№ 507.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIII-го Семестра № 3-й.

http://vofem.ru

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

14-й годъ изданія.

Открыта подписка на 1910 г.

на единственное въ Россіи литературное художественное иллюстрированное изданіе.

„Новый журналъ Литературы, Искусства и Науки"

(бывш. Ѳ. И. Бугакова ред. газ. „Новое Время").

Новый журналъ печатаетъ все выдающееся, оригинальное и характерное, почерпая свое содержаніе изъ этого фонда міровой культуры, ея идей и стремленій, который долженъ быть предметомъ любознательности для всѣхъ мыслящихъ и интеллигентныхъ людей.

ПРОГРАММА: 1) Произведенія знаменит. писателей съ древн. и новыхъ языковъ и иллюстрацій.—2) Новѣйш. произведенія лучш. иностр. писателей, съ рисунк.—3) Статьи по иностр. источникамъ, историческія, популярно-научн.—4) Статьи по вопросамъ литературн., обществен., нравствен. и художествен.—5) Статьи по воздухоплаванію, съ рисунк. и чертеж.—6) Статьи по гипнотизму, магнетизму, спиритизму, окультизму и факиризму.—7) Историческія мемуары.—8) Характеристика писателей, художник. и мыслителей.—9) Критика, хроника и обзоръ.—10) Иностранное обозрѣніе.—11) Новости.—12) Приложенія.

Подписчики новаго журн. получатъ въ теченіи года:

12 книгъ ежемѣсячнаго литературнаго, художественнаго журнала, со множествомъ рисунковъ, большого формата in 8°, отпечатаннаго въ художественной типографіи на плотной глазированной бумагѣ четкимъ шрифтомъ.

12 книгъ новѣйш. произвед. слѣд. авторовъ: Поль Бурже, Жюль Кларети, Октавъ Мирбо, Анатоль Франсъ, Жоржъ Оне, Артуръ Шницлеръ, Шоломъ Ашъ, Г. Уэльсъ, Оскаръ Уальдъ, Гемфри Уордъ, П. Бенсонъ, Перси Уайтъ.

Подписавшіеся и уплатившіе годовую цѣну журнала до 30 декабря 1909 г. получатъ безплатно новое художественное изданіе

со множествомъ иллюстрацій и рисунковъ

Премія ЗАМОКЪ НЕУШВАНШТЕЙНЪ Премія

Баварскаго короля Людовика II.

Подписная цѣна съ доставк. и пересыл. 6 р.

Подписка принимается въ ред. „Новый Журн. Литературы, Искусства и Науки".

С.-Петербургъ, М.-Царскосельскій пр., 36.

Издатель-редакторъ *С. Д. Новиковъ.*

http://volm.ru

XLIII Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 507.

Что такое алгебра?

Прив.-доц. В. Кагана.

(Окончаніе).*

Мы собственно уже отвѣтили на вопросъ, что такое алгебра. Мы хотимъ еще указать, отчего такъ трудно точно провести границу между ариѳметикой и алгеброй.

Мы приводили уже выше выдержку изъ „Универсальной Ариѳметики“ Ньютона, которая оканчивается словами: „Ариѳметика же оказываетъ алгебрѣ во всѣхъ ея вычисленіяхъ такое содѣйствіе, что онѣ образуютъ вмѣстѣ какъ бы одну науку о вычисленіяхъ“. Оно и ясно: ариѳметика даетъ алгебрѣ весь числовой матеріалъ, которымъ послѣдняя оперируетъ. Эта связь есть связь ствола съ корнемъ; и хотя всякій ботаникъ отличаетъ стволъ отъ корня, но точно обвести линію, на которой кончаются корни и начинается стволъ, онъ никогда не можетъ. Но здѣсь эту границу отмежевать еще тѣмъ труднѣе, что алгебра срослась съ ариѳметикой не только снизу, но и сверху.

Мы указывали уже въ началѣ статьи (см. стр. 226 предыдущаго семестра), что въ ариѳметикѣ еще въ древности выдѣлились задачи,

*) См. № 503- 504 „Вѣстника“.

относящіяся не къ счисленію (хотя бы даже въ широкомъ значеніи этого слова), а къ изученію ариѳметическаго состава числа: условія дѣлимости,— условія, при которыхъ данное число оказывается простымъ,— разысканіе простыхъ чиселъ,— свойства чиселъ, зависящія отъ разложенія его на простыхъ множителей и т. д. Многіе вопросы, относящіеся къ этой области, еще по настоящее время остаются открытыми; другіе рѣшались спорадически и потребовали величайшихъ усилій со стороны первоклассныхъ геометровъ. Но послѣ трудовъ *Ферма*, *Эйлера*, *Лежандра*, *Лагранжа* эти вопросы обособились въ особую дисциплину, которую стали называть *высшей ариѳметикой* или *теоріей чиселъ*. Эта дисциплина примыкала въ то же время къ алгебрѣ, такъ какъ задача о рѣшеніи неопредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій въ цѣлыхъ и раціональныхъ числахъ служила не только примѣненіемъ добытыхъ въ теоріи чиселъ результатовъ, но канвой, на которой она размоталась, а потомъ и главнымъ ея содержаніемъ.

Но этого мало. Алгебраическія функціи даютъ основаніе для выдѣленія нѣкоторыхъ особыхъ категорій чиселъ, подлежащихъ снова ариѳметическому изслѣдованію. Такъ мы уже указали выше, что числа, служащія корнями цѣлыхъ алгебраическихъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами, называются *алгебраическими числами*. Эти алгебраическія числа представляютъ собой *числовой корпусъ*; это значитъ, что сумма, разность, произведеніе, частное двухъ алгебраическихъ чиселъ (за исключеніемъ случая дѣленія на нуль) всегда представляютъ собой алгебраическія же числа. Мы получаемъ, такимъ образомъ, новую категорію чиселъ; вѣрнѣе, изъ всей совокупности комплексныхъ чиселъ выдѣляется замкнутая въ себѣ категорія ихъ. По отношенію къ этимъ числамъ возникаютъ тѣ же задачи, которыя ариѳметика разрѣшаетъ относительно всевозможныхъ другихъ категорій чиселъ. Особенный интересъ представляютъ такъ называемыя *цѣлыя алгебраическія числа*. Такъ называются алгебраическія числа, служащія корнями такихъ цѣлыхъ алгебраическихъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами, въ которыхъ старшій коэффиціентъ есть 1. Эти цѣлыя алгебраическія числа во многихъ отношеніяхъ представляютъ собой аналогію съ обыкновенными цѣлыми числами; такъ сумма, разность и произведеніе цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ есть цѣлое алгебраическое число; но особенно глубока аналогія между ученіемъ о дѣлимости обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ и цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ. Относящіяся сюда изслѣдованія составляютъ въ настоящее время такъ называемую *высшую теорію чиселъ**). По предмету изслѣдованія эта дисциплина имѣетъ чисто ариѳметическій характеръ. Но такъ какъ числа, надъ которыми она оперируетъ, суть корни алге-

---

*) Пользуемся настоящимъ случаемъ, чтобы указать на вышедшее не такъ давно небольшое, но очень цѣнное сочиненіе, содержащее прекрасный очеркъ современной теоріи чиселъ (низшей и высшей). P. *Bachmann*. „Grundlehren der neueren Zahlentheorie“ (Sammlung Schubert, LIII). Leipzig, 1907. Не слѣдуетъ только смѣшивать этого сочиненія съ другими сочиненіями того же автора, довольно сходными по заглавію.

браическихъ функцій, то путь изслѣдованія лежитъ черезъ алгебру. Здѣсь ариѳметика срослась съ алгеброй въ такой мѣрѣ, что трудно сказать, которой изъ этихъ двухъ дисциплинъ принадлежитъ относящійся сюда матеріалъ.

Мы резюмируемъ теперь результаты, къ которымъ мы пришли въ опредѣленіи алгебры.

Математика, вся вообще, представляетъ собой одно неразрывное цѣлое, различныя части котораго многообразно, съ различныхъ сторонъ связаны одна съ другой. Точное разграниченіе здѣсь невозможно; въ частности, нельзя, провести демаркаціонной линіи, которая совершенно строго отдѣляла бы алгебру отъ ариѳметики, алгебру отъ высшаго анализа. Можно дать только общую, научно наиболѣе цѣлесообразную схему, по которой въ настоящее время обычно группируется богатый накопляемый здѣсь матеріалъ. Эта схема сводится къ тому, что ариѳметика есть наука о числахъ и о дѣйствіяхъ, надъ ними производимыхъ; она охватываетъ всѣ возможныя числа — цѣлыя и дробныя, раціональныя и ирраціональныя, вещественныя и мнимыя, а въ высшемъ своемъ развитіи — заимствованныя уже изъ алгебры алгебраическія числа; она раздѣляется на низшую и высшую ариѳметику; послѣдней присвоено также названіе теоріи чиселъ. Къ низшей ариѳметикѣ относятся элементарныя свойства четырехъ дѣйствій надъ различнаго рода числами, различныя преобразованія, которыя допускаютъ результаты этихъ дѣйствій, методы точнаго и приближеннаго ихъ выполненія. Къ высшей ариѳметикѣ, или теоріи чиселъ, отходятъ тѣ вопросы, которые проистекаютъ, главнымъ образомъ, изъ ученія о дѣлимости и о разложеніи числа на множителей; самые методы рѣшенія этихъ вопросовъ приводятъ ариѳметику въ тѣсную связь съ алгеброй.

Ариѳметика даетъ числовой матеріалъ, которымъ пользуется высшій математическій анализъ. Онъ изучаетъ перемѣнныя величины, способныя принимать различныя численныя значенія, и изслѣдуетъ зависимости между этими величинами — функціи. Изслѣдованія обширнаго, чтобы не сказать безконечнаго, матеріала, къ которому мы приходимъ при изученіи разнообразныхъ функцій, приводятъ, однако, къ необходимости, въ первую очередь, изучить нѣкоторыя простѣйшія функціи, значенія которыхъ получаются изъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ путемъ производства надъ ними раціональныхъ дѣйствій и умноженія ихъ на постоянныя количества. Эти функціи называются цѣлыми алгебраическими функціями. Опредѣленіе тѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, при которыхъ эти функціи принимаютъ заданныя значенія, приводитъ къ наиболѣе общему понятію объ алгебраической функціи. **Изученіе алгебраическихъ функцій составляетъ предметъ алгебры.** Въ первую очередь алгебра изучаетъ цѣлыя алгебраическія функціи. Первая и главная задача, которая здѣсь возникаетъ, заключается въ рѣшеніи вопроса, способна ли такого рода функція принимать напередъ заданныя значенія, и, если способна, то при какихъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ это имѣетъ мѣсто. Это приводитъ къ понятію объ алгебраическомъ уравненіи, рѣшеніе которыхъ обнимаетъ наиболѣе значительную часть алгебры. Элементарная алгебра разсматриваетъ наиболѣе простыя алгебраическія функціи, — именно, доводитъ до конца только изученіе функцій первой и второй степени.

Алгебра въ корнѣ своемъ, какъ и весь математическій анализъ, опирается на ариѳметику. Но и въ высшемъ своемъ развитіи она сростается съ высшими отдѣлами теоріи въ одно цѣлое.

Однако, насколько такая точка зрѣнія можетъ быть признана господствующей въ настоящее время въ наукѣ? Мы уже имѣли случай сказать выше, что наиболѣе авторитетнымъ органомъ, призваннымъ такого рода вопросы рѣшать, является выходящая въ настоящее время въ Лейпцигѣ „Энциклопедія математическихъ наукъ". Это обширное изданіе составляется наиболѣе выдающимися математиками всего міра и несомнѣнно отражаетъ господствующіе въ настоящій моментъ взгляды. Первый томъ этого изданія законченъ уже нѣсколько лѣтъ тому назадъ и носитъ общее заглавіе „Ариѳметика и Алгебра". Однако, какъ указано въ предисловіи, къ этому тому было признано цѣлесообразнымъ отнести нѣкоторыя дисциплины, не связанныя съ алгеброй непосредственно, но наиболѣе эксплуатирующія ея пріемы (теорія конечныхъ разностей, теорія вѣроятностей, математическія игры). Но это суть дополненія, основную же книгу составляютъ первые три отдѣла: A. Ариѳметика; B. Алгебра; C. Теорія чиселъ. Познакомимся нѣсколько поближе съ планомъ, по которому написаны эти три отдѣла.

Ариѳметика раздѣлена на шесть главъ.

Первую главу составляютъ „Основанія ариѳметики". Сюда отнесено: 1. Счетъ и число. 2. Сложеніе. 3. Вычитаніе. 4. Соединеніе сложенія съ вычитаніемъ. 5. Нуль. 6. Отрицательныя числа. 7. Умноженіе. 8. Дѣленіе. 9. Соединеніе дѣленія со сложеніемъ, вычитаніемъ и умноженіемъ. 10. Дроби. 11. Три дѣйствія третьей ступени (подъ первой ступенью разумѣютъ сложеніе и вычитаніе; подъ второй — умноженіе и дѣленіе; подъ третьей — возвышеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе).

Вторую главу составляетъ комбинаторика, т. е. ученіе о комбинаціяхъ или о соединеніяхъ въ обширномъ значеніи этого слова. Сюда отнесены и опредѣлители, какъ извѣстныя схемы ариѳметическихъ операцій, выполняющихся, главнымъ образомъ, путемъ примѣненія правилъ комбинаторики.

Третью главу составляетъ ученіе объ ирраціональныхъ числахъ. Самая идея объ ирраціональныхъ числахъ возникла на почвѣ безконечныхъ процессовъ. Въ этой главѣ нашли себѣ мѣсто поэтому безконечныя формы: безконечные ряды, произведенія, непрерывныя дроби, даже безконечные опредѣлители.

Четвертую главу составляетъ ученіе о комплексныхъ числахъ и не только простыхъ комплексныхъ числахъ, но и высшихъ, составленныхъ изъ произвольнаго числа независимыхъ единицъ.

Пятую главу составляетъ ученіе о комплексахъ чиселъ (Mengenlehre),—дисциплина, созданная, можно сказать, Канторомъ и играющая въ настоящее время капитальную роль въ дѣлѣ построенія и развитія понятія о числѣ.

Наконецъ, шестую главу образуетъ ученіе о конечныхъ дискретныхъ группахъ.

Второй отдѣлъ (B) составляетъ Алгебра. Она раздѣлена на три главныя части. Первая часть посвящена общимъ свойствамъ цѣлыхъ алгебраическихъ функцій, зависящихъ отъ одной и отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ; вторая (небольшая) часть посвящена теоріи инваріантовъ, образующей такъ называемую „новую алгебру“ и играющей столь важную роль въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ отдѣлахъ (напримѣръ, въ теоріи формъ). Наконецъ, третья часть посвящена различнымъ методамъ опредѣленія и оцѣнки корней цѣлыхъ функцій.

Точка зрѣнія, на которой стоятъ редакторы „Энциклопедіи“, достаточно выяснена этимъ перечнемъ. Мы можемъ, очевидно, утверждать, что мы изложили не свой субъективный взглядъ на алгебру, а господствующее въ настоящее время въ наукѣ воззрѣніе на этотъ предметъ.

Но мы не хотѣли бы ограничиться одной научной формулировкой опредѣленія; мы хотимъ еще удѣлить нѣсколько словъ тому, какъ быть съ этимъ опредѣленіемъ преподавателю, что ему сказать юношамъ въ школѣ.

Мы уже упоминали въ самомъ началѣ статьи, что съ вопросомъ о томъ, что такое алгебра, преподаватель въ средней школѣ встрѣчается дважды: одинъ разъ въ третьемъ классѣ, въ самомъ началѣ преподаванія алгебры, а другой разъ въ восьмомъ классѣ — при повтореніи курса.

Нужно ли, приступая къ преподаванію алгебры, давать опредѣленіе этой науки? Вообще короткая формула, передающая въ немногихъ словахъ содержаніе цѣлой науки, можетъ нѣчто говорить только тому, кто эту науку уже знаетъ; и все значеніе такого опредѣленія сводится, въ сущности, къ тому, что оно выясняетъ мѣсто, занимаемое опредѣляемой дисциплиной въ общей системѣ математическаго знанія. Что можетъ сказать такое опредѣленіе ребенку, который еще не имѣетъ понятія о томъ, что такое математика? Мы полагаемъ, что такого рода опредѣленіе на этой ступени обученія совершенно безполезно, и преподаватель, по собственной иниціативѣ, во всякомъ случаѣ никакого опредѣленія алгебры давать не долженъ. Правда, онъ врядъ ли избѣжитъ такого вопроса со стороны учениковъ. Но отвѣтить на такой вопросъ содержательно, отвѣтить такъ, чтобы у ученика дѣйствительно составилось нѣкоторое представленіе о той наукѣ, которую онъ начинаетъ изучать, врядъ ли возможно. И даже когда ученикамъ сообщаютъ наиболѣе простое опредѣленіе, что алгебра „обобщаетъ и упрощаетъ“ методы ариѳметики, то у ребенка, не знающаго въ чемъ это „обобщеніе и упрощеніе“ заключается, отъ этого опредѣленія не остается ничего, кромѣ фразы. Правда, преподаватель обыкновенно сейчасъ же старается выяснить сущность алгебраическаго обобщенія и приводитъ для этого простыя задачи, которыя онъ переводитъ затѣмъ на буквенныя обозначенія и рѣшаетъ въ общемъ видѣ. Но, не располагая еще возможностью справиться со сколько-нибудь сложной формулой, преподаватель бываетъ вынужденъ ограничиваться настолько простыми задачами, что ученикъ недоумѣваетъ, къ чему нужны „обобщенія и упрощенія" при рѣшеніи такихъ пустяковъ. Кто не знаетъ обычнаго въ третьемъ классѣ вопроса: „что же получится, когда мы сложимъ a и b?" — и того разочарованія, когда ученикъ узнаетъ, что это будетъ $a+b$. Нужно много времени, чтобы ученикъ понялъ, что это явное выраженіе результата можетъ имѣть свои часто совершенно незамѣнимыя преимущества, чтобы онъ усвоилъ себѣ тѣ методы алгебры, которыя дѣйствительно даютъ существенныя упрощенія при рѣшеніи тѣхъ или иныхъ задачъ.

Итакъ, на нашъ взглядъ, приступая къ преподаванію алгебры, не нужно вовсе давать опредѣленія этой науки; на поставленный же ученикомъ вопросъ нужно стараться сказать имъ по возможности меньше такого, что придется потомъ брать назадъ. Пишущій эти строки обыкновенно только указываетъ ученикамъ, что при изученіи ариѳметики имъ сначала предлагали такія задачи, которыя безъ затрудненія прямо приводились къ выполненію въ томъ или иномъ порядкѣ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій по самому значенію таковыхъ; что имъ затѣмъ давали задачи болѣе серьезныя, для рѣшенія каковыхъ имъ сообщались общія правила (напримѣръ, правила дѣленія числа на пропорціональныя части, которыя въ простѣйшихъ случаяхъ разбираются уже въ первыхъ классахъ, правило нахожденія чиселъ по ихъ суммамъ и разности и т. д.); что задачи болѣе сложныя требуютъ болѣе глубокихъ средствъ какъ для ихъ рѣшенія, такъ и для выраженія общихъ правилъ ихъ рѣшенія; что только тогда, когда они познакомятся съ этими новыми средствами и усвоятъ ихъ, имъ можно будетъ выяснить значеніе алгебры.

Совершенно иначе обстоитъ дѣло въ выпускномъ классѣ. Здѣсь мы имѣемъ уже дѣло съ юношами, освоившимися съ матеріаломъ элементарной алгебры, и самая задача преподаванія различныхъ отдѣловъ математики въ этомъ классѣ въ томъ именно и заключается, чтобы оттѣнить идеи, въ эти дисциплины вложенныя. Какой бы вопросъ преподаватель ни разбиралъ въ этомъ классѣ, его задача, на нашъ взглядъ, заключается въ томъ, чтобы возможно ближе подойти къ строго научной постановкѣ вопроса. Поэтому, чтобы отвѣтить на вопросъ, какъ долженъ преподаватель въ выпускномъ классѣ опредѣлить алгебру, нужно прежде всего спросить себя, нельзя ли дать то научное опредѣленіе, которое изложено выше.

Какая подготовка для этого необходима? Ученикъ прежде всего долженъ ясно владѣть понятіемъ о функціи. Извѣстно, что въ Германіи уже въ теченіе 10 лѣтъ интенсивно обсуждается вопросъ о значительной реформѣ въ дѣлѣ преподаванія элементарной математики. Иниціаторомъ этого движенія является извѣстный профессоръ Гёттингенскаго университета Ф. Клейнъ, благодаря энергіи и вліянію котораго движеніе приняло очень широкія размѣры и въ настоящее время распространилось далеко за предѣлы Германіи. Сущность того, что предлагалъ Клейнъ, сводится, собственно, къ тому, чтобы ввести въ среднюю школу важнѣйшія начала высшаго анализа. Однако, по выясненіи фактическихъ условій возможности осуществленія такой реформы, Клейнъ и его послѣдователи вынуждены были отказаться отъ такой широкой реформы, на какой они настаивали вначалѣ, но зато они съ особенной настойчивостью требуютъ, чтобы весь ходъ преподаванія былъ приноровленъ къ запросамъ высшей математики. При этомъ главная задача преподавателя должна заключаться въ томъ, чтобы ученики съ полною ясностью усвоили понятіе о функціи. Это понятіе должно, по идеѣ реформаторовъ, проникать всю программу преподаванія математики, и преподаватель не долженъ никогда упускать случая выяснить его.

Здѣсь не мѣсто, конечно, входить въ разборъ тенденцій этого движенія — это слишкомъ сложное дѣло; мы разсчитываемъ имѣть возможность въ недалекомъ будущемъ помѣстить объ этомъ подробную статью на страницахъ нашего журнала. Но что понятіе о функціи, играющее такую важную роль, тѣмъ не менѣе настолько элементарно, что должно быть вполнѣ выяснено учащимся въ средней школѣ,— это представляется намъ не подлежащимъ спору. Да это и дѣлается обыкновенно въ средней школѣ хотя бы на урокахъ тригонометріи, и нѣтъ такихъ основаній не пользоваться этимъ понятіемъ въ алгебрѣ и геометріи. Если же понятіе о функціи выяснено, то мы не видимъ никакихъ препятствій къ тому, чтобы дать ученикамъ то опредѣленіе, которое изложено выше; все это очень элементарно, и, можетъ быть, только самое изложеніе, предназначенное для учениковъ, должно быть нѣсколько тщательнѣе приспособлено къ уровню ихъ пониманія; но мы полагаемъ, что это очень легко сдѣлать.

Мы полагаемъ поэтому, что въ выпускномъ классѣ при повтореніи курса алгебры ученикамъ должно быть дано научное опредѣленіе этой дисциплины; имъ должно быть выяснено мѣсто, занимаемое ею въ системѣ математическаго знанія.

Марсъ и Сатурнъ.

И. Мессершмита.

За послѣднее время изъ всѣхъ планетъ солнечной системы Марсъ и Сатурнъ привлекаютъ къ себѣ наибольшее вниманіе. Особенный интересъ возбуждаетъ Марсъ, уже тридцать лѣтъ представлящій собой предметъ научныхъ споровъ, за которыми съ живѣйшимъ участіемъ слѣдятъ не только въ ученыхъ кругахъ, но и среди широкой публики.

http://vofem.ru

Этотъ интересъ съ теченіемъ времени не только не остываетъ, но скорѣе усиливается. Споръ ведется съ такимъ ожесточеніемъ, которое вполнѣ подходитъ къ воинственному имени планеты, хотя въ данномъ случаѣ противники не оглашаютъ воздуха бряцаніемъ мечей и сражаются лишь духовнымъ оружіемъ.

Даже невооруженный глазъ отличаетъ планету Марсъ между всѣми свѣтилами звѣзднаго неба: звѣзды, большей частью, имѣютъ бѣлый цвѣтъ или слегка лишь окрашены въ красноватый или синеватый цвѣтъ, тогда какъ Марсъ имѣетъ ярко выраженную красно-желтую окраску; къ тому же онъ временами превосходитъ своею яркостью всѣ другія свѣтила: поэтому онъ привлекаетъ къ себѣ вниманіе даже мимолетнаго наблюдателя.

Но окраска планеты не является единственнымъ замѣчательнымъ отличіемъ ея отъ другихъ звѣздъ и планетъ. Не въ первый разъ также эта планета играетъ въ астрономіи особенную роль. Въ свое время именно эта планета оказала рѣшающее вліяніе въ пользу признанія системы Коперника, и такимъ образомъ содѣйствовала основанію современной теоретической астрономіи. Дѣйствительно, превосходныя наблюденія знаменитаго датчанина Тихо Браге, послѣдняго и вмѣстѣ съ тѣмъ величайшаго наблюдателя эпохи, предшествовавшей изобрѣтенію телескопа, дали возможность Кеплеру установить знаменитые законы, носящіе его имя. Согласно первому изъ этихъ законовъ, планеты, какъ извѣстно, движутся по эллипсамъ вокругъ солнца; но въ то время этотъ фактъ можно было установить лишь благодаря тому обстоятельству, что орбита планеты Марсъ весьма замѣтно отличается отъ окружности, тогда какъ въ другихъ планетахъ, за исключеніемъ Меркурія, соотвѣтствующее отличіе не столь ясно выражено. О трудностяхъ, которыя Кеплеру пришлось преодолѣть при этомъ, можно судить по тому обстоятельству, что надъ разработкой наблюденій и установленіемъ своихъ законовъ Кеплеръ работалъ отъ 1602 года до 1609 года, т. е. цѣлыхъ семь лѣтъ. Характерны также слова Кеплера въ предисловіи къ „Astronomia nova", въ посвященіи этого труда императору Рудольфу II: „Астрономы не знали, какъ побѣдить этого бога войны, но превосходный полководецъ Тихо за двадцать лѣтъ ночныхъ бодрствованій раскрылъ его военныя хитрости, и я при помощи бѣга матери земли обошелъ всѣ его кривые пути*)".

Овальный путь планеты легко объясняетъ намъ также обнаруживаемое планетой правильное измѣненіе яркости свѣта, заключающееся въ томъ, что планета не представляется одинаково яркой, и что величина ея въ телескопѣ не бываетъ одинакова каждый годъ во время противостоянія, т. е. въ то время, когда она находится какъ разъ противъ солнца. Въ самомъ дѣлѣ, если планета въ это время находится въ афеліи, т. е. въ наибольшемъ разстояніи отъ солнца, то

*) Послѣдними словами Кеплеръ указываетъ на то обстоятельство, что онъ дѣлалъ свои вычисленія, исходя изъ предположенія, что земля движется вокругъ солнца.

величина и яркость ея представляются наименьшими; когда она находится въ то время въ наименьшемъ разстоянiи отъ солнца, то она кажется особенно большой и яркой. Такъ какъ при различныхъ позицiяхъ разстоянiе планеты отъ земли колеблется между 54 и 96 миллiонами *км.*, то это измѣненiе и обусловленное имъ измѣненiе кажущейся виличины Марсова диска имѣетъ очень большое значенiе для наблюденiй поверхности планеты. Время оборота Марса вокругъ солнца составляетъ 1 годъ 322 дня; вмѣстѣ съ тѣмъ всякая конфигурацiя солнца, земли и Марса повторяется періодически каждые 15-16 лѣтъ, и эта перiодичность въ извѣстной степени отражается также на изученiи Марса. Послѣднiя наиболѣе благопрiятныя противостоянiя были въ 1876 г. и 1892 г.; за ними слѣдуютъ противостоянiя 1907 г. и 1908 года.

Уже вскорѣ послѣ изобрѣтенiя телескопа въ 17 столѣтiи голландецъ Гюйгенсъ замѣтилъ на дискѣ Марса нѣкоторыя пятна; особенно выдѣлялись своимъ бѣлымъ цвѣтомъ пятна у полюсовъ. Но до семидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтiя знакомство съ строенiемъ поверхности Марса сравнительно очень мало подвинулось впередъ, и можно съ нѣкоторымъ правомъ утверждать, что въ отношенiи физическаго строенiя планета была открыта лишь миланскимъ астрономомъ Скiапарелли (исключенiе составляютъ работы астронома Кайзера). Скiапарелли имѣлъ въ своемъ распоряженiи чрезвычайно подходящiй телескопъ, и, кромѣ того, ему благопрiятствовало ясное южное небо; ему удалось уже въ первомъ году наблюденiй надъ Марсомъ, т. е. въ 1876 г., составить южную карту планеты, которую онъ въ теченiе послѣдующихъ лѣтъ подвергалъ дальнѣйшему усовершенствованiю.

Согласно его наблюденiямъ поверхность Марса покрыта пятнами, большей частью, свѣтло-желтаго цвѣта, черезъ которыя тянутся болѣе темныя линiи. Первыя онъ назвалъ материками и островами, послѣднiя — каналами; кромѣ того, онъ отмѣтилъ еще рядъ темныхъ мѣстъ, которыя онъ назвалъ озерами и морями, хотя этимъ названiемъ онъ не имѣлъ въ виду высказать сужденiе о дѣйствительномъ значенiи этихъ образованiй. Но въ общемъ можно принять, что эти обозначенiя соотвѣтствуютъ дѣйствительности, такъ что распредѣленiе воды и суши на Марсѣ совершенно отличается отъ распредѣленiя ихъ на земномъ шарѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, большая часть поверхности земного шара покрыта водой; на немъ находятся лишь два большихъ комплекса суши; напротивъ, на поверхности Марса преобладаетъ суша. Она изрыта множествомъ каналовъ, замѣчательныхъ своимъ прямолинейнымъ геометрическимъ видомъ и правильностью своей формы. Такiе правильные ряды линiй имѣются на землѣ лишь въ незначительномъ количествѣ и въ слабо выраженномъ видѣ. Нѣкоторые черные хребты, какъ Анды и Уральскiя горы, или нѣкоторыя моря и озера, какъ Красное море и Танганайка, или еще нѣсколько группъ островов въ родѣ Вестъ-Индскихъ, Зондскихъ и Алеутскихъ, должны представляться отдаленному зрителю въ видѣ рядовъ линiй; но напрасно мы будемъ искать на землѣ сѣть съ такими малыми петлями и геометрически правильными линіями, какую мы видимъ на Марсѣ.

Еще болѣе загадочнымъ является расщепленіе такъ называемыхъ каналовъ надвое; оно было открыто впервые Скіапарелли въ 1881 г. и послѣ того было подтверждено другими астрономами. Ширина промежуточнаго пространства при этомъ расщепленіи неодинакова въ различныхъ каналахъ, но геометрическая правильность почти нигдѣ не нарушается. Это явленіе не обнаруживаетъ закономѣрности въ отношеніи направленія и положенія на поверхности, но въ связи съ положеніемъ Марса по отношенію къ землѣ оно зависитъ отъ соотвѣтствующаго положенія Марса на орбитѣ и, слѣдовательно, отъ временъ года.

Пока еще не удалось найти удовлетворительнаго разрѣшенія этой загадки, что и не удивительно при столь большомъ разстояніи Марса отъ земли и малыхъ размѣрахъ разсматриваемаго объекта: на такомъ разстояніи мы не могли бы съ нашими приборами съ увѣренностью различить даже такіе города, какъ Мюнхенъ, Берлинъ или Лондонъ. Поэтому одни изслѣдователи не сомнѣваются въ полной реальности описанныхъ объектовъ, тогда какъ, по мнѣнію другихъ, мы здѣсь имѣемъ дѣло въ значительной степени съ оптическими обманами, явленіями интерференціи и т. п.

Въ послѣднее время изслѣдованіе предполагаемыхъ въ данномъ случаѣ оптическихъ обмановъ привлекло особое вниманіе ученыхъ. Ивэнсъ (I. E. Evans) и Маундеръ (E. W. Maunder) произвели рядъ опытовъ, которые дѣйствительно доказываютъ возможность подобныхъ оптическихъ обмановъ. Они изготовили нѣсколько картонныхъ дисковъ различной величины, на которыхъ были изображены важнѣйшіе континенты Марса, каналы же не были представлены. Довольно большому числу мальчиковъ въ возрастѣ отъ 12 до 14 лѣтъ, не знавшихъ, въ чемъ дѣло, предложено было срисовать эти изображенія съ разстоянія, въ которомъ нельзя было явственно видѣть ихъ; большинство увидѣло и изобразило рядъ „каналовъ“, которые за однимъ лишь исключеніемъ имѣли такое же направленіе, какъ и каналы, наблюдаемые съ помощью телескопа. Мы должны, впрочемъ, тутъ же замѣтить, что не всякому удается видѣть эти кажущіеся каналы на полученныхъ рисункахъ.

Какъ ни интересенъ этотъ экспериментъ, не слѣдуетъ, однако, забывать, что условія при опытахъ и въ природѣ не настолько однородны, чтобы эти опыты можно было считать прямымъ и строгимъ доказательствомъ. Во всякомъ случаѣ не всѣ „каналы“, видѣнные астрономами Скіапарелли, Ловелломъ и другими, сводятся къ обману зрѣнія. Противъ этого свидѣтельствуютъ наблюдавшіяся измѣненія цвѣта каналовъ и ихъ различные размѣры; еще важнѣе то обстоятельство, что недавно Лэмплэнду (Lampland), а послѣ него и нѣкоторымъ другимъ астрономамъ удалось получить фотографическіе снимки, на которыхъ тоже оказалось нѣкоторое число каналовъ, и при томъ такихъ же самыхъ, какъ и на рисункахъ, изготовленныхъ отъ руки при одновременномъ наблюденіи. На фотографическихъ снимкахъ можно было также замѣтить и раздвоеніе каналовъ. Конечно, эти фотографическіе снимки весьма малы, и потому изслѣдованіе ихъ сопряжено съ трудностями: они имѣютъ въ діаметрѣ лишь нѣсколько миллиметровъ, и даже во время послѣдняго благопріятнаго противостоянія діаметръ не на много превысилъ одинъ сантиметръ. Поэтому такія линіи каналовъ можно съ достовѣрностью различить лишь въ оригиналахъ; въ обыкновенныхъ же копіяхъ присутствія ихъ нельзя съ увѣренностью констатировать.

Ясно, что фотографія не оставляетъ сомнѣнія въ реальности ряда прямыхъ линій на Марсѣ. Но изъ этого еще не слѣдуетъ, что эти линіи представляютъ собой каналы въ нашемъ смыслѣ слова; весьма возможно и вѣроятно, что они представляютъ собой рядъ отдѣльныхъ слѣдующихъ другъ за другомъ образованій, которыхъ наше зрѣніе не можетъ отдѣлить одно отъ другого, подобно аналогичнымъ образованіямъ на земной поверхности, о которыхъ мы упомянули выше.

Итакъ, для объясненія этого явленія нѣтъ основанія идти такъ далеко, какъ нѣкоторые изслѣдователи Марса, которые предполагаютъ, что каналы суть искусственныя сооруженія: назначеніе ихъ состоитъ будто бы въ томъ, что они проводятъ жидкость, тающую въ лѣтнія мѣсяцы на полюсахъ,— скажемъ короче, тающія воды — къ экватору, благодаря чему тамъ произрастаетъ пышная растительность (фактъ таянія на полюсахъ доказывается уменьшеніемъ такъ называемыхъ бѣлыхъ полярныхъ покрововъ). Но такія гигантскія сооруженія вызываютъ наше скептическое отношеніе, хотя бы вслѣдствіе огромныхъ протяженій этихъ каналовъ; большинство ихъ тянется на 1000 *км.* и болѣе, а нѣкоторые имѣютъ въ длину болѣе 500 *км.* (разстояніе Парижъ — Берлинъ равно около 1000 *км.*). Къ этому присоединяется чрезвычайная ширина каналовъ, которая не бываетъ меньше 30 *км.*, а въ бо́льшихъ „каналахъ“ доходитъ до 300 *км.* Впрочемъ, если стать на точку зрѣнія сторонниковъ „каналовъ“, нѣтъ необходимости представлять себѣ, что каналы представляютъ собой широкую равномѣрно вырытую водяную канаву. Напротивъ, если они въ самомъ дѣлѣ сооружены разумными существами, то прежде всего въ цѣляхъ орошенія; но для этой цѣли можетъ служить сѣть длинныхъ узкихъ каналовъ съ боковыми отвѣтвленіями; лишь вслѣдствіе своей чрезвычайной отдаленности отъ насъ, эти „оросительныя полосы“ производятъ на насъ впечатлѣніе одного широкаго „канала“. Открытыя наблюдателями измѣненія цвѣта каналовъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ дѣйствительно свидѣтельствуютъ о растительномъ покровѣ. Въ пользу этого взгляда Лепперъ (G. H. Lepper), между прочимъ, указываетъ на сходство свѣтлыхъ областей на Марсѣ съ южно-африканскими „Veldt“ въ сухое время года, когда трава получаетъ желтобурый цвѣтъ и остается въ такомъ видѣ, если она не выгораетъ, до перваго весенняго дождя, послѣ котораго земля снова покрывается зеленой травой. Согласно этому взгляду каналы и оазисы должны представлять собой лѣсныя мѣстности большихъ или меньшихъ размѣровъ; такія мѣста встрѣчаются кое-гдѣ и въ „Veldt“.

Въ послѣдніе годы на Марсѣ замѣчены были еще и другія своеобразныя явленія, — напримѣръ, свѣтлые выступы на границѣ между освѣщенной и неосвѣщенной частью диска, которые обусловливаются, можетъ быть, высокими горами, затѣмъ опредѣленныя измѣненія окраски, и нѣкоторыя другія явленія. Такимъ образомъ, проблема о Марсѣ не только еще не выяснилась, но благодаря обилію новыхъ открытій, напротивъ, еще болѣе усложнилась.

Вполнѣ естественно поэтому, что астрономы приложили всѣ усилія, чтобы возможно полнѣе использовать такое благопріятное противостояніе, какое имѣло мѣсто въ 1907—1908 г., когда Марсъ приблизился къ землѣ на разстояніе приблизительно 60 милліоновъ *км.* и планетный дискъ имѣлъ сравнительно большіе размѣры. Къ сожалѣнію, большая часть обсерваторій сѣвернаго полушарія,— въ частности, въ Германіи, Англіи и другихъ странахъ,—не могла принять непосредственнаго участія въ наблюденіи, такъ какъ вслѣдствіе южнаго положенія Марса на небесномъ сводѣ, онъ могъ лишь очень невысоко подыматься надъ горизонтомъ, т. е. пребывалъ постоянно въ нижнемъ, менѣе прозрачномъ слоѣ атмосферы, гдѣ воздухъ почти все время находится въ состояніи сильнаго движенія. Между тѣмъ, для того, чтобы различить такой тончайшій, съ трудомъ видимый рисунокъ, какой показываетъ намъ Марсъ, необходимо, чтобы воздухъ находился въ абсолютномъ покоѣ. Поэтому извѣстный американскій изслѣдователь Марса П. Ловеллъ (P. Lowell) предпринялъ, какъ и въ 1892 г., спеціальную научную экспедицію въ Южную Америку, гдѣ планета стояла высоко надъ горизонтомъ, такъ что условія были болѣе благопріятны для наблюденія.

Несомнѣнно, что наши свѣдѣнія о Марсѣ постепенно увеличиваются, и, чѣмъ дальше, тѣмъ больше выясняются намъ господствующія на этой планетѣ условія жизни. Напримѣръ, благодаря Ловеллю, мы теперь лучше освѣдомлены о температурѣ на Марсѣ. Исходя изъ предположенія, что теплота на Марсѣ удерживается такъ же, какъ и на землѣ, онъ вычислилъ, что средняя температура на Марсѣ доходитъ до 22^0C. Но, такъ какъ амосфера на Марсѣ менѣе плотна, чѣмъ на землѣ, то, принимая въ расчетъ всѣ соотвѣтствующіе факторы, приведенное число необходимо уменьшить до 9^0C. Хотя эта температура невысока, но все же она не можетъ служить препятствіемъ для жизни.

Сила тяжести на Марсѣ меньше, чѣмъ на землѣ, такъ что давленіе воздуха составляетъ лишь $^2/_9$ атмосфернаго давленія на землѣ, а плотность воздуха въ 12 разъ меньше, чѣмъ у насъ. Вода поэтому кипитъ уже при 44 градусахъ, тогда какъ у насъ вода даже на самыхъ высокихъ горахъ кипитъ лишь при 90^0C, а на уровнѣ моря кипѣніе начинается лишь при 100^0C. Этотъ фактъ въ значительной степени объясняетъ намъ, почему на Марсѣ во время лѣта такъ легко оттаиваетъ твердый осадокъ на полюсахъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

По поводу предложеннаго проф. Ф. Линдеманомъ доказательства теоремы Ферма.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Въ № 503—504 „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математикѣ“, въ отдѣлѣ „Научная Хроника“, уже сообщено о появленіи работы извѣстнаго нѣмецкаго математика проф. Ф. Линдемана, посвященной доказательству теоремы Ферма. Въ этой работѣ мы собственно находимъ два доказательства: первое—элементарное и второе, основанное на свойствахъ чиселъ Куммера. Къ сожалѣнію, оба доказательства ошибочны. Въ элементарномъ доказательствѣ Линдеманъ исходитъ изъ формъ рѣшеній уравненія Ферма (если, конечно, допустить, что оно рѣшается въ цѣлыхъ числахъ), данныхъ Лежандромъ и Абелемъ. Какъ извѣстно, при выводѣ этихъ формъ приходится различать два случая: 1-й случай, когда предполагается дѣлимость на показателя n (показатель степени уравненія Ферма) одного изъ трехъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію, и 2-й случай, когда предполагается, что ни одно изъ этихъ чиселъ на n не дѣлится. Проф. Линдеманъ прежде всего пытается доказать невозможность 1-го случая. Допуская дѣлимость одного изъ трехъ чиселъ на n, онъ старается показать, что въ этомъ случаѣ это число будетъ дѣлиться на любую цѣлую положительную степень n и, слѣдовательно, что оно должно быть равно 0. Къ сожалѣнію, на страницѣ 14 онъ ошибочно въ одномъ изъ сравненій, а именно въ (67), вмѣсто модуля n^5 пишетъ модуль n^6. Эта описка позволяетъ ему доказательство довести до конца. Если бы же онъ поставилъ въ сравненіи (67) вмѣсто модуля n^6 модуль n^5, какъ оно и должно быть, то онъ увидалъ бы, что невозможность 1-го случая имъ не доказана, а, слѣдовательно, и всѣ дальнѣйшія его разсужденія уже не представляютъ интереса. Второе его доказательство также ошибочно: встрѣчается ошибка при подстановкахъ, имѣются также невѣрныя сравненія. Считаю своимъ долгомъ указать, что ошибки во второмъ доказательствѣ Линдемана обнаружены В. Я. Успенскимъ.

Проф. СПБ. Политехническаго Института

И. Ивановъ.

P. S. Мнѣ кажется, что случай съ проф. Линдеманомъ не говоритъ въ пользу утвержденія проф. Клейна*), что очень мало вѣроятно, чтобы такой математикъ, какъ Ферма, въ своемъ доказательствѣ допустилъ ошибку.

Позволяю себѣ сдѣлать еще одно замѣчаніе, а именно, о рѣшеніи уравненія $x^2+y^2=z^2$, данномъ проф. Клейномъ. Я никакъ не

*) См. статью Клейна въ № 503—504 „Вѣстника“.

http://vofem.ru

могу согласиться съ нимъ, что его способъ рѣшенія нагляднѣе, а, слѣдовательно, и проще обыкновеннаго. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія имѣемъ:

$$x^2 = (z - y)(z + y).$$

Такъ какъ числа x, y, z попарно взаимно простыя, то возможны два случая: 1) z и y суть числа разной четности; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$z + y = t^2 \quad \text{и} \quad z - y = v^2,$$

гдѣ t и v произвольныя цѣлыя нечетныя числа; отсюда

$$x = tv, \quad z = \frac{t^2 + v^2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{t^2 - v^2}{2};$$

2) z и y суть числа нечетныя; въ этомъ случаѣ

$$z + y = 2t^2, \quad z - y = 2v^2$$

(такъ какъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ $z + y$ и $z - y$ равенъ 2), гдѣ t и v произвольныя цѣлыя числа — одно изъ нихъ четное, а другое нечетное; будемъ имѣть:

$$z = t^2 + v^2, \quad y = t^2 - v^2, \quad x = 2tv.$$

Почему это доказательство менѣе наглядно и почему оно весьма абстрактно?

Отчетъ о 1-мъ экстренномъ засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 30 декабря 1909 г.

Во время XII-го Всероссійскаго Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей въ Москвѣ было два экстренныхъ засѣданія Московскаго Математическаго Кружка. Оба засѣданія происходили въ помѣщеніи Торговой Школы имени Императора Александра III, въ одномъ изъ классовъ, расположенныхъ вблизи залы, въ которой помѣщалась выставка книгъ и учебныхъ пособій по математикѣ; вслѣдствіе этого всѣ прибывшіе на засѣданіе имѣли возможность до открытія его и въ промежуткѣ между докладами осматривать выставленные экспонаты.

На засѣданіи 30 декабря присутствовало болѣе 60 членовъ Кружка и свыше 100 членовъ XII-го Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей, а также нѣкоторое количество учащихся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, — всего нѣсколько болѣе 200 человѣкъ.

За отсутствіемъ, вслѣдствіе болѣзни, предсѣдателя Кружка проф. Б. К. Млодзѣевскаго, засѣданіе было открыто товарищемъ предсѣдателя А. Ф. Гатлихомъ, который обратился съ привѣтствіемъ къ прибывшимъ въ засѣданіе членамъ XII-го Съѣзда. Указавъ на то, что, работая на общей нивѣ математическаго образованія, члены Кружка и ихъ прибывшіе иногородніе товарищи могутъ видѣться лишь по большимъ праздникамъ, каковымъ является XII Всероссійскій Съѣздъ Естествоиспытателей и Врачей, предсѣдатель привѣтствовалъ присутствующихъ гостей отъ имени Московскаго Математическаго Кружка. Затѣмъ онъ предложилъ избрать въ почетные предсѣдатели проф. А. В. Васильева и въ почетные секретари преподаватель-

http://vofem.ru

ницу С.П.Б. Высшихъ Женскихъ Курсовъ Н. Н. Гернетъ; и далѣе засѣданіе происходило подъ предсѣдательствомъ А. В. Васильева.

Первымъ читалъ свой рефератъ прив.-доц. Московскаго Университета С. П. Виноградовъ, подъ заглавіемъ: „Развитіе понятія числа въ его исторіи и въ школѣ“ *). Содержаніе доклада слѣдующее: Обученіе какому-либо предмету является для учащихся какъ бы принудительнымъ и сокращеннымъ переживаніемъ исторіи развитія предмета, происходящимъ подъ руководствомъ спеціалиста. Для успѣха дѣла, поэтому, необходимо, чтобы руководитель пользовался уроками, которые даетъ исторія эволюціи предмета, устраняя то, что задерживало эту эволюцію, и выдвигая пріемы, способствовавшіе ея уясненію и прогрессу. Докладъ представляетъ попытку прослѣдить тѣ уроки, которые даетъ преподавателямъ математики исторія развитія понятія о числѣ. Такая попытка представляется докладчику своевременной въ настоящее время, когда во всѣхъ странахъ идетъ дѣятельная работа по пересмотру программъ и методовъ преподаванія математики. Изложивъ вкратцѣ историческій ходъ развитія понятія о числѣ, докладчикъ приходитъ къ выводу, что конкретность и геометрическое изображеніе чиселъ способствовали выясненію и укрѣпленію въ наукѣ различныхъ обобщеній понятія о числѣ. Школа еще не вполнѣ использовала этотъ урокъ исторіи; во многихъ современныхъ учебникахъ еще нѣтъ указаній даже на геометрическое изображеніе отрицательныхъ чиселъ. Попутно были приведены мнѣнія Ф. Клейна (F. Klein) о томъ, чѣмъ слѣдуетъ ограничиваться въ средней школѣ при изученіи ирраціональныхъ и комплексныхъ чиселъ. Въ заключеніе докладчикъ указалъ еще на одинъ урокъ исторіи, которымъ школа также не вполнѣ воспользовалась: онъ относится къ одной изъ цѣлей повторительнаго курса ариѳметики и алгебры; именно, соотвѣтственно исторіи, повторительный курсъ въ той части, которая относится къ ученію о числѣ, долженъ имѣть въ виду не буквальное повтореніе пройденнаго, а объединеніе отдѣльныхъ главъ о разнаго рода числахъ и выясненіе постепеннаго обобщенія понятія о числѣ.

Послѣ перерыва преподаватель Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ и секретарь Московскаго Математическаго Кружка І. И. Чистяковъ прочелъ докладъ „О вычисленіи числа π“. Отмѣтивъ, что значеніе числа π для математиковъ новаго времени безконечно шире того опредѣленія, которое ему было дано, именно, какъ отношенія длины окружности къ діаметру, докладчикъ указалъ на то, что изученіе свойствъ этого числа и способовъ его вычисленія всегда приводило къ чрезвычайно важнымъ результатамъ для математической науки, способствуя ея росту и прогрессу. Поэтому исторія вопроса о вычисленіи π можетъ быть съ большимъ успѣхомъ использована въ преподаваніи математики. Референтъ указалъ на попытки такого использованія въ иностранной математической литературѣ, рекомендуя въ особенности книгу Болла (Rouse Ball), интересную и въ другихъ ея частяхъ. Далѣе докладчикъ перешелъ къ изложенію исторіи опредѣленія и вычисленія π въ древнемъ Египтѣ, у греческихъ и римскихъ и, наконецъ, средневѣковыхъ ученыхъ до открытія анализа безконечно-малыхъ. Указавъ затѣмъ на важное значеніе неэлементарныхъ методовъ для вычисленія π, референтъ остановился на вычисленіи его изъ разложенія въ рядъ по степенямъ аргумента функціи $\operatorname{arctg} x$, какъ наиболѣе употреблявшемся. Приведя формулы, при помощи которыхъ различные ученые стремились увеличить быстроту сходимости ряда, докладчикъ указалъ, что наиболѣе при этомъ была использована формула, предложенная въ 1706 г. Машиномъ (Machin); именно, $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, при чемъ, въ концѣ концовъ, π было вычислено Шенксомъ въ 1873 г. съ 707 десятичными знаками. Референтъ коснулся далѣе вопроса о томъ, какъ была получена формула Машина и др. подобныя, и существуютъ ли иныя формулы того же рода, и показалъ, что подобныхъ формулъ можно получить неограниченное число, пользуясь нѣкоторыми совершенно элементарными сооб-

*) Докладъ будетъ напечатанъ въ „Вѣстникѣ“ цѣликомъ.

раженіями изъ тригонометріи и теоріи дробей. Именно, пользуясь зависимостью между тригонометрическими функціями угловъ треугольника, докладчикъ показалъ, что могутъ быть составлены такія комбинаціи 3 дугъ, съ раціонально и просто выражающимися tg'ами, сумма которыхъ равна π. $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{4}$. Были также указаны и комбинаціи двухъ дугъ, удобныя для вычисленія π; изъ одной изъ нихъ референтомъ была выведена формула Машина.

Послѣ обсужденія реферата, присутствующими были возбуждены вопросы о созывѣ Съѣзда преподавателей математики, а также о составленіи и изданіи при участіи Математическаго Кружка хрестоматіи по математикѣ, которая содержала бы рядъ статей по возможности въ подлинныхъ образцахъ изъ историческихъ сочиненій. Обсужденіе этихъ вопросовъ, по предложенію А. Ф. Гатлиха, было отложено до слѣдующаго засѣданія.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Длинныя тепловыя волны. Въ журналѣ Прусской Королевской Академіи Наукъ напечатана новая работа Рубенса (Rubens), сдѣланная совмѣстно съ Голлнагелемъ (Hollnagel) и посвященная изученію длинныхъ тепловыхъ волнъ. За Рубенсомъ и до сихъ поръ числится заслуга, что онъ получилъ наиболѣе длинныя до сихъ поръ извѣстныя волны въ тепловомъ спектрѣ. Новая работа его знакомитъ насъ не только съ еще болѣе длинными волнами, но и по своему методу представляетъ выдающійся интересъ. Какъ и въ прежнихъ работахъ, такъ и въ этомъ новѣйшемъ изслѣдованіи, Рубенсъ получаетъ длинныя тепловыя волны отъ ауэровской горѣлки (или лампы Нернста), выдѣляя ихъ изъ общаго комплекса свѣтовыхъ и тепловыхъ лучей при помощи многократнаго отраженія отъ зеркальныхъ поверхностей каменной соли, сильвина и нѣкоторыхъ другихъ тѣлъ. Дѣло въ томъ, что эти тѣла, въ общемъ прозрачныя для свѣтовыхъ и тепловыхъ волнъ, обладаютъ рѣзко выраженнымъ избирательнымъ поглощеніемъ для опредѣленныхъ очень длинныхъ волнъ. Въ связи съ этимъ находится и то свойство, что именно эти опредѣленныя длинныя волны отражаются отъ полированныхъ поверхностей названныхъ тѣлъ почти какъ отъ металлическаго зеркала. Если поэтому пучекъ свѣта, содержащій и короткіе и длинные лучи, лучи всего спектра, заставить нѣсколько разъ подрядъ отражаться отъ такихъ поверхностей, то въ итогѣ отраженный пучекъ будетъ состоять почти исключительно изъ тѣхъ опредѣленныхъ длинныхъ волнъ, для которыхъ данныя поверхности обладаютъ указаннымъ свойствомъ избирательнаго отраженія. Въ виду того, что получаемые такимъ образомъ лучи большой длины волны — единственные, остающіеся изъ совокупности всевозможныхъ волнъ, высылаемыхъ источникомъ свѣта, они носятъ названіе остаточныхъ лучей. (Всѣ остальные лучи, иной длины волны, при многократныхъ отраженіяхъ не отражаются, а проходятъ черезъ прозрачныя для нихъ отражающія тѣла). Уже раньше Рубенсъ изслѣдовалъ остаточные лучи, получаемые при отраженіи отъ поверхностей каменной соли (хлористаго натрія) и сильвина (хлористаго калія). Къ этимъ тѣламъ онъ присоединилъ теперь бромистый и іодистый калій, а самый методъ изслѣдованія усовершенствовалъ тѣмъ, что длину волнъ онъ мѣрилъ не при помощи диффракціонной рѣшетки, какъ въ прежнихъ своихъ работахъ, а при помощи болѣе точнаго интерферометра. Интерферометръ, поставленный въ путь изслѣдуемыхъ лучей, состоялъ изъ двухъ тонкихъ кварцевыхъ пластинокъ, заключающихъ между собой воздушный промежутокъ. Микрометрическій винтъ позволялъ приближать пластинки и удалять ихъ другъ отъ друга. Прошедшій черезъ этотъ аппаратъ пучекъ лучей падалъ на радіометръ, т. е. на термоэлементъ, который давалъ токъ въ гальванометръ соотвѣтственно интенсивности падающей на него радіаціи. А эта интенсивность стоитъ въ прямой зависимости отъ разстоянія двухъ кварцевыхъ пластинокъ интерферометра. Ибо лучи, прямо проходящіе черезъ обѣ пластинки и лучи, разъ или нѣсколько разъ отраженные между пластинками, интерферируютъ другъ съ другомъ. Получаются, напримѣръ, максимумы интенсивности, когда разстояніе пластинокъ равно цѣлому кратному длины волны. Рубенсъ сближалъ пластинки до соприкосновенія и потомъ медленно раздвигалъ ихъ, постоянно измѣряя интенсивность путемъ отсчета гальванометра. О чувствительности метода можетъ дать представленіе то указаніе, что свѣча, поставленная на разстояніи 6 метровъ отъ радіометра, давала отклоненіе гальванометра на 100 дѣленій шкалы. Такимъ путемъ были получены кривыя интенсивности въ зависимости отъ разстоянія пластинокъ въ интерферометрѣ. Можно было ожидать, что получатся правильныя волнообразныя кривыя. Въ дѣйствительности кривыя напоминаютъ тѣ кривыя, которыя получаются при взаимодѣйствіи двухъ колебаній разнаго періода, напримѣръ, при записи акустическихъ біеній. Изъ этого надо заключить, что въ данномъ случаѣ остаточные лучи не однородны, а состоятъ именно изъ двухъ волнъ разной длины и разной интенсивности. Не трудно расчитать длину каждой изъ этихъ волнъ въ отдѣльности. Такъ, для остаточныхъ лучей отъ каменной соли получились длины волнъ: одной — 54 μ (тысячныхъ миллиметра) и другой — 47μ, для остаточныхъ лучей отъ сильвина — 61 μ и 70 μ. Старый методъ измѣренія длины волнъ при помощи диффракціонной рѣшетки не позволялъ различать эти двѣ волны другъ отъ друга и давалъ лишь среднюю длину волны. Поразительный результатъ дали впервые изслѣдованные остаточные лучи отъ бромистаго и іодистаго калія. Первые состоятъ изъ двухъ волнъ, длина которыхъ равна 76 μ и 86 μ. Вторые были слишкомъ слабы, чтобы можно было опредѣлить, состоятъ ли они изъ одной или изъ нѣсколькихъ волнъ, но средняя длина волны была не менѣе 96 μ, т. е. почти $^1/_{10}$ *мм*. Предѣлы извѣстнаго намъ теплового спектра этимъ значительно расширяются. Сопоставимъ съ этимъ, что самыя короткія полученныя до сихъ поръ электромагнитныя волны имѣютъ длину нѣсколькихъ цѣлыхъ миллиметровъ. Длинныя тепловыя волны Рубенса, такимъ образомъ, лишь въ нѣсколько десятковъ разъ меньше этихъ самыхъ короткихъ герцевскихъ волнъ, но онѣ, въ свою очередь, почти въ 200 разъ длиннѣе волны желтаго свѣта Далѣе Рубенсъ изслѣдовалъ поглощеніе и отраженіе остаточныхъ лучей бромистаго калія въ разныхъ шкалахъ. (Остаточные лучи іодистаго калія, какъ уже сказано, были мало интенсивны и поэтому неудобны для этихъ опытовъ). Оказалось что вода и водяные пары, хотя и сильно поглощаютъ эти лучи, но все-таки уже не въ такой степени, какъ болѣе короткіе лучи теплового спектра. Оказалось далѣе, что для этихъ волнъ, средней длиною въ 80 μ, коэффиціентъ преломленія воды остается тѣмъ же самымъ, какъ для свѣтовыхъ волнъ. Замѣтимъ еще, что во всѣхъ этихъ опытахъ остаточные лучи наблюдались послѣ четырехкратнаго отраженія. Отражающія плиты имѣли поверхность въ 100 *кв. см.*, при 2 *см.* толщины. Плиты изъ каменной соли и сальвина получались изъ натуральныхъ кристаллическихъ кубовъ. Плиты же изъ бромистаго и іодистаго натрія выливались изъ солей, сплавленныхъ въ печи при 800 градусахъ.

Новые опыты въ области безпроволочнаго телеграфа. Изъ напечатанной въ № 505 „Вѣстника" статьи Эйхгорна читатели познакомились съ системой безпроволочнаго телеграфированія проф. Вина (Wien), носящей названіе системы звучащихъ искръ или, точнѣе, возбужденія толчкомъ (Stosserregung). Въ этой системѣ сильно затухающія колебанія, вызванныя искровымъ разрядомъ въ первичной цѣпи съ емкостью и самоиндукціей, сообщаются связанной съ нею вторичной цѣпью, не содержащей искрового промежутка и обладающей малымъ затуханіемъ. Благодаря большому затуханію колебаній первичной цѣпи, они быстро обрываются, и тогда вторичная цѣпь одна продолжаетъ колебаться своимъ собственнымъ періодомъ. Она какъ бы получила отъ первичной цѣпи толчокъ, приведшій ее въ колебанія, очень слабо затухающія. Главнымъ условіемъ дѣйствія системы является большое затуханіе въ первичной цѣпи. Его можно получить и при большихъ искровыхъ промежуткахъ, если включить въ эту цѣпь сопротивленіе. Но это обозначало бы лишнюю трату энергіи. Поэтому на практикѣ возбужденіе толчкомъ по системѣ

Вина производилось только при очень малыхъ искровыхъ промежуткахъ. Малыя искры сами даютъ очень большое затуханіе колебаній. Зато для того, чтобы въ первичной цѣпи, непосредственно заряжаемой и являющейся источникомъ энергіи для вторичной, можно было накопить достаточно энергіи, приходилось при этихъ малыхъ искрахъ или значительно увеличить конденсаторы или пользоваться комбинаціями изъ многихъ такихъ малыхъ искровыхъ промежутковъ. Теперь появилось предварительное сообщеніе Вина о томъ, что ему удалось найти способъ, которымъ и при большихъ искрахъ въ первичной цѣпи можно добиться рѣзкаго прекращенія колебаній, не прибѣгая къ невыгодному включенію обыкновеннаго сопротивленія. Вмѣсто него Винъ на ряду съ искрой включаетъ въ первичную цѣпь Гейслерову трубку. Длинная искра не гаснетъ такъ быстро, какъ это дѣлаетъ очень короткая искра, но эту функцію короткой искры теперь исполняетъ Гейслерова трубка. Она потухаетъ къ тому моменту, когда энергія изъ первичной цѣпи перешла во вторичную. Колебанія въ первичной цѣпи обрываются, а вторичная цѣпь, получившая толчокъ, продолжаетъ колебаться самостоятельно.

РЕЦЕНЗІИ.

Новый сборникъ ариѳметическихъ задачъ въ связи съ краткими теоретическими опредѣленіями и правилами ариѳметики. Дроби. Подъ редакціей Н. Н. Аменицкаго. Москва, 1909 г. Ц. 40 к.

Этотъ „Сборникъ“ составленъ „Кружкомъ Московскихъ преподавателей“, и составленъ неудачно, ибо, во-первыхъ, въ немъ встрѣчаются „уродливыя“ многосоставныя данныя, напримѣръ: „прошелъ ... въ день 74 мили $4\frac{1}{20}$ версты 4 фута“ (отчего нѣтъ дюймовъ и линій?!) (№ 279, ср. №№ 280, 281 и др.); во-вторыхъ, — неточныя опредѣленія, напримѣръ, десятичныхъ дробей (стр. 88); въ-третьихъ, неточныя выраженія, напримѣръ, въ указаніи основанія сокращенія обыкновенныхъ дробей (стр. 28); въ-четвертыхъ, неправильныя указанія основанія сокращенія десятичныхъ дробей (стр. 91), и др.

Кромѣ того, распредѣленіе матеріала, содержаніе задачъ — все по шаблону.

Говоря вообще, составлять въ такомъ родѣ задачникъ, послѣ извѣстныхъ прекрасныхъ „Сборниковъ ариѳметическихъ упражненій для гимназій и реальныхъ училищъ“ (курсъ приготовительнаго класса, изданіе 6-е цѣна 25 к.; курсъ 1-го класса, изданіе 5-е, цѣна 25 к.; курсъ 2-го класса, изданіе 4-е, цѣна 40 к.; Москва, изданіе книжнаго магазина Думнова) А. И. Гольденберга, не имѣетъ смысла. А потому тѣмъ лицамъ, которыя пожелаютъ поставить дѣло преподаванія ариѳметики въ средней школѣ согласно разумнымъ и современнымъ требованіямъ педагогики, мы настоятельно рекомендуемъ не названный „Сборникъ Московскихъ педагоговъ“ и не другіе подобные имъ, составленные схоластически, а упомянутые замѣчательные и оригинальные работы А. И. Гольденберга,

Z.

В. Шидловскій. *Курсъ прямолинейной тригонометріи, приспособленный къ первоначальному ознакомленію съ этимъ предметомъ; съ краткимъ историческимъ очеркомъ тригонометріи.* СПБ. 1909 г. Ц. 90 к.

Въ послѣдніе годы, когда вопросъ о реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ сдѣлался предметомъ усиленнаго обсужденія въ педагогической литературѣ, была подвергнута критикѣ и существующая постановка преподаванія тригонометріи. Главныя возраженія противъ нея сводились къ слѣдующему: во 1-хъ абстрактно-дедуктивное изложеніе курса, при которомъ сначала изучается законченная теорія тригонометрическихъ функцій, и лишь затѣмъ указываются ея приложенiе къ вычисленiю элементовъ треугольника и къ рѣшенiю другихъ вопросовъ геометрiи и физики,— противорѣчить требованiямъ современной дидактики, сводящимся къ тому, чтобы при изложенiи новаго предмета всегда идти отъ конкретнаго къ отвлеченному, отъ частнаго къ общему; во 2-хъ, при существующей постановкѣ дѣла учащiеся слишкомъ поздно знакомятся съ тѣми тригонометрическими понятiями, которыя имъ нужны для изученiя физики. Въ силу этихъ и нѣкоторыхъ другихъ соображенiй признавалось необходимымъ созданiе и возможно болѣе раннее прохожденiе пропедевтическаго курса тригонометрiи, который заключалъ бы въ себѣ элементарныя свѣдѣнiя о тригонометрическихъ величинахъ остраго и тупого угла, съ примѣненiемъ этихъ свѣдѣнiй къ рѣшенiю треугольниковъ.

Указанное обсужденiе не прошло совершенно безслѣдно, такъ какъ новыя программы реальныхъ училищъ (1906 года) и вводятъ раздѣленiе курса тригонометрiи на два класса — 6-й и 7-й, причемъ къ первому изъ нихъ и отнесена „тригонометрiя" въ собственномъ смыслѣ слова, т. е. рѣшенiе треугольниковъ. Начали появляться и соотвѣтственныя руководства. Учебникъ г. Шидловскаго и излагаетъ такой первоначальный курсъ тригонометрiи, являющiйся въ реальныхъ училищахъ первымъ концентромъ этого предмета, а въ нѣкоторыхъ другихъ школахъ — единственнымъ цикломъ свѣдѣнiй по тригонометрiи.

Въ началѣ книги авторъ излагаетъ основныя свѣдѣнiя о тригонометрическихъ величинахъ остраго угла, ихъ измѣненiи и взаимной зависимости, и указываетъ способы приложенiя этихъ свѣдѣнiй къ рѣшенiю прямоугольныхъ треугольниковъ; затѣмъ изученныя основныя понятiя распространяются на случай тупого угла, и выводятся способы рѣшенiя косоугольныхъ треугольниковъ; послѣ этого разбирается довольно много примѣровъ приложенiя тригонометрiи къ рѣшенiю вопросовъ изъ области топографiи, астрономiи и т. д. и дается собранiе упражненiй на всѣ отдѣлы курса. Въ приложенiи даны еще выводы нѣкоторыхъ формулъ для упрощенiя вычисленiй, и краткiй очеркъ исторiи прямолинейной тригонометрiи; кромѣ того въ книгѣ имѣются таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ отъ O^0 до 90^0 черезъ каждый градусъ, вычисленныя съ тремя десятичными знаками.

Изложенiе автора кратко и достаточно ясно; къ числу достоинствъ учебника, мы должны еще отнести наличность образцовъ рѣшенiй треугольниковъ для всѣхъ случаевъ, со схемами для расположенiя вычисленiй; такiе образцы приносятъ значительную пользу изучающимъ, въ особенности на первыхъ порахъ. Также слѣдуетъ привѣтствовать и помѣщенiе вышеуказанныхъ практическихъ задачъ, разборъ которыхъ указываетъ изучающимъ возможность примѣненiя свѣдѣнiй изъ тригонометрiи къ рѣшенiю весьма разнообразныхъ вопросовъ науки и жизни, и наличность историческихъ свѣдѣнiй; все это въ сильной степени повышаетъ интересъ къ дѣлу.

Но необходимо отмѣтить также и слѣдующiе недочеты книги. Такъ, во вступленiи, дающемъ понятiе о задачахъ тригонометрiи (§ 1), начало положено вполнѣ отвлеченно, и лишь затѣмъ высказанныя мысли пояснены примѣрами. Въ интересахъ наилучшаго пониманiя читаемаго текста, порядокъ изложенiя долженъ быть, конечно, обратный. Далѣе (стр. 7), устанавливая опредѣленiя тригонометрическихъ величинъ остраго угла, авторъ считаетъ нужнымъ назвать ихъ иначе—„тригонометрическими функцiями" угла, и въ примѣчанiи даетъ краткое истолкованiе смысла термина „функцiя". Мы согласны, съ тѣмъ, что понятiе о функцiи должно сдѣлаться достоянiемъ учащихся въ средней школѣ, и при томъ возможно ранѣе; но если авторъ имѣетъ въ виду учащихся, еще не знакомыхъ съ этимъ понятiемъ, то лучше было бы вовсе не вводить новаго термина, такъ какъ на основанiи краткаго примѣчанiя, учащiеся все равно не составятъ себѣ надлежащаго представленiя о функцiи. Затѣмъ (стр. 12—13), при разборѣ значенiй тригонометрическихъ величинъ угловъ въ O^0 и 90^0, изложенiе страдаетъ нѣкоторой неточностью и неясностью: нельзя, напримѣръ, сказать, что при обращенiи угла въ прямой отношенiе отрѣзковъ, представляющее тангенсъ, „дѣлается неопредѣленнымъ"; оно тогда вовсе не существуетъ, какъ это указывается на той же страницѣ нѣсколькими строками ниже. Неясно также, почему значенія тангенса и секанса, при безграничномъ приближеніи остраго угла къ 90°, могутъ быть сдѣланы какъ угодно большими: это слѣдовало бы доказать И далѣе (стр. 29), при разборѣ вопроса о тригонометрическихъ величинахъ тупого угла, пропущено условіе относительно знаковъ, приписываемыхъ линіямъ секанса и косеканса; благодаря такому пропуску, получается противорѣчіе съ общимъ правиломъ знаковъ, изложеннымъ на стр. 28.

При слѣдующемъ изданіи книги, кромѣ устраненія этихъ недочетовъ, желательно еще исправить нѣкоторыя шероховатости слога (какъ, напримѣръ на страницѣ 4), улучшить нѣкоторые чертежи (напримѣръ, черт. 1) и устранить допущенныя опечатки, мѣшающія чтенію текста. Желательно также опустить, помѣщенный въ концѣ, указатель статей и рецензій, помѣщенныхъ авторомъ въ разныхъ періодическихъ изданіяхъ; онъ занимаетъ 10 страницъ, и конечно, имѣетъ значеніе для преподавателей, но вѣдь учебникъ предназначается главнымъ образомъ для учащихся, а для нихъ было бы полезнѣе расширить на счетъ этихъ страницъ отдѣлъ упражненій или историческихъ свѣдѣній.

К. Л.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 252 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{x}{b} - \frac{b}{x} = 3.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 253 (5 сер.) Рѣшить систему уравненій

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 353,$$

$$xy\,(x^2 + y^2) = 68.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 254 (5 сер.). Показать, что m-я степень средняго ариѳметическаго двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ a и b меньше средняго ариѳметическаго m-хъ степеней этихъ чиселъ *).

В. Шлыгинъ (Москва).

*) Авторъ задачи предполагаетъ m цѣлымъ положительнымъ числамъ; дополняя текстъ задачи, предлагаемъ читателямъ разсмотрѣть отдѣльно общіе случаи, когда 1) $m > 1$, 2) $m < 0$, 3) $0 < m < 1$, и отвѣтить на вопросъ, какъ надо измѣнить текстъ задачи въ послѣднемъ случаѣ.

http://vofem.ru

№ 255 (5 сер.) Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{1}{\cos a - \cos 3a} + \frac{1}{\cos a - \cos 5a} + \frac{1}{\cos a - \cos 7a} + \ldots$$

М. Розенблатъ (Балта).

№ 256 (5 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$(1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots + \sin^{2n} x) + (1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots + \cos^{2n} x) -$$

$$- (1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots + \sin^{2n} x)(1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots + \cos^{2n} x).$$

при безконечномъ возрастаніи n.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 257 (5 сер.). Пусть D есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ A, B, C; тогда можно доказать, что D^2 есть общій дѣлитель чиселъ AB, BC, CA. При какихъ условіяхъ D^2 есть общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ?

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 175 (5 сер.). *Доказать, что уравненіе*

$$3x^2 - 10xy + 4y^2 = 11$$

не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ относительно x *и* y.

Помноживъ обѣ части даннаго уравненія на 3, получимъ:

$$9x^2 - 30xy + 12y^2 = 33, \quad \text{или} \quad (3x - 5y)^2 - 13y^2 = 33. \qquad (1)$$

Если бы данное уравненіе имѣло цѣлыя рѣшенія, то выраженіе $3x - 5y$ было бы, для искомыхъ цѣлыхъ значеній x и y, числомъ цѣлымъ, которое мы обозначимъ черезъ z. Тогда [см. (1)] $z^2 - 13y^2 = 33$, откуда

$$z^2 = 13y^2 + 26 + 7.$$

Изъ этого равенства мы видимъ, что, при существованіи цѣлыхъ рѣшеній даннаго уравненія, должно существовать цѣлое число z, которое при дѣленіи на 13 дастъ остатокъ 7; но это невозможно, откуда заключаемъ, что данное уравненіе нельзя рѣшить въ цѣлыхъ числахъ. Дѣйствительно, всякое цѣлое число z можно изобразить въ видѣ $z = 13t + r$, гдѣ t также есть цѣлое число, а r имѣетъ одно изъ значеній $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$. Такимъ образомъ,

$$z^2 = (13t + r)^2 = 13^2 t^2 + 26tr + r^2,$$

откуда видно, что квадратъ цѣлаго числа при дѣленіи на 13 можетъ давать лишь тѣ остатки, которые равны остаткамъ отъ дѣленія на 13 одного изъ чиселъ

$$r^2 = 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2.$$

http://vofem.ru

Но среди этихъ остатковъ (0, 1, 4, 9, 3, 12, 10) ни одинъ не равенъ 7.

Замѣчаніе. Къ уравненію (2) можно прійти и другимъ путемъ: предполагая, что x и y имѣютъ въ данномъ уравненіи цѣлыя значенія, опредѣляемъ x въ зависимости отъ y. Тогда имѣемъ:

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{13y^2 + 33}}{3}.$$

Такъ какъ x есть число цѣлое, то $13y^2 + 33$ есть квадратъ цѣлаго числа z; такимъ образомъ, приходимъ опять къ уравненію (2).

Н. Казариновъ (Пинега); *Н. С.* (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 181 (5 сер.). *Доказать справедливость тожества*

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} + \frac{r_b + r}{r_b - r} + \frac{r_c + r}{r_c - r} = \frac{(a + b + c)^3}{4abc} + \frac{r}{2R} - 1,$$

гдѣ r, r_a, r_b, r_c, R *суть радіусы вписаннаго, внѣвписанныхъ и описаннаго круговъ* и a, b, c — *стороны нѣкотораго треугольника.*

Называя площадь треугольника черезъ s, а полупериметръ черезъ p, съ помощью формулъ: $r_a = \frac{s}{p-a}$, $r = \frac{s}{p}$ получимъ:

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} = \frac{\frac{s}{p-a} + \frac{s}{p}}{\frac{s}{p-a} - \frac{s}{p}} = \frac{p + p - a}{p - (p - a)} = \frac{2p - a}{a},$$

точно такъ же находимъ:

$$\frac{r_b + r}{r_b - r} = \frac{2p - b}{b}, \quad \frac{r_c + r}{r_c - r} = \frac{2p - c}{c};$$

а потому

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} + \frac{r_b + r}{r_b - r} + \frac{r_c + r}{r_c - r} = \frac{2p - a}{a} + \frac{2p - b}{b} + \frac{2p - c}{c} = \frac{2p}{a} + \frac{2p}{b} + \frac{2p}{c} - 3. \quad (1)$$

Съ помощью формулъ $R = \frac{abc}{4s}$, $r = \frac{s}{p}$ и $s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, находимъ

$$\frac{r}{2R} = \frac{4s^2}{2pabc} = \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{2[p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc]}{abc} =$$

$$= \frac{2[p^3 - 2p^3 + p(ab+bc+ca) - abc]}{abc} = \frac{-2p^3}{abc} + \frac{2pbc}{abc} + \frac{2pac}{abc} + \frac{2pab}{abc} - 2 =$$

$$= -\frac{(2p)^3}{4abc} + 1 + \frac{2p}{a} + \frac{2p}{b} + \frac{2p}{c} - 3 = -\frac{(a+b+c)^3}{4abc} + 1 + \frac{2p}{a} + \frac{2p}{b} + \frac{2p}{c} - 3,$$

http://vofem.ru

откуда
$$\frac{(a+b+c)^3}{4abc}+\frac{r}{2R}-1=\frac{2p}{a}+\frac{2p}{b}+\frac{2p}{c}-3. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) выводимъ:

$$\frac{r_a+r}{r_a-r}+\frac{r_b+r}{r_b-r}+\frac{r_c+r}{r_c-r}=\frac{(a+b+c)^3}{4abc}+\frac{r}{2R}-1.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В Богомоловъ* (Шацкъ).

№ 183 (5 сер.). *Доказать, что уравненіе*

$$x^2+px+q=0$$

не имѣетъ раціональныхъ корней, если p и q *суть нечетныя числа.*

Раціональные корни уравненія $x^2+px+q=0$, коэффиціентъ высшаго члена котораго есть единица, суть въ то же время цѣлыя числа. Дѣйствительно, пусть x есть раціональное число, т. е. $x=\frac{y}{z}$, гдѣ y и z — цѣлыя числа, при чемъ y и z всегда можно сдѣлать числами взаимно простыми, сокращая, въ случаѣ надобности, дробь $\frac{y}{z}$. Тогда

$$\frac{y^2}{z^2}+\frac{py}{z}+q=0, \quad \text{или} \quad y^2+pyz+qz^2=0,$$

откуда
$$y^2=-z(py+qz). \qquad (1)$$

Изъ равенства (1) мы видимъ, что произведеніе $y\,.\,y$ дѣлится на z, при чемъ y и z суть числа взаимно простыя; значитъ y дѣлится на z, что возможно лишь тогда, если z равно единицѣ. Итакъ, всякій раціональный корень разсматриваемаго уравненія есть число цѣлое. Пусть теперь это уравненіе имѣетъ раціональный и поэтому цѣлый корень α. Называя второй корень черезъ β, имѣемъ:

$$\alpha+\beta=-p, \quad (2) \qquad \alpha\beta=q. \qquad (3)$$

Изъ равенства (2) видно, что β тоже есть цѣлое число, такъ какъ p, по условію, есть число цѣлое, а изъ равенства (3) слѣдуетъ, что α и β нечетныя числа, такъ какъ произведеніе двухъ этихъ чиселъ равно нечетному числу q. Сумма нечетныхъ чиселъ α и β есть число четное, а между тѣмъ, согласно съ равенствомъ (2), эта сумма равна нечетному числу $-p$. Итакъ, разсматриваемое уравненіе не имѣетъ раціональныхъ корней.

А. Масловъ (Москва); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *Н. Казариновъ* (Пинега); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Н. С.* (Одесса).

http://vofem.ru

ПОПРАВКА:

Въ статьѣ „XII Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей. Секція физики". А. Іоллоса, напечатанной въ № 505 „Вѣстника", слѣдуетъ исправить слѣдующую опечатку:

Стр. 23 строки 19 и 20 сверху напечатано: „часть массы въ этомъ случаѣ все же матеріальная, а электромагнитная масса обусловлена лишь скоростью.

Должно быть: часть массы въ этомъ случаѣ — не матеріальная, а электромагнитная масса, обусловленная лишь скоростью.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Г. Каминскій. *Опытъ приложенія графики въ области преподаванія начальной ариѳметики (графико-аналитическій методъ).* Кременчугъ. 1909. Стр.23

И. Александровъ. Преподаватель средней школы Народного Университета. *Программа ариѳметики приготовительнаго и 1-го классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и подробныя къ ней методическія указанія.* Москва. 1910. Стр. 8. Ц. 10 к.

В. П. Вахтемутъ. *Таблица по качественному анализу.* Рига. 1909. Стр. 18.

Н. Извольскій. *Геометрія въ пространствѣ. (Стереометрія).* Ц. 65 к.

Задача Ферма та и формула цѣлыхъ чиселъ. Стр. 42.

К. О. Лебединцевъ. *Курсъ алгебры.* Часть 1-ая. Съ 75 чертежами въ текстѣ. Стр. 95. Ц 80 к Часть 2-ая. Съ 45 чертежами въ текстѣ Стр. 345. Ц. 1 р. 10 к.

Топографическій и геодезическій журналъ. № 1. Научно-литературн. 1910.

Д. В. Агаповъ. *Основное понятіе объ углахъ.* Ц. 35 к.

Д. В. Агаповъ. *Дѣленіе даннаго отрѣзка прямой на произвольное число равныхъ или пропорціональныхъ частей, съ указаніемъ устройства и примѣненія дѣлительной и пропорціональной линейки.* Ц. 35 к.

Физико-математическое приложеніе къ Циркуляру по управленію Кавказскимъ учебнымъ округомъ. № 2. Изданіе Кавказскаго учебнаго округа. Стр. 103. Ц. 50 к.

Д. Святскій. *Встрѣча кометы Галлея съ землею и появленіе новой кометы.* СПБ. 1910 Стр. 32. Ц 10 к

Галлеева комета въ 1910 г. О вселенной, о кометахъ, о кометѣ Галлея. Общедоступное изданіе съ 12 рис. Одесса. Mathesis. 1910. Стр. 32. Ц. 12 к.

К. Граффъ. *Комета Галлея.* Появленія кометы съ 11 г. до Р. Хр. по 1910 г. Стр. 67. Съ 12 рис. Одесса. Mathesis. Ц. 30 к.

Alois Höfler. Dr. Professor an der Universität Wien. *Didaktik des Mathematischen Unterrichts.* Стр. 507. Leipzig, Teubner. 1910.

W. Killing und H. Hovestadt. *Handbuch des Mathematischen Unterrichts.* Erster Band. Стр. 456. Leipzig, Teubner. 1910.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

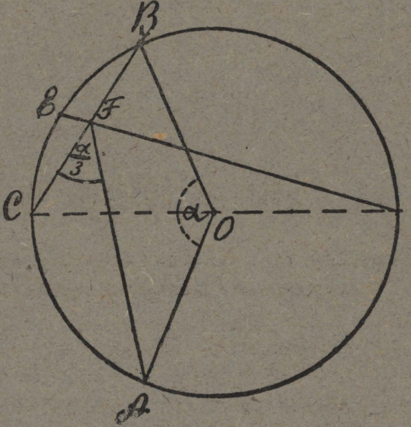
http://vofem.ru

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).

Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. I-я. Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины: „Новаго Времени" (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза" (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ" (Москва). „Сотрудникъ Школъ" (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества" (Самара), „Волжанинъ" (Самара) и др.



$\smile AC = \smile CB;\ \smile AD = \smile DB;\ \smile CE = \smile EB.$

ВЫШЕЛЪ № 2 (ФЕВРАЛЬ) ЖУРНАЛА

„СОВРЕМЕННЫЙ МІРЪ"

XX-й ГОДЪ ИЗДАНІЯ.

СОДЕРЖАНІЕ: I отд. „Плѣнъ страстей человѣческихъ" (монаст. сказаніе), **Евг. Чирикова;** Любовь (пов.), **М. Криницкаго;** Осудили (разск.), **В. Беренштама;** Движенія (пов.), **С. Сергѣева-Ценскаго;** Послѣднее счастье (ром.), **Ф. Голлендера;** Городъ неимущихъ (разск.), **В. Брода;** Овидій и его „героини", **Ѳ. Зелинскаго;** „Человѣкъ проклятъ" (О Достоевскомъ), **В. Вересаева;** Субъективный матеріализмъ, **Ортодоксъ;** СТИХОТВОРЕНІЯ: **А. Ѳедорова, В. Лихачева, Л. Василевскаго, Гликберга, В. Ладыженскаго. II отд.** А. Чеховъ и новые пути, **В. Львова-Рогачевскаго;** Авг. Бебель, **В. Розанова;** Новогодній кладъ, **І. Ларскаго;** Самобытный капитализмъ, **Г. Гольдберга;** Трезвый съѣздъ, **М. Лукомскаго;** Наканунѣ новаго университетскаго устава, **Р. Выдрина;** Родныя картинки, **А. Яблоновскаго;** Борьба за власть (письмо изъ Англіи), **К. Тахтарева;** Что дѣлается и что надо дѣлать? **Н. Іорданскаго; Критика и библіографія. Новыя книги. Объявленія.**

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1910 ГОДЪ.

Подписная цѣна съ 1910 г. повышается на 1 р. Условія подписки (съ дост. и пер.) годъ—**9** руб.; полгода—**4** р. **50** к.; на 4 мѣс.—**3** руб. **Заграницу: 12** руб. годъ и **6** руб. полгода. Безъ доставки въ Спб.: **8** руб. годъ и **4** руб. полгода.

Проспекты высылаются по первому требованію.

Спб., Надеждинская, 41.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей привать-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается БЕЗПЛАТНО по первому требованію.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1908-9 г.

40-ый семестръ.

Проф. *А. Клоссовскій.* Магнитная съемка Россіи.—*Анри Пуанкарэ.* Будущее математики.—*Дж. Томсонъ.* Корпускулярная теорія матеріи.—*К. Щербина.* Математика въ русской средней школѣ.—Проф. *А. Слаби.* Резонансъ и угасаніе электрическихъ волнъ.—*Б. Цомакіонъ.* Опредѣленіе поверхности и объема шара, какъ предѣловъ поверхностей и объемовъ многогранниковъ.—Проф. *Г. Бруни.* Твердые растворы—*Дм. Ефремовъ.* Нѣкоторыя свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени.—*А. Турчаниновъ.* Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.—*А. Филипповъ.* По поводу „дѣленія безъ дѣленія и вычитанія"—*Л. Гюнтеръ.* Опредѣленіе разстояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксовъ въ прежнія времена и теперь.—Прив.-доц. *В. Лермантовъ.* Постановка приготовленія учителей физики въ Германіи.—*И. Точидловскій.* Новѣйшіе успѣхи наблюдательной актинометріи.—*І. Лемуанъ.* Простое изложеніе ученія о всемірномъ тяготѣніи и о вычисленіи массъ въ солнечной системѣ.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ.* Лекціи по ариѳметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай.* Благородные и радіоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ.* О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби.* Безпроволочный телефонъ.—*А. Филипповъ.* О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ.* Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкарэ.* Математическое творчество.—*П. Зееманъ.* Происхожденіе цвѣтовъ спектра.—*В. Гернетъ.* Объ единствѣ вещества.—*С. Ньюкомъ.* Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ.* Линейные спектры и строеніе атомовъ.—*А. Кирилловъ.* Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри.* Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннэи* О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель.* Методъ работы Пуанкарэ.—Литература великой теоремы Фермата.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики".**