѣданій совмѣстно съ различными учеными обществами, имѣлъ 214 секціонныхъ засѣданій, на которыхъ было выслушано 696 докладовъ. Превзошелъ XII-й Съѣздъ предшествующіе и количествомъ бывшихъ на немъ выставокъ, устроенныхъ Московскимъ Университетомъ и другими высшими учебными заведеніями г. Москвы. Я не буду, впрочемъ, останавливаться здѣсь на общей картинѣ Съѣзда, ибо моя задача дать отчетъ лишь о дѣятельности одной секціи — секціи чистой математики.

По сравненію съ нѣкоторыми другими секціями, напримѣръ, съ физической, наша секція не отличалась особеннымъ многолюдствомъ и обиліемъ докладовъ.

Секція имѣла семь засѣданій утреннихъ: 29, 30 и 31 декабря, 2, 3, 4 и 5 января, одно вечернее — 3 января — совмѣстно съ Московскимъ Математическимъ Обществомъ и два вечернихъ — совмѣстно съ Московскимъ Математическимъ Кружкомъ. На этихъ засѣданіяхъ было заслушано 35 докладовъ.

Секціонныя засѣданія открылись въ 10 час. утра 29-го декабря привѣтственною рѣчью завѣдующаго подсекціей проф. Б. К. Млодзѣевскаго*), который остановился на участіи русскихъ дѣятелей въ развитіи нашей науки и вспомнилъ о заслугахъ тѣхъ изъ нихъ, кто сошелъ въ могилу со времени послѣдняго Съѣзда. Избранный почетнымъ предсѣдателемъ на это засѣданіе членъ Государственнаго Совѣта заслуженный проф. А. В. Васильевъ предложилъ затѣмъ почтить вставаніемъ память скончавшихся за истекшія со времени послѣдняго Съѣзда 8 лѣтъ профессоровъ: И. В. Бугаева, В. Я. Цингера, А. Н. Коркина, П. С. Назимова, Е. Ѳ. Сабинина, Г. Ѳ. Вороного, П. С. Порѣцкаго и П. А. Шиффа. Въ своей благодарственной за избраніе рѣчи проф. А. В. Васильевъ указалъ на стремленіе нашего времени къ распространенію математическаго образованія.

Проф. Казанскаго университета А. П. Котельниковъ сдѣлалъ затѣмъ сообщеніе: „Обобщеніе теоремы Гаусса о средней ариѳметико-геометрической".

Какъ извѣстно, если составимъ по двумъ даннымъ вещественнымъ и положительнымъ числамъ a и b рядъ новыхъ:

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{ab};\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_1b_1} \text{ и т. д.,}$$

то числа a_i и b_i стремятся къ одному и тому же предѣлу.

Проф. А. П. Котельниковъ даетъ алгориѳмъ, обладающій аналогичными свойствами: онъ беретъ двѣ пары чиселъ α, β и γ, δ, вещественныхъ или мнимыхъ, и составляетъ по нимъ 4 новыхъ числа:

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad p=\frac{\alpha\beta-\gamma\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\beta-\gamma-\delta};\quad b=\frac{\gamma+\delta}{2},\quad q=\frac{\alpha\beta-\gamma\delta-\sqrt{\Delta}}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},$$

гдѣ $\Delta=\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}$.

По числамъ a, p, b, q составляемъ 4 новыхъ числа a_1, p_1, b_1, q_1 такъ же, какъ 4 первыхъ составлены изъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и т. д. Тогда ряды чиселъ $\alpha, a, a_1, a_2 \ldots$ и $\beta, p, p_1, p_2 \ldots$ имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ m, числа $\gamma, b, b_1, b_2 \ldots$ и $\delta, q, q_1, q_2 \ldots$ одинъ и тотъ же предѣлъ n, и эллиптическій интегралъ $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$, взятый по контуру, окружающему точки α и β, равенъ $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m-n}$.

Основываясь на этомъ результатѣ, проф. А. П. Котельниковъ въ своемъ второмъ сообщеніи даетъ графическое построеніе періодовъ

*) Къ сожалѣнію, уважаемый профессоръ захворалъ инфлуэнцой, и мы увидѣли его снова лишь на прощальномъ засѣданіи членовъ секціи.

Секція объединяла чистую математику, механику и астрономію; чистая математика составляла подсекцію этой секціи.

эллиптическаго интеграла, разсматривая сначала тотъ случай, когда аффиксы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежатъ на одной прямой или на одной окружности; интересно также приближенное построеніе; если $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2}$ и $\eta = \frac{\gamma - \delta}{2}$ — величины малыя, то разность $m - n$ отличается отъ $a_0 - b_0$ на $\frac{\varepsilon^2\eta^2(\varepsilon^2 + \eta^2)}{16c^5}$, гдѣ $c = a - b$, $a_0 = q + \sqrt{(\alpha - q)(\beta - q)}$, $b_0 = p + \sqrt{(\gamma - p)(\delta - p)}$ и, слѣдовательно, приближенно можно принять $m - n = a_0 - b_0$.

Преподавательница Высшихъ Женскихъ Курсовъ въ С.-Петербургѣ Н. Н. Гернетъ сдѣлала докладъ изъ области варіаціоннаго исчисленія, указавши на необходимость для полученія всѣхъ рѣшеній задачи о наибольшемъ и наименьшемъ значеніи интеграла $\int_a^b F(x, y, y')dx$, при условіи $\varphi(x, y) \geqq 0$ или $\psi(x, y, y') \geqq 0$, разсматривать и предѣльныя значенія $\varphi(x, y) = 0$ или, соотвѣтственно, $\psi(x, y, y') = 0$. Экстремальная кривая можетъ вполнѣ или частью удовлетворить именно этимъ предѣльнымъ условіямъ.

Проф. Московскаго Университета С. А. Чаплыгинъ сдѣлалъ докладъ „О приближенномъ вычисленіи интеграловъ дифференціальныхъ уравненій“.

Докладчику въ его работахъ приходилось неоднократно наталкиваться на необходимость имѣть для даннаго дифференціальнаго уравненія такія приближенныя выраженія его интеграла, которыя при данномъ x принимали бы опредѣленныя значенія, а при достаточно близкихъ значеніяхъ x представляли бы его съ опредѣленною погрѣшностью. Статья проф. В. П. Ермакова „Остаточные члены простѣйшихъ рядовъ“ (Кіев. Изв., 1904 г., № 5) натолкнула докладчика на идею примѣнить аналогичный методъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-го порядка: чтобы найти рѣшенія дифференціальнаго уравненія $y' - f(x, y) = 0$, принимающее при $x = 0$ значеніе y_0, полагаемъ $z = F(x) + y\,\varphi(x)$, гдѣ F и φ должны удовлетворять условіямъ $F(0) = y_0$, $\varphi(0) = 0$ (можно, конечно, потребовать еще, чтобы $F^{(i)}(0) = y_0^{(i)}$, $\varphi^{(i)}(0) = 0$, и взять, такимъ образомъ, за $F(x)$ разложеніе въ рядъ Тайлора, а за $\varphi(x)$ — остаточный членъ его); что же касается q, то оно опредѣляется изъ условія, чтобы при нѣкоторомъ произвольномъ, но заданномъ значеніи x имѣло мѣсто равенство $z = y$. Тогда $z' - f(z, x)$ будетъ имѣть корень между 0 и x. Отсюда имѣемъ возможность опредѣлить $q = \psi(\vartheta x)$ и, измѣняя ϑ отъ 0 до 1, изслѣдовать измѣненія q. Въ частности, если b измѣняется въ одномъ направленіи, получаемъ, что интегральная кривая заключается между кривыми $y = F(x) + \psi(0)\varphi(x)$ и $y = F(x) + \psi(x)\varphi(x)$. Пріемъ примѣнимъ и къ уравненіямъ 1-го порядка, не разрѣшеннымъ въ отношеніи y, а также къ уравненіямъ высшаго порядка, въ особенности линейнымъ.

Послѣдній докладъ этого перваго дня былъ посвященъ теоріи чиселъ: І. И. Чистяковъ сдѣлалъ докладъ объ обобщеніи теоремы

Эйлера въ теоріи чиселъ, въ которомъ онъ отъ сравненія $a^{\varphi(a)+1} \equiv a$ $(\mathrm{mod}\, n)$ для случая a и n взаимно простыхъ перешелъ къ случаю a и n, имѣющихъ общихъ множителей: $n = b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\varepsilon}$ и $a = b^{\beta'} c^{\gamma'} l^{\lambda} m^{\mu}$ при условіи $\beta' \geqq \beta$, $\gamma' \geqq \gamma$; докладчикъ показалъ на нѣкоторыя примѣненія этого сравненія въ теоріи степенныхъ вычетовъ и при рѣшеніи двучленныхъ сравненій высшихъ степеней, а также остановился на болѣе общей формѣ этого сравненія $a^{\psi(a)} \equiv a^q$ $(\mathrm{mod}\, n)$, гдѣ $\psi(n)$ — наименьшее кратное чиселъ $\varphi(b^{\beta})$, $\varphi(c^{\gamma})$, $\varphi(d^{\delta})$, $\varphi(c^{\varepsilon})$; если q взять достаточно большимъ, то сравненіе справедливо для всякихъ a и n.

На слѣдующій день, 30 декабря, происходило соединенное засѣданіе подсекцій математики и механики. На немъ прежде всего сдѣлалъ докладъ проф. Н. Е. Жуковскій: „Примѣненіе метода Кирхгофа къ разсчету аэроплановъ"; докладчикъ указалъ на возможность примѣненія къ изслѣдованію аэроплановъ сдѣланнаго имъ же видоизмѣненія методы Кирхгофа, съ помощью котораго онъ произвелъ въ своемъ сочиненіи: „Видоизмѣненіе методы Кирхгофа для опредѣленія движенія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока", анализъ не-вихревого движенія. (Моск. Мат. Сб., XV, стр. 121 — 276).

Докладъ сопровождался проектированіемъ на экранѣ тѣхъ формулъ, которыми пользовался въ немъ докладчикъ, и такимъ образомъ являлся иллюстраціей примѣненія проекціоннаго аппарата къ чтенію лекцій по чистой математикѣ, которое въ будущемъ должно, конечно, вытѣснить продолжительное и неудобное для лектора — но, къ сожалѣнію, для большинства пока неизбѣжное — выписываніе и выводъ формулъ на доскѣ. Отмѣтимъ, что на докладѣ присутствовало гораздо болѣе многочисленная публика, чѣмъ обычно,— ибо явились многіе члены секціи воздухоплаванія, одной изъ самыхъ многолюдныхъ на Съѣздѣ, завѣдывающимъ которой и былъ самъ проф. Н. Е. Жуковскій, вынесшій на своихъ плечахъ значительную часть работы по этой секціи.

Второе сообщеніе сдѣлано было проф. Юрьевскаго Университета Г. В. Колосовымъ на тему: „Примѣненіе теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ интегрированію гипергармоническаго уравненія $\nabla_2\nabla_2\, u = 0$ при заданныхъ условіяхъ на контурѣ". Новый пріемъ, предложенный докладчикомъ, основывается на опредѣленіи не самой функціи, а ея частныхъ производныхъ 2-го порядка.

Третій докладъ — прив.-доц. Московскаго Университета Л. С. Лейбензона — былъ посвященъ вопросу объ опредѣленіи упругости земли, если ее принимать за неоднородную.

Въ заключеніе этого засѣданія секціи предложено было высказаться по поводу проекта устава „Русской Ассоціаціи для содѣйствія развитію и распространенію наукъ"; но, какъ и всегда бываетъ въ подобныхъ собраніяхъ лицъ, въ большинствѣ своемъ мало знакомыхъ между собою, существенныхъ замѣчаній было сдѣлано не особенно много, и все свелось лишь къ одобренію предложеннаго проекта. Одно лишь пожеланіе было занесено въ протоколъ, какъ пожеланіе секціи,—

а именно, что проектируемая „Ассоціація“ своею главною задачею считаетъ не собраніе періодическихъ съѣздовъ, а именно содѣйствіе развитію науки въ Россіи и, въ частности, облегченіе всѣми возможными средствами занятій наукою провинціальнымъ работникамъ.— Пишущему эти строки хотѣлось, сверхъ того, чтобы уставъ былъ болѣе опредѣленъ и менѣе въ немъ было пестрящихъ проектъ фразъ. Составъ Совѣта и правила, опредѣляющія его дѣятельность, имѣютъ быть выработаны; но преобладало мнѣніе, что можно положиться на Распорядительный Комитетъ Съѣзда, при чемъ побудительною причиною было, разумѣется, опасеніе еще затянуть и безъ того уже безконечно тянущееся дѣло.

Въ тотъ же день вечеромъ члены секціи были приглашены на засѣданіе Московскаго Математическаго Кружка, на которомъ членами Кружка были прочитаны доклады: С. П. Виноградовымъ — „Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ“. І. И. Чистяковымъ — „О вычисленіи числа π“. Я не буду останавливаться подробнѣе на этихъ докладахъ, ибо они изложены на страницахъ „Вѣстника“ въ своемъ мѣстѣ — въ отчетахъ о дѣятельности Кружка. Отмѣчу лишь то, что какъ это засѣданіе, такъ и второе привлекли значительное число посѣтителей — членовъ Съѣзда, съ интересомъ осматривавшихъ также устроенную Кружкомъ въ Торговой Школѣ, гдѣ происходили засѣданія, выставку учебниковъ и учебныхъ пособій по преподаванію математики въ начальной и въ средней школѣ. Лично меня въ особенности заинтересовали стереоскопическія картинки стереометрическихъ фигуръ, какъ пособіе при преподаваніи стереометріи: до сихъ поръ я зналъ лишь Saint-Loup, „La géométrie au Stéréoscope“. Paris, 1866. Теперь оказывается, кромѣ англійскихъ таблицъ Underwood'а, имѣются двѣ серіи подобныхъ таблицъ уже русскаго изданія.

Въ засѣданіи 31 декабря заслушаны слѣдующіе доклады:

Ю. Г. Рабиновича: „О линейной векторъ-функціи и ея приложеніяхъ“. Опредѣляя линейную функцію извѣстнымъ функціональнымъ уравненіемъ $F(x+y)=F(x)+F(y)$, докладчикъ ввелъ понятія ротаціи и дивергенціи и далъ рядъ равенствъ, на основаніи которыхъ строится теорія этихъ функцій, геометрически изображающихъ проективное преобразованіе; онъ остановился на примѣненіи ихъ въ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіяхъ.

Съ этого засѣданія началось, отмѣтимъ здѣсь, болѣе строгое, чѣмъ вначалѣ, примѣненіе правила, ограничивавшаго время, отводимое каждому докладчику, 20 минутами.

И. В. Станкевичъ, прив. доц. Московкаго Университета: „О нѣкоторыхъ примѣненіяхъ преобразованія прикосновенія“. Идея доклада заключается въ томъ, что вопросъ о равноправности двухъ рядовъ перемѣнныхъ въ системѣ каноническихъ уравненій проще всего рѣшается именно при помощи преобразованія прикосновенія, безъ помощи классическихъ преобразованій Якоби; общія разсужденія иллюстрировались примѣненіемъ къ одной задачѣ механики. По поводу прочитаннаго доклада проф. Н. Н. Салтыковъ (Харьковъ), указалъ, что еще до Якоби на эквивалентность двухъ классовъ перемѣнныхъ обратилъ вниманіе Ліувиль въ своихъ лекціяхъ въ „Collège de France“.

Пишущій эти строки сдѣлалъ затѣмъ докладъ о вліяніи на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса [съ элементомъ (точка, плоскость)] наличности въ данномъ коннексѣ нѣкоторыхъ простѣйшихъ особенностей,—давъ, такимъ образомъ, для этихъ конфигурацій формулы, аналогичныя формуламъ Плюккера въ теоріи плоскихъ кривыхъ.

Послѣдній докладъ проф. А. К. Власова былъ посвященъ такому отвлеченному вопросу, какъ геометрическое опредѣленіе алгебраическихъ многообразій высшихъ порядковъ въ многомѣрномъ пространствѣ; но, сдѣланный весьма живо и интересно, онъ былъ весьма эффектно законченъ примѣненіемъ этихъ абстрактныхъ построеній къ доказательству существованія 27 прямыхъ на поверхности 3-го порядка.

1-го января математическая секція отдыхала. На засѣданіи 2-го января В. В. Бобынинъ поднялъ вопросъ объ организаціи спеціальныхъ съѣздовъ математиковъ, отдѣльно ли отъ Съѣздовъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей или совмѣстно съ ними, подобно Германскому Математическому Союзу (Deutsche Mathematiker Vereinigung). В. В. Бобынинъ указалъ на объединеніе скандинавскихъ математиковъ — шведскихъ, норвежскихъ, датскихъ и финскихъ, организовавшихъ свои съѣзды, послѣдній изъ которыхъ состоялся въ сентябрѣ прошлаго 1909 года. В. В. Бобынину хотѣлось бы связать эти съѣзды съ приглашеніемъ 7-го Международнаго Съѣзда Математиковъ (который долженъ осуществиться послѣ того, какъ будутъ устроены 5-й въ 1912 г. въ Кэмбриджѣ, 6-й въ 1916 г. въ Стокгольмѣ) въ 1920 г. въ Россію.

Предложеніе В. В. Бобынина обсуждалось въ засѣданіи 5-го января. Оно вызвало довольно оживленныя пренія, въ которыхъ рядъ членовъ Съѣзда высказывался и за и противъ дифференціаціи и отдѣленія отъ общихъ съѣздовъ естествоиспытателей, но въ общемъ довольно единодушно высказывался за желательность устройства съѣздовъ болѣе частыхъ, чѣмъ до сихъ поръ, и за желательность объединенія русскихъ математиковъ. Дѣйствительно, общіе съѣзды довольно громоздки и въ Россіи, кромѣ столицъ, трудно осуществимы. Пишущій эти строки сильно сомнѣвается, чтобы XIII Съѣздъ, предположенный въ Тифлисѣ, дѣйствительно состоялся въ 1911 году и былъ столь же многолюденъ, какъ московскій. Быть можетъ, впрочемъ, къ тому времени сорганизуется Русская Ассоціація, и дѣло устройства съѣздовъ пойдетъ глаже. Но не надо забывать русскихъ условій. Въ Россіи только 10 университетовъ и не свыше 30 высшихъ техническихъ школъ, и, стало быть, намъ нечего думать о 700 членахъ, какъ въ Deutsche Mathematiker Vereinigung; къ тому же у насъ силою вещей преподаватели средней школы въ гораздо большей степени порываютъ съ наукой, чѣмъ въ Германіи, учителя которой могутъ гордиться такимъ собратомъ по профессіи, какъ Грассманъ. А между тѣмъ, какъ и указывалъ пишущій эти строки, и въ Германіи руководители Союза Математиковъ не рѣшаются устраивать съѣзды отдѣльно отъ Съѣздовъ Естествоиспытателей и Врачей.

Проф. А. Кнезеръ, бывшій проф. Юрьевскаго Университета, съ чисто нѣмецкой настойчивостью возбуждаетъ ежегодно вопросъ объ отдѣльныхъ съѣздахъ, и каждый разъ его предложеніе проваливается. Мнѣ привелось быть на Дрезденскомъ Съѣздѣ 1907 г., который предполагалось посвятить чествованію памяти Эйлера,— но даже это не могло привлечь болѣе 50-60 членовъ.

Въ заключеніе преній была принята резолюція, предложенная Л. К. Лахтинымъ: „Просить Московское Математическое Общество взять на себя разработку плана организаціи, на основаніи высказанныхъ въ секціи пожеланій, и — по сношеніи съ другими Обществами — осуществленіе этого плана“.

Но я забѣжалъ впередъ. Вернемся къ засѣданію 2-го января. Въ этомъ засѣданіи было сдѣлано два доклада:

1) Г. В. Пфейферъ (Кіевъ): „Объ унипланарныхъ точкахъ алгебраическихъ поверхностей“,— продолженіе работъ докладчика по изслѣдованію особенныхъ точекъ алгебраическихъ поверхностей; докладчикомъ выясненъ составъ и представлена схема унипланарныхъ точекъ, въ которыхъ одна координата разлагается въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ двухъ другихъ координатъ.

2) М. М. Лагутинскій (Харьковъ): „Объ интегрированіи алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій вида $\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_p}{X_p}$“, которыя авторъ помощью нѣкотораго бираціональнаго преобразованія приводитъ къ уравненіямъ вида $\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\cdots=\frac{dy_p}{y_p Y_p^{(1)}}$,— имѣющимъ частное рѣшеніе y_p; такимъ образомъ приходимъ къ разысканію независящихъ отъ y_p интеграловъ системы съ $p-1$ перемѣнными.

Конецъ засѣданія былъ занятъ докладомъ пишущаго эти строки по вопросу объ организаціи текущей русской математической библіографіи. Занимаясь съ 1893 г. реферированіемъ русскихъ работъ сначала по геометріи, а съ 1899 г. и по всѣмъ отдѣламъ чистой математики въ журналѣ „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, я долженъ въ противоположность иностраннымъ сотрудникамъ самъ подбирать каждый разъ литературу. Поэтому дле меня особенно чувствительно положеніе, въ которомъ находится русскій читатель, интересующійся вновь выходящими книгами и статьями по математическимъ наукамъ. Существующія библіографическія изданія — „Кіевскій указатель“ и „Академическая библіографія“ — сильно запаздываютъ на два-три года. Желательно поэтому имѣть такое изданіе, которое давало бы свѣдѣнія по возможности быстро,— въ крайнемъ случаѣ, только списки, а при благопріятныхъ условіяхъ и рефераты, какъ „Bulletin des Sciences mathématiques“, или какъ рефераты по химіи въ журналѣ „Русскаго Физико-Химическаго Общества“. Послѣднее, можетъ быть, слишкомъ трудно осуществимо, но первое — изданіе указателя — особенно большихъ затратъ не потребуетъ. Были поэтому формулированы три пожеланія.

Для ознакомленія иностранной математической публики съ русскими работами по математикѣ желательно:

1) Чтобы мнѣ, какъ референту журнала „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ облегчена была авторами работа подысканія литературы путемъ присылки отдѣльныхъ оттисковъ, статей и книгъ по чистой математикѣ.

2) Въ тѣхъ же видахъ желательно полнѣе представить русскую журнальную литературу въ Амстердамскомъ „Revue Semestrielle des publications mathématiques“, для чего желательны сотрудники въ Варшавѣ, Петербургѣ и Москвѣ, для реферированія тѣхъ изданій этихъ городовъ, которыя теперь реферируются далеко не полностью (въ особенности изданія высшихъ техническихъ учебныхъ заведеній).

3) Наконецъ, въ интересахъ русской математической публики желательно было бы организовать при одномъ изъ Математическихъ Обществъ — Харьковскомъ, Казанскомъ или Московскомъ — печатаніе текущихъ библіографическихъ свѣдѣній.

Докладъ вызвалъ оживленныя пренія. Въ результатѣ было сдѣлано два постановленія. Одно было принято въ засѣданіи 3 января и сводится къ тому, чтобы напечатать въ „Дневникѣ Съѣзда“, а затѣмъ въ газетахъ слѣдующее: „Подсекція математики обращается ко всѣмъ авторамъ и издателямъ съ покорнѣйшею просьбой присылать оттиски своихъ трудовъ и изданій въ каждое изъ трехъ Обществъ: 1) Казанское Физико-Математическое (Казань, Университетъ), 2) Московское Математическое (Москва, Университетъ), 3) Харьковское Математическое (Харьковъ, Университетъ), въ цѣляхъ составленія библіографическаго указателя по математикѣ. Второе постановленіе — относительно самаго изданія указателя — секція рѣшила передать на соединенномъ засѣданіи подсекціи и Московскаго Математическаго Общества (вечеромъ) 3 января, но, какъ не стоявшее на повѣсткѣ, оно не обсуждалось; но Московскому Математическому Обществу было поручено войти въ сношенія съ русскими высшими учебными заведеніями и математическими обществами въ цѣляхъ осуществленія этого изданія.

3-го января происходило, какъ уже упомянуто, два засѣданія: утромъ — засѣданіе Секціи, вечеромъ — соединенное засѣданіе Секціи и Московскаго Математическаго Общества.

На первомъ — С. О. Шатуновскій сдѣлалъ докладъ: „О сравненіяхъ по системѣ модулей“, въ которомъ докладчикъ, введя рядъ опредѣленій того, что онъ называетъ модулями Коши, натуральными модулями и пр., указалъ на примѣненіе этой теоріи въ теоріи уравненій и далъ рядъ теоремъ въ этомъ направленіи. Мы процитируемъ по составленному докладчикомъ для „Дневника“ краткому реферату нѣкоторыя изъ нихъ: Существуетъ $n!$ системъ натуральныхъ модулей функціи $f(x)$ степени n. Если m_k есть степень функціи φ_k (модуля натуральнаго) въ отношеніи x_k, то произведеніе $m_1 m_2 \ldots m_n = I$ есть инваріантъ и выражаетъ порядокъ группы Галуа уравненія $f(x) = 0$. Для того, чтобы уравненіе $f(x) = 0$ не имѣло аффекта, необходимо и достаточно, чтобы модули Коши функціи $f(x)$ были натуральными модулями этой функціи. Для того, чтобы группа уравненія $f(x) = 0$ была p-кратно транзитивною, необходимо и достаточно, чтобы первые p натуральныхъ модулей функціи $f(x)$ были модулями Коши.

Второй докладъ этого засѣданія сдѣланъ былъ проф. Н. М. Гюнтеромъ (С.-Петербургъ) и былъ озаглавленъ: „Къ теоріи характеристикъ системъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ одной неизвѣстной функціей отъ m независимыхъ перемѣнныхъ“. Авторъ, примыкая къ изслѣдованіямъ Delassus по аналитической теоріи уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка, доказываетъ что система уравненій, опредѣляющихъ характеристику, есть каноническая и число алгебраически независимыхъ уравненій ея равно послѣднему отличному отъ нуля индексу Delassus (Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux derivées partielles. Ann. Ec N. (3) 13).

Третьимъ былъ заслушанъ докладъ П. С. Флорова (ст. Урюпинская): „Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ“ (напечатанный уже на страницахъ „Вѣстника“, № 505, стр. 12 — 15); онъ вызвалъ оживленныя пренія. Докладчикъ довольно удачно парировалъ сдѣланныя ему возраженія, клонившіяся, главнымъ образомъ, къ указанію недостаточной простоты предлагаемаго авторомъ способа. Отмѣтимъ замѣчаніе А. К. Власова, указавшаго, что ему въ его педагогической практикѣ удавалось достигать хорошихъ результатовъ, пользуясь извѣстными формулами:

$$c_{2n} = \frac{c_n \cdot i_n}{c_n + i_n}, \quad i_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2c_{2n} \cdot i_n},$$

гдѣ i_n и c_n — стороны правильнаго соотвѣтственно вписаннаго и описаннаго n-угольника.

Вечеромъ того же дня было соединенное засѣданіе Секціи и Московскаго Математическаго Общества, бывшее для представителей высшей математики гвоздемъ Съѣзда. Почетнымъ предсѣдателемъ на немъ былъ академикъ О. А. Баклундъ, почетнымъ товарищемъ предсѣдателя проф. Морской Академіи А. Н. Крыловъ.

Академикъ О. А. Баклундъ прочелъ докладъ „О современномъ состояніи небесной механики“, который долженъ вскорѣ появиться въ „Математическомъ Сборникѣ“. Проф. В. П. Церасскій и П. К. Штернбергъ отмѣтили высокій интересъ обзора, сдѣланнаго такимъ знатокомъ небесной механики, какъ академикъ О. А. Баклундъ.

Второй докладъ — „Объ уравненіяхъ математической физики“, — былъ сдѣланъ проф. В. А. Стекловымъ; авторъ подвелъ итоги изслѣдованіямъ въ этой области, какъ своимъ собственнымъ, такъ и другимъ, при чемъ довольно отрицательно отнесся къ выдвинувшейся въ послѣднее время теоріи такъ называемыхъ интегральныхъ уравненій, высказавъ убѣжденіе, что при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ математической физики, къ которымъ въ настоящее время стремятся примѣнить теорію интегральныхъ уравненій, по существу своему имѣющую начало въ функціональномъ уравненіи Абеля, можно и должно обойтись безъ нея.

Проф. Г. В. Колосовъ сдѣлалъ обширный докладъ подъ заглавіемъ: „Плоская задача теоріи упругости“, резюмирующій результаты, полученные докладчикомъ въ только-что опубликованномъ его сочиненіи. Онъ, напротивъ, примѣнялъ въ своемъ изслѣдованіи теорію интегральныхъ уравненій, хотя и сознался, что до извѣстной степени увлекся въ этомъ отношеніи модою. Докладъ свой, по примѣру Н. Е. Жуковскаго, Г. В. Колосовъ иллюстрировалъ воспроизведеніемъ на экранѣ помощью проекціоннаго аппарата многочисленныхъ формулъ своего изслѣдованія.

Этотъ наиболѣе современный способъ демонстрацій не можетъ, однако, много дать для облегченія математическихъ докладовъ, какъ для меня обнаружилъ этотъ опытъ его примѣненія: онъ ускоряетъ, правда, процессъ воспроизведенія формулъ; но сами по себѣ математическія формулы не настолько наглядны, чтобы достаточно было лишь показать ихъ, а потому и прибѣгать къ проекціонному аппарату можно съ пользою лишь въ очень умѣренныхъ размѣрахъ.

Наконецъ, послѣдній докладъ этого засѣданія, о которомъ я еще не упоминалъ, это докладъ адмирала А. Н. Крылова „Объ интеграторѣ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій“,— построенномъ докладчикомъ; схема его уже была описана А. Н. Крыловымъ и основывается на идеѣ В. Томсона, но практическое выполненіе представляло значительныя трудности, пока автору не пришла идея примѣнить электрическую передачу. Но полученный такимъ образомъ приборъ обладаетъ двумя качествами, сильно ограничивающими его примѣненіе: онъ довольно дорогъ (нѣсколько тысячъ) и въ то же время для каждаго члена уравненій долженъ быть построенъ заново. Это не отнимаетъ, однако, у него крупнаго интереса an und für sich.

На секціонномъ засѣданіи 4 января утромъ первымъ былъ заслушанъ докладъ И. И. Жегалкина „О безконечныхъ множествахъ“, имѣвшій цѣлью познакомить болѣе широкую публику съ основами этой до сихъ поръ мало распространенной въ Россіи теорiи; докладъ дѣйствительно вызвавшiй живой интересъ, сказавшiйся въ оживленныхъ пренiяхъ, послѣдовавшихъ за докладомъ. Было бы желательно, чтобы этотъ докладъ былъ напечатанъ.

Слѣдующiй докладъ В. В. Бобынина также былъ общепонятенъ: онъ былъ посвященъ „Древнимъ и новымъ нападкамъ на чистую математику" и имѣлъ своимъ главнымъ содержанiемъ опроверженiе того отрицательнаго мнѣнiя о математикѣ, которое высказано Львомъ Николаевичемъ Толстымъ въ его послѣднихъ сочиненiяхъ.

Далѣе былъ заслушанъ присланный г. П. М. Анощенко „Элементарный способъ рѣшенiя уравненiй". Его доложилъ секретарь секцiи проф. Д. О. Егоровъ, указавшiй на нѣкоторыя неясности въ докладѣ, не разъяснимыя въ отсутствiи автора. Конецъ засѣданiя занялъ весьма продолжительный докладъ г. Герсеванова „О номографiи". Молодой докладчикъ, увлеченный своимъ предметомъ, указавъ, что въ Россiи съ нимъ совершенно незнакомы, началъ съ самыхъ элементарныхъ вещей,—онъ выводилъ, напримѣръ, условiе, при которомъ три точки лежатъ на одной прямой. Было бы гораздо лучше, если бы онъ сослался на существованiе такихъ элементарныхъ книжекъ по номографiи, какъ M. d'Ocagne, „Calcul graphique et nomographie", 1907, и ограничился бы затѣмъ указанiемъ возможныхъ примѣненiй номографiи.

Вечеромъ того же дня происходило 2-е засѣданiе Математическаго Кружка, на которое также были приглашены члены Съѣзда.

На немъ А. К. Власовъ прочелъ докладъ „Конструктивный и логическiй моменты въ геометрiи", въ которомъ остановился на значенiи того и другого момента въ преподаванiи.

И. И. Александровъ, авторъ извѣстнаго „Сборника геометрическихъ задачъ", переведеннаго на французскiй и нѣмецкiй языки, предложилъ вниманiю собранiя два рѣшенiя задачи Паппа построенiемъ, интересныя тѣмъ, что, повидимому, различныя, они оказываются при изслѣдованiи совершенно тожественными и различаются лишь орiентировкой чертежа*).

Пишущiй эти строки указалъ на дѣятельность Харьковскаго Математическаго Общества въ области преподаванiя**) и на изданную въ Харьковѣ брошюру Я. Штейнера: „Построенiя, выполняющiяся при помощи прямой линiи и неподвижнаго круга", познакомилъ собранiе съ программами преподаванiя Я. Штейнера въ Берлинской Gewerbe-Schule, отличающимися своею своеобразностью***).

*) Докладъ г. Александрова напечатанъ въ настоящемъ номерѣ „Вѣстника".

**) Отчетъ о педагогическихъ засѣданiяхъ Харьковскаго Математическаго Общества появится на страницахъ „Вѣстника Опытной Физики".

***) Докладъ будетъ напечатанъ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики".

Послѣднимъ В. И. Ларченко сдѣлалъ докладъ „О логариѳмическихъ таблицахъ и приближенныхъ логариѳмическихъ вычисленіяхъ“, въ которомъ онъ, указавъ на важность дѣйствительно наболѣвшаго вопроса о точности логариѳмическихъ вычисленій, привелъ русскую литературу предмета и сообщилъ тѣ пріемы, къ которымъ онъ пришелъ при преподаваніи. Между прочимъ, докладчикъ высказался за желательность введенія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ четырехзначныхъ таблицъ логариѳмовъ.

На этомъ же засѣданіи поднятъ былъ вопросъ о необходимости организаціи, кромѣ съѣздовъ естествоиспытателей, особыхъ съѣздовъ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній; идея эта встрѣтила горячій откликъ среди многочисленныхъ присутствовавшихъ лицъ, и Московскому Математическому Кружку было поручено постараться провести эту идею въ жизнь. Присутствовавшій на засѣданіи начальникъ военно-учебныхъ заведеній ген.-лейт. Попруженко заявилъ свое убѣжденіе, что въ управленіи военно-учебныхъ заведеній эта идея встрѣтитъ сочувствіе, и, съ своей стороны, обѣщалъ оказать возможное содѣйствіе.

Послѣднее засѣданіе секціи состоялось 5 января. На немъ В. В. Бобынинъ, нашъ маститый дѣятель въ области исторіи математики, сдѣлалъ докладъ, озаглавленный имъ: „Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ“. Почтенный докладчикъ указалъ, какъ часто математики въ своихъ попыткахъ возстановленія утраченныхъ доказательствъ теряютъ историческую перспективу и забываютъ то основное требованіе, что придуманное доказательство только тогда можетъ дѣйствительно быть возстановленіемъ утраченнаго, если оно предполагаетъ лишь ту сумму знаній, какая соотвѣтствуетъ эпохѣ, которой относится утраченное. Докладчикъ иллюстрировалъ это на нѣсколькихъ примѣрахъ, взятыхъ изъ прежнихъ его работъ.

Проф. Д. А. Граве (Кіевъ) представилъ собранію вычисленныя подъ его руководствомъ таблицы индексовъ для второй тысячи. Какъ извѣстно, Якоби вычислилъ таблицу индексовъ для первой тысячи—его работа издана подъ заглавіемъ „Canon arithmeticus“. Встрѣченное Д. А. Граве въ литературѣ замѣчаніе, что для второй тысячи таблицы индексовъ никогда не будутъ вычислены, натолкнуло Д. А. Граве на мысль попробовать осуществить это кажущееся невозможнымъ предпріятіе, но только примѣнивъ къ нему коллективный трудъ. Выработавъ планъ работъ, онъ обратился къ студентамъ Кіевскаго Университета съ предложеніемъ принять участіе въ работѣ, поставивъ непремѣннымъ условіемъ строгое выполненіе его плана. Нашлось 65 человѣкъ, пожелавшихъ взять на себя трудъ, и въ шесть недѣль таблицы индексовъ для второй тысячи были вычислены. Блестящій результатъ планомѣрнаго раздѣленія труда и значеніе коллективнаго труда даже въ такой области, какъ чистая математика, произвели сильное впечатлѣніе на присутствовавшихъ членовъ Съѣзда. По предложенію С. О. Шатуновскаго постановлено просить Д. А. Граве выразить благодарность подсекціи студентамъ, вычислившимъ таблицы, за понесенный ими трудъ.

Проф. К. А. Андреевъ отмѣтилъ при этомъ, что на Съѣздѣ ярко обнаружилась вся несправедливость раздающихся часто въ послѣднее время нападокъ на то, что въ университетѣ студенты не работаютъ. Работа студентовъ-математиковъ Московскаго Университета по Съѣзду — организація выставокъ и объясненія на нихъ, сообщеніе Д. А. Граве о работѣ кіевскихъ студентовъ, сообщеніе, сдѣланное наканунѣ пишущимъ эти строки о сдѣланномъ харьковскими студентами переводѣ классическаго произведенія Штейнера, убѣждаютъ профессора К. А. Андреева, что вездѣ въ университетахъ идетъ интенсивная научная работа.

Послѣ этого были сдѣланы еще два доклада пишущимъ эти строки о системахъ кривыхъ, связанныхъ съ главною коинциденціей коннекса съ элементомъ (точка, прямая, плоскость) и опредѣляемыхъ уравненіемъ въ полныхъ дифференціалахъ 2 порядка. Я ограничился указаніемъ на то, что для этихъ системъ можетъ быть доказанъ рядъ теоремъ, представляющихъ аналогіи теоремамъ, доказаннымъ Fouret и др. для системъ алгебраическихъ кривыхъ, которыя Loria предлагаетъ называть „algebroïdes".

П. С. Эренфестъ (С.-Петербургъ) въ своемъ докладѣ „О двухъ неразрѣшенныхъ вопросахъ математической физики" указалъ, во-первыхъ, что въ вопросахъ математической физики часто бываетъ нужно умѣть узнать общее расположеніе кривыхъ на плоскости, — ему самому это понадобилось для уравненія 1-го порядка вида $\frac{dy}{dx} = a + bx + cx^2 - k\frac{y}{x}$; надо сказать, что необходимость обращать вниманіе на качественное изслѣдованіе кривыхъ, опредѣленныхъ дифференціальнымъ уравненіемъ, отмѣчаетъ Poincaré въ своей римской рѣчи, указывая, что для простѣйшаго случая уравненія 1-го порядка и 1-ой степени (о которомъ говоритъ г. Эренфестъ) изслѣдованіе это сводится къ опредѣленію числа предѣльныхъ цикловъ (cycles limites).

Г. Эренфестъ указалъ затѣмъ на другой вопросъ, въ которомъ, по его мнѣнію, нельзя обойтись безъ помощи интегральныхъ уравненій, — въ противоположность мнѣнію, высказанному профессоромъ В. А. Стекловымъ.

Этимъ и закончилась научная дѣятельность подсекціи. Наступило время подведенія итоговъ, — сначала въ заключительной рѣчи профессора Л. К. Лахтина, товарища предсѣдателя подсекціи, все время замѣщавшаго заболѣвшаго предсѣдателя профессора Б. К. Млодзѣевскаго, — затѣмъ на товарищескомъ завтракѣ, собравшемъ десятка полтора болѣе дѣятельныхъ участниковъ изъ числа университетскихъ преподавателей, и, наконецъ, въ частной бесѣдѣ у нашихъ радушныхъ хозяевъ-москвичей. Попробуемъ и мы теперь подвести нѣкоторые итоги.

По числу докладовъ (36) подсекція математики далеко отстала отъ нѣкоторыхъ другихъ, особенно отъ секціи физики. Само по себѣ это число не является, однако, низкимъ. Оригинально, что оно какъ разъ совпадаетъ съ числомъ докладовъ на послѣднемъ Съѣздѣ скандинавскихъ математиковъ (въ сентябрѣ 1909 г.), о которомъ упоминалъ В. В. Бобынинъ въ своемъ заявленіи. Но по своему характеру доклады эти въ большинствѣ случаевъ не могли удовлетворить значительную часть членовъ Съѣзда — преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній, такъ какъ эти доклады относились къ спеціальнымъ вопросамъ высшей математики. На одномъ засѣданіи, на которомъ мнѣ какъ разъ довелось предсѣдательствовать, эта неудовлетворительность проявилась вполнѣ ясно: на повѣсткѣ стоялъ четвертымъ докладъ Р. В. Мрочека: „Математика и естествознаніе"; когда я, зная, что наканунѣ другой докладъ того же лица не состоялся, хотѣлъ закрывать засѣданіе, кто-то изъ публики, судя по формѣ — преподаватель, задалъ вопросъ: „а что же Мрочекъ? Мы только для него и пришли". Разумѣется, бюро ничего не могло подѣлать, если лицо, заявившее докладъ, на Съѣздъ не явилось. Но этотъ маленькій инцидентъ произошелъ именно по поводу доклада, имѣвшаго, судя по заглавію, болѣе популярный характеръ. Очень многолюдны были засѣданія Математическаго Кружка, засѣданія же математической секціи г.г. преподаватели очень скоро перестали посѣщать, отдавая предпочтеніе засѣданіемъ физической секціи.

И мнѣ думается, что на будущихъ съѣздахъ естествоиспытателей, независимо отъ того, осуществится ли идея особыхъ, такъ сказать, педагогическихъ съѣздовъ или нѣтъ, устраивать особую секцію преподаванія математики и физики, не присоединяя послѣдней къ преподаванію естествовѣдѣнія, какъ это до нѣкоторой степени произошло на Московскомъ Съѣздѣ. По поводу организаціи такой секціи можно было бы высказать нѣкоторыя соображенія, но лучше этимъ вопросомъ заняться особо. Я ограничусь здѣсь лишь указаніемъ, что отсутствію спеціально-педагогической секціи и можно приписать то обстоятельство, что на Съѣздѣ совершенно не былъ поднятъ вопросъ о дѣлѣ первостепенной важности для преподаванія математики — именно о работахъ русской подкомиссіи по преподаванію математики, — а это несомнѣнно одинъ изъ дефектовъ Съѣзда. Если же обратимся къ дѣятельности секціи, какъ она была организована, т. е. съ преобладающимъ содержаніемъ высшей математики, то можно констатировать, что, несмотря на отсутствіе бо̀льшей половины университетскихъ профессоровъ математики, въ общемъ съ научной стороны математика была представлена достаточно прилично; хотя по слѣ десятилѣтняго перерыва можно было бы ожидать бо̀льшаго обилія докладовъ, но съ извѣстной точки зрѣнія это даже можно привѣтствовать: въ области высшей математики доклады о собственныхъ научныхъ изслѣдованіяхъ въ преобладающемъ большинствѣ случаевъ настолько спеціальны, что желательно было бы выработать для нихъ схему такого приблизительно рода: я занимался такимъ-то и такимъ-то вопросомъ, имѣющимъ то или иное значенiе; результаты, мною полученные, таковы,— и только, безъ всякихъ доказательствъ. Все остальное въ печатной работѣ. Съ другой стороны, должна быть развита система докладовъ—обзоровъ извѣстной области, и при томъ докладовъ, такъ сказать, заказанныхъ. Опытъ въ этомъ отношенiи былъ сдѣланъ, и доклады академика О. А. Баклунда и проф. В. А. Стеклова и явились гвоздемъ Съѣзда. Въ частныхъ бесѣдахъ и высказывалось пожеланiе дальнѣйшаго развитiя въ этомъ направленiи.

Затѣмъ на Съѣздѣ былъ поднятъ рядъ вопросовъ о союзѣ математиковъ, о спецiальныхъ съѣздахъ математиковъ, объ изданiи библiографическаго журнала. Сейчасъ трудно сказать, что изъ этого выйдетъ, но шагъ впередъ уже въ томъ, что вопросы эти подняты, встрѣтили общее, повидимому, сочувствiе и, такимъ образомъ, есть надежда, что и математики оцѣниваютъ все значенiе общенiя для плодотворности научной работы. Если по существу своей науки математикъ осужденъ на целлюлярную систему занятiй, то для сохраненiя духа жива необходимо живое общенiе, а въ этомъ отношенiи XII-й Съѣздъ въ Москвѣ сыгралъ весьма полезную роль.

Проф. *Д. Синцовъ.*

Отчетъ о 2-мъ экстренномъ засѣданiи Московскаго Математическаго Кружка 4-го января 1910 г.

Второе экстренное собранiе Кружка происходило въ томъ же помѣщенiи и приблизительно при томъ же численномъ составѣ присутствующихъ, какъ и первое. По болѣзни предсѣдателя Кружка Б. К. Млодзѣевскаго и это засѣданiе было открыто товарищемъ предсѣдателя А. Ф. Гатлихомъ, по предложенiю котораго собранiе избрало почетнымъ предсѣдателемъ прив.-доц. Новороссiйскаго Университета С. О. Шатуновскаго, почетнымъ товарищемъ предсѣдателя петербургскаго педагога С. И. Шохоръ-Троцкаго.

Первый докладъ былъ сдѣланъ прив.-доц. Московскаго Университета А. К. Власовымъ на тему: „Конструктивный и логическiй моменты въ геометрiи“.

Докладчикъ поставилъ себѣ задачу выяснить значенiе и соотношенiе конструктивнаго и логическаго моментовъ въ геометрическомъ мышленiи. Значенiе логическаго момента общепризнано, и соотвѣтственно такому признанiю на геометрiю часто смотрятъ, какъ на объектъ упражненiя въ логикѣ. По мнѣнiю докладчика, характеризующимъ геометрическое мышленiе является не логическiй моментъ, который одинаково присущъ всѣмъ наукамъ, а конструктивный. Всякое разсужденiе, приводящее къ той или другой геометрической истинѣ, есть въ сущности построенiе. Для выясненiя этой мысли докладчикъ подвергъ анализу основныя понятiя геометрiи: пространство, аксiомы, постулаты и, выясняя соотношенiе интуицiи и логики въ математическомъ мышленiи, отмѣтилъ тенденцiю современнаго критическаго и аксiоматическаго направленiя въ математикѣ вытѣснить интуицiю, свести ее на нѣтъ, введя ея содержанiе въ опредѣленiя или аксiомы, какъ тенденцiю, преслѣдующую иныя цѣли, чѣмъ цѣли преподаванiя; тенденцiя эта предполагаетъ наличность геометрическаго или вообще математическаго мышленiя, между тѣмъ какъ цѣли преподаванія такой наличности не предполагаютъ, а, наоборотъ, въ томъ и заключаются, чтобы вызвать въ изучающемъ такое мышленіе.

Въ постулатахъ Евклида отмѣчены элементарныя построенія, которыя въ то же время неотдѣлимы отъ интуиціи. Въ дальнѣйшемъ геометрическое мышленіе сводится къ построенію и созиданію новыхъ болѣе сложныхъ образовъ. Представленіе этихъ болѣе сложныхъ образовъ отличается отъ представленія элементарныхъ образовъ, и, такимъ образомъ, слову „представленіе или интуиція" придается расширенное содержаніе. Представленіе въ этомъ расширенномъ пониманіи есть сокращенное разсужденіе — разсужденіе, сдѣлавшееся образомъ. Главная цѣль обученія геометріи заключается поэтому въ томъ, чтобы ввести въ имѣющееся элементарное представленіе изучающаго дѣятельный моментъ, вызвать мышленіе въ дѣятельности построенія. Но только строить, тѣмъ болѣе строить по заданнымъ шаблонамъ, еще не значитъ быть геометромъ, и, какъ бы систематически ни были расположены многочисленныя построенія, пока не будетъ поставлено главною цѣлью этихъ построеній созиданіе новыхъ образовъ, нельзя пробудить въ изучающемъ геометрическаго мышленія. Созданные образы служатъ этапами для дальнѣйшихъ построеній и созиданій. Такимъ образомъ, геометрія, какъ дѣятельность построенія, обостряетъ интуицію, увеличиваетъ емкость представленія — понимая эти слова въ расширенномъ значеніи, и, если дѣятельный моментъ построенія введенъ въ элементарное представленіе изучающаго, то цѣль обученія достигнута, независимо отъ объема воспринятаго геометрическаго матеріала. Въ дальнѣйшемъ сотвѣтственно своему призванію изучающій воленъ самъ направить свое дѣятельное геометрическое мышленіе или на практическіе запросы жизни или на возвышенные запросы ума.

Второй докладъ былъ сдѣланъ преподавателемъ Московскихъ среднихъ учебныхъ заведеній И. И. Александровымъ, который сообщилъ найденное имъ элементарное рѣшеніе чистымъ построеніемъ извѣстной задачи Паппа: „черезъ данную точку провести прямую, опредѣляющую въ данномъ углѣ отрѣзокъ данной длины", при чемъ точка должна лежать на равнодѣлящихъ даннаго и смежнаго съ нимъ угла. Это же рѣшеніе получено имъ отъ Д. А. Аитова изъ Парижа. Затѣмъ докладчикъ показалъ сообщенное ему однимъ лицомъ другое, изящное рѣшеніе той же задачи, основанное на теоріи гармоническихъ точекъ. Оба рѣшенія, будучи съ перваго взгляда совершенно различными, оказываются, однако, идентичными. На мысль объ идентичности рѣшеній, по разъясненію докладчика, наводило уже то, что оба рѣшенія приводятъ задачу къ построенію фигуры по даннымъ одинаковаго размѣра. Но та же идентичность стала совершенно очевидной, когда референтъ перевернулъ свой первый чертежъ.

Во время послѣдовавшаго перерыва г. Воскресенскій демонстрировалъ выставленный фирмою Гроссманнъ и Кнебель теллурій.

По возобновленіи засѣданія, проф. Харьковскаго Универститета Д. М. Синцовымъ было прочитано сообщеніе: „Къ вопросу о преподаваніи математики въ средней школѣ". (О программахъ преподаванія геометріи и алгебры Якоба Штейнера). Докладчикъ во вступленіи сообщилъ нѣкоторыя свѣдѣнія о Харьковскомъ Математическомъ Обществѣ, которое, занимаясь, главнымъ образомъ, чисто научными вопросами, въ послѣдніе годы заинтересовалось также современными вопросами элементарной математики и реформой математическаго образованія. Этой стороной своей дѣятельности Общество представляетъ сходство и близость съ задачами и цѣлями Московскаго Математическаго Кружка. Въ связи съ дѣятельностью Харьковскаго Математическаго Общества въ этомъ направленіи стоитъ появленіе въ русскомъ переводѣ классическаго сочиненія Якоба Штейнера „О геометрическихъ построеніяхъ". Переводъ этотъ исполненъ студентомъ Харьковскаго Университета подъ редакціей докладчика. Къ этому переводу приложена и біографія Якоба Штейнера, съ которой референтъ познакомилъ собраніе; въ частности онъ остановился на дѣятельности знаменитаго геометра въ качествѣ преподавателя средней школы, именно въ Берлинскомъ ремесленномъ училищѣ (Gewerbeschule). Отъ этого періода дѣятельности Штейнера сохранились программы и учебные планы его преподаванія ариѳметики, алгебры и геометріи. Эти программы были прочитаны докладчикомъ; онѣ представляютъ большой интересъ по проникающему ихъ духу синтеза и обобщенія, а также по предлагаемому учащимся матеріалу. Все преподаваніе при этомъ Якобъ Штейнеръ, убѣжденный ученикъ и послѣдователь Песталоцци, велъ по собственному эвристическому методу и въ теченіе небольшого времени разрабатывалъ очень много матеріала. Особенный интересъ представляетъ программа геометріи: въ нее входятъ и задача Аппполонія и синтетическая теорія коническихъ сѣченій.

Послѣднимъ докладомъ было сообщеніе кіевскаго преподавателя В. И. Ларченко „О логариѳмическихъ таблицахъ и приближенныхъ логариѳмическихъ вычисленіяхъ въ средней школѣ". По мнѣнію референта, въ средней школѣ необходимо обратить бо́льшее вниманіе на приближенныя вычисленія и, въ частности, на оцѣнку степени точности при логариѳмическихъ вычисленіяхъ. Въ виду многихъ соображеній, желательно замѣнить 5 и 7-значныя таблицы 4-значными, какъ вполнѣ удовлетворяющими нуждамъ средней школы, а также ввести десятичное дѣленіе градуса вмѣсто минутъ и секундъ. Докладчикъ для поясненія своего взгляда сдѣлалъ подробное изслѣдованіе 4-значныхъ таблицъ со стороны опредѣленія ошибки, получаемой при интерполированіи. Въ заключеніе онъ вкратцѣ далъ изложеніе приближенныхъ логариѳмическихъ вычисленій для учащихся, примѣнительно къ 4-значнымъ таблицамъ, и привелъ соотвѣтствующіе примѣры.

По поводу прочитаннаго доклада І. И. Чистяковъ сообщилъ, что Московскій Математическій Кружокъ, а ранѣе Отдѣленіе преподавателей математики Московскаго Педагогическаго Общества интересовались затронутыми докладчикомъ вопросами и рѣшили ихъ вполнѣ согласно со взглядами докладчика, высказавшись за замѣну 5-значныхъ таблицъ 4-значными и 60-ричнаго градуснаго раздѣленія десятичнымъ. Въ связи съ этимъ были изданы 4-значныя таблицы И. Ѳ. Слудскимъ. Г-нъ Воскресенскій высказался за введеніе въ учебныхъ заведеніяхъ логариѳмическихъ счетныхъ линеекъ, при чемъ сослался на сочувственное мнѣніе, которое высказалъ по этому поводу французскій ученый Аппель.

По окончаніи доклада обсуждался вопросъ о съѣздѣ преподавателей математики. Собраніе признало желательнымъ, чтобы такой съѣздъ состоялся въ возможно непродолжительномъ времени, и чтобы онъ былъ всероссійскимъ. При этомъ выражено пожеланіе, чтобы всѣ математическія общества, въ томъ числѣ и Московскій Математическій Кружокъ, а также и отдѣльныя лица, имѣющія къ тому возможность, приложили старанія къ осуществленію съѣзда.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

№ 258 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^4}{x^2+px+q}=12q.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 259 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 5x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 = 0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 260 (5 сер.). Доказать, что произведеніе xyz цѣлыхъ чиселъ x, y, z дѣлится на 60, если

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 261 (5 сер.). Показать, что

$$\mathrm{tg}^2 a + \mathrm{cotg}^2 a + \sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a \geqq 6.$$

С. Розенблатъ (Балта).

№ 262 (5 сер.). Вычислить углы треугольника ABC, въ которомъ одинъ изъ угловъ его A дѣлится на три части высотой и медіаной, проведенными изъ его вершины. Построить треугольникъ указаннаго свойства по одному изъ его линейныхъ элементовъ (напримѣръ, по радіусу круга вписаннаго).

Н. С. (Одесса).

№ 263 (5 сер.). Вывѣренные часы съ маятникомъ помѣщены на уровнѣ моря въ мѣстѣ, гдѣ ускореніе силы тяжести равно 981 *см.*, а земной радіусъ — 6360 *км.* Затѣмъ часы перенесены по вертикали вверхъ на высоту 6360 *м.* Опредѣлить 1° величину и знакъ суточнаго измѣненія хода часовъ; 2° на какую часть первоначальной длины и въ какомъ направленіи надо измѣнить длину маятника, чтобы исправить это измѣненіе въ ходѣ часовъ.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 178 (5 сер.). *Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и по данному отношенію $\frac{m}{n}$ одного изъ катетовъ къ проекціи другого катета на гипотенузу.*

Рѣшимъ сперва слѣдующую задачу: построить прямоугольный треугольникъ ABC по катету AB и проекціи DC другого катета AC на гипотенузу BC. Предполагая, что эта задача рѣшена, опишемъ на DC окружность, какъ на діаметрѣ, назовемъ центръ ея черезъ O и проведемъ изъ B касательную BA' къ этой окружности. Тогда имѣемъ:

$$\overline{BA'}^2 = BC \,.\, BD = \overline{AB}^2, \text{ откуда } AB = A'B,\ OA' = OD = OC = \frac{DC}{2},\ \angle BA'O = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда вытекаетъ возможность построить гипотенузу BC искомаго треугольника слѣдующимъ образомъ: по катетамъ $BA' = AB$ и $A'O = \frac{DC}{2}$ строимъ прямоугольный треугольникъ $BA'O$ съ прямымъ угломъ при вершинѣ A' и на продолженіи BO откладываемъ отрѣзокъ $OC = \frac{DC}{2}$; отрѣзокъ BC есть искомая гипотенуза. Затѣмъ строимъ прямоугольный треугольникъ по катету AB и гипотенузѣ BC. Къ этому же построенію приводитъ методъ приложенія анализа къ геометріи: полагая $BC = x$, имѣемъ: $\overline{AB}^2 = BC \cdot BD = x(x - DC)$, или $x^2 - DC \cdot x - \overline{AB}^2 = 0$; приведенное выше построеніе есть не что иное, какъ обычное построеніе положительнаго корня этого квадратнаго уравненія. — Самое же построеніе треугольника ABC удобнѣе выполнить такъ: строимъ прямоугольный треугольникъ BAO по катетамъ AB и $AO = \frac{DC}{2}$, продолжаемъ BO на разстояніе $OC = \frac{DC}{2}$ и дѣлаемъ на прямой AO изъ B засѣчку C радіусомъ BC'; треугольникъ ABC есть искомый (здѣсь, для большаго удобства построенія, мы назвали черезъ AB и BC' тѣ соотвѣтственно равные имъ отрѣзки, которые раньше обозначались черезъ BA' и BC). Умѣя теперь строить прямоугольный треугольникъ по катету AB и отрѣзку DC гипотенузы BC, легко рѣшить предложенную задачу методомъ подобія. Данное отношеніе $\frac{m}{n}$ всегда можно предположить выраженнымъ, какъ отношеніе отрѣзковъ m и n; построивъ прямоугольный треугольникъ ABC по катету $AB = m$ и проекціи $DC = n$ другого катета на гипотенузу, откладываемъ на BC въ направленіи BC отрѣзокъ BC', равный данной гипотенузѣ искомаго треугольника; опустивъ изъ C' перпендикуляръ $C'A'$ на BA, получимъ искомый треугольникъ $BC'A'$.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *С. Слугиновъ* (Казань).

№ 184 (5 сер.). *На данной окружности дана точка* A. *Найти построеніемъ другую точку* B *данной окружности такъ, чтобы точка* P, *въ которой пересѣкаются касательныя, проведенныя въ точкахъ* A *и* B, *отстояла отъ прямой* AB *на разстояніе, равное данному отрѣзку* l.

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть O — центръ даннаго круга, и пусть OP пересѣкаетъ хорду AB въ точкѣ C. Такъ какъ прямыя OP и AB перпендикулярны, то $PC = l$. Итакъ, въ прямоугольномъ треугольникѣ OAP извѣстенъ катетъ OA, равный радіусу даннаго круга, а также проекція $PC = l$ другого катета AP на гипотенузу OP, а потому этотъ треугольникъ можно построить способомъ, указаннымъ въ предыдущей задачѣ (№ 178). Построивъ, такимъ образомъ, точку P, проводимъ изъ нея вторую касательную PB; точка B есть искомая. Изъ всего сказаннаго выше вытекаетъ слѣдующее построеніе: строимъ касательную къ данной окружности въ точкѣ A, откладываемъ на ней отрѣзокъ $AO' = \frac{l}{2}$, продолжаемъ OO' на разстояніе $O'P' = \frac{l}{2}$ и дѣлаемъ изъ O засѣчку P радіусомъ OP' на прямой AO'; проведя изъ P вторую касательную PB, получаемъ искомую точку B. Слѣдуетъ замѣтить, что засѣчка P можетъ быть получена на касательной AO' по обѣ стороны A, и каждому изъ этихъ ея положеній P или P_1 отвѣчаетъ одно изъ двухъ возможныхъ положеній B или B_1 искомой точки. Не мѣшаетъ замѣтить, что предложенная задача можетъ быть выражена короче такъ: черезъ точку A данной окружности провести хорду AB, удаленную отъ ея полюса P на разстояніе l.

Б. Двойринъ (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Н. Казариновъ* (Пинега) *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

№ 79 (5 сер.). *Въ окружности* O *данъ діаметръ* AB. *Провести параллельную ему хорду* XY *такъ, чтобы касательная въ* X, *пересѣкая продолженіе діаметра въ точкѣ* Z, *давала отрѣзокъ* XZ, *равный хордѣ* XY.

Предположимъ, что задача рѣшена. Опустивъ изъ центра круга O перпендикуляръ OM на хорду XY и проведя въ точку касанія X касательной XZ радіусъ OX, получимъ прямоугольный треугольникъ OXZ. Опустивъ изъ вершины X прямого угла этого прямоугольнаго треугольника перпендикуляръ XC на гипотенузу ZO, имѣемъ:

$$CO = XM = \frac{XY}{2} = \frac{XZ}{2}, \quad \frac{XZ}{CO} = 2.$$

Такимъ образомъ, въ прямоугольномъ треугольникѣ ZXO извѣстенъ катетъ XO, равный радіусу даннаго круга, и отношеніе катета XZ къ проекціи CO другого катета XO на гипотенузу ZO. Поэтому прямоугольный треугольникъ, равный треугольнику ZXO, можно построить съ помощью метода подобія (ср. рѣшеніе задачи № 178). Для этого строимъ сначала прямоугольный треугольникъ $Z'X'O'$, подобный искомому, въ которомъ отношеніе катета $Z'X'$ къ проекціи $C'O'$ другого катета на гипотенузу $Z'O'$ равно 2, слѣдующимъ образомъ: строимъ прямоугольный треугольникъ $Z'X'N'$ по катетамъ $Z'X' = 2a$ и $X'N = \frac{a}{2}$, продолжаемъ гипотенузу его $Z'N$ на разстояніе $NP = X'N = \frac{a}{2}$ и дѣлаемъ на прямой $X'N$ радіусомъ $Z'P$ засѣчку $Z'O'$; треугольникъ $Z'X'O'$ есть искомый. Отложивъ теперь на прямой $O'X'$ въ направленіи $O'X'$ отрѣзокъ $O'X_1 = r$, гдѣ r — радіусъ даннаго круга, возстановляемъ въ точкѣ X_1 перпендикуляръ къ $O'X_1$ и продолжаемъ его до встрѣчи въ Z_1 съ прямой $O'Z'$. Прямоугольный треугольникъ Z_1X_1O' обладаетъ требуемыми качествами: катетъ его $O'X_1$ равенъ радіусу даннаго круга, и отношеніе другого катета Z_1X_1 къ проекціи C_1O' катета на гипотенузу Z_1O', вслѣдствіе подобія треугольниковъ Z_1X_1O' и $Z'X'O'$, равно 2. Такимъ образомъ, гипотенуза Z_1O' равна разстоянію ZO отъ точки встрѣчи Z искомой касательной XZ съ прямой AB до центра круга O. Итакъ, отложивъ отъ O на прямой AB отрѣзокъ $OZ = O'Z_1$ и построивъ изъ точки Z касательныя ZX и ZX_0, проводимъ черезъ точки X и X_0 хорды XY и X_0Y_0, параллельныя AB; хорды XY и X_0Y_0 суть искомыя

С. Кудинъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Отъ Директора Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній.

1 мая 1910 г. истекаетъ срокъ представленія сочиненій на премію имени К. Д. Ушинскаго. Конкурсу подлежатъ сочиненія рукописныя и печатныя, вышедшія въ свѣтъ не ранѣе 1907 г., принадлежащія къ слѣдующимъ категоріямъ: 1) книги для класснаго чтенія, предназначаемыя для народныхъ школъ, 2) сочиненія по методикѣ предметовъ начальной народной школы, 3) сочиненія обще-педагогическаго характера и 4) сочиненія по исторіи и организаціи женскаго образованія. Размѣръ преміи — 900 р.; премія можетъ быть раздѣлена на двѣ — въ 600 р. и 300 р. Рукописныя и печатныя произведенія (послѣднія въ количествѣ 5 экз.) слѣдуетъ представлять въ Учебно-воспитательный Комитетъ Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній (С.-Петербургъ, Фонтанка, 10).

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается БЕЗПЛАТНО по первому требованію.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1908-9 г.

40-ый семестръ.

Проф. *А. Клоссовскій.* Магнитная съемка Россіи.—*Анри Пуанкарэ.* Будущее математики.—*Дж. Томсонъ.* Корпускулярная теорія матеріи.—*К. Щербина.* Математика въ русской средней школѣ.—Проф. *А. Слаби.* Резонансъ и угасаніе электрическихъ волнъ.—*Б. Цомакіонъ.* Опредѣленіе поверхности и объема шара, какъ предѣловъ поверхностей и объемовъ многогранниковъ.—Проф. *Г. Бруни.* Твердые растворы—*Дм. Ефремовъ.* Нѣкоторыя свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени.—*А. Турчаниновъ.* Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.—*А. Филипповъ.* По поводу „дѣленія безъ дѣленія и вычитанія"—*Л. Гюнтеръ.* Опредѣленіе разстояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксовъ въ прежнія времена и теперь.—Прив.-доц. *В. Лермантовъ.* Постановка приготовленія учителей физики въ Германіи.—*И. Точидловскій.* Новѣйшіе успѣхи наблюдательной актинометріи.—*І. Лемуанъ.* Простое изложеніе ученія о всемірномъ тяготѣніи и о вычисленіи массъ въ солнечной системѣ.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ.* Лекціи по ариѳметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай.* Благородные и радіоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ.* О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби.* Безпроволочный телефонъ.—*А. Филипповъ.* О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ.* Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкарэ.* Математическое творчество.—*П. Зееманъ.* Происхожденіе цвѣтовъ спектра.—*В. Гернетъ.* Объ единствѣ вещества.—*С. Ньюкомъ.* Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ.* Линейные спектры и строеніе атомовъ.—*А. Кирилловъ.* Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри.* Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннэи.* О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель.* Методъ работы Пуанкарэ.—Литература великой теоремы Фермата.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики".**