

№ 499.

Редакціей

16 ДЕК 1909

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

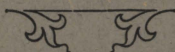
В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.



XLII-го Семестра № 7-й.



ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1909.

<http://vofem.ru>

ФИЗИКЪ-ЛЮБИТЕЛЬ

общедоступный журналъ по физическимъ наукамъ и ихъ приложеніямъ въ школѣ, техникумъ и любительской практикѣ.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

1. **Наука и жизнь:** изъ жизни и дѣятельности ученыхъ обществъ и обществъ любителей физическихъ наукъ; изъ исторіи открытій и изобрѣтеній; изъ жизни ученыхъ и изобрѣтателей. 2. **Старое и новое въ наукѣ** (въ области *физики и химіи*, въ общедоступномъ изложеніи): изъ прошлаго опытныхъ наукъ и современные успѣхи ихъ (*радіоактивныя явленія*, электронная теорія и пр.). 3. **Физика неба и физика земли:** *астрономія* (успѣхи ея, любительскія наблюденія звѣзднаго неба и пр.), физическая геологія (землетрясеніе, строеніе земного шара и пр.), метеорологія (наблюденія и предсказанія *погоды* и пр.); *наблюденія съ простыми средствами*. 4. **Физическія науки въ школѣ** (въ начальной и средней, — физика, химія, космографія): замѣтки по преподаванію, новые приборы для физич. каб., *простѣйшіе* приборы, описаніе опытовъ. 5. **Приборы и опыты:** техника изготовленія приборовъ, *самодѣльные приборы*; искусство экспериментированія (въ тѣсномъ кругу и для публичныхъ лекцій). 6. **Химія любителя:** дешевая лабораторія; простѣйшіе опыты; приготовленіе различныхъ веществъ домашними способами и пр. 7. **Любительская электротехника:** батареи, аккумуляторы, освѣщеніе, гальванопластика, устройство электрическихъ приборовъ и пр. 8. **Фотографія:** новые объективы и аппараты; новые пластинки и бумаги; старые и новые рецепты; домашняя лабораторія; волшебный фонарь; кинематографъ. 9. **Воздухоплаваніе:** воздушные змѣи, аэронавы, аэропланы, вертолеты, гидропланы, новости механизмовъ и полетовъ; *устройство моделей*. 10. **Изобрѣтенія, усовершенствованія и спортъ:** освѣщеніе, двигатели, велосипедъ, автомобиль, граммофонъ, пишущія машины и пр. 11. **Изъ любительской практики:** домашнія работы, ихъ приемы и инструменты: паянье, отливка; чистка; клеи, замазки, лаки; протравы; краски; новые матеріалы и обращеніе съ ними; рецепты и пр. 12. **Наука и забава:** физика и химія безъ приборовъ; механическія игрушки; фокусы. 13. **Задачи и вопросы:** задачи по физикѣ и химіи; практическія задачи и способы ихъ рѣшенія; вопросы и отвѣты. 14. **Новыя книги:** библиографическій указатель, отзывы о книгахъ. 15. **Письма въ редакцію и отвѣты подписчикамъ.**

Ф.-Л. издается съ 1904 года.

ПОДПИСНОЙ ГОДЪ — АКАДЕМИЧЕСКІЙ,
СЪ АВГУСТА ПО МАЙ (20 НУМЕРОВЪ ВЪ ГОДЪ).

Цѣна 3 руб. въ годъ.

ПОДРОБНАЯ ПРОГРАММА, содержаніе за прежніе годы, образцы рисунковъ и отзывы печати высылаются бесплатно по первому требованію.



АДРЕСЪ: Николаевъ (Херс. губ.), контора (или редакція) „Физика-Любителя“.

Редакторъ-издатель: Кандидатъ Моск. Универс. **К. А. Чернышевъ.**

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.


 № 499.
 

Содержаніе: Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе. *К. Граффа* (Окончаніе).— Къ отчету о рѣшеніяхъ задачи на премію № 2.— Рѣшеніе задачи на премію № 2. *Е. Григорьева*.— Отъ Распорядительнаго Комитета XII Съезда русскихъ естествоиспытателей и врачей.— Отъ редакціи.— Объявленія.

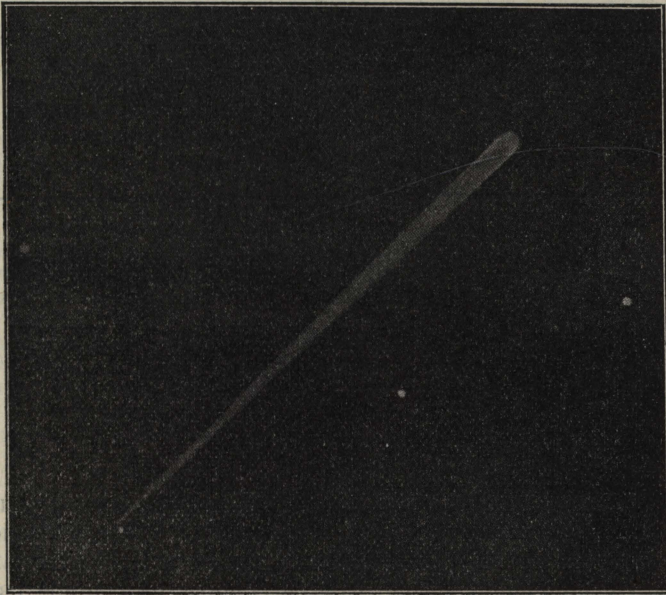
Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе.

К. Граффа.
(Окончаніе)*

По истеченіи слѣдующаго полустолѣтія у специалистовъ не возникало больше сомнѣній въ томъ, что комета дѣйствительно возвратится, и что въ одной изъ имѣющихся появиться въ ближайшемъ времени кометъ навѣрное можно будетъ узнать ожидаемое свѣтило; правда, скептиковъ все еще беспокоило то обстоятельство, что вычисленіе датъ нѣкоторыхъ прохожденій черезъ перигелій многочисленныхъ кометъ, появившихся въ прежнія времена, не совсѣмъ удавалось. Самъ Ньютонъ высказался съ большою осторожностью объ открытіи Галлея и полагалъ, что непостоянство періодовъ обращенія свѣтилъ слѣдуетъ приписать какимъ-либо невыясненнымъ еще ошибкамъ въ вычисленіяхъ или наблюденіяхъ; другіе, наоборотъ, предполагали, что 75-лѣтній и 76-лѣтній періоды правильно чередуются одинъ съ другимъ, и что предстоящее прохожденіе черезъ перигелій можно уже ждать въ 1757 году. Только великій французскій математикъ Клеро разрѣшилъ эту загадку; совмѣстно съ М-ме Лепоть (Le-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 498.

раute). женою своего друга—часового мастера, онъ не только вывелъ формулы, необходимыя для вычисленія степени вліянія Юпитера и Сатурна, но справился также въ относительно короткое время (около 6 мѣсяцевъ) съ обширными вычисленіями; въ результатъ онъ пришелъ къ выводу, что на этотъ разъ періодъ обращенія кометы окажется на 618 дней больше, чѣмъ въ предыдущій, и именно: на 518 дней,—вслѣдствіе вліянія Юпитера и еще на 100 дней—вслѣдствіе вліянія Сатурна. Согласно этимъ вычисленіямъ ближайшее прохожденіе кометы черезъ перигелій должно было пасть на средину апрѣля 1759 года; однако, Клеро, при опубликованіи своего труда, упомянулъ, что онъ вынужденъ былъ пренебречь въ формулахъ возмущеній нѣкоторыми членами, такъ какъ иначе онъ вообще не былъ бы въ состояніи по-



Видъ кометы Галлея 28 октября въ обыкновенную подзорную трубу.

лучить результатъ во сколько-нибудь обозримое время въ общей сложности, по примѣрному подсчету, это могло вызвать ошибку въ вычисленіяхъ приблизительно въ 30 дней въ ту или другую сторону. Въ дѣйствительности комета прошла черезъ перигелій 13 марта того же года, такъ что предсказаніе Клеро сбылось въ полномъ объемѣ. Необычайная точность этого результата тѣмъ поразительнѣе, что въ то время еще нельзя было принять во вниманіе возмущающаго вліянія двухъ внѣшнихъ планетъ нашей солнечной системы, Урана и Нептуна: первая была открыта въ 1781, а вторая въ 1846 году;

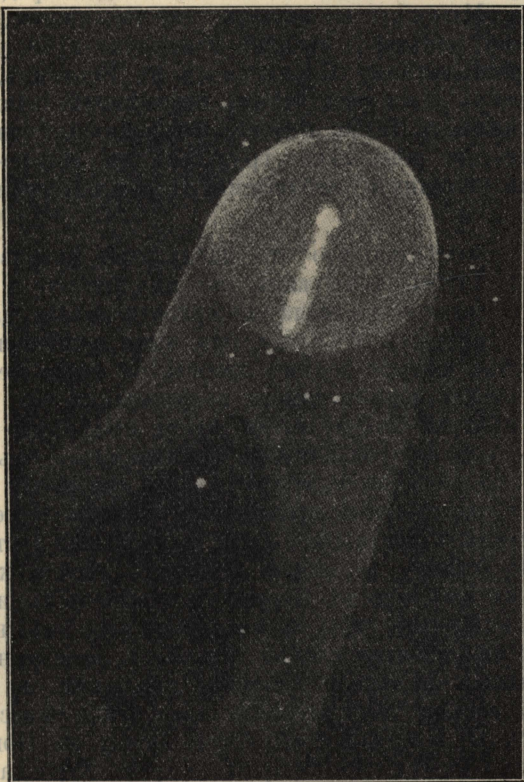
кроме того, массы Юпитера и Сатурна отнюдь не были известны съ требуемой точностью.

Самое открытіе кометы, которую ожидали съ лихорадочнымъ нетерпѣніемъ, представляло не менѣ интереса, чѣмъ предвычисленіе момента ея возвращенія. Уже начиная съ осени 1758 г. ее стали разыскивать на различныхъ обсерваторіяхъ; въ особенности этимъ занялся въ Парижѣ извѣстный наблюдатель кометъ и туманностей Мессье (Messier); однако, никому не удавалось напасть на ея слѣдъ. Когда же, наконецъ, въ январѣ 1759 года, послѣ довольно продолжительной пасмурной погоды, Мессье ее нашелъ, то выяснилось, что комета уже тремя недѣлями раньше — въ день Рождества 1758 г. — была открыта простымъ крестьяниномъ Паличемъ въ Проглицѣ, около Дрездена. Въ этотъ вечеръ Паличъ искалъ переменную звѣзду Mira Ceti и при этомъ выслѣживалъ также комету, которая, по ожиданію, должна была отстоять на нѣсколько градусовъ къ сѣверо-западу отъ звѣзды; какъ выше упомянуто, наблюденія Палича увѣнчались полнымъ успѣхомъ *).

Само собою разумѣется, что это наблюденіе производилось помощью зрительной трубы, такъ какъ, по вычисленію Голетчека (Holetschek), комета тогда не достигла еще яркости звѣзды даже восьмой величины. Когда ее открылъ Мессье, она была приблизительно 6-ой величины и не имѣла хвоста; затѣмъ яркость ея стала медленно увеличиваться и въ началѣ апрѣля комета представляла уже поразительное зрѣлище. По яркости, какую въ это время имѣло ядро кометы, сообщенія относятъ его къ различнымъ величинамъ — отъ первой до третьей. Еще больше расходятся между собою сообщенія о длинѣ ея хвоста. Въ Европѣ только послѣ прохожденія кометы черезъ перигелий хвостъ ея выступилъ достаточно ярко; наибольшее протяженіе онъ имѣлъ въ апрѣлѣ; однако, во второй половинѣ мѣсяца комета такъ быстро двигалась къ югу, что въ Европѣ ее можно было видѣть только вблизи горизонта, вслѣдствіе чего производимое ею общее впечатлѣніе, естественно, стало значительно слабѣе. Наконецъ, комета на нѣсколько дней совсѣмъ скрылась съ южной стороны горизонта; но мы имѣемъ за этотъ періодъ весьма обстоятельныя сообщенія относительно ея внѣшняго вида отъ П. Кёръ-Ду (P. Cœur Doux) въ Пондишери, и въ особенности отъ Ла-Ню (La Nux) съ острова Бурбона. По этимъ

* Паличъ сообщаетъ о своемъ открытіи своему другу Готтольду Гоффману въ Дрезденѣ слѣдующее: „Снова стало видимымъ для насъ, обитателей земли, появившееся послѣ продолжительнаго странствованія по эллиптической орбитѣ тѣло, которое называютъ кометою. Когда я по своей упорной привычкѣ внимательно наблюдаю небесныя явленія, 25 декабря сего года, въ 6 часовъ вечера, разсматривалъ въ свою 8-футовую подзорную трубу неподвижныя звѣзды, чтобы увидѣть, какую представляется доступная теперь наблюденію звѣзда въ созвѣздіи Кита, а также не приблизилась ли и не показалась ли задолго до того предсказанная и страстно ожидаемая комета, то на мою долю выпало невыразимое удовольствіе открыть, недалеко отъ упомянутой звѣзды, въ созвѣздіи Рыбъ, и именно въ полосѣ между двумя звѣздами ϵ и δ , до того тамъ еще никогда не замѣченную туманную звѣзду. Наблюденія, повторенныя 26 и 27 дек., подтвердили предположеніе, что это — комета...“ и т. д.

сообщеніямъ къ концу апрѣля ядро пріобрѣло яркость звѣзды, а хвостъ все еще продолжалъ увеличиваться и достигъ 21-го апрѣля длины въ 8 градусовъ, 28-го — въ 25 градусовъ, 1-го мая — въ 33-34 градуса и 5-го мая даже въ 47 градусовъ. Послѣднее число тѣмъ болѣе поразительно, что луна 5-го мая уже прошла черезъ первую четверть. Затѣмъ яркость кометы и длина ея хвоста стали быстро убывать, и 22-го іюня 1759 года, — слѣдовательно, почти черезъ полгода послѣ ея открытія, — это долго наблюдавшееся свѣтило опять исчезло на три четверти столѣтія изъ поля зрѣнія обитателей земли. Своимъ своевремен-



Видъ кометы Галлея въ 20-футовый телескопъ Гершеля
28 января 1836 г.

нымъ появленіемъ оно снова существенно содѣйствовало тому, что взгляды на кометы мало-по-малу стали болѣе правильными, и что, по крайней мѣрѣ, образованные люди освободились отъ прежняго суевѣрнаго страха предъ этими небесными тѣлами.

Успѣхъ, достигнутый Клеро при вычисленіи момента возвращенія кометы Галлея въ 1759 году, побудилъ математиковъ уже въ началѣ XIX столѣтія еще больше усовершенствовать предсказанія от-

носителю ближайшаго прохожденія кометы черезъ перигелій. Какъ извѣстно, на этотъ разъ четыре знаменитыхъ вычислителя—Дамуазо (Damoiseau), Понтекуланъ (Pontécoulant), Леманъ (Lehman) и Розенбергеръ—рѣшили испытать свои силы надъ этой проблемой. Они указали слѣдующія даты прохожденія кометы черезъ перигелій: первый — 4 ноября, второй — 13-15 ноября, третій — 26 ноября, а послѣдній — 12 ноября 1835 года. Въ основаніе этихъ результатовъ легли соображенія не только относительно возмущеній обу-

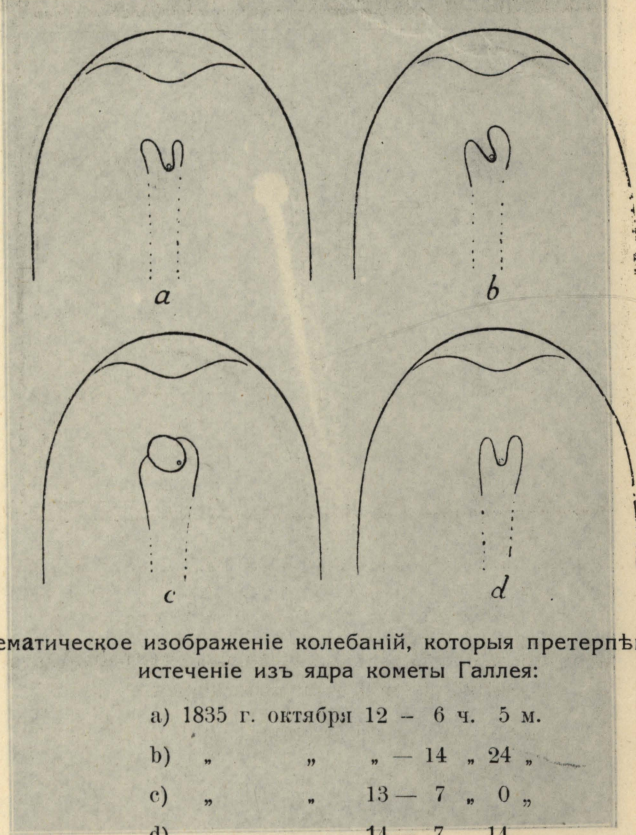


Видъ кометы Галлея въ 20-футовый телескопъ Гершеля
11 февраля 1836 г.

словленныхъ Юпитеромъ и Сатурномъ, но также относительно притяженій, исходящихъ отъ Урана и земли. Уже самое совпаденіе результатовъ заставляло предполагать, что предсказаніе вполне оправдается. Дѣйствительно, комета прошла черезъ перигелій 16 ноября, лишь на нѣсколько часовъ позже, чѣмъ предсказалъ Понтекуланъ.

Уже въ январѣ 1835 года стали тщательно искать комету, но только 5-го августа Дюмшель (Dumouchel) въ Римѣ нашелъ вблизи

предвычисленнаго мѣста слабую туманность, движеніе которой среди звѣздъ подтвердило ея тождественность съ кометою Галлея. Яркость ея быстро увеличивалась, и послѣ половины сентября ее можно было видѣть уже невооруженнымъ глазомъ. Наибольшей яркости и пышности хвоста она достигла около середины октября. 15-го числа этого мѣсяца голова ея, по словамъ Араго, была похожа на красноватую звѣзду первой величины, примѣрно, на Антаресъ, Бетельгейзе или Альдебаранъ, а хвостъ раскинулся на 20 градусовъ въ длину. На слѣдующій день длина хвоста уменьшилась уже вдвое, а 26 она была равна только 7 градусамъ. Къ сожалѣнію, ко времени наибольшаго



развитія ея яркости въ Европѣ господствовала чрезвычайно пасмурная погода, такъ что широкой публикѣ, которой въ многочисленныхъ популярныхъ сочиненіяхъ было возвѣщено о возвращеніи кометы, пришлось лишній разъ разочароваться. Въ ноябрѣ, тотчасъ послѣ прохожденія ея черезъ перигелій, комета стала невидимой, и послѣ ея вторичнаго появленія на восточной сторонѣ неба за нею тщательно слѣдили почти только одни астрономы, — между прочимъ, и I. Гершель съ мыса Доброй Надежды.

Особенное вниманіе было уделено на этотъ разъ также физическому виду кометы, такъ какъ обзоръ прохожденій ея черезъ перигелій, начиная съ 1456 года, далъ основаніе предположить, что блескъ свѣтила, съ каждымъ прохожденіемъ его черезъ перигелій, медленно, но постоянно убываетъ. Когда же приняли во вниманіе измѣненіе съ теченіемъ времени разстоянія кометы отъ солнца и земли, то нашли, что за исключеніемъ кометы 1835 года, отличавшейся недостаточной яркостью, это предположеніе вообще не подтвердилось; поэтому пока



Видимый путь кометы Галлея съ 2 окт. 1908 г. до 7 дек. 1909 г.

- | | |
|---------------------|--------------------|
| 1) 1908 г. окт. 2. | 8) 1909 г. авг. 3. |
| 2) " нояб. 25. | 9) " сент. 3. |
| 3) 1909 г. янв. 15. | 10) " 30. |
| 4) " мар. 3. | 11) " окт. 26. |
| 5) " апр. 15. | 12) " нояб. 17. |
| 6) " мая 25. | 13) " дек. 7. |
| 7) " июня 31. | |

имѣть основаній опасаться, что это свѣтило, столь важное для всей теоріи кометъ, постепенно подвергается разрушенію. Опытъ, который астрономы имѣли двумя десятилѣтіями позже на кометѣ Виеда, также періодической, не допускаетъ во всякомъ случаѣ въ этомъ отношеніи никакихъ опредѣленныхъ предсказаній; въ самомъ дѣлѣ, если бы, при непостоянствѣ этого рода свѣтилъ, комета въ теченіе столѣтій не подвергалась измѣненіямъ, то это было бы еще труднѣе объяснить, чѣмъ медленное ея разрушеніе.

По отношенію къ этому послѣднему вопросу приобретаютъ особенный интересъ наблюденія, произведенныя въ сентябрѣ и октябрѣ 1835 года различными астрономами, въ особенности Бесселемъ (Bessel) и Швабе (Schwabe), надъ ядромъ и комой кометы. При этихъ именно наблюденіяхъ замѣтили въ зрительную трубу исходящее изъ ядра и направленное къ солнцу вѣрообразное излученіе, которое имѣло видъ круговаго сектра почти въ 90 градусовъ и затѣмъ, быстро изгибаясь наружу, какъ бы соединялось съ хвостомъ. Явленіе это было тѣмъ болѣе замѣчательно, что ракетообразное излученіе совершало въ плоскости орбиты въ теченіе $4\frac{2}{3}$ сутокъ качанія на подобіе маятника. Нѣчто подобное было уже замѣчено Гейнзійусомъ (Heinsius) въ кометѣ 1744 г., а позже также въ кометахъ 1862 II и 1888 I; на эти качанія, не поддающіяся пока еще объясненію, слѣдовало бы, по нашему мнѣнію, обращать особенное вниманіе при слѣдующихъ появленіяхъ яркихъ кометъ. Бессель пытался объяснить это явленіе сопротивленіемъ эира. Но, какъ обнаружено было вычисленіями возмущеній кометы Галлея за много столѣтій, это сопротивленіе эира слѣдуетъ считать столь незначительнымъ, что приписать своеобразное качаніе упомянутаго излученія только ему одному было бы неосновательно.

Мы выше рассмотрѣли всѣ главные моменты, которые выясняютъ большое значеніе нашей кометы въ астрономіи; по крайней мѣрѣ, мы упомянули о нихъ вкратцѣ, и намъ остается только указать условія видимости этого свѣтила въ 1910 г. Такъ какъ ближайшее прохожденіе кометы черезъ перигелій, какъ мы уже неоднократно упоминали, произойдетъ, по всей вѣроятности, въ первой половинѣ апрѣля, то основаніемъ для нашихъ соображеній могутъ, безъ сомнѣнія, служить аналогичныя появленія ея въ 1066 и 1145 г.г. Комета, во время обоихъ этихъ появленій, какъ можно видѣть изъ посвященныхъ имъ выше краткихъ указаній, отличалась весьма поразительнымъ вѣшнимъ видомъ; кромѣ того, слѣдуетъ замѣтить, что комета сначала въ теченіе нѣсколькихъ дней была видна на восточной сторонѣ неба, а затѣмъ, въ концѣ апрѣля и въ началѣ мая, она наблюдалась на западной сторонѣ неба послѣ захода солнца, при чемъ она имѣла значительный блескъ. Какъ видно изъ эфемериды, которую Смартъ (Smart) успѣлъ уже вычислить, положивъ въ основаніе элементы Кроммелина, появленіе кометы въ 1910 году произойдетъ, по всей вѣроятности, при подобныхъ же условіяхъ доступности ея для невооруженнаго глаза. До прохожденія черезъ перигелій комета при наблюденіи съ земли будетъ находиться въ непосредственной близости къ солнцу и только къ концу апрѣля или въ началѣ мая она станетъ ясно видна незадолго до восхода солнца; послѣ же кратковременнаго соединенія съ солнцемъ она опять покажется, но уже во время сумерекъ, на западной сторонѣ неба и будетъ доступна невооруженному глазу, по всей вѣроятности, въ теченіе всего мая, при чемъ яркость ея станетъ быстро убывать. Такъ какъ комета будетъ затѣмъ медленно двигаться по направленію отъ Малаго Пса къ Гидрѣ и при этомъ будетъ находиться къ югу отъ солнца, то условія наблюденія ея будутъ, безъ сомнѣнія, болѣе благоприятными для южныхъ обсерваторій, чѣмъ для сѣверныхъ. Въ день

ея наибольшей близости къ землѣ, т. е. 12 мая, комета вообще не будетъ видна, такъ какъ этотъ моментъ близко совпадаетъ съ моментомъ соединенія кометы съ солнцемъ. Тѣмъ интереснѣе будетъ полное солнечное затмѣніе, которое произойдетъ 8 мая 1910 г., такъ какъ можно будетъ наблюдать не только солнечную корону, но и яркую комету вблизи нея. Къ сожалѣнію, центральная зона этого затмѣнія падаетъ почти вся на полярную область, лежащую къ югу отъ Австраліи; только южный конецъ Тасманіи находится подъ сомнѣніемъ относительно пригодности этого пункта для наблюденія.

Въ виду послѣднихъ успѣховъ фотографіи неба, открытіе возвращающейся кометы является вопросомъ только нѣсколькихъ мѣсяцевъ *). Въ этомъ отношеніи интересно изслѣдованіе Голетчека, который, на основаніи извѣстныхъ предположеній, опредѣлилъ для послѣднихъ мѣсяцевъ яркость кометы, переступившей уже орбиту Юпитера. Онъ нашелъ, что въ октябрѣ и ноябрѣ 1908 г. комета будетъ имѣть яркость звѣзды 18-ой величины, отъ января до марта 1909 г. — 17-й. Въ сентябрѣ 1909 года она, по всей вѣроятности, достигнетъ 15-ой величины, а въ октябрѣ того же года — 14-ой, такъ что, начиная съ этого момента, она сдѣлается доступной зрительнымъ трубамъ средней силы.

Дальнѣйшія свѣдѣнія о кометѣ Галлея, представляющія интересъ и для болѣе широкихъ круговъ наблюдателей, можно будетъ сообщить только тогда, когда открытіе ея удачно осуществится и предсказанный моментъ прохожденія ея черезъ перигелій въполнѣ оправдается.

Къ отчету о рѣшеніяхъ задачи на премію № 2.

Въ краткомъ отчетѣ о присланныхъ рѣшеніяхъ задачи на премію № 2, который былъ помѣщенъ въ предыдущемъ номерѣ „Вѣстника“, было указано, что въ редакцію поступило 18 рѣшеній. Эти рѣшенія разбиваются на три типа. Рѣшенія перваго типа заключаются въ томъ, что въ основное уравненіе (1)**) вмѣсто X и Y подставляются близнеарныя формы (2) и (3) и затѣмъ приравниваются коэффициенты соответствующихъ членовъ въ правой и лѣвой части. Такимъ образомъ получается система неопредѣленныхъ уравненій (5-10) между коэффициентами $A, B, C, a, \beta, \gamma, a', \beta', \gamma'$. Задача заключается въ томъ, чтобы выразить эти коэффициенты въ зависимости отъ достаточнаго числа произвольныхъ параметровъ такъ, чтобы удовлетворить этимъ

*) Какъ мы уже сообщали, комета уже открыта и именно фотографическимъ путемъ. Въ настоящее время комета доступна уже для наблюденія въ телескопъ.

**) Номера въ ссылкахъ относятся къ помѣщенному ниже рѣшенію г. Григорьева.

уравненіямъ. Къ этому типу принадлежитъ и рѣшеніе г. Григорьева. Авторы рѣшеній второй категоріи вводятъ въ разсмотрѣніе корни ω и ω' трехчлена $A + Bt + Ct^2$; если мы выберемъ значенія x и y такъ, чтобы отношеніе y/x было равно ω или ω' , то $F(X, Y)$ должно обращаться въ нуль; исходя изъ этого, можно установить соотношенія между коэффициентами, которыя приводятъ къ рѣшенію задачи. Къ этому типу принадлежитъ рѣшеніе г. Шейнфинкеля. Наконецъ, въ рѣшеніяхъ третьяго типа исходныя формы преобразовываются въ эквивалентныя формы болѣе простаго вида; затѣмъ задача рѣшается относительно этихъ упрощенныхъ формъ и рѣшенія перечисляются обратно къ исходнымъ формамъ. Лучшее изъ трехъ рѣшеній этого типа прислано изъ Болгаріи; однако, авторъ недостаточно правильно учелъ основное условіе, что коэффициенты должны быть цѣлыми числами.

Эти работы, между которыми есть немало талантливыхъ, лишній разъ указываютъ, съ какой осторожностью математикъ долженъ дѣлать свои выводы. Такъ, авторы, производя дѣленіе на то или иное выраженіе, не изслѣдуютъ, что будетъ, если это выраженіе обратится въ нуль, и такимъ образомъ теряютъ группы рѣшеній. Авторъ прекрасной работы, озаглавленной „Перемноженіе квадратичныхъ формъ“, получая соотношеніе $B^2 = (\alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'')^2$, глухо утверждаетъ, что „изъ двухъ рѣшеній этого уравненія, не ослабляя общности рѣшенія задачи, можно удержатъ только одно“. Между тѣмъ авторъ теряетъ такимъ образомъ цѣлую группу рѣшеній: другія рѣшенія утрачены тѣмъ же авторомъ вслѣдствіе того, что онъ беретъ условія необходимыя вмѣсто достаточныхъ. Авторъ очень хорошаго рѣшенія (Уфа), придя къ такому моменту, гдѣ изслѣдованіе разбивается на два вышнимъ образомъ сходныхъ случая, изслѣдуетъ одинъ изъ нихъ и утверждаетъ, что и второй случай приводитъ къ тому же результату; между тѣмъ второй случай приводитъ къ совершенно другому результату.

Въ заключеніе позволяемъ себѣ замѣтить, что настоящая задача вызвала совершенно исключительный интересъ и даже привлекла вниманіе выдающихся математиковъ, хотя и не пожелавшихъ, конечно, принять участіе въ конкурсѣ. Мы считаемъ своимъ долгомъ принести профессору В. П. Ермакову глубокую благодарность за предложенную имъ интересную задачу.

Рѣшеніе задачи на премію № 2.

Е. Григорьева (Саратовъ).

ЗАДАЧА НА ПРЕМІЮ № 2.

Подъ квадратичной формой подразумѣвается выраженіе

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

въ которомъ x и y — переменныя, а коэффициенты A , B и C — нѣкоторые постоянныя цѣлыя числа.

Требуется найти такую квадратичную форму, которая обладала бы свойствомъ перемноженія:

$$f(x, y) \cdot f(x_1, y_1) = f(X, Y). \quad (1)$$

При этомъ X и Y должны выражаться черезъ x , y , x_1 , y_1 слѣдующимъ образомъ:

$$X = axx_1 + \beta(xy_1 + yx_1) + \gamma yy_1, \quad (2)$$

$$Y = a'xx_1 + \beta'(xy_1 + yx_1) + \gamma'yy_1. \quad (3)$$

Задача состоитъ въ опредѣленіи девяти цѣлыхъ чиселъ A , B , C , a , β , γ , a' , β' , γ' такъ, чтобы равенство (1) обращалось въ тождество при произвольныхъ значеніяхъ x , y , x_1 , y_1 . Требуется найти самое общее рѣшеніе задачи.

Проф. В. Ермаковъ.

Пусть форма

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

обладаетъ свойствомъ сохранять видъ при умноженіи (допускаетъ конформное умноженіе). Будемъ искать значенія X и Y подъ тѣмъ условіемъ, чтобы существовало тождество

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2) = AX^2 + BXY + CY^2, \quad (4)$$

предполагая, что значенія X и Y здѣсь опредѣляются равенствами (2) и (3). Вставивъ эти значенія въ (4) и приравнявая коэффициенты

при соответствующих членах правой и левой части, получаемъ систему уравненій:

$$Aa^2 + Baa' + Ca'^2 = A^2, \quad (5)$$

$$2Aa\beta + B(a\beta' + a'\beta) + 2Ca'\beta' = AB, \quad (6)$$

$$A\beta^2 + B\beta\beta' + C\beta'^2 = AC, \quad (7)$$

$$2A\beta\gamma + B(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + 2C\beta'\gamma' = BC, \quad (8)$$

$$A\gamma^2 + B\gamma\gamma' + C\gamma'^2 = C^2, \quad (9)$$

$$2Aa\gamma + B(a\gamma' + a'\gamma) + 2Ca'\gamma' = B^2 - 2AC, \quad (10)$$

изъ которыхъ послѣднее первоначально получается въ болѣе сложномъ видѣ, но тотчасъ же упрощается посредствомъ уравненія (7).

1. Прежде, чѣмъ разсматривать эту общую систему, обратимся къ случаю, когда дискриминантъ $D = 4AC - B^2$ данной формы $f(x, y)$ равенъ нулю.

Извѣстно, что при этомъ условіи общій видъ бинарной квадратичной формы будетъ:

$$\mu(ax + by)^2, \quad (11)$$

гдѣ μ , a и b — постоянныя цѣлыя числа.

Легко вывести необходимое условіе, при которомъ форма (11) допускаетъ конформное умноженіе. Тождество (4) принимаетъ видъ:

$$\mu^2(ax + by)^2(ax_1 + by_1)^2 = \mu(aX + bY)^2, \quad (12)$$

откуда прямо слѣдуетъ, что μ должно быть точнымъ квадратомъ; въ такомъ случаѣ, не нарушая общности изслѣдованія, можно считать $\mu = 1^*$.

Покажемъ, что необходимое условіе $\mu = 1$ есть въ тоже время и достаточное. Принимая въ равенствѣ (12) $\mu = 1$ и извлекая изъ обѣихъ частей его корень квадратный, имѣемъ:

$$(ax + by)(ax_1 + by_1) = \pm (aX + bY). \quad (13)$$

Отсюда заключаемъ, что каждой парѣ значеній X и Y соответствуетъ пара $-X$ и $-Y^{**}$; а потому для дальнѣйшаго изслѣдованія

* Дѣйствительно, если $\mu = \lambda^2$, то форма (11) преобразуется въ $(\lambda ax + \lambda by)^2$ или въ $(a_1x + b_1y)^2$, гдѣ $a_1 = \lambda a$ и $b_1 = \lambda b$.

** То же самое можно сказать и вообще относительно тождества (4); вслѣдствіе чего, ограничиваясь сдѣланнымъ теперь замѣчаніемъ, во всемъ послѣдующемъ изложеніи мы не будемъ больше упоминать о рѣшеніи $-X$ и $-Y$, которое, такимъ образомъ, будетъ подразумѣваться само собой.

достаточно удержать въ правой части тождества (13) одинъ только знак $+$. Вставляя сюда значенія X (2) и Y (3) и приравнивая коэффициенты при соответственныхъ членахъ обихъ частей тождества (13), найдемъ систему неопредѣленныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} aa + ba' &= a^2, \\ ab + b\beta' &= ab, \\ ay + by' &= b^2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Каждое изъ уравненій этой системы имѣетъ очевидное частное рѣшеніе: напримѣръ, первое удовлетворяется при $a = a$, $a' = 0$; второе — при $\beta = b$, $\beta' = 0$ или при $\beta = 0$, $\beta' = a$; третье — при $\gamma = 0$, $\gamma' = b$. По этимъ частнымъ рѣшеніямъ можно извѣстнымъ приѣмомъ составить общія рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ. Такимъ образомъ, получаются формулы:

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(a - \frac{b}{d} t\right) x x_1 + \left(b - \frac{b}{d} u\right) (x y_1 + y x_1) + \frac{b}{d} y y_1, \\ Y &= \frac{a}{d} t x x_1 + \frac{a}{d} u (x y_1 + y x_1) + \left(b - \frac{a}{d} v\right) y y_1, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

гдѣ d — общій наибольшій дѣлитель коэффициентовъ a и b , а t , u , v — произвольныя цѣлыя числа.

Итакъ, квадратичная форма, дискриминантъ которой равенъ 0, допускаетъ конформное умноженіе только тогда, когда форма имѣетъ видъ $(ax + by)^2$; въ такомъ случаѣ задача разрѣшается безконечнымъ числомъ способовъ по формуламъ (15), содержащимъ произвольныя цѣлыя числа t , u и v .

Замѣчаніе. Особый случай, когда дискриминантъ квадратичной формы есть нуль, имѣетъ мѣсто при условіи $B = 0$ и $C = 0$; однако, тогда квадратичная форма перестаетъ быть бинарной и превращается въ форму Ax^2 съ однимъ переменнымъ. Такая форма допускаетъ конформное умноженіе при условіи $A =$ точному квадрату, напримѣръ, a^2 . Равенство (4) здѣсь имѣетъ видъ:

$$Ax^2 Ax_1^2 = AX^2$$

и обращается въ тождество при $X = \pm axx_1$.

2. Пусть теперь дискриминантъ $D = 4AC - B^2$ отличенъ отъ 0. Изслѣдуемъ сначала случай, когда коэффициенты формы $A \neq 0$ и $C \neq 0$. Пусть β и β' — цѣлыя числа, удовлетворяющія соотношенію (7). Опредѣлимъ значенія коэффициентовъ a и a' , а затѣмъ γ и γ' въ функцияхъ β и β' . Для этого обратимся сначала къ системѣ уравненій (5), (6) и (7). Разсматривая лѣвыя части этихъ уравненій замѣчаемъ, что такой видъ будутъ имѣть коэффициенты формы $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, если ее подвергнуть преобразованію посредствомъ субституціи

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{pmatrix}.$$

На этомъ основаніи по свойству дискриминанта преобразованной формы имѣемъ:

$$D' = D\Delta^2, \quad (16)$$

гдѣ $\Delta = a\beta' - a'\beta$ — определитель субституціи, а $D = 4AC - B^2$ и $D' = A^2(4AC - B^2)$ — дискриминанты данной и преобразованной формъ, при чемъ значеніе послѣдняго дискриминанта составлено по правымъ частямъ уравненій (5), (6) и (7). Такъ какъ $4AC - B^2 \neq 0$, то изъ соотношенія (16) имѣемъ:

$$a\beta' - a'\beta = \pm A^* \quad (17)$$

въ функціи β и β' .

Найденными двумя уравненіями (17) первой степени совмѣстно съ уравненіемъ (6) мы будемъ пользоваться при опредѣленіи a и a'

Обращаемся сначала къ системѣ:

$$\begin{cases} 2Aa\beta + B(a\beta' + a'\beta) + 2Ca'\beta' = AB, \\ a\beta' - a'\beta = A. \end{cases} \quad (18)$$

Первое изъ этихъ уравненій вслѣдствіе второго принимаетъ видъ:

$$Aa\beta + (B\beta + C\beta')a' = 0 \quad (19)$$

Умножая уравненіе (18) на $A\beta$, а уравненіе (19) на β' и вычитая, получаемъ:

$$(B\beta\beta' + C\beta'^2 + A\beta^2)a' = -A^2\beta,$$

откуда, благодаря соотношенію (7), имѣемъ:

$$Ca' = -A\beta. \quad (20)$$

Умножая затѣмъ уравненіе (18) на $B\beta + C\beta'$, а уравненіе (19) на β и складывая, послѣ упрощенія получаемъ:

$$Ca = B\beta + C\beta'. \quad (21)$$

Уравненія (20) и (21) опредѣляютъ a и a' въ функціи β и β' . а именно:

$$a = \beta' + \frac{B\beta}{C} \quad \text{и} \quad a' = -\frac{A\beta}{C}. \quad (22)$$

Обращаемся теперь ко второму изъ уравненій (17):

$$a\beta' - a'\beta = -A \quad (23)$$

и разсматриваемъ его совмѣстно съ уравненіемъ (6), которое вслѣдствіе уравненія (23) принимаетъ видъ:

$$(A\beta + B\beta')a + Ca'\beta' = 0 \quad (24)$$

*) Мы воспользовались здѣсь соображеніями, которые быстро приводятъ къ уравненію (17); однако, это уравненіе можетъ быть выведено и независимо отъ свойства дискриминанта, для чего слѣдуетъ взять разность между учетвереннымъ произведеніемъ уравненій (5) и (7) и квадратомъ уравненія (6).

Исключая изъ уравненій (23) и (24) сначала a' , а потомъ a и принимая при этомъ во вниманіе уравненіе (7), находимъ два слѣдующихъ:

$$a = -\beta' \text{ и } a' = \frac{A\beta + B\beta'}{C}. \quad (25)$$

Переходя теперь къ опредѣленію γ и γ' въ функціи β и β' , мы должны рѣшить систему уравненій (8) и (9) точно такъ же, какъ рѣшали систему уравненій (5) и (6). Однако, можно избѣжать этого повторенія, если обратить вниманіе на то обстоятельство, что уравненія (5) и (6) переходятъ соответственно въ уравненія (9) и (8) при замѣнѣ

$$A, C, a, \beta, \gamma, a', \beta', \gamma'$$

соотвѣтственно черезъ

$$C, A, \gamma', \beta', a', \gamma, \beta, a,$$

при чемъ эта замѣна не вліяетъ на соотношеніе (7), связывающее β и β' . Поэтому для опредѣленія γ и γ' достаточно произвести указанную замѣну въ формулахъ (22) и (25).

Тогда получимъ:

$$\gamma' = \beta + \frac{B\beta'}{A} \text{ и } \gamma = -\frac{C\beta'}{A} \quad (26)$$

$$\gamma' = -\beta \text{ и } \gamma = \frac{C\beta' + B\beta}{A}. \quad (27)$$

Комбинируя теперь значенія a и a' , содержащіяся въ формулахъ (22) и (25), со значеніями γ и γ' (формулы 26 и 27), мы получимъ вообще 4 системы рѣшеній a, a', γ и γ' , удовлетворяющихъ уравненіямъ (5), (6), (8) и (9) при условіи, что β и β' подчинены соотношенію (7). Однако, изъ этихъ 4 рѣшеній придется удержать только два. Дѣло въ томъ, что до сихъ поръ мы совсѣмъ не принимали во вниманіе уравненія (10), тогда какъ тожество (4) требуетъ, чтобы и уравненіе (10) было удовлетворено. Непосредственное испытаніе убѣждаетъ насъ, что уравненію (10) удовлетворяетъ: 1) система значеній (22) и (26) и 2) система (25) и (27); между тѣмъ какъ значенія (22) и (27), а также (25) и (26) обращаютъ уравненіе (10) въ равенство

$$4AC - B^2 = 0,$$

которое въ разбираемомъ нами случаѣ не имѣетъ мѣста.

Итакъ, равенство (4) обращается въ тожество при помощи формулъ (2) и (3), гдѣ коэффициенты имѣютъ либо значенія:

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta' + \frac{B\beta}{C}, & \gamma &= -\frac{C\beta'}{A}, \\ a' &= -\frac{A\beta}{C}, & \gamma' &= \beta + \frac{B\beta'}{A}, \end{aligned} \right\} \text{ I-ое рѣшеніе.}$$

либо значенія:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\beta', \quad \gamma = \frac{C\beta' + B\beta}{A}, \\ \alpha' &= \frac{A\beta + B\beta'}{C}, \quad \gamma' = -\beta; \end{aligned} \right\} \text{ II-ое рѣшеніе.}$$

при этомъ предполагается, что β и β' удовлетворяютъ соотношенію (7).

Задача требуетъ, чтобы при цѣлыхъ A , B и C коэффициенты формулъ (2) и (3) были также цѣлыми числами. Это заставляетъ насъ установить нѣкоторые дополнительные условія отдѣльно для I-го и II-го рѣшенія.

I-ое рѣшеніе. Пусть d — общій наибольшій дѣлитель A , B и C ; полагая:

$$A = ad, \quad B = bd, \quad C = cd,$$

гдѣ a , b и c — цѣлыя числа, не имѣющія общихъ множителей, находимъ, что значенія коэффициентовъ α , α' , γ и γ' приводятся къ виду:

$$\alpha = \beta' + \frac{b\beta}{c}, \quad \alpha' = -\frac{a\beta}{c}, \quad \gamma = -\frac{c\beta'}{a}, \quad \gamma' = \beta + \frac{b\beta'}{a} \quad (28)$$

и будутъ цѣлыми числами только въ томъ случаѣ, если β будетъ дѣлиться на c и β' на a . Дѣйствительно, при $\frac{\beta}{c} = n$, гдѣ n — несократимая дробь, имѣемъ:

$$\beta = cn, \quad a - \beta' = bn \quad \text{и} \quad \alpha' = -an;$$

слѣдовательно, знаменатель несократимой дроби n долженъ одновременно дѣлить c , b и a , иначе числа β , $a - \beta'$ и α' не будутъ цѣлыми; а такъ какъ взаимно простые числа имѣютъ общимъ дѣлителемъ только 1, то заключаемъ, что n должно быть цѣлымъ числомъ. Точно такъ же доказывается, что $\beta' = am$, гдѣ m — цѣлое число.

Итакъ, значеніе коэффициентовъ α , α' , β , β' , γ и γ' представляются въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= am + bn, \quad \beta = cn, \quad \gamma = -cm, \\ \alpha' &= -an, \quad \beta' = am, \quad \gamma' = cn + bm, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

гдѣ a , b , c , m и n произвольныя цѣлыя числа.

Соотвѣтственно этому для A , B и C мы имѣемъ значенія:

$$\left. \begin{aligned} A &= ad, \quad B = bd, \quad C = cd, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

при чемъ

$$d = am^2 + bmn + cn^2$$

находится изъ соотношенія (7), если въ него подставить приведенныя значенія β , β' , A , B и C .

Въ частномъ случаѣ, при $m = 1$, $n = 0$ имѣемъ форму:

$$a(ax^2 + bxy + cy^2),$$

обладающую свойствомъ конформнаго умноженія; при этомъ значеніи X и Y на основаніи равенствъ (29) опредѣляются формулами:

$$X = axx_1 - cyu_1,$$

$$Y = a(xy_1 + yx_1) + byu_1.$$

II-ое рѣшеніе. Въ этомъ рѣшеніи β , γ , α' и β' будемъ считать произвольными дѣлыми числами, а коэффициенты a и γ' опредѣлимъ равенствами $a = -\beta'$ и $\gamma' = -\beta$; коэффициенты же формы A , B и C можно выразить въ функціи β , γ , α' и β' . Въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ этого рѣшенія имѣемъ:

$$(88) \quad A\beta + B\beta' = C\alpha' \quad (31)$$

$$(89) \quad B\beta + C\beta' = A\gamma. \quad (32)$$

Представляя соотношеніе (7) въ видѣ:

$$(14) \quad \beta(A\beta + B\beta') + C\beta^2 = AC,$$

получаемъ вслѣдствіе (31):

$$(15) \quad A = \beta'^2 + \alpha'\beta; \quad (33)$$

подобнымъ образомъ изъ (7) при помощи (32) имѣемъ:

$$(16) \quad C = \beta^2 + \gamma\beta'^*. \quad (34)$$

Коэффициентъ B можно опредѣлить изъ того же соотношенія (7), внося въ него найденныя значенія A и C ; тогда получимъ:

$$(17) \quad B = \alpha'\gamma - \beta\beta'. \quad (35)$$

Итакъ, квадратичная форма $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, дискриминантъ которой, равно какъ и коэффициенты A и C отличны отъ нуля, обладаетъ свойствомъ конформнаго умноженія либо въ случаѣ, когда A , B и C опредѣляются формулами I-го рѣшенія (30), либо когда они опредѣляются формулами II-го рѣшенія (33, 34 и 35). Въ томъ и другомъ случаѣ значенія X и Y доставляются формулами (2) и (3), гдѣ коэффициенты для I-го рѣшенія вычисляются по равенствамъ (29), а для II-го рѣшенія они произвольны, кромѣ двухъ:

$$a = -\beta' \quad \text{и} \quad \gamma = -\beta.$$

Прибавимъ также, что ни въ томъ ни въ другомъ рѣшеніи не исключается возможность такого выбора произвольныхъ, при которыхъ коэффициентъ данной формы $B = 0$.

*) Замѣтимъ здѣсь, что равенство (33) можетъ быть получено изъ равенства (23), если положить въ немъ $a = -\beta'$; равенство же (34) выводится изъ равенства (33) замѣной A , β , α' , β' соответственно черезъ C , β' , γ и β .

3. Переходимъ къ случаю, когда при дискриминантѣ, отличномъ отъ нуля, одинъ изъ крайнихъ коэффициентовъ квадратичной формы, напримѣръ, $C = 0$; слѣдовательно, мы будемъ предполагать, что

$$A \neq 0 \text{ и } B \neq 0,$$

т. е. форма имѣетъ видъ:

$$Ax^2 + Bxy^*).$$

Легко видѣть, что основная система уравненій теперь принимаетъ видъ:

$$Aa^2 + Ba'a' = A^2, \quad (36)$$

$$2Aa\beta + B(a\beta' + a'\beta) = AB, \quad (37)$$

$$A\beta^2 + B\beta\beta' = 0, \quad (38)$$

$$2A\beta\gamma + B(\beta\gamma' + \beta'\gamma) = 0, \quad (39)$$

$$A\gamma^2 + B\gamma\gamma' = 0, \quad (40)$$

$$2Aa\gamma + B(a\gamma' + a'\gamma) = B^2. \quad (41)$$

Начнемъ изслѣдованіе этой системы съ уравненія (38):

$$\beta(A\beta + B\beta') = 0. \quad (42)$$

Это уравненіе удовлетворяется, когда либо

$$\beta = 0, \quad (43)$$

либо

$$A\beta + B\beta' = 0.$$

Замѣтимъ, однако, что существованіе одного изъ этихъ равенствъ исключаетъ возможность существованія другого; въ противномъ случаѣ уравненіе (37), представленное въ видѣ:

$$(A\beta + B\beta')a + (Aa + Ba')\beta = AB,$$

приводитъ къ соотношенію

$$AB = 0,$$

что противно положенію:

$$A \neq 0 \text{ и } B \neq 0.$$

1-й случай. Пусть

$$\beta = 0.$$

*) Принять условіе $B \neq 0$ насъ заставляетъ то обстоятельство, что дискриминантъ формы отличенъ отъ нуля.

Такъ какъ

$$A\beta + B\beta' \neq 0,$$

то изъ уравненія (39), представленнаго въ формѣ:

$$\beta (A\gamma + B\gamma') + \gamma (A\beta + B\beta') = 0,$$

слѣдуетъ $\gamma = 0$; послѣ этого видимъ, что уравненіе (40) удовлетворяется, уравненіе (37) при $\beta = 0$ даетъ:

$$A = a\beta'; \quad (42)$$

уравненіе (41) вслѣдствіе $\gamma = 0$ приводится къ виду:

$$B = a\gamma'; \quad (43)$$

наконецъ, внося эти значенія A и B въ уравненіе (36), получаемъ соотношеніе:

$$a^2(a\beta' + a\gamma' - \beta'^2) = 0. \quad (44)$$

Равенства (42) и (43), между прочимъ, показываютъ, что a , β' и γ' все отличны отъ нуля; въ противномъ случаѣ выйдетъ, что или $A = 0$ или $B = 0$. Поэтому изъ соотношенія (44) имѣемъ:

$$-\frac{a'}{\beta'} = \frac{a - \beta'}{\gamma'}.$$

Полагая каждую изъ этихъ дробей равной несократимой дроби $\frac{n}{m}$, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} a' &= -an, & a - \beta' &= bn, \\ \beta' &= am, & \gamma' &= bm, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

послѣ чего изъ равенствъ (42) и (43) получаемъ:

$$A = a(am^2 + bmn) \quad \text{и} \quad B = b(am^2 + bmn). \quad (46)$$

Выводъ, къ которому мы теперь пришли, заключается, какъ частный случай, въ общихъ формулахъ (29) и (30) I-го рѣшенія. Дѣйствительно, условіе $C = 0$ приводитъ къ $c = 0$, вслѣдствіе чего формулы I-го рѣшенія превращаются въ формулы (45) и (46); такимъ образомъ обнаруживается, что формулы (29) и (30), выведенныя въ предположеніи $C \neq 0$, распространяются также и на случай $C = 0$. Очевидно, аналогичное заключеніе можно сдѣлать и по поводу случая $A = 0$ при $C \neq 0$.

2-й случай. Пусть

$$A\beta + B\beta' = 0. \quad (47)$$

Вслѣдствіе того, что $\beta \neq 0$, изъ уравненія (39) имѣемъ:

$$A\gamma + B\gamma' = 0; \quad (48)$$

послѣ этого уравненія (36), (37) и (41) превращаются соответственно въ слѣдующія:

$$\alpha(A\alpha + B\alpha') = A^2, \quad (49)$$

$$\beta(A\alpha + B\alpha') = AB, \quad (50)$$

$$\gamma(A\alpha + B\alpha') = B^2; \quad (51)$$

уравненіе же (38) оказывается удовлетвореннымъ.

Изъ послѣдней системы уравненій слѣдуетъ, что α , β , γ и $A\alpha + B\alpha'$ отличны отъ нулей, иначе A или B будутъ равны 0.

Равенства (47) и (48) даютъ:

$$\frac{A}{B} = -\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{\gamma'}{\gamma}. \quad (52)$$

Съ другой стороны, изъ уравненій (49), (50) и (51) имѣемъ:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma'}. \quad (53)$$

Сравнивая (53) и (52), находимъ:

$$\alpha = -\beta' \quad \text{и} \quad \gamma' = -\beta; \quad (54)$$

кроме того, тѣ же равенства (52) и (53) даютъ соответственно:

$$\beta'\gamma = \beta\gamma' \quad \text{и} \quad \beta^2 = \alpha\gamma$$

— два соотношенія, которыя эквивалентны другъ другу другъ, ибо посредствомъ равенства (54) преобразуются въ одно слѣдующее:

$$\beta^2 + \beta\gamma = 0. \quad (55)$$

Для вывода значеній A и B представляемъ уравненіе (50) сначала въ видѣ:

$$A = \frac{A}{B} \alpha\beta + \alpha'\beta,$$

а затѣмъ въ видѣ:

$$B = \alpha\beta + \frac{B}{A} \alpha'\beta;$$

замѣняя здѣсь отношеніе $\frac{A}{B}$ по равенству (52) черезъ $-\frac{\beta'}{\beta}$ и пользуясь соотношеніями (54), имѣемъ соответственно:

$$A = \beta'^2 + \alpha'\beta,$$

$$B = \alpha'\gamma - \beta\beta'.$$

Результаты, къ которымъ мы теперь пришли, суть не что иное, какъ слѣдствія формулъ (33), (34) и (35) II-го рѣшенія, которыя такимъ образомъ оказываются распространенными и на случай $C = 0$.

4. Покажемъ, наконецъ, что общія формулы I-го и II-го рѣшенія примѣнны также и къ случаю, когда $A=0$ и $C=0$, и только коэффициентъ $B \neq 0$.

Въ самомъ дѣлѣ система уравненій (5), (6), (7), (8), (9) и (10) теперь переходитъ въ слѣдующую:

$$aa' = 0, \quad (56)$$

$$a\beta' + a'\beta = 0, \quad (57)$$

$$\beta\beta' = 0, \quad (58)$$

$$\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0, \quad (59)$$

$$\gamma\gamma' = 0, \quad (60)$$

$$a\gamma' + a'\gamma = B. \quad (61)$$

Изъ послѣдняго уравненія заключаемъ, что не могутъ быть нулями одновременно a и a' , a и γ , a' и γ' , γ и γ' , иначе послѣдуетъ выводъ $B=0$. Имѣя это въ виду полагаемъ:

1-й случай. $a' = 0$; тогда предыдущая система уравненій даетъ послѣдовательно:

$$\beta' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{и} \quad B = a\gamma',$$

гдѣ a и γ' остаются произвольными цѣлыми числами; задача въ такомъ случаѣ рѣшается формулами:

$$X = axx_1 \quad \text{и} \quad Y = \gamma'yy_1.$$

Тотъ же результатъ получается изъ общихъ формулъ (29) и (30) I-го рѣшенія въ предположеніи $A=0$ и $C=0$. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$a=0, \quad c=0;$$

слѣдовательно:

$$a = bn, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad a' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = bm, \quad B = b^2mn = a\gamma'.$$

2-й случай. $a=0$; система уравненій (56), (57), (59), (60) и (61) даетъ послѣдовательно:

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0, \quad B = a'\gamma,$$

при чемъ a' и γ будутъ произвольными цѣлыми числами. Формулы (2) и (3) переходятъ въ слѣдующія:

$$X = \gamma yy_1, \quad Y = a'xx_1.$$

Къ тому же выводу мы придемъ, рассматривая формулы II-го рѣшенія при условіи $A=0$ и $C=0$. Въ самомъ дѣлѣ, равенства (33) и (34) превращаются въ уравненія:

$$\beta^2 + a'\beta = 0 \quad \text{и} \quad \beta^2 + \gamma\beta' = 0, \quad (62)$$

которые показываютъ, что, если одно изъ количествъ β или β' есть 0, то и другое будетъ нулемъ, въ этомъ случаѣ по формулѣ (35) имѣ

емъ. $B = a'\gamma$, гдѣ a' и γ произвольныя цѣлыя числа, отличныя отъ 0; этотъ - то результатъ и нужно было обнаружить; если же $\beta \neq 0$ и $\beta' \neq 0$, то изъ уравненій (62) имѣемъ:

$$a' = -\frac{\beta^2}{\beta} \text{ и } \gamma = -\frac{\beta^2}{\beta'}, \text{ послѣ чего формула (35) даетъ } B = 0, \text{ а}$$

потому послѣднее предположеніе не должно имѣть мѣста.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ при дискриминантѣ, отличномъ отъ 0, рѣшеніе задачи содержится либо въ формулахъ (29) и (30) I-го рѣшенія, либо въ формулахъ (33), (34) и (35) II-го рѣшенія.

Отъ Распорядительнаго Комитета XII Съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей.

Съ 28-го декабря 1909 г. по 6-е января 1910 г. въ Москвѣ имѣетъ быть XII Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей на слѣдующихъ основаніяхъ:

1) XII Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ имѣетъ цѣлью способствовать ученой и учебной дѣятельности на поприщѣ естественныхъ наукъ, направлять эту дѣятельность, главнымъ образомъ, на ближайшее изслѣдованіе Россіи и доставлять русскимъ естествоиспытателямъ случай лично знакомиться между собою.

2) Членомъ Съѣзда можетъ быть всѣхъ, кто научно занимается естествознаніемъ; но правами голоса на Съѣздѣ пользуются только ученые, напечатавшіе самостоятельное сочиненіе или изслѣдованіе по естественнымъ наукамъ, и преподаватели этихъ наукъ въ высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Никакого диплома на званіе члена XII Съѣзда не выдается.

3) Засѣданія Съѣзда бываютъ общія и частныя (или по секціямъ); въ общихъ засѣданіяхъ читаются статьи общенѣренныя и обсуждаются вопросы, касающіеся всего Съѣзда: въ частныхъ засѣданіяхъ сообщаются и разбираются изслѣдованія и наблюденія, имѣющія болѣе специальное значеніе для одной изъ отраслей естествознанія.

4) Отдѣленія на Съѣздѣ полагаются слѣдующія: а) по математикѣ съ подсекціями механики и астрономіи, б) физикѣ, в) физической географіи и метеорологіи съ подсекціей воздухоплаванія, д) химіи, е) минералогіи и геологіи, ф) ботаникѣ, г) зоологіи, h) анатоміи и физиологіи человѣка и животныхъ съ подсекціей гистологіи и эмбриологіи, i) географіи, этнографіи и антропологіи съ подсекціей статистики, к) агрономіи, л) научной медицинѣ и м) научной гігіенѣ.

5) Члены Академіи Наукъ, преподаватели университетовъ и другихъ учебныхъ заведеній, желающіе принять участіе въ Съѣздѣ, могутъ получать для этой цѣли командировки, срокомъ отъ двухъ до четырехъ недѣль, смотря по разстоянію ихъ мѣстожителства отъ Москвы.

Общій порядокъ XII Съѣзда предполагается такой: 28-го декабря 1909 г. — открытіе съѣзда и первое общее собраніе *); 1-го или 2-го января 1910 г. второе общее собраніе; 6 января заключительное общее собраніе и закрытіе Съѣзда; 29, 30, 31 декабря и 2, 3, 4 и 5 января засѣданія секцій.

*) 27 декабря вечеромъ предположено предварительное собраніе для взаимнаго ознакомленія членовъ и разъясненія вопроса о выборѣ 28 декабря должностныхъ лицъ Съѣзда.

По примѣру предшествовавшихъ Сѣздовъ, каждый членъ XII Сѣзда вноситъ въ его кассу три рубля исключительно для научныхъ цѣлей и на нужды Сѣзда.

Для предварительныхъ работъ по устройству XII Сѣзда физико-математическимъ факультетомъ Императорскаго Московскаго университета, по соглашенію съ медицинскимъ факультетомъ, образованъ Распорядительный Комитетъ, утвержденный Совѣтомъ Университета. Въ составъ Комитета вошли слѣдующіе профессора: предсѣдатель Распорядительнаго Комитета XII Сѣзда Д. Н. Анучинъ (онъ же завѣдующій секціею географіи, этнографіи и антропологіи); товарищъ предсѣдателя А. П. Павловъ; члены: Н. А. Умовъ (завѣдующій секціею физики), К. А. Андреевъ, А. П. Сабанѣевъ, К. А. Тимирязевъ (завѣдующій секціею ботаники), А. П. Соколовъ, Н. Е. Жуковскій (завѣдующій секціею математики и подсекціею воздухоплаванія), В. К. Цераскій (завѣдующій подсекціею астрономіи), М. А. Мензбиръ (завѣдующій секціею зоологіи), Н. Ю. Зографъ, В. К. Млодзевскій, Н. Д. Зелинскій (завѣдующій секціею химіи), Л. К. Лахтинъ, В. И. Вернадскій (завѣдующій секціею минералогіи и геологіи), П. Н. Лебедевъ, И. А. Каблуковъ, А. Н. Сабанинъ (завѣдующій секціею агрономіи), Д. Ѳ. Егоровъ, С. А. Чаплыгинъ (завѣдующій подсекціею механики), М. И. Голенинъ, А. М. Настюковъ, Ѳ. Н. Крашенинниковъ, Н. А. Каблуковъ (завѣдующій подсекціею статистики), Д. Н. Зерновъ, Л. З. Мороховецъ, А. Б. Фохтъ, В. Д. Шервинскій (завѣдующій секціею научной медицинъ*), В. С. Гулевичъ, С. Ѳ. Вубновъ (завѣдующій секціею научной гігіены), И. Ф. Огневъ (завѣдующій секціею анатоміи и физиологіи человѣка и животныхъ съ подсекціею гистологіи и эмбриологіи); дѣлопроизводители сѣзда: Ѳ. Е. Лейстъ (завѣдующій секціею физической географіи и метеорологіи) и Г. А. Кожевниковъ.

Довода о семъ до всеобщаго свѣдѣнія, члены Комитета обращаются къ товарищамъ по наукѣ съ покорнѣйшею просьбой почтительно XII Сѣзду естествоиспытателей и врачей своимъ личнымъ присутствіемъ или присылкою ученыхъ трудовъ. Такъ какъ Комитету необходимо знать заранее, на какое число гостей онъ можетъ рассчитывать, то онъ обращается съ просьбой къ лицамъ, желающимъ принять участіе въ Сѣздѣ, извѣстить Комитетъ не позже 1-го ноября с. г. о своемъ намѣреніи прибыть въ Москву, адресуя письма въ Университетъ на имя Комитета Сѣзда или его дѣлопроизводителей, а также сообщить свои адреса и обозначить ту секцію, на которую они намѣрены записаться.

Распорядительный Комитетъ употребитъ всѣ старанія, чтобы доставить членамъ Сѣзда возможность широко воспользоваться пребываніемъ ихъ въ Москвѣ для осмотра мѣстныхъ достопримѣчательностей, научныхъ институтовъ, музеевъ, лабораторій и т. д.

Подробныя программы занятій XII Сѣзда будутъ своевременно сообщены членамъ Сѣзда.

Въ заключеніе Распорядительный Комитетъ имѣетъ честь заявить, что имъ утверждены слѣдующія правила, касающіяся секціонныхъ и общихъ собраній:

а) При обсужденіи научныхъ и учебныхъ вопросовъ, какъ въ общихъ, такъ и частныхъ засѣданіяхъ, всѣ члены Сѣзда пользуются совершенно одинаковыми правами голоса, но при баллотировкахъ въ общихъ собраніяхъ право рѣшающаго голоса принадлежитъ только ученымъ, напечатавшимъ самостоятельное сочиненіе, и преподавателямъ высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній.

*) За отказомъ В. Д. Шервинскаго завѣдываніе этой секціею принялъ на себя Л. Е. Голубининъ.

б) Весьма желательно, чтобы члены будущего XII Съезда заблаговременно доставили в Распорядительный Комитет заглавия, а если можно, то и краткое содержание тѣхъ научныхъ сообщений и вообще работъ, съ которыми они думаютъ познакомить Съездъ; если таковыя заявления не будутъ доставлены до 1-го декабря с. г., то и самыя сообщенія могутъ оказаться (за недостаткомъ времени) не внесенными въ списокъ.

в) Всѣ постановленія секцій и заявленія отдѣльныхъ членовъ Съезда, имѣющія быть внесенными на обсужденіе общихъ собраній Съезда, должны быть доставляемы въ Распорядительный Комитетъ на предварительное заключеніе.



ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Опозданіе № 6 и въ особенности № 7 «Вѣстника» вызвано приостановкой работъ въ типографіи Акціонернаго Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла, въ которой журналъ печатается. Въ настоящее время въ типографіи возстановлена правильная работа и приняты мѣры къ тому, чтобы въ возможно короткій срокъ наверстать запозданіе.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).

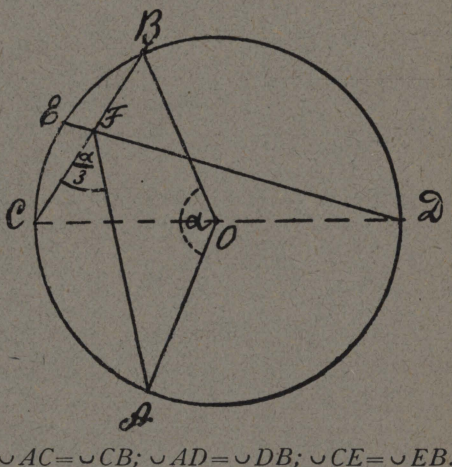
Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. I-я.

Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины:

„Новаго Времени“ (СПб., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПб., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза“ (СПб.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ“ (Москва), „Сотрудникъ Школъ“ (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества“ (Самара), „Волжанинъ“ (Самара) и др.



ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1910 ГОДЪ

ЗАДУШЕВНОЕ СЛОВО •

ДВА ЕЖЕНЕДѢЛЬНЫЕ иллюстрированные журнала для дѣтей и юношества, основанные С. М. МАКАРОВОЙ и издаваемые подъ редакціей П. М. ОЛЬХИНА

ПОДПИСНОЙ ГОДЪ СЪ 1-го НОЯБРЯ 1909 г. — ПЕРВЫЕ №№ ВЫСЛАЮТСЯ НЕМЕДЛЕННО.

Гг. годовые подписчики журнала „З. Сл.“ для дѣтей

МЛАДШАГО ВОЗРАСТА

(отъ 6 до 8 лѣтъ) получаютъ

52 №№ и 48 ПРЕМІЙ.

Въ числѣ послѣднихъ бѣлая стѣнная картинка „НИЧЬЯ“ вѣд. Карламова; 12 новѣйш. ИГРЪ и ЗАНЯТІЙ на доскѣ и черн. ластикѣ; 12 мал. книжеч. РАЗСКАЗОВЪ, ПОВѢСТЕЙ и СКАЗОКЪ; 12 вып. „ДНЕВНИКЪ МУРЗИЛИКЪ“, „МАЛЕНЬКИЙ РУССКІЙ НАТУРАЛИСТЪ“; игра „СТЕПНА-РАСТРЕПНА“ и мн. др.

Кромѣ того, при каждомъ изданіи будутъ высылаться: „ЗАДУШЕВНОЕ ВОСПИТАНИЕ“ и „ДѢТСКІЯ МОДЫ“.

Подписная цѣна каждаго изданія „Задушевнаго Слова“, со всеми объявленными преміями и приложеніями, съ доставкой и пересылкой, — за годъ **ШЕСТЬ РУБЛЕЙ.**

Допускается разсрочка на 3 срока: 1) при подпискѣ, 2) къ 1 февралю и 3) къ 1 мая — по

Съ требованіями, съ обозначеніемъ изданія (возраста), обращаются: въ конторы „ЗАДУШЕВНАГО СЛОВА“, при книжныхъ магазинахъ Т-ва М. О. Вольфъ — МОСКВА: 1) Кузнецкій Мостъ, 12, или 2) Моховая ул., 22.

Гг. годовые подписчики журнала „З. Сл.“ для дѣтей

СТАРШАГО ВОЗРАСТА

(отъ 9 до 16 лѣтъ) получаютъ

52 №№ и 48 ПРЕМІЙ.

Въ числѣ послѣднихъ: лавровая картинка — „ПОДЪИТЕ СЛѢДЪ“; 12 малѣйш. вып. ПОВѢСТЕЙ, РАЗСКАЗОВЪ и ПЬЕСЪ для юношества; 8 вып. „НИНКИ ЗНАЮТЪ ЛЮДЕЙ“; 6 вып. „ГОЛУБАЯ ВОЛНА“, П. А. Черской; „БИБЛ. ЮНГО НАТУРАЛИСТА“; „КАЛЕНДАРЬ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ“ съ замѣской картин. и мн. др.

Кромѣ того, при каждомъ изданіи будутъ высылаться: „ЗАДУШЕВНОЕ ВОСПИТАНИЕ“ и „ДѢТСКІЯ МОДЫ“.

Подписная цѣна каждаго изданія „Задушевнаго Слова“, со всеми объявленными преміями и приложеніями, съ доставкой и пересылкой, — за годъ **ШЕСТЬ РУБЛЕЙ.**

Допускается разсрочка на 3 срока: 1) при подпискѣ, 2) къ 1 февралю и 3) къ 1 мая — по

Съ требованіями, съ обозначеніемъ изданія (возраста), обращаются: въ конторы „ЗАДУШЕВНАГО СЛОВА“, при книжныхъ магазинахъ Т-ва М. О. Вольфъ — МОСКВА: 1) Кузнецкій Мостъ, 12, или 2) Моховая ул., 22.

ЗА ГОДЪ — 6 рублей, РАЗСРОЧКА — по 2 рубля.

XXIV ГОДЪ ИЗДАНІЯ

XXXIV ГОДЪ ИЗДАНІЯ

2 р.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященные вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для соотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается **БЕЗПЛАТНО** по первому требованію.

Важѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1908-9 г.

40-ый семестръ.

Проф. *А. Коссовскій*. Магнитная съемка Россіи.—*Анри Пуанкаре*. Будущее математики.—*Дж. Томсонъ*. Корпускулярная теорія матеріи.—*К. Щербина*. Математика въ русской средней школѣ.—Проф. *А. Слаби*. Резонансъ и угасаніе электрическихъ волнъ.—*Б. Цомакионъ*. Опредѣленіе поверхности и объема шара, какъ предѣловъ поверхностей и объемовъ многогранниковъ.—Проф. *Г. Бруни*. Твердые растворы.—*Дм. Ефремовъ*. Нѣкоторые свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени.—*А. Турчаниновъ*. Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.—*А. Филипповъ*. По поводу «дѣленія безъ дѣленія и вычитанія» — *Л. Гюнтеръ*. Опредѣленіе растояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксъ въ прежнія времена и теперь.—Прив.-доц. *В. Лермантовъ*. Постановка приготовленія учителей физики въ Германіи.—*И. Точидловскій*. Новѣйшіе успѣхи наблюдательной актинометріи.—*І. Лемуанъ*. Простое изложженіе ученія о всемірномъ тяготѣніи и о вычисленіи массъ въ солнечной системѣ.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ*. Лекціи по ариметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай*. Благородные и радиоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ*. О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби*. Беспроволочный телефонъ.—*А. Филипповъ*. О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ*. Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкаре*. Математическое творчество.—*П. Зееманъ*. Происхожденіе цвѣтовъ свѣтра.—*В. Гернетъ*. Объ единствѣ веществъ.—*С. Ньюкомъ*. Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ*. Линейные спектры и строеніе атомовъ.—*А. Кирилловъ*. Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри*. Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннзи*. О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель*. Методъ работы Пуанкаре.—Литература великой теоремы Фермата

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**