Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLII Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 502.

Содержаніе: Что такое алгебра? *Прив.-доц. В. Кагана.* (Продолженіе). Развитіе спектроскопіи. *Проф. Г. Кайзера.* (Окончаніе) — Международная Коммиссія по преподаванію математики. Первое совѣщаніе русской подкоммиссіи.— Рецензія: В. А. Лай. Руководство къ первоначальному обученію ариѳметики, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ. *К. Л.*— Задачи №№ 228—233 (5 сер.).— Рѣшенія задачъ №№ 146, 150, 157, 158 и 160 (5 сер.).— Объявленія.

Что такое алгебра?

Прив.-доц. В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Чтобы дѣйствительно отвѣтить на поставленный вопросъ, мы обратимся къ исторіи алгебры и посмотримъ прежде всего, какъ установились тѣ взгляды на сущность алгебры, которые были изложены выше, тѣ опредѣленія этой науки, которыя мы не могли признать правильными.

Древнѣйшая наука мало склонна къ проведенію строгихъ демаркаціонныхъ линій между различными отраслями математики. Знаменитый памятникъ младенческой математики въ Египтѣ, руководство жреца и писаря фараона Рауса, Ахмеса, содержитъ правила ариѳметическаго счета и геометрическихъ измѣреній; „Начала“ Евклида содержатъ, какъ извѣстно, цѣлыя книги, посвященныя ученію о числахъ; сочиненія индусскихъ и арабскихъ астрономовъ-математиковъ помѣщаютъ всегда рядомъ свѣдѣнія изъ ариѳметики и изъ геометріи. Только въ Греціи при преобладающей склонности греческихъ математиковъ къ геометріи отчетливо уже проявляется отдѣленіе геометріи — науки о пространствѣ отъ ариѳметики — науки о числахъ: зна-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 497.

чительное большинство греческихъ сочиненій относится къ геометріи. „Введеніе въ ариѳметику“ (*Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική*) Никомаха и книга Діофанта (*Ἀριθμητικά*) посвящены исключительно ученію о числахъ. Но дѣлать подраздѣленія въ самой ариѳметикѣ въ ту пору никому, повидимому, не приходило въ голову. Если же мы обратимся къ самому матеріалу, который разрабатывается въ математическихъ сочиненіяхъ, посвященныхъ наукѣ о числахъ, то мы должны будемъ отмѣтить три существенно различныхъ проблемы, на которыхъ сосредоточивается вниманіе аналистовъ и изъ которыхъ позже выросли три братскія науки: ариѳметика, алгебра и теорія чиселъ. Первая проблема заключается въ разысканіи удобныхъ средствъ для производства счета и дѣйствій (основныхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій) надъ числами; это задача о счисленіи, врядъ ли не труднѣйшая задача въ исторіи математики, успѣшное разрѣшеніе которой послужило мощнымъ рычагомъ, быстро поднявшимъ ученіе о числахъ на большую высоту. Вторая проблема относится къ рѣшенію уравненій, а третья имѣетъ задачей изученіе ариѳметическаго состава числа: условія дѣлимости, условія, при которыхъ данное число представляетъ собой простое число, полный квадратъ, полный кубъ или другую степень. Всѣ эти проблемы разрѣшались параллельно. Уже у Ахмеса мы находимъ задачи, явно носящія характеръ уравненій, правда, первой степени; задачами третьей категоріи занимались еще пиѳагорейцы, а Діофантъ посвятилъ имъ почти всю свою книгу и проявилъ много таланта въ ихъ разрѣшеніи. Но это все же въ теченіе многихъ столѣтій не приводило къ выдѣленію тѣхъ или иныхъ проблемъ въ особую дисциплину.

Однако, въ ходѣ рѣшенія этихъ проблемъ обнаруживается значительная разница. Счастливое разрѣшеніе задачи о счисленіи, зародившееся въ Индіи, разработанное арабами и перенесенное ими въ Европу, обладало удивительнымъ совершенствомъ и быстро нашло себѣ распространеніе. Во всякомъ случаѣ, въ XV столѣтіи приверженцы абака были уже побѣждены и книга Луки Пачіоли „Summa de Arithmetica“ содержитъ уже, можно сказать, въ чистомъ видѣ наши правила счета (см. ниже). Конечно, введеніе десятичныхъ дробей (Стевинъ, 1585*) сыграло потомъ большую роль, особенно, въ развитіи методовъ приближеннаго исчисленія; но, по существу, задача была разрѣшена и выдающихся математиковъ занимала уже мало.

Совершенно иначе обстояло дѣло съ третьей проблемой. Относящіяся сюда задачи оказались чрезвычайно трудными. Древніе математики не дали никакихъ общихъ методовъ для ея разрѣшенія, но и позже открытія въ этой области дѣлались спорадически, отрывочно; въ болѣе или менѣе цѣльную дисциплину относящіеся сюда вопросы сложились уже только въ концѣ XVIII и въ XIX столѣтіи.

Но за то на рѣшеніи уравненій вниманіе математиковъ было всегда сосредоточено. Какъ привести задачу къ уравненіямъ, было

*) Впрочемъ, дѣйствительное признаніе десятичныя дроби получили гораздо позже.

ясно древнѣйшимъ математикамъ; поэтому въ общихъ методахъ рѣшенія уравненій искали ключъ къ разрѣшенію наиболѣе трудныхъ математическихъ вопросовъ; и именно на пути рѣшенія уравненій были сдѣланы многія великія открытія. Какъ мы уже указали, задачи, облеченныя въ форму уравненій первой степени, встрѣчаются уже у Ахмеса (XVII-XVIII столѣтіе до Р. Хр.). У грековъ, въ періодъ расцвѣта геометріи, ариѳметика была въ полномъ пренебреженіи и только въ эпоху упадка у Никомаха, Ямвлиха, Теона появляются задачи, которыя сводятся къ простѣйшимъ уравненіямъ первой степени. У Діофанта (IV ст. по Р. Хр.) въ первой книгѣ собраны задачи, которыя приводятся къ опредѣленнымъ уравненіямъ первой и второй степени, и авторъ съ ними успѣшно справляется. Правда, общаго правила для рѣшенія уравненій второй степени Діофантъ не даетъ; онъ даже не знаетъ, что квадратное уравненіе имѣетъ два корня: онъ ограничивается однимъ корнемъ даже въ томъ случаѣ, когда уравненіе имѣетъ два раціональныхъ положительныхъ корня. Но при всемъ томъ Діофантъ несомнѣнно умѣетъ находить корни уравненій второй степени. Замѣтимъ при этомъ, что Діофантъ знаетъ только раціональныя числа и, конечно, положительныя; не только объ отрицательномъ, но и объ ирраціональномъ числѣ онъ вовсе не имѣетъ никакой идеи. Поэтому рѣшить уравненіе — значитъ для Діофанта найти раціональное положительное число, удовлетворяющее этому уравненію; уравненіе, имѣющее отрицательные или ирраціональные корни, по воззрѣніямъ Діофанта, вовсе не имѣетъ рѣшенія.

Въ этомъ именно отношеніи впередъ пошли индусы; они ввели отрицательныя и ирраціональныя числа; ввели, конечно, полусознательно не только безъ достаточнаго обоснованія, но всегда съ опаской, въ особенности, когда отрицательныя числа получаются не въ промежуточной передѣлкѣ, а въ конечномъ результатѣ; но зато индусы находятъ два корня квадратнаго уравненія, если оно только имѣетъ вещественные корни.

Получая отрицательные корни уравненія, Бхаскара (XII ст.) ихъ отбрасываетъ: „Люди“, говоритъ онъ, „не одобряютъ отвлеченныхъ отрицательныхъ чиселъ“. Эти свѣдѣнія проникли въ Европу черезъ арабовъ, которымъ долгое время приписывалась честь созданія алгебры; между тѣмъ, по существу, арабы заимствовали свои свѣдѣнія частью отъ грековъ, частью отъ индусовъ. Сочиненія арабскихъ писателей содержатъ тотъ же ариѳметическій матеріалъ и, какъ мы уже сказали, рѣшеніе уравненій первой и второй степени. Итакъ, если считать индусовъ и арабовъ отцами алгебры, то только въ томъ смыслѣ, что ими даны общія правила рѣшенія уравненія первой и второй степени и введены, хотя и безъ достаточной увѣренности, отрицательныя и ирраціональныя числа. Но при этомъ мы принимаемъ, слѣдовательно, взглядъ на алгебру, относящій къ ней ученіе объ отрицательныхъ и ирраціональныхъ числахъ и, главное, рѣшеніе уравненій. Въ этой послѣдней задачѣ видитъ, очевидно, центръ тяжести своего сочиненія и Мухаммедъ-ибнъ-Муса Альхваризми, котораго такъ часто называли отцомъ алгебры; по крайней мѣрѣ, на это указываетъ заглавіе сочиненія „Алджебръ уальмукабала“, что значитъ перенесеніе членовъ (въ уравненіи) изъ одной части въ другую и приведеніе ихъ (также въ уравненіи).

Но здѣсь мы должны подчеркнуть еще одно обстоятельство. Индусы никакого подраздѣленія не дѣлали: въ ихъ сочиненіяхъ, по существу астрономическихъ, находитъ себѣ мѣсто все ученіе о числахъ: какъ тотъ матеріалъ, который относится къ ариѳметикѣ, такъ и тотъ, который, по позднѣйшей классификаціи, относятъ къ алгебрѣ. Альхваризми, повидимому, первый провелъ эту грань; онъ написалъ два различныхъ сочиненія: одно по ариѳметикѣ, содержащее ученіе о счетѣ, другое — подъ указаннымъ выше названіемъ, содержащее задачи на рѣшеніе уравненій*). Если мы поэтому скажемъ, что Альхваризми выдѣлилъ въ алгебру задачу о рѣшеніи уравненій, то это будетъ не позднѣйшая точка зрѣнія, а взглядъ арабскаго автора.

Леонардъ Пизанскій (XII ст.) является первымъ европейскимъ авторомъ, написавшимъ въ эпоху пробужденія европейской культуры трактатъ по математикѣ. Его книга „Liber abaci“ содержитъ всю совокупность ариѳметическихъ и алгебраическихъ знаній, которыя онъ заимствовалъ отъ арабовъ и пропустилъ черезъ собственное горнило. Первыя 11 главъ этого сочиненія содержатъ ариѳметику, какъ мы ее понимаемъ (дѣйствія надъ цѣлыми числами, ученіе о дѣлителяхъ, дѣйствія надъ дробями, задачи на пропорціональное дѣленіе и смѣшеніе); 12-я и 13-я главы содержатъ собраніе различныхъ вопросовъ, которые авторъ самъ называетъ разнообразными: сюда относится суммированіе прогрессій и цѣлый рядъ задачъ, требующихъ искусственныхъ пріемовъ рѣшенія; 14-я глава посвящена извлеченіямъ корней и ирраціональнымъ числамъ, а 15-я — задачамъ изъ книги Альхваризми. Трактатъ Леонарда имѣлъ огромное вліяніе на развитіе математическихъ свѣдѣній въ Европѣ и, по своему значенію, нерѣдко приравнивается „Началамъ“ Евклида. Но главное значеніе этого сочиненія заключалось въ томъ, что оно настойчиво проводитъ десятичное счисленіе въ довольно совершенномъ видѣ. Индусскому счету пришлось, однако, выдержать еще упорную борьбу съ абакомъ, получившимъ повсемѣстное распространеніе въ Европѣ. Если книга Леонарда знаменуетъ собой начало этой борьбы, то трактатъ Луки Пачіоли (XV и начало XVI ст.) является, можно сказать, ея завершеніемъ. Къ этому времени десятичное счисленіе нашло уже распространеніе повсемѣстно въ Европѣ, ученіе о счетѣ получило свое завершеніе. Это не значитъ, что въ этомъ отношеніи все было закончено; мы упоминали уже выше, что десятичныя дроби, напримѣръ, получили признаніе лишь гораздо позже; изобрѣтеніе логариѳмовъ было новымъ важнымъ шагомъ на томъ же пути; но, по существу, основныя

*) Нужно, впрочемъ, сказать, что одна глава въ этой книгѣ посвящена геометріи, а послѣдняя глава, занимающая почти половину всего сочиненія — правиламъ и вычисленіямъ, съ которыми приходится имѣть дѣло при раздѣлѣ наслѣдства.

формы счета сложились въ опредѣленныя, всѣми признанныя правила. Совокупность этихъ правилъ и всѣ тѣ задачи, которыя рѣшаются непосредственнымъ примѣненіемъ этихъ правилъ, были выдѣлены въ особую дисциплину, которую и стали называть ариѳметикой; все остальное составляло алгебру. Ариѳметика въ этомъ новомъ, болѣе узкомъ значеніи слова сдѣлалась скоро тривіальной: ей обучались дѣти въ школахъ, она нужна купцамъ, ремесленникамъ, строителямъ; она считалась вполнѣ законченной наукой,—можно было только лучше или хуже ее излагать. Наоборотъ, алгебра составляла достояніе математиковъ; это было въ ту пору высшее знаніе, какимъ человѣкъ владѣлъ въ области чиселъ. Въ то время, какъ въ ариѳметикѣ все было ясно, здѣсь еще было мною спорнаго; въ то время, какъ въ ариѳметикѣ все казалось законченнымъ, здѣсь были сдѣланы только первые шаги,—въ этомъ математики не могли сомнѣваться. Вѣдь были разрѣшены только уравненія второй степени, да и относительно нихъ еще не мало спорили: всегда ли они имѣютъ рѣшенія, всегда ли будетъ этихъ рѣшеній два, признавать ли отрицательныя рѣшенія, не говоря уже о мнимыхъ и т. д.; къ этому мы еще возвратимся ниже. Что касается уравненій третьей степени, то они въ ту пору считались еще недоступно трудными: задачи, приводившіяся къ уравненіямъ третьей степени, составляли излюбленные вопросы, которые математики задавали другъ другу на публичныхъ турнирахъ *). Отмѣтимъ затѣмъ еще одну особенность. Раньше трактаты о числахъ въ своемъ заголовкѣ носили обыкновенно названіе ариѳметики; въ нихъ сравнительно небольшія части посвящены были высшимъ вопросамъ — алгебраическимъ; характерными примѣрами могутъ служить трактаты Леонарда и Луки Пачіоли. Но въ XVI и XVII столѣтіяхъ пишутся уже трактаты по алгебрѣ, и въ нихъ только вступительное введеніе отводятъ иногда ариѳметикѣ; да и то вниманіе удѣляется болѣе новымъ и болѣе труднымъ вопросамъ ариѳметики, — напримѣръ, десятичнымъ дробямъ **). Что касается такихъ операцій, какъ извлеченіе корня, то онѣ принадлежали алгебрѣ безспорно: онѣ были нужны для рѣшеній уравненій и не могли войти въ составъ той элементарной науки, къ которой свелась ариѳметика.

Обратимся теперь къ вопросу о математическомъ символизмѣ. Мы указывали уже выше (стр. 124), что уже Діофантъ пользовался спеціальными символами для обозначенія неизвѣстной величины и различныхъ ея степеней. Мы указывали также, что эти обозначенія принадлежатъ къ числу синкопированныхъ, т. е. это такіе символы, которые представляютъ собой лишь сокращенное обозначеніе произносимыхъ словъ, а не систему знаковъ, спеціально приспособленыхъ къ нуждамъ изслѣдованія, совершенно независимо отъ словеснаго выраженія. Но каковы бы ни были эти обозначенія, мы видимъ, что они

*) Общее рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени было отрыто итальянскими математиками Ферро, Кардано, Тарталья и Феррари въ XVI столѣтіи.

**) См., напримѣръ, алгебру Валлиса.

были введены для выраженія неизвѣстной величины въ уравненіи и, такимъ образомъ, падали въ область, которая позже была отнесена къ алгебрѣ.

Индусскіе математики пользовались символами гораздо шире, такъ что въ ихъ сочиненіяхъ можно видѣть зачатки современнаго алгебраическаго символизма. Но арабы не переняли этого символизма отъ индусовъ; ихъ изложеніе, какъ мы уже упоминали, чисто риторическое, чуждое всякаго символизма: они все выражаютъ сполна въ словахъ. Такимъ образомъ и въ Европу индусско-арабская ариѳметика и алгебра были перенесены въ томъ же риторическомъ видѣ: книга Леонарда Пизанскаго также чужда всякаго символизма. Эпоха, отдѣляющая Леонарда отъ Луки Пачіоли, эпоха европейской переработки индусско-арабской ариѳметики, была порой зарожденія современнаго символизма. Онъ возникъ у западныхъ арабовъ и, повидимому, отъ нихъ перешелъ къ итальянскимъ математикамъ. Въ началѣ символы и здѣсь носятъ чисто синкопированный характеръ, слѣды котораго можно указать еще въ современныхъ обозначеніяхъ (напримѣръ, $\sin x$, $\log x$; это лишь сокращенныя названія); затѣмъ они медленно перерабатываются въ самостоятельную систему обозначеній.

Въ 1591 году появилось весьма замѣчательное сочиненіе французскаго математика Віета (въ латинской транскрипціи Vieta) — „In artem analyticen isagoge“. Въ этомъ небольшомъ сочиненіи введены очень важныя усовершенствованія въ дѣлѣ обозначенія, изъ которыхъ два играютъ особо-серьезную роль. Во-первыхъ, здѣсь впервые систематически введены буквенныя обозначенія не только для неизвѣстныхъ, но и для извѣстныхъ величинъ; во-вторыхъ, различныя степени одной и той же величины раньше обозначались, еще по примѣру Діофанта, различными буквами; Віета сталъ употреблять ту же букву съ отмѣткой относительно степени. Эти количества Віета соединялъ знаками дѣйствій и такимъ образомъ пришелъ къ настоящимъ алгебраическимъ выраженіямъ. Эта система обозначеній въ короткое время получила всеобщее распространеніе. Куда слѣдовало отнести этотъ новый символизмъ? По существовавшей классификаціи онъ могъ быть отнесенъ либо къ ариѳметикѣ, либо къ алгебрѣ. Но ариѳметика, по самой задачѣ своей, должна была имѣть дѣло непосредственно съ числами; истины общія здѣсь не доказывались; здѣсь давались только правила дѣйствій надъ числами. Новый символизмъ сдѣлался такимъ образомъ достояніемъ алгебры; въ теченіе XVII столѣтія этотъ символизмъ пріобрѣлъ доминирующее значеніе и скоро былъ отнесенъ къ числу характерныхъ основныхъ элементовъ алгебры. Между тѣмъ тѣ авторы, которые склонны относить общія обозначенія къ числу признаковъ, опредѣляющихъ алгебру и, въ частности элементарную алгебру, совершенно забываютъ, что матеріалъ нашей элементарной алгебры былъ уже весь на лицо въ ту эпоху, когда современный алгебраическій символизмъ еще только народился.

Итакъ, къ концу XVII и къ началу XVIII столѣтія классификація науки о числахъ была такая: счисленіе и правила четырехъ дѣйствій надъ числами, а также задачи, которыя этими дѣйствіями непосредственно разрѣшались, составляли область ариѳметики; все остальное составляло алгебру. По формѣ существеннымъ отличіемъ алгебры были общія буквенныя обозначенія; по существу, главную задачу алгебры составляло рѣшеніе уравненій; къ алгебрѣ относили, поэтому, и всѣ тѣ подготовительныя теоріи, которыя были нужны для рѣшенія уравненій: ученіе объ извлеченіи корней, объ отрицательныхъ и даже объ ирраціональныхъ числахъ, позже о мнимыхъ числахъ*). Чтобы подтвердить правильность исторической перспективы, приведемъ здѣсь первую страницу изъ книги Ньютона „Arithmetica universalis“ (1707).

„Вычисленія производятся либо надъ числами, какъ въ обыкновенной ариѳметикѣ, либо надъ категоріями (species), какъ это принято у аналистовъ. Обѣ науки опираются на одинъ и тотъ же фундаментъ и сходятся на одной и той же цѣли: ариѳметика работаетъ опредѣленными и частными пріемами, алгебра — неопредѣленными и общими; такимъ образомъ, въ этомъ послѣднемъ исчисленіи почти все, что къ нему относится, — въ особенности же выводы, могутъ называться теоремами. Кромѣ того, алгебра въ высшей степени отличается тѣмъ, что въ то время, какъ въ ариѳметикѣ при рѣшеніи задачъ мы восходимъ отъ данныхъ къ искомымъ, здѣсь мы обыкновенно исходимъ отъ искомыхъ величинъ, какъ будто онѣ данныя, и возвращаемся къ даннымъ, какъ будто онѣ искомыя, чтобы придти къ нѣкоторому выводу, или уравненію, изъ котораго можно опредѣлить искомую величину. Этимъ путемъ можно придти къ рѣшенію труднѣйшихъ задачъ, съ которыми мы тщетно пытались бы справиться средствами одной ариѳметики. Ариѳметика же оказываетъ алгебрѣ во всѣхъ ея вычисленіяхъ такое содѣйствіе, что онѣ образуютъ вмѣстѣ какъ бы одну науку о вычисленіяхъ“.

Таковы были взгляды на ариѳметику и алгебру въ эпоху зарожденія высшаго математическаго анализа, развитіе котораго произвело, однако, въ этихъ взглядахъ глубокій переворотъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

---

*) Къ ученію объ этихъ различнаго рода числахъ мы еще возвратимся ниже.

Развитіе спектроскопіи.

Проф. Г. Кайзера.

(Рѣчь, произнесенная 20 сентября 1909 г. въ Зальцбургѣ въ первомъ общемъ собраніи 81 Съѣзда Нѣмецкихъ Естествоиспытателей и Врачей).

(Окончаніе).*

Съ появленіемъ работы Роуланда (Rowland) въ 1882 г. въ исторіи спектроскопическихъ изслѣдованій начинается новая эра. Роуланду удалось изготовить оптическія рѣшетки, которыя даютъ спектры такихъ размѣровъ и такого совершенства, что точность измѣренія возросла примѣрно въ сто разъ. Эти такъ называемыя вогнутыя рѣшетки представляютъ собой вогнутыя металлическія зеркала, на поверхности которыхъ съ помощью алмазнаго острія нанесены черточки чрезвычайно близко другъ отъ друга: число ихъ на протяженіи одного миллиметра доходитъ до 1000. Онѣ въ высокой степени облегчаютъ также примѣненіе фотографіи, такъ что съ этого времени въ спектроскопическихъ изслѣдованіяхъ примѣняется почти исключительно фотографическій методъ. Первыми плодами, которые новый приборъ принесъ наукѣ, былъ Роуландовскій атласъ солнечнаго спектра, содержащій уже не рисунки спектровъ, но фотографіи ихъ, и каталогъ, содержащій длины волнъ и указанія химическаго происхожденія Фраунгоферовыхъ линій. Въ первомъ рисункѣ солнечнаго спектра Фраунгоферъ далъ 370 такихъ линій, тогда какъ Роуландъ фотографировалъ и измѣрилъ около 20 000 такихъ линій и сравнилъ ихъ съ линіями земныхъ элементовъ. Эти числа лучше всякихъ словъ говорятъ о выдающемся значеніи достигнутаго успѣха.

Понятно, что въ сравненіи съ той степенью точности, которой теперь оказалось возможнымъ достигнуть, прежнія измѣренія длины волнъ потеряли почти всякую цѣнность, и въ наукѣ назрѣла потребность изслѣдовать сызнова, во всеоружіи новыхъ методовъ, спектры всѣхъ элементовъ. Рѣшеніемъ этой задачи занялись многіе ученые: назовемъ лишь Роуланда, Гассельберга (Hasselberg), Кайзера (Kayser) и Рунге (Runge), Эдеръ (Eder) и Валента (Valenta), Экснера (Exner) и Гашека (Hascheck).

Кирхгоффъ и Бунзенъ, вводя спектральный анализъ, имѣли въ виду, какъ показываетъ самое названіе, новый методъ химическаго анализа, и въ теченіе первыхъ десятилѣтій его примѣненія носили почти исключительно такой характеръ. Но чрезвычайная точность новыхъ измѣреній дала возможность сдѣлать изъ этого метода новое примѣненіе, которое оказалось несравненно болѣе важнымъ: я

*) См. № 500—501 „Вѣстника“.

говорю объ изслѣдованіи строенія атомовъ, ихъ внутреннихъ силъ и совершающихся въ нихъ процессовъ.

Позвольте мнѣ нѣсколько дольше остановиться на этомъ пунктѣ, чтобы лучше выяснить его. Какъ мы представляемъ себѣ возникновеніе свѣтоиспусканія? Вездѣсущій свѣтовой эѳиръ служитъ ложемъ атомовъ и молекулъ. Когда въ нихъ совершаются движенія, то они вызываютъ въ свѣтовомъ эѳирѣ волны, которыя распространяются во всѣ стороны и воспринимаются нами въ видѣ лучей, независимо отъ того, совершаютъ ли колебанія сами молекулы или меньшія части ихъ, или же колеблются электрическіе заряды, такъ называемые электроны, находящіеся на нихъ или внутри ихъ. Длины волнъ лучей, очевидно, находятся въ прямой зависимости отъ движеній колеблющихся частичекъ, центровъ испусканія, и по длинѣ волны спектра мы можемъ непосредственно опредѣлить число колебаній соотвѣтствующихъ частичекъ. При этомъ насъ поражаетъ прежде всего чрезвычайно большое число линій въ нѣкоторыхъ элементахъ: въ линейчатыхъ спектрахъ церія, желѣза, урана мы находимъ нѣсколько тысячъ линій, а въ полосатыхъ спектрахъ число линій еще гораздо больше. Напримѣръ, въ полосатомъ спектрѣ барія находится до 30 000 линій. Невозможно допустить, чтобы въ одномъ атомѣ находилось такое множество различныхъ частицъ изъ которыхъ каждая испускаетъ по одной линіи; мы должны предположить, что каждый центръ испусканія совершаетъ сложное движеніе, и послѣднее, будучи разложено призмой или рѣшеткой, даетъ цѣлый рядъ спектральныхъ линій. Обращаясь къ аналогіямъ изъ акустики, мы замѣчаемъ, что органная трубка, напримѣръ, или струна, возбужденная какимъ-либо образомъ, даетъ звукъ, который въ нашемъ ухѣ тоже разлагается на множество колебаній или тоновъ. Соотвѣтствующія имъ длины волнъ связаны между собой закономѣрной зависимостью, и мы можемъ выразить ихъ одной общей формулой, хорошо извѣстной намъ въ случаѣ простыхъ акустическихъ явленій: длины волнъ зависятъ отъ размѣровъ, массы и внутреннихъ силъ колеблющейся системы; если бы нашли формулу для какой-либо невидимой струны, то мы могли бы сдѣлать изъ формулы выводы о строеніи струны. Долгое время изслѣдователи безуспѣшно старались установить подобныя формулы, которыя охватывали бы такимъ же образомъ рядъ спектральныхъ линій. Но послѣ того, какъ Бальмеръ (Balmer) нашелъ такую формулу для спектра водорода, простѣйшаго изъ всѣхъ извѣстныхъ спектровъ, одновременно Ридбергу (Rydberg), Кайзеру и Рунге, а затѣмъ Пашену и другимъ удалось получить такія формулы для большого числа элементовъ; спектры, строеніе которыхъ казалось лишеннымъ закономѣрности, разлагаются посредствомъ этихъ формулъ на группы линейныхъ серій, построенныхъ по опредѣленнымъ законамъ. При этомъ обнаружилось, что химически родственные элементы обладаютъ сходно построенными серіями, что существуютъ нѣкоторыя соотношенія между атомнымъ вѣсомъ и спектрами, словомъ, что мы можемъ надѣяться получить на этомъ пути выводы относительно строенія атомовъ и ихъ внутреннихъ силъ. Значеніе такого приложенія спектроскопіи было бы, конечно, несравненно высшаго порядка, чѣмъ химическій анализъ или открытіе новаго химическаго элемента. Чтобы сорвать созрѣвшій плодъ, недостаетъ, главнымъ образомъ, теоретическихъ изысканій; но изслѣдователи дѣятельно работаютъ въ этомъ направленіи. Назовемъ хотя бы имя Ритца*), столь преждевременно, къ несчастью, оторваннаго отъ науки.

Въ полосатыхъ спектрахъ закономѣрность строенія бросается въ глаза гораздо рѣзче, чѣмъ въ линейчатыхъ. Деландръ (Deslandres) первый установилъ для полосатыхъ спектровъ формулы, имѣющія очень важное значеніе, какъ хорошее приближеніе къ истинѣ; однако же формулы датскаго астронома Тиле (Thiele), по всей вѣроятности, отличаются еще бо́льшей точностью.

Изслѣдованіе спектровъ поглощенія тоже принесло большую жатву. Между сложными органическими соединеніями, въ особенности въ соединеніяхъ съ бензольнымъ ядромъ, находится множество такихъ, которыя поглощаютъ рѣзко ограниченные участки спектра и обнаруживаютъ такимъ образомъ полосы поглощенія, которыя можно хорошо измѣрить. Длины волнъ этихъ полосъ зависятъ отъ строенія молекулы, и во многихъ случаяхъ удалось уже, основываясь на спектрѣ, сдѣлать важныя заключенія о строеніи молекулы. Гертли (Hartly) первый обогатилъ науку изслѣдованіями въ этой новой области. Вы видите, что въ этихъ новѣйшихъ спектроскопическихъ изслѣдованіяхъ прежній аналитическій интересъ совершенно отошелъ на задній планъ, что мы теперь пользуемся спектроскопіей, главнымъ образомъ, для проникновенія въ строеніе безконечно-малыхъ элементовъ. Если подумаемъ, что въ каждомъ кубическомъ сантиметрѣ воздуха заключается до 21 трилліона молекулъ, занимающихъ, однако, лишь ничтожную часть этого пространства, то мы можемъ составить себѣ понятіе о малости атома, въ детали строенія котораго наука желаетъ проникнуть!

Новое могучее орудіе для разоблаченія тайнъ природы дало намъ открытіе, сдѣланное Зееманомъ, такъ называемое явленіе Зеемана. Если мы внесемъ источникъ свѣта въ магнитное поле между полюсами сильнаго магнита и изслѣдуемъ спектръ, то онъ обнаружитъ нѣкоторыя измѣненія: въ простѣйшемъ случаѣ каждая спектральная линія распадается на двѣ, имѣющія одна немного меньшую и другая немного большую длину волны, чѣмъ линія внѣ магнитнаго поля. По теоріи, данной Лоренцомъ, явленіе легко объясняется, если принять, что центръ испусканія есть частица съ отрицательнымъ электрическимъ зарядомъ; разстояніе же между обѣими составляющими линіями даетъ намъ возможность вычислить, что эти частицы представляютъ собою не что иное, какъ корпускулы или электроны, впервые открытые въ катодныхъ лучахъ благодаря блестящимъ изслѣдованіямъ Дж. Дж. Томсона. Такимъ образомъ, мы знаемъ теперь, что при каждомъ свѣтящемъ атомѣ находятся электроны, масса которыхъ приблизительно въ 2000 разъ меньше массы водороднаго атома: они

*) См. „Вѣстникъ Опытной Физики", №№ 489 и 490: В. Ритцъ: „Линейные спектры и строеніе атомовъ".

движутся и возбуждаютъ волны въ эфирѣ. Я сказалъ, что въ простѣйшемъ случаѣ линія расщепляется на двѣ составляющія; наблюдались также гораздо болѣе сложные случаи, въ которыхъ число составляющихъ доходитъ до 19 линій. Теоретики, въ особенности Лоренцъ и Фойхтъ (Voigt), старались опредѣлить, сколько требуется электроновъ и какъ они должны быть соединены другъ съ другомъ, чтобы имѣло мѣсто то или другое разложеніе. Вы видите, что и на этомъ пути мы проникаемъ въ строеніе атомовъ: мы познакомились даже съ мельчайшими частями, изъ которыхъ построенъ атомъ.

На этомъ мы покинемъ первый путь, который открылъ намъ Кирхгоффъ. Я могъ бы повести васъ по разнымъ примыкающимъ сюда боковымъ тропинкамъ, которыя привели бы насъ къ широкимъ горизонтамъ; но у насъ мало времени, а между тѣмъ, кромѣ перваго пути въ область безконечно малаго, есть еще и другой путь, по которому мы тоже должны пройтись, путь въ область безконечно удаленнаго.

Уже Фраунгоферъ, открывъ темныя линіи въ солнечномъ спектрѣ, задавался вопросомъ, даютъ ли другія неподвижныя звѣзды подобныя линіи. Онъ наблюдалъ нѣкоторыя звѣзды съ помощью несовершенныхъ приборовъ и нашелъ темныя линія, но нѣкоторыя изъ нихъ отличались отъ линій солнечнаго спектра. Затѣмъ изслѣдованія этого рода пріостановились, такъ какъ они не могли представлять интереса въ то время, когда смыслъ темныхъ линій не былъ еще извѣстенъ. Лишь послѣ того, какъ Кирхгоффъ опубликовалъ свои работы, ученые поняли, что съ помощью спектроскопическаго изслѣдованія можно изучить физическое состояніе и химическій составъ небесныхъ тѣлъ, и въ 1863 г. астрономы начали пользоваться новыми методами. На первомъ мѣстѣ слѣдуетъ назвать имена Донати (Donati) и Рётгерфорда; за ними послѣдовали Секки и, главнымъ образомъ, Гёггинсъ (Huggins) котораго мы можемъ считать піонеромъ въ области астрофизики; до настоящаго дня онъ опубликовалъ уже огромное число превосходныхъ работъ, и намъ отрадно сознавать, что онъ живетъ еще среди насъ, одинъ изъ немногихъ, пережившихъ весь ходъ развитія спектроскопіи, начиная съ перваго момента, и въ весьма значительной степени содѣйствовавшихъ ему.

Наблюденія названныхъ ученыхъ и многихъ другихъ показали, что строеніе большинства неподвижныхъ звѣздъ должно быть сходно со строеніемъ солнца, т. е. что онѣ состоятъ изъ раскаленнаго ядра съ газовой оболочкой. Это доказывается тѣмъ, что ихъ спектръ представляетъ собой свѣтлую сплошную полосу, пересѣченную темными линіями. Какъ эти линіи, такъ и число и рѣзкость ихъ мѣняются, конечно, отъ одной звѣзды къ другой; въ нѣкоторыхъ звѣздахъ сильно выражены лишь линіи водорода, и температура этихъ звѣздъ считается наиболѣе высокой; въ спектрахъ другихъ звѣздъ выступаютъ полосы поглощенія, происходящія отъ соединеній, и отсюда заключаютъ, что температура этихъ звѣздъ сравнительно ниже. Въ нѣкоторыхъ же звѣздахъ рядомъ съ темными линіями видны и свѣтлыя; относительно этихъ звѣздъ обыкновенно принимаютъ, что онѣ имѣютъ очень протяженную атмосферу, чѣмъ это явленіе могло бы объясняться. Я не могу, конечно, вдаваться подробнѣе въ эти изслѣдованія; но я долженъ еще упомянуть, что Гёггинсъ, изслѣдуя туманности, сдѣлалъ совершенно новое открытіе: въ спектрахъ ихъ оказываются исключительно свѣтлыя линіи, такъ что онѣ представляютъ собою не что иное, какъ раскаленныя массы газа безъ ядра. Кометы также суть раскаленные газы, преимущественно пары углерода.

Какъ извѣстно, неподвижныя звѣзды названы такимъ образомъ благодаря тому обстоятельству, что онѣ въ противоположность планетамъ, повидимому, не измѣняютъ своего положенія другъ относительно друга на небесномъ сводѣ. Но продолжительное наблюденіе давно уже показало, что онѣ въ дѣйствительности тоже не „неподвижны", а движутся въ міровомъ пространствѣ. Лишь вслѣдствіе огромнаго разстоянія ихъ отъ насъ онѣ такъ мало перемѣщаются другъ относительно друга. Но астрономы давно уже начали измѣрять ихъ перемѣщенія и вмѣстѣ съ тѣмъ ихъ скорости. Легко понять, что мы можемъ наблюдать лишь такія перемѣщенія на небесномъ сводѣ, которыя перпендикулярны къ такъ называемому лучу зрѣнія, т. е. къ линіи, проведенной отъ наблюдателя къ звѣздѣ. Приближенія же или удаленія звѣзды въ направленіи луча зрѣнія невозможно было наблюдать, и казалось, что мы должны были на вѣки отказаться отъ надежды открыть такія перемѣщенія. Тогда на помощь явилась та же спектроскопія.

Когда источникъ звука находится въ неизмѣнномъ разстояніи отъ слушателя, то послѣдній слышитъ настоящій тонъ, исходящій отъ источника звука. Если же они приближаются другъ къ другу, то до уха слушателя доходитъ большее число волнъ въ одну секунду, тонъ становится выше; напротивъ, при взаимномъ удаленіи ихъ, тонъ становится ниже. Мы можемъ легко замѣтить это, прислушиваясь къ свисту быстро проѣзжающаго локомотива: когда локомотивъ проѣзжаетъ, тонъ становится ниже. Совершенно тоже самое относится къ свѣтовымъ волнамъ: когда источникъ свѣта удаляется отъ насъ, спектральная линія перемѣщается въ направленіи болѣе длинныхъ волнъ, т. е. къ красному концу спектра, и, наоборотъ, къ фіолетовому концу, когда источникъ свѣта приближается къ намъ. Эти явленія были открыты Допплеромъ и потому получили названіе „принципа Допплера". Изъ величины перемѣщенія легко можно вычислить скорость движенія источника свѣта.

Такимъ образомъ былъ найденъ способъ нахожденія движенія небесныхъ тѣлъ въ направленіи луча зрѣнія. Первые успѣшные опыты были произведены Гёггинсомъ, но точные результаты были получены лишь послѣ того, какъ Г. К. Фогель (H. C. Vogel) привлекъ на помощь фотографію спектровъ. Опредѣленіе движенія по лучу зрѣнія въ настоящее время принадлежитъ къ числу задачъ, которыя особенно часто приходится рѣшать астрофизикамъ, такъ какъ лишь знаніе этого движенія даетъ возможность опредѣлить истинное движеніе небесныхъ тѣлъ. Измѣренія сдѣлались столь точными, что мы въ состояніи опредѣлить скорость съ точностью до $\frac{1}{2}$ *км.*

Я желалъ бы упомянуть еще объ одномъ чрезвычайно интересномъ приложенiи этого метода. Астрономы давно уже знали такъ называемыя перемѣнныя звѣзды, яркость которыхъ перiодически то возрастаетъ, то убываетъ. Между различными предложенными объясненiями одно заключается въ томъ, что перемѣнная звѣзда есть не простая, но двойная звѣзда, т. е. состоитъ изъ двухъ звѣздъ, которыя находятся весьма близко одна отъ другой и вращаются вокругъ общаго центра тяжести; если одна изъ нихъ въ весьма значительной степени темнѣе другой, то при своемъ обращенiи она въ различной мѣрѣ покрываетъ собой болѣе свѣтлую звѣзду, и этимъ обусловливается перемѣна яркости. Спектроскопъ подтвердилъ это предположенiе: оказалось, что спектральныя линiи перемѣнной звѣзды раздвоены, но двѣ составляющiя каждой линiи колеблются одна относительно другой, то приближаясь до совпаденiя, то снова разъединяясь и т. д. Дѣйствительно, одна изъ двухъ звѣздъ, совершающихъ движенiе вокругъ общаго центра тяжести, должна приближаться къ намъ, и тогда линiи ея сдвинутся къ фiолетовому концу спектра, другая же отдаляется, и линiи ея перемѣстятся къ красному концу; черезъ промежутокъ времени, равный половинѣ перiода обращенiя, звѣзды мѣняются ролями; если же звѣзды стоятъ какъ разъ одна передъ другой, то онѣ вовсе не имѣютъ движенiя по лучу зрѣнiя, обѣ линiи находятся тогда на нормальномъ мѣстѣ и покрываютъ другъ друга. Такъ какъ перiодъ перемѣны яркости даетъ намъ время обращенiя, а перемѣщенiе линiй — скорость его, то мы въ состоянiи вычислить разстоянiе составляющихъ звѣздъ другъ отъ друга и величины ихъ, хотя даже въ самые большiе телескопы никогда еще не удалось видѣть ихъ отдѣльно одну отъ другой.— Представимъ себѣ, что одна звѣзда такой пары уже настолько охладѣла, что свѣтъ отъ нея уже не можетъ достигнуть земли. Звѣзда въ такомъ случаѣ навсегда останется невидимой для насъ, и можно было подумать, что и существованiе ея должно остаться неизвѣстнымъ для насъ. Но спектроскопъ выдаетъ ее: свѣтлая звѣзда даетъ намъ еще свои линiи, которыя совершаютъ колебательное движенiе и тѣмъ доказываютъ существованiе темнаго спутника. Даже въ этомъ случаѣ мы еще въ состоянiи опредѣлить величину и разстоянiе вѣчно невидимой звѣзды.

Несмотря на чрезмѣрную краткость этого очерка астрофизическихъ изслѣдованiй, я не могу не остановиться еще немного на солнцѣ, т. е. на той неподвижной звѣздѣ, которая обусловливаетъ собой всю жизнь на нашей землѣ и вслѣдствiе своей близости допускаетъ подробное изученiе. 1868 годъ составляетъ эпоху въ области этихъ изслѣдованiй. При полныхъ солнечныхъ затменiяхъ, т. е. когда луна становится передъ солнечнымъ дискомъ такимъ образомъ, что совершенно закрываетъ его, наблюдатели замѣтили на краю красноватые выступы, которые получили названiе протуберанецъ. Среди ученыхъ возникли споры о томъ, представляютъ ли собой эти образованiя высокiя горы на лунѣ, или же они обязаны своимъ происхожденiемъ солнцу. Во время полнаго солнечнаго затменiя въ 1868 г. спектроскопъ показалъ, что спектръ этихъ протуберанецъ состоитъ лишь изъ свѣтлыхъ линiй, изъ чего заключають, что протуберанцы суть массы раскаленныхъ газовъ, которыя извергаются солнцемъ и состоятъ, главнымъ образомъ, изъ водорода, но, кромѣ него, содержатъ еще рядъ другихъ элементовъ. Впервые это наблюденіе сдѣлалъ Жанссенъ (Janssen), а сейчасъ послѣ этого Локіеръ показалъ, какимъ образомъ можно съ помощью спектроскопа сдѣлать протуберанцы видимыми и безъ полнаго солнечнаго затменія; въ настоящее время онѣ такимъ образомъ подвергаются ежедневнымъ изслѣдованіямъ. Особенно въ Римѣ и Катаніи съ того времени въ каждый ясный день изготовлялось изображеніе всѣхъ протуберанецъ, видимыхъ на краю солнечнаго диска. Эти рисунки обнаружили много интереснаго, но я не могу останавливаться на этомъ; замѣчу лишь еще, что на линіяхъ протуберанецъ Локіеръ впервые наблюдалъ перемѣщенія по принципу Допплера. Не могу не упомянуть, что В. Г. Юліусъ (W. H. Iulius) далъ совершенно другое объясненіе протуберанецъ, но я здѣсь лишенъ возможности изложить его.

При полныхъ солнечныхъ затменіяхъ замѣтили, кромѣ того, что все солнце окружено еще свѣтовымъ вѣнцомъ средней яркости, который называютъ короной. Какъ доказалъ спектроскопъ, корона тоже представляетъ собой свѣтящійся газъ, но принадлежащія ей линіи не наблюдались еще ни на одномъ земномъ элементѣ. Соотвѣтствующій гипотетическій элементъ получилъ названіе коронія. Когда на спектроскопъ падаетъ обыкновенный солнечный лучъ, то послѣдній содержитъ свѣтъ отъ различныхъ точекъ солнечной поверхности; если различныя части ея испускаютъ различнаго рода свѣтъ, то мы въ смѣси не можемъ этого вовсе замѣтить. Дѣло мѣняется, если мы съ помощью чечевицы получимъ въ щели спектроскопа изображеніе солнца: черезъ каждую точку щели свѣтъ въ этомъ случаѣ идетъ отъ опредѣленной точки солнца, и мы такимъ образомъ можемъ, напримѣръ, изслѣдовать отдѣльно свѣтъ солнечныхъ пятенъ. При этомъ обнаруживается множество отличій отъ обыкновеннаго солнечнаго спектра: фонъ оказывается темнѣе, многія Фраунгоферовы линіи тоже темнѣе, иныя расщеплены на двое, появляются также новыя Фраунгоферовы линіи, въ особенности, полосы, и, наконецъ, часто бываютъ видны нѣкоторыя свѣтлыя линіи.

Эти явленія лучше всего объясняются, если допустить, что пятна суть мѣста, въ которыхъ пары имѣютъ бо́льшую плотность и болѣе низкую температуру. Для объясненія свѣтлыхъ линій принимаютъ, что надъ пятнами часто висятъ болѣе горячія протуберанцы, которыя присоединяютъ къ солнечному спектру поглощенія свой собственный спектръ испусканія. Между свѣтлыми линіями въ пятнахъ и протуберанцахъ особенное вниманіе привлекала къ себѣ одна желтая линія, которая никогда еще не была найдена ни въ одномъ земномъ элементѣ. Локіеръ, который особенно ревностно занимался спектральными явленіями пятенъ, назвалъ гипотетическій элементъ, отъ котораго происходитъ эта линія, геліемъ. Болѣе 20 лѣтъ изслѣдователи знали и наблюдали эту линію, не зная самого элемента; каково же было торжество, когда Рамзаю въ 1895 г. удалось извлечь изъ нѣкоторыхъ минераловъ газъ, который даетъ эту желтую линію! Наконецъ-то былъ найденъ этотъ *He*, газъ, который оказывается чрезвычайно распространеннымъ на землѣ, хотя лишь въ столь ничтожныхъ количествахъ, что химикамъ врядъ ли удалось бы его открыть. Мы знаемъ теперь, что гелій безпрестанно возникаетъ изъ радія.

Дальнѣйшее спектроскопическое изслѣдованіе солнца показало, что парообразная атмосфера, порождающая Фраунгоферовы линіи, до извѣстной степени состоитъ изъ слоевъ, изъ которыхъ самый нижній образуется наиболѣе тяжелыми элементами, болѣе легкіе же элементы лежатъ въ верхнихъ слояхъ. Такимъ образомъ Фраунгоферовы линіи, принадлежащія, напримѣръ, барію, происходятъ изъ болѣе глубокаго слоя, чѣмъ линіи кальція, а линіи водорода порождаются въ еще болѣе высокомъ слоѣ. На этомъ основанъ чрезвычайно интересный и замѣчательный методъ. Голъ (Hale) и Деландръ построили приборы, которые называются спектрогеліографами; они даютъ возможность фотографировать изображеніе солнца въ свѣтѣ одной единственной Фраунгоферовой линіи. Если возьмемъ свѣтъ водородной линіи, то мы получимъ изображеніе слоя, въ которомъ образуется эта линія, т. е. одно изъ самыхъ верхнихъ слоевъ; линія кальція даетъ намъ болѣе глубокій слой, линія же барія дала бы еще болѣе глубокій слой. Мы можемъ, такимъ образомъ, въ извѣстной степени отнимать отъ солнечнаго шара одинъ слой за другимъ и всякій разъ получать снимокъ поверхноти, т. е. мы можемъ проникнуть въ вѣчно невидимыя нѣдра пылающаго свѣтила! Это воистину поразительно!

Перейдемъ къ новѣйшему блестящему открытію астрофизики. Въ прошломъ году Голъ нашелъ при своихъ спектрогеліографическихъ изслѣдованіяхъ, что вокругъ солнечныхъ пятенъ несутся вихри раскаленнаго водорода. Раньше мы имѣли случай указать, что раскаленные газы всегда содержатъ отрицательно наэлектризованныя частички: доказательствомъ служитъ явленіе Зеемана. Такимъ образомъ, вихрь свѣтящагося газа одновременно представляетъ собой вихрь, или круговой токъ отрицательнаго электричества. Но внутри такого кругового тока мы имѣемъ магнитное поле; слѣдовательно, свѣтъ, испускаемый солнечнымъ пятномъ, приходитъ изъ магнитнаго поля, и поэтому онъ долженъ обнаруживать явленіе Зеемана, т. е. линіи должны быть расщеплены. Подтверждается ли это наблюденіемъ? Я говорилъ уже выше, что многія линія пятенъ оказываются удвоенными. Прежде для объясненія этого явленія предполагали, что темныя линіи очень широки въ виду большой плотности паровъ; надъ пятнами парятъ раскаленныя облака изъ тѣхъ же элементовъ, но болѣе горячихъ и менѣе плотныхъ, чѣмъ въ пятнахъ; они-то и вызываютъ въ срединѣ широкой темной линіи узкую свѣтлую, но мы видимъ лишь оба темные края, такъ что линія кажется намъ удвоенной. Это объясненіе казалось весьма правдоподобнымъ, но наблюденія Гола доказали, что оно ложное. Раздвоеніе оказывается дѣйствительнымъ: оно вызвано явленіемъ Зеемана. Замѣчательно, что это явленіе, которое Фарадэй безуспѣшно искалъ еще въ срединѣ прошлаго столѣтія, и Зееманъ открылъ лишь въ 1897 г., въ дѣйствительности, какъ мы теперь понимаемъ, наблюдалось, хотя и безсознательно, въ солнечныхъ пятнахъ уже 30 лѣтъ тому назадъ.

Но въ заключеніе я долженъ поторопиться. Я хорошо сознаю, что мой обзоръ спектроскопіи за 50 лѣтъ ея существованія чрезвычайно неполонъ и оставляетъ желать лучшаго. Я не коснулся ни единымъ словомъ многихъ областей, въ которыхъ она играетъ важную роль; я не сказалъ ничего, напримѣръ, о приложеніяхъ спектроскопіи къ ботаникѣ, зоологіи и медицинѣ, гдѣ она является почти единственнымъ методомъ для распознаванія и изслѣдованія чрезвычайно сложныхъ и важныхъ красящихъ веществъ, лежащихъ въ основаніи органической жизни, напримѣръ, хлорофилла, пигментовъ крови, мочи и желчи. Я вынужденъ былъ также совершенно умолчать объ испусканіи твердыхъ тѣлъ; въ этой области въ послѣднія десятилѣтія были установлены фундаментальные законы, которые позволили, напримѣръ, произвести первое надежное опредѣленіе солнечной температуры. Полученный результатъ колеблется между 6000° и 7000°, тогда какъ раньше предѣлы колебаній были несравненно больше—отъ 1500° по Віолю до 15 милліоновъ по Секки. Зачатки этихъ законовъ мы также находимъ уже въ работахъ Кирхгоффа.

Я могъ бы еще указать и на приложенія спектроскопіи къ техническимъ процессамъ, напримѣръ, къ бессемированію желѣза, но число областей, въ которыхъ спектроскопія и дѣйствовала плодотворнымъ и оживляющимъ образомъ, слишкомъ велико. Въ физикѣ и химіи, въ астрономіи и медицинѣ, въ ботаникѣ и зоологіи, въ фотографіи и техникѣ — вездѣ мы находимъ многочисленныя приложенія спектроскопіи. Вы получите нѣкоторое понятіе объ объемѣ ея примѣненій, если я скажу вамъ, что, стараясь изучить литературу по спектроскопіи, я нашелъ не менѣе 12000 статей, разсѣянныхъ въ самыхъ различныхъ журналахъ и содержащихъ болѣе или менѣе обширныя замѣтки по этому вопросу.

И вездѣ обнаруживается, какъ вы могли заключить и изъ моего доклада, что передъ нами лишь начальный періодъ развитія, что мы, безъ сомнѣнія, проникнемъ еще гораздо глубже въ суть вещей, когда послѣдующія поколѣнія вполнѣ овладѣютъ наслѣдіемъ Кирхгоффа.

Такимъ образомъ, изъ сѣмени, 50 лѣтъ тому назадъ брошеннаго Густавомъ Кирхгоффомъ, развилось дерево, которое покрыло своими вѣтвями всю область естествознанія, которое мощно разростается, цвѣтетъ, приноситъ и будетъ приноситъ плоды вплоть до самыхъ отдаленныхъ временъ. О Кирхгоффѣ можно съ полнымъ правомъ сказать: exegit monumentum aere perennius.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Первое совѣщаніе русской подкоммиссіи.

Послѣ организаціи русской делегаціи предсѣдатель ея, академикъ Н. Я. Сонинъ, обратился отъ имени делегаціи къ отдѣльнымъ лицамъ, хорошо освѣдомленнымъ въ вопросѣ о постановкѣ у насъ преподаванія математики, и къ компетентнымъ учрежденіямъ съ просьбой о содѣйствіи въ дѣлѣ организаціи русской національной подкоммиссіи. Въ частности, Н. Я. Сонинъ обратился въ физико-математическіе факультеты всѣхъ университетовъ съ просьбой делегировать представителей въ составъ подкоммиссіи. Когда такимъ образомъ опредѣлился контингентъ лицъ, готовыхъ принять участіе въ работахъ подкоммиссіи, члены ея были приглашены на совѣщаніе, состоявшееся въ С.-Петербургѣ 21 ноября въ помѣщеніи Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія подъ предсѣдательствомъ Н. Я. Сонина.

Вслѣдствіе того, что совѣщаніе состоялось среди семестра, не всѣ делегаты имѣли возможность пріѣхать. Въ совѣщаніи приняли участіе, помимо членовъ русской делегаціи (академика Н. Я. Сонина, профессора Б. М. Кояловича и директора 2-го реальнаго училища въ Петербургѣ К. В. Фохта), слѣдующія лица: профессоръ М. Д. Гатцукъ (СПБ.), профессоръ С. П. Глазенапъ (СПБ.), профессоръ Д. Н. Горячевъ (Варшава), прив.-доцентъ В. Ф. Каганъ (Одесса), профессоръ Р. В. Колосовъ (Юрьевъ), директоръ 8-ой гимназіи В. А. Кондратьевъ (СПБ.), профессоръ П. В. Котурницкій (СПБ.), директоръ Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній, генералъ З. А. Макшеевъ (СПБ.), преподаватель С.-Петербургскаго Педагогическаго института Н. С. Михельсонъ (С.ПБ.), профессоръ К. А. Поссе (СПБ.), профессоръ Д. Д. Мордухай-Болтовской (Варшава), членъ Ученаго Комитета В. И. Соллертинскій (СПБ.), директоръ Константиновскаго Межевого института В. Б Струве (Москва) и прив.-доц. Т. Э. Фризендорфъ (СПБ.). Кромѣ этого, многія лица, не имѣвшія возможности прибыть въ С.-Петербургъ на совѣщаніе, сообщили, что они готовы принять участіе въ трудахъ подкоммиссіи.

Открывая засѣданіе, Н Я. Сонинъ вновь вкратцѣ ознакомилъ собраніе съ исторіей возникновенія Международной Коммиссіи и съ содержаніемъ предварительнаго доклада *), въ которомъ намѣченъ общій планъ работы. Согласно этому плану делегація должна около Пасхи 1911 года представить Центральному Комитету свой докладъ. Этотъ докладъ долженъ представлять собою сводку и обработку тѣхъ матеріаловъ, которые будутъ представлены членами подкоммиссіи и отдѣльными лицами, отозвавшимися на воззваніе русской делегаціи **). Имѣя въ виду, что настоящее совѣщаніе должно дать руководящія указанія лицамъ, которыя будутъ подготовлять доклады, Н. Я. Сонинъ обратилъ вниманіе на то, что по плану, указанному въ предварительномъ докладѣ, каждый вопросъ трактуется дважды: во-первыхъ, устанавливается современное состояніе вопроса (напримѣръ, постановка преподаванія по тому или иному предмету), а затѣмъ излагаются новыя теченія и тенденціи, которыя по этому вопросу получили распространеніе въ странѣ. Что касается первой стороны, то здѣсь легко, конечно, оставаться на объективной почвѣ, хотя дать полную картину постановки преподаванія математики въ различныхъ русскихъ учебныхъ заведеніяхъ не такъ легко. Что касается второй части, то здѣсь задача гораздо отвѣтственнѣе, такъ какъ очень трудно выяснить, въ какой мѣрѣ авторъ того или другого доклада сообщаетъ взгляды, дѣйстви

*) См. „Вѣстникъ", №№ 475, 476.

**) См. „Вѣстникъ", № 163.

тельно выражающіе существующее въ странѣ теченіе, а не излагаетъ собственную точку зрѣнія. Въ особенно затруднительномъ положеніи въ этомъ отношеніи находится делегація, которой придется обрабатывать этотъ матеріалъ для представленія въ Центральный Комитетъ. Отнюдь не желая отказаться вовсе отъ второй части плана, предсѣдатель предложилъ обсудить, какъ направить работы по этой части такимъ образомъ, чтобы отразить дѣйствительно существующія стремленія, а не мнѣнія отдѣльныхъ лицъ, а, главное, снять съ делегаціи отвѣтственность за правильное освѣщеніе этихъ стремленій въ окончательномъ докладѣ.

При обсужденіи этого вопроса нѣкоторые члены совѣщанія высказали мнѣніе, что по изготовленіи докладовъ должно состояться совѣщаніе подкоммиссіи, въ которомъ всѣ тезисы должны быть подвергнуты обсужденію и голосованію. Но это встрѣтило возраженіе, что этого рода вопросы вообще врядъ ли поддаются рѣшенію путемъ голосованія, а тѣмъ менѣе въ условіяхъ работы подкоммиссіи; далѣе, чтобы обсудить и голосовать всѣ вопросы, которые намѣчены въ докладахъ, нужно было бы не совѣщаніе, а продолжительный рядъ засѣданій. Вслѣдствіе этого было рѣшено, что делегація представитъ свой докладъ лишь по первой части плана; члены же подкоммиссіи въ своихъ докладахъ будутъ разрабатывать и вторую часть плана, руководясь литературой и тѣми сужденіями, которыя будутъ высказываться при дебатированіи этихъ вопросовъ въ различныхъ ученыхъ и педагогическихъ обществахъ. Эти доклады будутъ переведены на французскій языкъ (если они не будутъ сразу составлены на одномъ изъ языковъ, принятыхъ коммиссіей) и будутъ переданы въ Центральный Комитетъ за отвѣтственностью ихъ авторовъ.

Далѣе, предсѣдатель обратилъ вниманіе на то, что въ программѣ Центральнаго Комитета имѣются такіе вопросы, которые отнюдь не относятся къ преподаванію математики, а къ педагогическому дѣлу вообще; сюда относится, напримѣръ, вопросъ о совмѣстномъ обученіи обоихъ половъ, вопросъ объ экзаменахъ. Совѣщаніе приняло предложеніе вовсе не касаться вопроса о совмѣстномъ обученіи половъ, а вопросъ объ экзаменахъ изложить въ порядкѣ первой части программы.

Далѣе, предсѣдатель обратилъ вниманіе на то, что при томъ широкомъ обращеніи ко всѣмъ интересующимся лицамъ, которое нашло себѣ мѣсто въ воззваніи делегаціи, нельзя не предвидѣть, что могутъ получиться и такіе доклады, которые врядъ ли можно будетъ печатать. Принимая на себя обязательство напечатать всѣ доклады членовъ подкоммиссіи, делегаты полагали бы, однако, нужнымъ сохранить за собой право въ случаѣ полной необходимости отказаться отъ печатанія доклада, написаннаго постороннимъ лицомъ. Собраніе съ этимъ согласилось.

Затѣмъ собраніе перешло къ наиболѣе важной задачѣ совѣщанія — къ распредѣленію работъ.

Доклады были распредѣлены слѣдующимъ образомъ:

В. И. Соллертинскій: низшія учебныя заведенія, учительскіе институты и семинаріи.

В. А. Кондратьевъ: мужскія гимназіи, женскіе институты Вѣдомства учрежденій Императрицы Маріи.

Н. С. Михельсонъ: женскія гимназіи Министерства Народнаго Просвѣщенія (С. Петербургскаго учебнаго округа) и Вѣдомства учрежденій Императрицы Маріи, Женскій Педагогическій институтъ и артиллерійскія училища.

Д. Н. Горячевъ: женскія гимназіи Варшавскаго учебнаго округа.

В. Б. Струве: женскія гимназіи Московскаго учебнаго округа, Межевой институтъ и землемѣрныя училища.

К. В. Фохтъ: реальныя училища.

П. В. Котурницкій и А. Д. Гатцукъ: низшія и среднія техническія училища.

З. А. Макшеевъ: подготовка преподавателей для кадетскихъ корпусовъ.

К. А. Поссе: университеты, институты: Электротехническій, Гражданскихъ инженеровъ и Путей сообщенія.

Д. Д. Мордухай-Болтовской: Варшавскій Политехническій институтъ.

М. Г. Попруженко: военныя училища (кромѣ спеціальныхъ) и кадетскіе корпуса.

Б. М. Кояловичъ: С.-Петербургскіе Высшіе женскіе курсы, Технологическій институтъ и Инженерная академія.

В. Ф. Каганъ: Одесскіе Высшіе женскіе курсы; подготовка преподавателей.

Г. В. Колосовъ: Рижскій Политехническій институтъ.

Сдѣлавъ эти порученія, совѣщаніе признало, однако, весьма желательнымъ, чтобы тѣми же вопросами занялись и другія лица, въ цѣляхъ возможно болѣе разносторонняго ихъ освѣщенія. Кромѣ того, относительно учебныхъ заведеній, которыя не были представлены въ совѣщаніи, русская делегація обратится къ компетентнымъ лицамъ для полученія соотвѣтствующихъ свѣдѣній.

Въ заключеніе было принято предложеніе, что доклады должны составляться со всею краткостью, какая возможна при обстоятельной разработкѣ вопросовъ. Доклады должны быть доставлены предсѣдателю подкоммиссіи къ 1 октября 1910 г.

Поблагодаривъ собравшихся за готовность, съ которою они приняли предложеніе принять участіе въ предстоящихъ трудахъ русской подкоммиссіи, и выразивъ надежду, что въ случаѣ надобности члены подкоммиссіи не откажутся собраться еще разъ, Н. Я. Сонинъ закрылъ засѣданіе.

РЕЦЕНЗІЯ.

В. А. Лай. *Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ.* Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва 1909 г. Цѣна 80 коп.

Авторъ данной книги, одинъ изъ выдающихся германскихъ ученыхъ и психологовъ, является представителемъ того направленія современной педагогической мысли, которое извѣстно подъ названіемъ экспериментальнаго. Въ цѣломъ рядѣ сочиненій онъ проводитъ идею, что только опытъ, научно поставленный и цѣлесообразно организованный, можетъ дать правильное рѣшеніе вопросовъ педагогики и дидактики и сообщить достовѣрность положеніямъ этихъ отраслей знанія. Наиболѣе обстоятельно изложены его мысли въ большомъ трудѣ „Experimentelle Didaktik“ (переведенномъ на русскій языкъ подъ редакціей А. П. Нечаева подъ названіемъ „Экспериментальная дидактика“); разбираемая же книга посвящена разработкѣ той же идеи въ области методики ариѳметики.

Въ первой части книги авторъ излагаетъ историческій обзоръ методики начальной ариѳметики въ Германіи и въ результатѣ такого обозрѣнія приходитъ къ выводу, что по многимъ весьма существеннымъ вопросамъ спеціалисты дѣла далеко не единодушны: что однимъ кажется безспорной истиной, то другіе считаютъ ошибочнымъ, или, въ крайнемъ случаѣ, недоказаннымъ утвержденіемъ. Наличность такихъ разногласій заставляетъ его искать критерія, который далъ бы возможность разобраться въ этомъ лабиринтѣ мнѣній; такимъ критеріемъ, по мнѣнію автора, и является правильно поставленный психологическій опытъ, въ его примѣненіи къ вопросамъ дидактики.

Во второй части авторъ переходитъ къ описанію своихъ опытовъ, какъ надъ цѣлыми классами въ тѣхъ или иныхъ школахъ, такъ и надъ отдѣльными дѣтьми, по вопросу о воспріятіи числовыхъ представленій и выработкѣ понятія о числѣ. Въ результатѣ цѣлаго ряда опытовъ, повторенныхъ неоднократно и подвергшихся строгой провѣркѣ, въ виду выдвигавшихся противъ нихъ возраженій, В. А. Лай приходитъ къ слѣдующимъ важнымъ выводамъ: 1) воспріятіе объектовъ, расположенныхъ въ рядъ, не можетъ служить надежнымъ средствомъ для выработки отчетливыхъ числовыхъ представленій, такъ какъ даетъ возможность ясно различать не болѣе 3 предметовъ, между тѣмъ какъ расположеніе тѣхъ же предметовъ въ группы позволяетъ одновременно воспринимать большее ихъ число, до 12 включительно; 2) наиболѣе ясныя и отчетливыя числовыя представленія получаются при соединеніи воспринимаемыхъ объектовъ (кружковъ или шариковъ) въ квадратныя группы по четыре, примыкающія другъ къ другу по горизонтальной линіи (эти группы объектовъ авторъ называетъ квадратными числовыми фигурами); 3) наиболѣе благопріятной окраской объектовъ является бѣлая на черномъ фонѣ, а затѣмъ красная на черномъ; 4) чувство осязанія въ развитіи числовыхъ представленій можетъ играть не меньшую роль, чѣмъ чувство зрѣнія.

На основаніи этихъ и другихъ основныхъ положеній, добытыхъ опытомъ, авторъ строитъ въ третьей части своего труда систему методики. Между прочимъ, онъ доказываетъ, что большинство существующихъ наглядныхъ пособій для преподаванія начальной ариѳметики (въ томъ числѣ и русскіе счеты, весьма распространенные въ Германіи) не удовлетворяютъ своему назначенію, такъ какъ не способствуютъ возникновенію точныхъ представленій о числахъ перваго десятка; затѣмъ описываетъ построенныя имъ самимъ наглядныя пособія — классные счеты, счетный ящичекъ и счетную линейку, — основанныя на вышеуказанномъ принципѣ квадратныхъ числовыхъ фигуръ; и, наконецъ, излагаетъ методъ занятій съ учащимися при помощи этихъ наглядныхъ пособій, методъ, дающій возможность дѣтямъ пріобрѣтать ясныя числовыя представленія посредствомъ органовъ зрѣнія и осязанія и затѣмъ примѣнять выработанныя понятія о числахъ къ изученію явленій окружающей жизни.

Книга г. Лая, какъ видно изъ предыдущаго изложенія, представляетъ изъ себя выдающееся явленіе, достойное серьезнаго вниманія русскаго читателя. Съ выводами Лая можно иногда не соглашаться, можно ихъ оспаривать, но нельзя обойти молчаніемъ его трудъ, и нельзя не признать, что это — одна изъ тѣхъ работъ, которыя прокладываютъ новые пути въ наукѣ, нельзя отрицать, что методъ изслѣдованія, предлагаемый авторомъ, есть вѣрный и надежный способъ рѣшенія спорныхъ вопросовъ методики и дидактики.

Первое изданіе книги Лая вышло въ 1898 году и осталось почти незамѣченнымъ въ Россіи. Настоящій переводъ сдѣланъ со второго нѣмецкаго изданія, вышедшаго въ 1907 году и значительно дополненнаго по сравненію съ первымъ. Самый переводъ выполненъ точно и вмѣстѣ съ тѣмъ литературно и даетъ читателю правильное и вполнѣ отчетливое представленіе о книгѣ Лая.

Намъ остается пожелать, чтобы на этотъ разъ сочиненіе Лая было встрѣчено русскими педагогами съ тѣмъ вниманіемъ и интересомъ, которыхъ оно вполнѣ заслуживаетъ.

К. Л.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 228 (5 сер.). Доказать равенства

$$C^0_{n+1}+C^1_{n+1}+\cdots+C^m_{n+1}=C^m_n+2C^{m-1}_{n-1}+2^2C^{m-2}_{n-2}+\ldots+2^mC^0_{n-m},$$

$$C^0_{n+1}-C^1_{n+1}+C^2_{n+1}-\cdots+(-1)^mC^m_{n+1}=(-1)^mC^m_n,$$

гдѣ n и m суть натуральныя числа, а C^q_p обозначаетъ вообще число сочетаній изъ p элементовъ по q, при чемъ, по условію, $C^0_p=1$ и $C^q_p=0$ при $q>p$. Разсмотрѣть частный случай, когда $m=n+1$.

В. Богомоловъ (Шацкъ).

№ 229 (5 сер.). Доказать слѣдующую теорему: если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ вдвое больше другого, то квадратъ стороны, лежащей противъ большаго изъ этихъ угловъ, равенъ произведенію суммы двухъ другихъ сторонъ на сторону, лежащую противъ меньшаго изъ этихъ двухъ угловъ.

И. Грингаузъ (Саратовъ).

№ 230 (5 сер). Построить треугольникъ ABC, зная основаніе $BC=a$, высоту $AD=h_a$ и величину $\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=k^2$.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 231 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$(2,\ 3,\ 2,\ 3,\ldots)^x=6+\frac{14\sqrt{15}}{9}\ {}^{*)}.$$

Львовъ.

---

*) Символъ (2, 3, 2, 3,...) есть сокращенное обозначеніе безконечной періодической непрерывной дроби

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}$$

№ 232 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^6 + (c - b^2)\, x^2 - bc = 0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 233 (5 сер.). Доказать, что число

$$2 . 8^n - 49n^2 + 35n - 2$$

кратно 343 при всякомъ цѣломъ положительномъ значеніи n.

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 146 (5 сер.). *Доказать теорему: если черезъ произвольную точку окружности провести три хорды и на нихъ, какъ на діаметрахъ, построить окружности, то три точки взаимнаго пересѣченія этихъ окружностей (не считая взятой точки) лежатъ на одной прямой.*

Пусть M — произвольно взятая на окружности точка, MA, MB, MC — хорды этой окружности, и пусть окружности, описанныя соотвѣтственно на хордахъ MA и MB, какъ на діаметрахъ, пересѣкаются въ γ, окружности описанныя на MB и MC, какъ на діаметрахъ, пересѣкаются въ α, -- на MC и MA, какъ на діаметрахъ, пересѣкаютъ въ β. Углы $M\gamma A$ и $M\gamma B$, какъ вписанные и опирающіеся соотвѣтственно на діаметры MA и MB, — прямые, а потому точки γ, A, B, лежатъ на одномъ перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки γ къ прямой $M\gamma$, или же $M\gamma$ есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки M на сторону AB (или на ея продолженіе) треугольника ABC. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что точки α и β суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ M на AC и BC. Итакъ, точки α, β и γ суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки M окружности на стороны вписаннаго въ эту окружность треугольника ABC, а потому, согласно съ теоремой Simson'а, эти точки лежатъ на одной прямой. Само же разсматриваемое предложеніе, являющееся, такимъ образомъ, слѣдствіемъ теоремы Simson'а, носитъ названіе теоремы Salmon'а. Если доказать самостоятельно разсматриваемое предложеніе, то придется повторить доказательство теоремы Simson'а. Такъ какъ въ четырехугольникѣ $M\gamma A\beta$ углы при вершинахъ γ и β прямые, то около него можно описать окружность; точно такъ же убѣдимся, что и около четырехугольника $MAB\alpha$ можно описать окружность. Пусть, для большей опредѣленности, четырехугольники $M\gamma AB$, $MAB\alpha$ и $MABC$ суть выпуклые; тогда

$$\angle M\gamma\beta = \angle MAB, \ \angle M\gamma\alpha = \angle MB\alpha,$$

откуда, такъ какъ

$$\angle MA\beta = \angle MAC = \angle MBC = MB\alpha,$$

находимъ, что

$$\angle M\gamma\beta = \angle M\gamma\alpha;$$

отсюда выводимъ, что точки γ, β и α лежатъ на одной прямой.

В. Богомоловъ (Шацкъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 150 (5 сер.). *Изъ точки* O, *взятой въ плоскости треугольника* ABC, *проведены прямыя* OA, OB *и* OC *и приняты за силы, дѣйствующія по направленію къ вершинамъ треугольника. Показать, что ихъ равнодѣйствующая проходитъ черезъ центръ тяжести треугольника* ABC *и равна по величинѣ утроенному разстоянію точки* O *отъ центра тяжести*.

Данное предложеніе оказывается вѣрнымъ независимо отъ того, лежитъ ли точка O въ плоскости треугольника или нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, сложимъ сперва силы OB и OC, для чего соединяемъ точку O съ серединой M стороны BC и откладываемъ на продолженіи OM отрѣзокъ $MO' = OM$; тогда точка O' есть четвертая вершина параллелограмма $OBO'C$, а потому OO' есть равнодѣйствующая силъ OB и OC. Чтобы получить теперь равнодѣйствующую силъ OA, OB и OC, остается сложить силы OA и OO'. Съ этой цѣлью соединяемъ точку O съ серединой M' отрѣзка AO' и беремъ на продолженіи OM' точку F, такъ, что $OF = 2OM'$. Медіаны AM и OM' треугольника AOO' пересѣкаются въ точкѣ G такъ, что

$$AG = 2GM, \quad OG = 2GM';$$

такимъ образомъ G есть центръ тяжести треугольника ABC, такъ какъ AM есть, по построенію, медіана этого треугольника. Итакъ равнодѣйствующая OF проходитъ черезъ центръ тяжести G треугольника ABC, при чемъ

$$OF = 2OM' = 2(OG + GM') = 2OG + 2GM' = 2OG + OG = 3OG.$$

А. Крюковъ (Спб.); *N. N.*; *С. Коганъ* (Винница); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 157 (5 сер.). *Доказать, что число*

$$a^{2n} - b^{2n} - (a + b)$$

дѣлится на

$$ab(a + b),$$

если $a - b = 1$ *и* a *и* b *суть цѣлыя числа, а* n — *цѣлое положительное число*

По условію $a = b + 1$, а потому

$$a^{2n} - b^{2n} - (a + b) = (b + 1)^{2n} - b^{2n} - (2b + 1), \tag{1}$$

$$ab(a + b) = b(b + 1)(2b + 1). \tag{2}$$

Результаты подстановки въ многочленъ

$$(b + 1)^{2n} - b^{2n} - (2b + 1) \tag{3}$$

вмѣсто b послѣдовательно чиселъ 0 и (-1) обращаются въ нули; дѣйствительно, означенныя выше подстановки даютъ:

$$1^{2n} - 0 - 1 = 0, \quad (1 - 1)^{2n} - (-1)^{2n} - (-2 + 1) = 0.$$

Такимъ образомъ, многочленъ (3) дѣлится алгебраически на b и $b + 1$, такъ что разсматриваемое число кратно каждаго изъ чиселъ b и $b + 1$. Съ другой стороны, число

$$(b + 1)^{2n} - b^{2n} = [(b + 1)^2]^n - (b^2)^n$$

кратно разности

$$(b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1,$$

а потому и число

$$(b + 1)^{2n} - b^{2n} - (2b + 1)$$

кратно числа $2b + 1$. Итакъ, число (3) кратно каждаго изъ трехъ чиселъ

b, $b+1$, $2b+1$. Такъ какъ эти числа попарно взаимно простыя, какъ это видно изъ равенствъ:

$$(b+1)-b=1,\quad 2(b+1)-(2b+1)=1,\quad 2b+1-2\,.\,b=1,$$

то число (3) кратно произведенія $b(b+1)(2b+1)$, или, что все равно, [см. (1), (2)] число $a^{2n}-b^{2n}-(a+b)$ кратно числа $ab(a+b)$.

П. Прозоровскій (Тамбовъ); *С. Коганъ* (Винница); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Б. Двойринъ* (Одесса).

№ 158 (5 сер.). *Даны уравненія*

$$x^2=y^2+z^2,$$

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-x^4-y^4-z^4=4a^2,$$

гдѣ a — *извѣстное число. Вычислить* yz *и истолковать геометрически условіе и рѣшеніе задачи.*

Формула площади S треугольника по тремъ сторонамъ x, y, z даетъ намъ, послѣ выполненія умноженій подъ корнемъ:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-x^4-y^4-z^4},$$

или

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-x^4-y^4-z^4=16S^2. \qquad (1)$$

Согласно съ первымъ изъ данныхъ уравненій, абсолютная величина x есть гипотенуза треугольника, катеты котораго суть $|y|$ и $|z|$. Такъ какъ площадь этого прямоугольнаго треугольника равна $\frac{|yz|}{2}$, то второе уравненіе даетъ намъ [см. (1)]:

$$16S^2=\frac{(yz)^2}{4}\cdot 16=4(yz)^2=4a^2,$$

откуда

$$yz=\pm a,$$

при чемъ оба знака могутъ имѣть мѣсто, такъ какъ видъ данныхъ уравненій не измѣняется отъ замѣны y или z черезъ $(-y)$ или $(-z)$. Задачу, конечно, можно рѣшить и безъ помощи геометрическаго наведенія. Именно, подставляя значеніе x^2 изъ перваго уравненія во второе, находимъ:

$$2x^2(y^2+z^2)+2y^2z^2-(y^2+z^2)^2-y^4-z^4=$$

$$=2(y^2+z^2)^2+2y^2z^2-(y^2+z^2)^2-y^4-z^4=(y^2+z^2)^2+2y^2z^2-y^4-z^4=$$

$$=4y^2z^2=4a^2,$$

откуда

$$yz=\pm a.$$

С. Коганъ (Винница); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Казариновъ* (Пинега); *Б. Двойринъ* (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется