Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLI Сем. № 11 — 12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 491 — 492.

О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи*).

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

Къ разсмотрѣнному нами выше многообразію точекъ (которыя въ отличіе отъ вновь введенныхъ безконечно удаленныхъ точекъ мы будемъ называть конечными точками), прямыхъ и плоскостей мы присоединимъ теперь наши новыя точки, прямыя и плоскости — безконечно удаленныя. Мы расширимъ, такимъ образомъ, многообразіе, обогативъ его новыми элементами. Теперь мы покажемъ, что это расширенное такимъ образомъ многообразіе удовлетворяетъ всѣмъ аксіомамъ сопряженія.

Дѣйствительно, покажемъ прежде всего, что любыя двѣ различныя точки опредѣляютъ одну и только одну прямую, черезъ нихъ проходящую. Намъ нѣтъ, конечно, надобности возвращаться къ тому случаю, когда обѣ точки конечныя. Намъ нужно, слѣдовательно, разсмотрѣть, во-первыхъ, случай, когда одна точка A конечная, а другая B — безконечно удаленная, и, во-вторыхъ, случай, когда обѣ точки безконечно удаленныя.

Положимъ, что A есть конечная точка, а B — безконечно удаленная; иначе говоря, A есть обыкновенная связка, а B — связка па-

*) См. „Вѣстникъ" № 490.

раллелей. Прямая, проходящая черезъ обѣ точки, должна принадлежать обѣимъ связкамъ. Это есть та прямая связки A, которая параллельна прямымъ связки B. Ясно, что въ связкѣ B есть одна и только одна такая прямая.

Замѣтимъ, что черезъ каждую безконечно удаленную точку B проходитъ безчисленное множество безконечно удаленныхъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждая плоскость, параллельная прямымъ связки B, содержитъ нѣкоторыя прямыя этой связки, т. е. содержитъ точку B; послѣдняя принадлежитъ, слѣдовательно, безконечно удаленнымъ прямымъ всѣхъ этихъ плоскостей; а, такъ какъ между этими плоскостями имѣется безчисленное множество такихъ, которыя попарно другъ другу не параллельны, то черезъ точку B проходитъ, такимъ образомъ, безчисленное множество безконечно удаленныхъ прямыхъ. Но ни одна изъ этихъ прямыхъ не проходитъ черезъ конечную точку A, ибо безконечно удаленная прямая по самому своему опредѣленію есть совокупность безконечно удаленныхъ точекъ, а конечныхъ точекъ не содержитъ.

Обратимся теперь къ тому случаю, когда A и B суть различныя безконечно удаленныя точки. Ясно, что черезъ нихъ не можетъ проходить конечная прямая, ибо таковая, какъ мы видѣли выше, всегда содержитъ только одну безконечно удаленную точку. Черезъ наши двѣ точки можетъ поэтому проходить только безконечно удаленная прямая; и дѣйствительно, плоскость, параллельная обѣимъ связкамъ, содержитъ обѣ точки, и, слѣдовательно, безконечно удаленная прямая такой плоскости проходитъ черезъ точки A и B. Обратно, всякая плоскость, содержащая безконечно удаленныя точки A и B, должна быть параллельна обѣимъ связкамъ; а такъ какъ всѣ такія плоскости параллельны между собой, то они имѣютъ, какъ мы видѣли выше, одну и ту же прямую, которая, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется точками A и B.

Такимъ образомъ, наше многообразіе, обогащенное безконечно удаленными точками, прямыми и плоскостями, удовлетворяетъ аксіомѣ I_1. Что касается аксіомы I_2, то она лишь при особой точкѣ зрѣнія Гильберта на идею инцидентности, представляетъ собою нѣчто отличное отъ аксіомы I_1. Изъ сказаннаго выше, во всякомъ случаѣ, вытекаетъ, что всякая прямая опредѣляется любыми двумя своими точками.

Обращаясь къ аксіомѣ I_3, замѣтимъ, что намъ нужно только доказать, что она справедлива въ примѣненіи къ безконечно удаленной прямой и къ безконечно удаленной плоскости. Мы уже имѣли случай, однако, выше показать, что въ каждой плоскости имѣется безчисленное множество безконечно удаленныхъ точекъ, и что единственная безконечно удаленная плоскость содержитъ всѣ безконечно удаленныя точки. Вопросъ объ аксіомѣ I_3, такимъ образомъ, совершенно исчерпанъ.

Обращаясь теперь къ аксіомѣ I_4, мы должны, собственно, разсмотрѣть тѣ случаи, когда въ числѣ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, имѣется одна, двѣ или три безконечно удаленныя точки. Положимъ, что A и B суть конечныя точки, а C — безконечно удаленная. Въ такомъ случаѣ безконечно удаленная плоскость не можетъ проходить черезъ эти три точки, ибо таковая, по опредѣленію, состоитъ только изъ безконечно удаленныхъ точекъ. Что же касается конечныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ точки A и B, то онѣ необходимо должны содержать также прямую AB. Чтобы такого рода плоскость проходила также черезъ безконечно удаленную точку C, нужно, чтобы она была параллельна связкѣ C. Такая плоскость (проходящая черезъ данную прямую и параллельная данной связкѣ параллелей) есть одна и только одна, если только прямая AB сама не входитъ въ составъ связки, т. е. не содержитъ точки C. Положимъ теперь, что B и C суть безконечно удаленныя точки, а A — конечная. Плоскость, проходящая черезъ эти три точки, должна содержать прямыя связки A (слѣдовательно, должна проходить черезъ центръ этой связки), а также прямыя связокъ B и C (слѣдовательно, должна быть параллельна связкамъ B и C). Такая плоскость есть одна и только одна (именно та, которая опредѣляется двумя прямыми связки A, принадлежащими соотвѣтственно связкамъ B и C). Наконецъ, если всѣ три точки — безконечно удаленныя, то черезъ нихъ проходитъ безконечно удаленная плоскость и никакая другая не проходитъ, ибо всѣ безконечно удаленныя точки, лежащія въ одной конечной плоскости, образуютъ одну безконечно удаленную прямую этой плоскости.

Аксіома I_4, такимъ образомъ, исчерпана; что касается аксіомы I_5, то о ней приходится сказать то же, что и объ аксіомѣ I_2.

Переходимъ теперь къ аксіомѣ I_6. Здѣсь мы опять должны доказать, что она справедлива въ тѣхъ случаяхъ, когда одна изъ двухъ точекъ безконечно удаленная, или когда обѣ безконечно удаленныя. Въ послѣднемъ случаѣ, если обѣ точки безконечно удаленныя, то прямая, ими опредѣляемая, также безконечно удаленная. Такія двѣ точки всегда принадлежатъ безконечно удаленной плоскости, но послѣдней принадлежитъ также и опредѣляемая ими прямая, такъ какъ она состоитъ исключительно изъ безконечно удаленныхъ точекъ. Если же нѣкоторая конечная плоскость содержитъ двѣ безконечно удаленныя точки A и B, то ея безконечно удаленная прямая содержитъ эти точки, а, такъ какъ черезъ точки A и B, какъ мы видѣли выше, проходитъ только одна прямая, то послѣдняя совпадаетъ съ безконечно удаленной прямой этой плоскости и, слѣдовательно, лежитъ цѣликомъ въ этой плоскости.

Еще нагляднѣе то же самое можно показать такимъ образомъ. Всякая конечная плоскость, содержащая двѣ различныя безконечно удаленныя точки A и B, параллельна связкамъ A и B. Всѣ такія плоскости параллельны между собой, а потому, какъ было доказано, имѣютъ одну общую безконечно удаленную прямую. Это и есть прямая, проходящая черезъ данныя двѣ точки и лежащая, такимъ образомъ, цѣликомъ въ каждой плоскости, проходящей черезъ точки A и B.

Если теперь изъ двухъ данныхъ точекъ одна, скажемъ A, конечная, а другая B—безконечно удаленная, то AB есть та прямая связки A, которая принадлежитъ также связкѣ B (т. е. которая параллельна остальнымъ прямымъ этой связки). Всякая плоскость, проходящая черезъ точку B, параллельна прямымъ связки B; поэтому, если она проходитъ также черезъ точку A, то она необходимо содержитъ ту прямую этой связки, которая параллельна связкѣ B, т. е. она содержитъ прямую AB. Въ примѣненіи къ нашему многообразію, такимъ образомъ, справедлива аксіома I_6.

Обращаясь къ предложенію I_7, мы опять должны разсмотрѣть, собственно, тотъ случай, когда двѣ плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку, ибо, если онѣ имѣютъ общую конечную точку, то онѣ сами конечныя плоскости, а этотъ случай уже исчерпанъ выше. Если же двѣ плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку и одна изъ плоскостей безконечно удаленная, то она имѣетъ со второй плоскостью общую безконечно удаленную прямую, именно безконечно удаленную прямую второй плоскости, которая, какъ составленная изъ безконечно удаленныхъ точекъ, принадлежитъ также безконечно удаленной плоскости. Если же двѣ конечныя плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку B, то обѣ онѣ параллельны связкѣ B. При такихъ условіяхъ эти двѣ плоскости либо параллельны, и тогда онѣ имѣютъ общую безконечно удаленную прямую, содержащую также безконечно удаленную точку B, либо онѣ пересѣкаются по прямой, принадлежащей связкѣ B и содержащей, слѣдовательно, безконечно удаленную точку B.

Нужно сказать и то, что справедливость аксіомы I_7 вытекаетъ изъ того, что въ нашемъ расширенномъ многообразіи любыя двѣ плоскости, какъ мы видѣли выше, имѣютъ общую прямую—конечную, если эти плоскости не параллельны, и безконечно удаленную, если онѣ параллельны.

Что касается аксіомы I_8, то доказывать ея справедливость не приходится.

Итакъ, многообразіе точекъ, прямыхъ и плоскостей, обогащенное безконечно удаленными точками, прямыми и плоскостями, представляетъ собой такой комплексъ образовъ, къ которымъ примѣняются всѣ акіомы сопряженія. Въ этомъ многообразіи двѣ параллельныя прямыя всегда пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ, двѣ параллельныя плоскости всегда пересѣкаются по безконечно удаленной прямой; т. е. въ этомъ многообразіи безконечно удаленные элементы обладаютъ тѣми формальными свойствами, которыя имъ присваиваются при введеніи ихъ въ элементарную геометрію; и, такъ какъ мы имѣемъ, такимъ образомъ, многообразіе, въ примѣненіи къ которому элементарная геометрія, обогащенная безконечно удаленными элементами, оказывается справедливой, то и логическаго противорѣчія здѣсь, очевидно, быть не можетъ. Всѣ тѣ выводы, которые изъ этихъ формальныхъ посылокъ вытекаютъ, не могутъ привести къ противорѣчію; и, если пользуясь безконечно удаленными точками, мы придемъ къ выводамъ, касающимся конечныхъ точекъ, то эти выводы будутъ справедливы, какъ и всякіе выводы, сдѣланные относительно нѣкоторыхъ образовъ въ многообразіи, для котораго справедливы посылки, служащія точкой отправленія. Что касается многообразія обыкновенныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей, то оно подобно многообразію введенныхъ нами новыхъ конечныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей относительно аксіомъ сопряженія. Поэтому всякій выводъ, сдѣланный изъ этихъ аксіомъ, будетъ справедливъ въ примѣненіи къ обыкновеннымъ конечнымъ элементамъ и въ томъ случаѣ, когда мы пользовались при доказательствѣ безконечно удаленными элементами. Дѣло будетъ здѣсь обстоять совершенно такъ же, какъ въ вопросѣ о комплексныхъ числахъ. Совокупность комплексныхъ чиселъ представляетъ собой многообразіе, для котораго справедливы всѣ преобразованія ариѳметики вещественныхъ чиселъ, а потому всякій выводъ, при помощи этихъ преобразованій сдѣланный, будетъ правиленъ и въ томъ случаѣ, когда онъ въ конечномъ счетѣ относится къ числамъ вещественнымъ (къ части всего многообразія комплексныхъ чиселъ).

Многообразіе, на которомъ мы обнаружили, что введеніе безконечно удаленныхъ точекъ, какъ точекъ пересѣченія параллельныхъ прямыхъ, безконечно удаленныхъ прямыхъ, какъ пересѣченій параллельныхъ плоскостей, и безконечно удаленной плоскости, какъ совокупности безконечно удаленныхъ прямыхъ, не можетъ привести къ противорѣчію съ аксіомами сопряженія, было нами составлено путемъ соединенія обыкновенныхъ связокъ, названныхъ нами точками, и связокъ параллелей, названныхъ нами безконечно удаленными точками. Любопытно, что Пашъ въ указанномъ выше сочиненіи даетъ такое опредѣленіе связки, которое объединяетъ обѣ категоріи; именно, онъ опредѣляетъ связку, какъ комплексъ прямыхъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что любыя двѣ прямыя этого комплекса расположены въ одной плоскости. Если поэтому мы возьмемъ двѣ прямыя на плоскости и черезъ каждую точку пространства, этой плоскости не принадлежащую, мы проведемъ плоскости, опредѣляемыя этой точкой и основными двумя прямыми, то ихъ пересѣченіе опредѣлитъ прямую связки, проходящую черезъ выбранную точку пространства. Чтобы опредѣлить прямую связки, проходящую черезъ точку, лежащую въ плоскости первыхъ двухъ прямыхъ, надо воспользоваться двумя другими прямыми связки, одна изъ которыхъ не лежитъ въ этой плоскости. Смотря по тому, были ли исходныя двѣ прямыя сходящимися или параллельными, мы получимъ сходящуюся связку (*конечную точку*) или связку параллелей (*безконечно удаленную точку*). Если связки взяты не въ Евклидовомъ пространствѣ, а въ гиперболическомъ, то, кромѣ сходящихся связокъ и связокъ параллелей, будутъ существовать связки третьяго типа — такъ называемыя расходящіяся связки. Расходящуюся связку образуютъ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости. Въ Евклидовомъ пространствѣ эти послѣднія связки совпадаютъ со связками параллелей, въ гиперболическомъ же пространствѣ онѣ образуютъ особую третью категорію. Если мы въ гиперболическомъ пространствѣ назовемъ *конечными точками* сходящіяся связки, а *безконечно удаленными точками* — связки параллелей, то каждая прямая будетъ входить въ составъ двухъ связокъ параллелей (соотвѣтственно двумъ направленіямъ прямой), т. е. будетъ имѣть *двѣ безконечно удаленныя точки*. Однако, при этомъ двѣ прямыя въ плоскости еще не всегда будутъ имѣть общую *точку*: двѣ расходящіяся прямыя не будутъ имѣть общей *точки* — ни конечной ни безконечно удаленной. Чтобы любыя двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, въ гиперболическомъ пространствѣ имѣли общую *точку*, необходимо еще болѣе усилить многообразіе *точекъ*, необходимо включить въ него еще *точки* третьей категоріи, т. е. назвать *точками* также расходящіяся связки. Эти точки *Клейнъ* назвалъ *идеальными точками*. Въ гиперболической плоскости двѣ прямыя всегда встрѣчаются либо въ конечной, либо въ безконечно удаленной, либо въ идеальной точкѣ.

Мы показали, что введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ не можетъ привести къ противорѣчію съ аксіомами сопряженія. Но, кромѣ аксіомъ сопряженія, *Гильбертъ* различаетъ еще четыре группы аксіомъ и, прежде всего, аксіомы расположенія. Однако, присвоить расширенному многообразію *точекъ* такое расположеніе на прямой, которое удовлетворяло бы требованіямъ, выраженнымъ въ аксіомахъ расположенія, не удается. Причина этого коренится въ томъ, что изъ трехъ прямыхъ сходящейся связки, расположенныхъ въ одной плоскости, каждая можетъ съ одинаковымъ правомъ считаться лежащей между двумя другими прямыми. Вслѣдствіе этого тѣ предложенія, выводъ которыхъ основанъ на аксіомахъ расположенія, не могутъ быть распространены на обогащенное нами многообразіе точекъ. Они могутъ выражать такія свойства конечныхъ точекъ, которыя не принадлежатъ безконечно удаленнымъ точкамъ. Аксіомы конгруэнтности не распространяются уже на безконечно удаленныя точки потому, что въ нашемъ многообразіи не всякая точка можетъ быть совмѣщена съ любой другой точкой. При помощи движенія можно, правда, совмѣстить каждую сходящуюся связку съ любой другой сходящейся связкой (т. е. можно привести каждую конечную точку въ любую другую конечную точку), но нельзя совмѣстить сходящуюся связку со связкой параллелей (т. е. нельзя привести конечную точку въ безконечно удаленную).

Все изложенное выясняетъ, какія свойства конечныхъ точекъ могутъ быть распространены на безконечно удаленныя точки, а какія не могутъ. На безконечно удаленные образы распространяются тѣ свойства, которыя вытекаютъ только изъ аксіомъ сопряженія.

Проективная геометрія аксіомами конгруэнтности вовсе не пользуется. Она пользуется только тремя группами аксіомъ; именно, кромѣ аксіомъ сопряженія, она пользуется еще аксіомами расположенія и аксіомой проективной непрерывности (см. аксіомы II и III въ §§ 15 и 16). Аксіомы сопряженія проективной геометріи отличаются отъ аксіомъ соотвѣтствующей группы въ Евклидовой геометріи тѣмъ, что здѣсь всякія двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, имѣютъ общую точку, и всякія двѣ плоскости имѣютъ общую прямую. Но мы видѣли, что пространство, обогащенное безконечно удаленными точками, удовлетворяетъ этимъ требованіямъ. Съ другой стороны, аксіомы расположенія, которыми пользуется проективная геометрія, также отличаются отъ аксіомъ расположенія Евклидовой геометріи. Проективная геометрія не вводитъ понятія „между“; она разсматриваетъ всегда двѣ пары точекъ на прямой и требуетъ, чтобы четыре пары точекъ на прямой всегда однимъ и только однимъ способомъ распадались на двѣ пары, раздѣляющія другъ друга. Этимъ свойствомъ всегда обладаютъ четыре прямыхъ сходящейся связки, расположенныя въ одной плоскости. Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться, чтобы распространить аксіомы расположенія проективной геометріи на наше пространство, обогащенное безконечно удаленными точками. Дѣйствительно, пусть A, B, C, D будутъ четыре точки на одной прямой. Возьмемъ произвольную сходящуюся связку O, въ составъ которой эта прямая не входитъ, и проведемъ прямыя OA, OB, OC, OD. Это будутъ вполнѣ опредѣленныя прямыя, независимо отъ того, всѣ ли точки A, B, C, D конечныя, или между ними имѣются также безконечно удаленныя. Если же прямыя OA и OC раздѣляются прямыми OB и OD, то мы будемъ говорить, что точки A и C раздѣляются точками B и D. Можно легко показать, что эта дизъюнкція не зависитъ отъ выбора связки O, и что это опредѣленіе согласуется со всѣми аксіомами расположенія проективной геометріи. Наконецъ, существенная особенность безконечно удаленныхъ точекъ, какъ мы видѣли, заключается въ томъ, что конечныя точки не могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ безконечно удаленными. Однако, въ проективной геометріи комплексъ разсматриваемыхъ преобразованій значительно шире; именно, въ составъ проективныхъ преобразованій входятъ, помимо тѣхъ, которыя мы называемъ движеніями, еще другія преобразованія, при помощи которыхъ всякая связка можетъ быть превращена въ любую другую связку и, въ частности, сходящаяся связка можетъ быть превращена въ связку параллелей. Вслѣдствіе этого въ проективной геометріи безконечно удаленныя точки играютъ ту же роль, что и конечныя.

Изложеннымъ вопросъ о законности введенія въ геометрію положенія безконечно удаленныхъ элементовъ достаточно выясненъ. Въ метрической геометріи возникаетъ еще вопросъ о разстояніи безконечно удаленной точки отъ конечной точки, каковое принимается безконечно большимъ. Выясненіе того, въ какой мѣрѣ это законно, представляется болѣе сложнымъ, потому что здѣсь мы сталкиваемся уже съ другимъ вопросомъ, именно вопросомъ о томъ, какимъ образомъ безконечность вводится въ ариѳметику. Мы не можемъ входить здѣсь въ подробное обсужденіе этого вопроса; замѣтимъ только, что, присваивая безконечно большое разстояніе безконечно удаленнымъ точкамъ, мы дѣлаемъ совершенно то же (и въ томъ же смыслѣ), что и въ алгебрѣ, когда присваиваемъ безконечное рѣшеніе уравненію $0 \cdot x = a$, гдѣ $a \neq 0$.

О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.

Э. Наннэи.

(*Окончаніе**).

Конхоида прямой. Вообще конхоидой данной линіи называется другая линія, получающаяся слѣдующимъ образомъ: изъ данной точки проводятъ произвольную прямую и на ней по обѣ стороны отъ пересѣченія съ данной линіей откладываютъ по нѣкоторому данному отрѣзку. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ и называется конхоидой данной линіи.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 490.

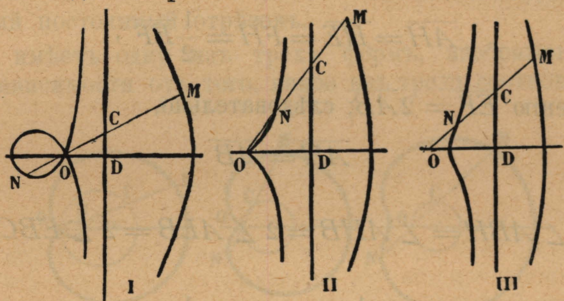
Пусть, напримѣръ, дана прямая и точка O (фиг. 9). Черезъ точку O проводимъ сѣкущую OC и на ней откладываемъ два отрѣзка CM и CN, равныхъ данному отрѣзку h. Кривая, представляющая собой геометрическое мѣсто точекъ M и N, называется конхоидой прямой или конхоидой Никомеда.

Неподвижная точка O называется полюсомъ конхоиды, данная линія ея основаніемъ, а данный отрѣзокъ — интерваломъ конхоиды.

Примемъ за полярную ось перпендикуляръ, опущенный изъ полюса на основаніе, а за начало самый полюсъ, тогда мы легко найдемъ уравненіе конхоиды Никомеда въ полярныхъ координатахъ, замѣчая, что

$$\varrho = OC \pm h = \frac{a}{\cos\theta} \pm h,$$

гдѣ a обозначаетъ данное разстояніе полюса отъ основанія OD.



Фиг. 9.

При помощи обычнаго преобразованія

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\varrho},$$

получимъ уравненіе кривой въ Декартовыхъ координатахъ:

$$y^2 = \frac{x^2 (h + a - x)(h - a + x)}{(x - a)^2}.$$

Кривая имѣетъ одну изъ трехъ формъ, изображенныхъ на чертежѣ, въ зависимости отъ того, имѣемъ ли мы $h > a$, $h = a$ или $h < a$. Въ первомъ случаѣ кривая образуетъ петлю, во второмъ имѣетъ точку возврата. Во всѣхъ трехъ случаяхъ данная прямая служитъ ассимптотой кривой (т. е. касается ея въ безконечно удаленной точкѣ).

Открытіе конхоиды прямой приписываютъ Никомеду (I в. до Р. Х). Ея касательныя были опредѣлены Ферматомъ и Декартомъ. Робервалъ нашелъ ея площадь, а Ньютонъ указалъ на важное значеніе этой кривой для рѣшенія уравненій 3-й и 4-й степени. Между прочимъ, эта кривая можетъ служить, подобно циссоидѣ

Діокла (см. выше), для рѣшенія задачи объ удвоеніи куба, а также и другой не менѣе извѣстной задачи — о трисекціи угла.

Остановимся немного на этой задачѣ.

Пусть данъ уголъ ABC, и требуется раздѣлить его на три равныя части. Изъ произвольной точки A, лежащей на одной сторонѣ даннаго угла, опустимъ перпендикуляръ AC на другую и дополнимъ треугольникъ ABC до прямоугольника $ACBD$. Затѣмъ построимъ конхоиду, для которой точка B служитъ полюсомъ, прямая AC — основаніемъ, и интерваломъ которой равенъ $2AB$. Пусть E точка пересѣченія этой конхоиды съ прямой DA. Проведемъ прямую EB; тогда:

$$\angle EBC = \frac{1}{3} \angle ABC.$$

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ F точку пересѣченія прямыхъ EB и AC, а черезъ H середину отрѣзка EF; тогда

$$\overline{AH} = \overline{HE} = \overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{EF},$$

но по построенію $\overline{EF} = 2\overline{AB}$; слѣдовательно,

$$\overline{AH} = \overline{AB}$$

и, значитъ,

$$\angle ABH = \angle AHB = 2 \angle AEB = 2 \angle EBC.$$

Отсюда

$$\angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABH = \frac{1}{3} \angle ABC.$$

Конхоида круга. Дана окружность и точка O на этой окружности. Черезъ O проведемъ сѣкущую и на ней отложимъ два отрѣзка CM и CN, равныхъ данному отрѣзку h. Геометрическое мѣсто точекъ M и N есть конхоида круга; ее называютъ еще улиткой Паскаля. Это названіе далъ ей Роберваль, и оно относится, повидимому, не къ знаменитому математику Паскалю (Blaise Pascal), а къ его отцу (Etienne Pascal).

Уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$\varrho = a \cos \theta + h,$$

гдѣ a есть діаметръ данной окружности.

Уравненіе въ Декартовыхъ координатахъ можно вывести изъ этого:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = h^2 (x^2 + y^2).$$

Кривая имѣетъ одну изъ трехъ формъ, изображенныхъ на фигурѣ 10, въ зависимости отъ того, какое изъ трехъ соотношеній $h < a$, $h = a$, $h > a$ имѣетъ мѣсто. Во второмъ случаѣ кривая называется кардіоидой по сходству ея съ формой сердца.

Улитку Паскаля можно также разсматривать, какъ путь, описываемый точкой, неразрывно связанной съ кругомъ, который катится безъ скольженія по окружности другого круга того же радіуса. Мы получимъ улитку перваго вида (фиг. 10), когда эта точка находится внѣ подвижного круга,— второго вида, когда она находится на его окружности, и третьяго, когда точка находится внутри круга.

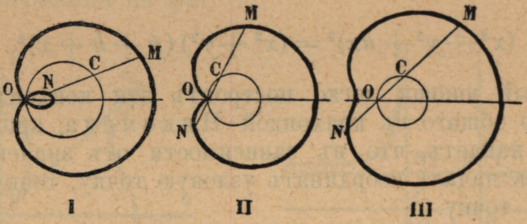
Конхоида Слюза. На эту замѣчательную кривую, которой занимался Слюзъ (René François de Sluse) въ своей перепискѣ съ Гюйгенсомъ, вновь обратилъ вниманіе Лоріа (G. Loria) въ своей статьѣ, опубликованной въ журналѣ „Mathesis“ въ 1897 году.

Конхоида Слюза сходна съ конхоидой прямой и строится, какъ конхоида Никомеда. Она отличается отъ послѣдней только тѣмъ, что отрѣзки CM и CN не равняются данному отрѣзку, а зависятъ отъ разстоянія OC и опредѣляются соотношеніемъ:

$$\overline{OC}\,.\,\overline{CM}=K^2,$$

гдѣ K данный постоянный отрѣзокъ.

Кривая имѣетъ одну изъ трехъ формъ, изображенныхъ на фигурѣ 9, въ зависимости отъ того, какое изъ трехъ соотношеній $K^2 \gtreqless a^2$



Фиг. 10.

имѣетъ мѣсто. Въ томъ случаѣ, когда $K^2=a^2$, одна изъ вѣтвей кривой сводится къ циссоидѣ.

Можно дать слѣдующее построеніе для конхоиды Слюза. Пусть дана неподвижная точка O и прямая r на разстояніи $\overline{OA}=a$ отъ послѣдней. Построимъ окружность, проходящую черезъ точку O, такъ, чтобы радіусъ ея былъ равенъ $\frac{K^2}{2a}$, а центръ ея лежалъ на прямой OA. Проведемъ черезъ точку O сѣкущую и обозначимъ точку ея пересѣченія съ окружностью черезъ N, а точку пересѣченія съ данной прямой черезъ M. На этой сѣкущей отложимъ по разныя стороны отъ M отрѣзки MP и MP', равные ON. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ и будетъ искомой кривой (Ср. Loria, Mathesis, 1897).

Фокальныя конхоиды коническихъ сѣченій.— Кривая Ерабека. Проведемъ сѣкущую черезъ фокусъ даннаго коническаго сѣченія и отложимъ на ней отъ каждой точки пересѣченія въ данномъ направленіи данный отрѣзокъ h. Геометрическое мѣсто концовъ этихъ отрѣзковъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ сѣкущимъ, есть кривая, называемая фокальной конхоидой даннаго коническаго сѣченія.

Изъ полярно-фокальнаго уравненія даннаго коническаго сѣченія $\left(\varrho = \frac{p}{1+e\cos\theta}\right)$ сейчасъ же получается уравненіе конхоиды въ полярныхъ координатахъ:

$$\varrho = \frac{p}{1+e\cos\theta} + h,$$

гдѣ

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ и } e = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \frac{c}{a},$$

при чемъ a и b суть полуоси эллипса или гиперболы.

Изъ уравненія въ полярныхъ координатахъ легко вывести уравненіе въ Декартовыхъ координатахъ

$$(x^2+y^2-hex)^2 = (x^2+y^2)(p+h-ex)^2.$$

Когда $e = -1$, оно обращается въ уравненіе фокальной конхоиды параболы

$$(x^2+y^2+hx)^2 = (x^2+y^2)(p+h+x)^2.$$

Прилежный юноша легко построитъ эти конхоиды, которыя не имѣютъ ничего общаго съ конхоидой Никомеда, кромѣ способа построенія. Онъ найдетъ, что въ зависимости отъ значенія h эти кривыя имѣютъ въ началѣ координатъ узловую точку, точку возврата или изолированную точку.

Въ частномъ случаѣ, когда $h = \mp a$ (тотъ или другой знакъ берется въ зависимости отъ того, имѣемъ ли мы дѣло съ эллипсомъ или гиперболой) получается кривая, называемая кривой Ерабека (Jerabek).

Довольно просто можно построить эту кривую слѣдующимъ образомъ. Пусть дана окружность съ центромъ O и точка A. Произвольную точку M окружности соединимъ съ A и съ O и въ точкѣ A возставимъ перпендикуляръ къ прямой AM, точку пересѣченія его съ прямой OM назовемъ черезъ P. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ P, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ точки M на окружности, и будетъ кривой Ерабека.

Кривая Ролля. Другая кривая, которая строится подобно конхоидамъ коническихъ сѣченій, есть кривая Ролля (Rolle). Ее можно построить слѣдующимъ образомъ.

Черезъ данную постоянную точку A даннаго коническаго сѣченія проводимъ касательную AY. Черезъ точку M того же сѣченія проводимъ сѣкущую MB; обозначимъ точку пересѣченія ея съ касательной AY черезъ C. На этой сѣкущей отложимъ отъ M отрѣзокъ

$\overline{MP} = \overline{BC}$. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ P, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ точки M на коническомъ сѣченіи, есть кривая Ролля.

Кривыя преслѣдованія. Это кривыя, обладающія тѣмъ свойствомъ, что ихъ касательныя постоянно направлены къ положенію занимаемому точкой, движущейся опредѣленнымъ образомъ по данной кривой. Ихъ изучалъ Бугеръ (Bouguer, 1732), при чемъ онъ разсматривалъ корабль, который преслѣдуетъ другой корабль. Если преслѣдуемая точка имѣетъ прямолинейное равномѣрное движеніе, то кривая преслѣдованія называется собачьей кривой (Dubois Aymé, 1814).

Чертова кривая. Это странное названіе дается кривымъ, уравненіе которыхъ имѣетъ видъ:

$$x^4 - y^4 = mx^2 + ny^2,$$

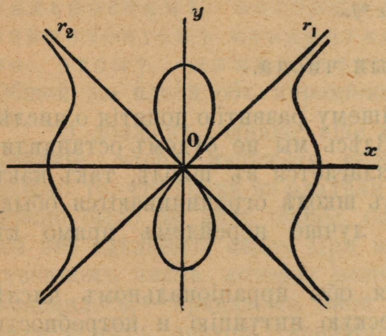
въ особенности въ томъ частномъ случаѣ, когда

$$m = 100a^2, \quad n = 96a^2,$$

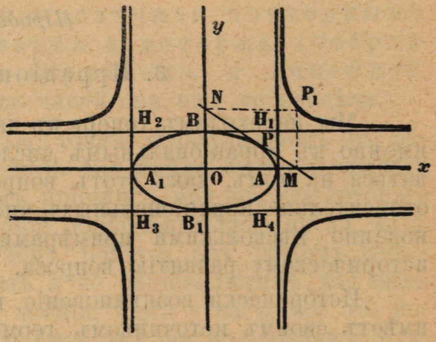
т. е.

$$x^4 - y^4 = a^2(100x^2 + 96y^2).$$

Эта кривая изображена на фиг. 11.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Крестовая кривая (Kreuzcurve). Пусть данъ эллипсъ. Проведемъ произвольную касательную къ нему и обозначимъ точки пересѣченія ея съ осями координатъ черезъ M и N. Черезъ эти точки проведемъ прямыя, параллельныя осямъ координатъ, и обозначимъ ихъ точку пересѣченія черезъ P_1. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ P_1, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ касательной, есть кривая, называемая крестовой или крестообразной (по нѣмецки Kreuzcurve, фиг. 12).

Если уравненіе даннаго эллипса есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то уравненіе соотвѣтствующей крестовой кривой будетъ:

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

Крестообразная кривая состоитъ изъ четырехъ одинаковыхъ вѣтвей, расположенныхъ симметрично относительно осей эллипса. Ассимптотами для нихъ служатъ касательныя къ эллипсу параллельныя осямъ.

Изученіемъ свойствъ этой кривой, главнымъ образомъ тѣхъ, которыя относятся къ ея касательнымъ, занимался Schoute (1888), но уже раньше ее разсматривалъ Теркемъ (Terquem, 1847) и Бутсъ (Booth, 1873). Другія важныя свойства были доказаны Ретали (V. Retali) и Тексейра (G. Texeira).

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

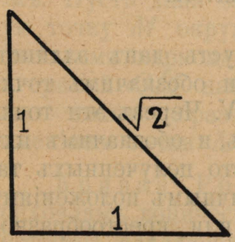
читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(Продолженіе).*

3. Ирраціональныя числа.

Мы переходимъ теперь къ дальнѣйшему развитію понятія о числѣ, именно къ ирраціональнымъ числамъ. Здѣсь мы не будемъ останавливаться на томъ, какъ этотъ вопросъ излагается въ школѣ, такъ какъ относительно ирраціональныхъ чиселъ въ школѣ ограничиваются обыкновенно нѣсколькими примѣрами. Мы лучше перейдемъ прямо къ историческому развитію вопроса.

Исторически возникновеніе понятія объ ирраціональномъ числѣ имѣетъ своимъ источникомъ геометрическую интуицію и потребности геометріи. Представимъ себѣ ось абсциссъ съ нанесеннымъ на ней сгущеннымъ комплексомъ раціональныхъ точекъ. На этой оси остаются тогда еще и другія числа, какъ это, повидимому, показалъ Пиѳагоръ примѣрно слѣдующимъ образомъ. Если мы имѣемъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ два катета равны единицѣ длины, то его гипотенуза равняется $\sqrt{2}$ (фиг. 12); это же навѣрное не раціональное число. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ



Фиг. 12.

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},$$

*) См. „Вѣстникъ", № 490.

гдѣ a и b суть числа первыя между собой, то мы легко придемъ къ противорѣчію съ извѣстными законами дѣлимости цѣлыхъ чиселъ. Мы, такимъ образомъ, геометрически построили такой отрѣзокъ, отложивъ который на оси абсциссъ отъ нулевой точки, приходимъ къ нераціональной точкѣ, т. е. къ такой точкѣ, которая въ прежнемъ комплексѣ раціональныхъ точекъ не содержится. Вообще, въ большинствѣ случаевъ гипотенуза $\sqrt{m^2+n^2}$ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ катеты выражаются цѣлыми числами m и n, будетъ выражена ирраціональнымъ числомъ. Школа Пиѳагора очень усердно занималась разысканіемъ такихъ паръ чиселъ m и n, которымъ соотвѣтствуетъ раціональная гипотенуза; это такъ называемыя Пиѳагоровы числа, простѣйшимъ примѣромъ которыхъ является группа 3, 4, 5; мы къ нимъ еще возвратимся ниже. Во всякомъ случаѣ было извѣстно, что при этомъ построеніи, вообще говоря, получаются ирраціональные отрѣзки; это открытіе стоило жертвы въ сто быковъ, по поводу которыхъ такъ часто приходится слышать дурныя остроты.

Послѣдующіе греческіе математики изучали болѣе сложныя ирраціональности; такъ, напримѣръ, у Евклида мы находимъ ирраціональности вида $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и т. п. Вообще же можно сказать, что они, по существу, сводятся къ такимъ ирраціональностямъ, которыя можно получить повторнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня и которыя, сообразно этому, можно строить циркулемъ и линейкой. Общей же идеей объ ирраціональномъ числѣ они еще не владѣли.

Я долженъ, однако, еще нѣсколько точнѣе формулировать это замѣчаніе, чтобы избѣжать недоразумѣній. Мы имѣли въ виду сказать только то, что греки не владѣли такимъ пріемомъ, при помощи котораго можно было бы дать общее опредѣленіе ирраціональнаго числа, какъ мы это сдѣлаемъ ниже. При всемъ томъ понятіе объ общемъ вещественномъ числѣ, которое можетъ быть и не раціональнымъ, для нихъ выяснилось,— правда, съ иной точки зрѣнія, чѣмъ у насъ; все это носитъ у нихъ другой характеръ, такъ какъ они не пользовались буквами для общаго обозначенія числа. Именно, они разсматривали, какъ это излагаетъ систематически Евклидъ, отношенія двухъ произвольныхъ отрѣзковъ и оперировали надъ ними собственно точно такъ же, какъ мы теперь оперируемъ надъ произвольными вещественными числами. У Евклида встрѣчаются даже такія опредѣленія, которыя совсѣмъ напоминаютъ современную теорію ирраціональныхъ чиселъ. Однако, названіемъ своимъ они уже существенно отличаются отъ цѣлаго раціональнаго числа; послѣднее называется «*ἀριθμος*» между тѣмъ какъ отношеніе отрѣзковъ, т. е. любое вещественное число, называется «*λόγος.*».

Къ этому присоединимъ еще замѣчаніе относительно самаго слова „ирраціональный“. Оно ведетъ свое начало, вѣроятно, отъ неправильнаго перевода греческаго слова «*ἄλογος*» на латинскій языкъ. Это греческое слово, вѣроятно, означало „невыговариваемое число“. Этимъ желали сказать, что эти новыя числа, т. е. отношенія отрѣзковъ, не могутъ быть всегда выражены отношеніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ; лишь непониманіемъ переводчика объясняется то, что эти числа оказались „нелогичными“, какъ это, повидимому, выражается словомъ „ирраціональныя числа“. Общее понятіе объ ирраціональномъ числѣ появилось, повидимому, только въ концѣ XVI столѣтія послѣ введенія десятичныхъ дробей, употребленіе которыхъ получило право гражданства въ связи съ возникновеніемъ логариѳмическихъ таблицъ. Когда мы обращаемъ раціональную дробь въ десятичную, то мы можемъ, кромѣ конечныхъ дробей, получать еще безконечныя десятичныя дроби, которыя, однако, всегда должны быть періодическими. Простѣйшій примѣръ будетъ

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots;$$

мы имѣемъ здѣсь десятичную дробь, однозначный періодъ которой 3 начинается непосредственно послѣ запятой. Но тогда нѣтъ препятствій къ тому, чтобы представить себѣ непеpіодическую десятичную дробь, цыфры которой слѣдуютъ другъ за другомъ по какому-либо другому опредѣленному закону; каждый, конечно, признаетъ такую дробь опредѣленнымъ и въ тоже время нераціональнымъ числомъ. Но въ этомъ, собственно, уже содержится понятіе объ ирраціональномъ числѣ, къ которому такимъ образомъ насъ непосредственно приводитъ десятичная дробь. Исторически дѣло и здѣсь происходило совершенно такъ, какъ мы это выяснили выше относительно отрицательныхъ чиселъ: вычисленія съ необходимостью приводили къ введенію новыхъ понятій и надъ ними оперировали, не размышляя много объ ихъ сущности и объ ихъ обоснованіи, тѣмъ болѣе, что они часто оказывались чрезвычайно полезными.

Лишь въ шестидесятыхъ годахъ XIX столѣтія была признана потребность въ точной ариѳметической обработкѣ ученія объ ирраціональныхъ числахъ, что и было выполнено Вейерштрассомъ (Weierstrass) въ его лекціяхъ, относящихся къ указанному періоду. Общую теорію ирраціональныхъ чиселъ далъ въ 1879 году Г. Канторъ (G. Kantor) въ Галле, основатель ученія о многообразіяхъ, или комплексахъ, и независимо отъ него Р. Дедекиндъ (R. Dedekind) въ Брауншвейгѣ. Точку зрѣнія Дедекинда я намѣренъ пояснить здѣсь въ немногихъ словахъ. Мы принимаемъ, что мы владѣемъ совокупностью всѣхъ раціональныхъ чиселъ, но мы устранимъ всѣ пространственныя представленія, навязывающіяся намъ интуитивно съ непрерывностью числового ряда. Чтобы, исходя отсюда, придти къ чисто ариѳметическому опредѣленію ирраціональнаго числа, Дедекиндъ*) строитъ понятіе о сѣченіи въ области раціональныхъ чиселъ. Именно, если r есть раціональное число, то оно дѣлитъ всю совокупность раціональныхъ чиселъ на двѣ категоріи A и B такимъ образомъ, что

*) См. Р. Дедекиндъ „Непрерывность и ирраціональныя числа“, переводъ съ нѣмецкаго прив.-доц. С. Шатуновскаго. Изд. 2-ое. Одесса, 1909. „Mathesis“.

каждое число категоріи A меньше, нежели любое число категоріи B, каждое же раціональное число принадлежитъ той или иной категоріи. Категорія A есть совокупность всѣхъ чиселъ, которыя меньше r, а категорія B — совокупность всѣхъ чиселъ, которыя больше, нежели r; самое же число r можно отнести какъ къ одной, такъ и къ другой категоріи. Кромѣ этихъ „собственныхъ" сѣченій бываютъ еще сѣченія „несобственныя": подъ этимъ мы разумѣемъ такія подраздѣленія чиселъ на двѣ категоріи, которыя обладаютъ перечисленными выше свойствами, но не производятся раціональными числами: иными словами, это сѣченія, въ которыхъ категорія A не имѣетъ наибольшаго, а категорія B не имѣетъ наименьшаго числа. Примѣръ такого рода несобственнаго сѣченія даетъ намъ, скажемъ, $\sqrt{2} = 1,\ 414\ldots$ или вообще всякая непеAccording періодическая безконечная дробь. Относительно каждаго раціональнаго числа мы можемъ тотчасъ рѣшить, больше ли оно, или меньше, чѣмъ эта безконечная десятичная дробь, и сообразно этому отнести каждое раціональное число либо къ категоріи A, либо къ категоріи B. Въ такомъ случаѣ ясно, что каждое число категоріи A меньше числа категоріи B, а, съ другой стороны, въ категоріи A не можетъ быть наибольшаго, а въ категоріи B не можетъ быть наименьшаго числа, ибо между каждымъ раціональнымъ числомъ и нашей безконечной дробью еще всегда найдется безчисленное множество другихъ раціональныхъ дробей.

Въ виду этихъ соображеній Дедекиндъ устанавливаетъ опредѣленіе, которое съ точки зрѣнія строго логической должно быть, конечно, разсматриваемо, какъ чисто условное соглашеніе. Каждое сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ мы будемъ называть раціональнымъ или ирраціональнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли это сѣченіе собственнымъ или несобственнымъ.

Къ этому непосредственно примыкаетъ опредѣленіе равенства: два числа называются равными, если они производятъ одно и то же сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ. Исходя изъ этого опредѣленія, можно, напримѣръ, доказать, что $\frac{1}{3}$ равняется безконечной десятичной дроби $0{,}333\ldots$ Тотъ, кто станетъ на эту точку зрѣнія, дѣйствительно долженъ это доказать, исходя изъ опредѣленія, хотя человѣку, просто и наивно къ этому дѣлу приступающему, это можетъ показаться совершенно ненужнымъ. Получить же это доказательство нетрудно, если мы сообразимъ, что каждое раціональное число, которое меньше $\frac{1}{3}$, при обращеніи въ десятичную дробь рано или поздно дастъ меньшій десятичный знакъ, чѣмъ въ нашей безконечной дроби; всякое же раціональное число, которое больше этой безконечной, раньше или позже дастъ большій десятичный знакъ.

Въ лекціяхъ Вейерштрасса соотвѣтствующее опредѣленіе гласитъ такъ: два числа называются равными, если они отличаются другъ отъ друга меньше, чѣмъ на любое данное число. Связь между этимъ опредѣленіемъ и предыдущимъ легко усмотрѣть. Особенно нагляднымъ представляется послѣднее опредѣленіе, если мы сообразимъ, почему дробь $0,999\ldots = 1$: разница, очевидно, меньше, чѣмъ $0,1$, чѣмъ $0,01,\ldots$; слѣдовательно, на основаніи опредѣленія, она равна 0.

Теперь спрашивается, благодаря чему мы имѣемъ возможность ввести въ нашу систему ирраціональныя числа и производить дѣйствія надъ тѣми и другими числами, совершенно ихъ не различая? Причина кроется въ томъ, что сохраняетъ силу законъ монотонности элементарныхъ операцій. Принципъ заключается въ слѣдующемъ: если два ирраціональныхъ числа нужно сложить, перемножить и т. п., то мы ихъ заключаемъ во все болѣе и болѣе тѣсные предѣлы и надъ этими предѣлами соотвѣтственно производимъ тѣ же дѣйствія, которыя намъ нужно произвести надъ самыми ирраціональными числами; вслѣдствіе закона монотонности и результатъ послѣдовательно замыкается во все болѣе и болѣе тѣсныя границы.

Мнѣ нѣтъ надобности излагать здѣсь эти вещи, такъ какъ вы можете подробно ознакомиться съ ними въ учебникахъ, лучше всего опять-таки у Вебера-Вельштейна и Буркгардта. Тамъ вы найдете и бо́льшія подробности относительно опредѣленія ирраціональнаго числа, которыя я здѣсь только изложилъ въ общихъ чертахъ.

Здѣсь я предпочелъ бы остановиться еще на томъ, чего вы въ книгахъ обыкновенно не найдете: именно на томъ, какъ можно перейти отъ этой предпосланной ариѳметической теоріи ирраціональныхъ чиселъ къ ихъ примѣненію въ другихъ областяхъ. Въ особенности я имѣю въ виду здѣсь аналитическую геометрію, которую мы, по наивной интуиціи, принимаемъ обратно за источникъ ирраціональныхъ чиселъ, и которая психологически дѣйствительно является этимъ источникомъ.

Если мы возьмемъ ось абсциссъ, на которой, какъ выше, нанесены тѣ же нулевыя и раціональныя точки, то основное положеніе, на которомъ покоится это примѣненіе, гласитъ: каждому раціональному или ирраціональному числу отвѣчаетъ точка, имѣющая это число своей абсциссой; каждой точкѣ на прямой отвѣчаетъ въ качествѣ абсциссы раціональное или ирраціональное число.

Такого рода исходное положеніе, которое стоитъ во главѣ дисциплины, изъ которой все дальнѣйшее вытекаетъ чисто логически, тогда какъ само оно не можетъ быть логически доказано, мы называемъ аксіомой. Смотря по сложившимся взглядамъ того или иного математика, онъ можетъ смотрѣть на аксіому, какъ на интуитивно ясную истину или какъ на болѣе или менѣе произвольное соглашеніе. Настоящая аксіома объ однозначномъ соотвѣтствіи между всѣми вещественными числами, съ одной стороны, и точками прямой, съ другой стороны, обыкновенно называется аксiомой Кантора, который въ первый разъ точно ее формулировалъ*).

Здѣсь, именно, будетъ умѣстно сказать нѣсколько словъ о природѣ нашихъ пространственныхъ представленій.

Самое это выраженіе, строго говоря, можно понимать двояко: съ одной стороны, можно имѣть въ виду непосредственное чувственное, эмпирическое представленіе о пространствѣ, которое мы контролируемъ при помощи измѣренія; съ другой стороны,—присущее намъ отвлеченное, внутреннее представленіе о пространствѣ, можно было бы сказать идею о пространствѣ, которая возвышается надъ неточностью чувственныхъ воспріятій. Такого рода различіе вообще имѣетъ мѣсто при каждомъ интуитивномъ воззрѣніи, какъ я уже имѣлъ случай указать при развитии понятія о числѣ; лучше всего оно выясняется, быть можетъ, слѣдующимъ примѣромъ. Что означаетъ небольшое число 2, 5 или 7, намъ непосредственно ясно, но о большихъ числахъ,—напримѣръ, о числѣ 2503—мы уже не имѣемъ такого непосредственнаго, нагляднаго представленія. Здѣсь, напротивъ, находитъ себѣ примѣненіе внутреннее представленіе о расположенномъ числовомъ рядѣ, которое мы себѣ составляемъ, исходя отъ цѣлыхъ чиселъ при помощи совершенной индукціи. Что касается представленія о пространствѣ, то дѣло обстоитъ такъ: если мы разсматриваемъ разстояніе между двумя точками, то мы можемъ оцѣнить и измѣрить его лишь съ ограниченнымъ приближеніемъ, такъ какъ нашъ глазъ неспособенъ различать отрѣзки, падающіе ниже нѣкоторой границы; это есть такъ называемый порогъ ощущенія, понятіе, играющее чрезвычайно важную роль во всей психологіи. Но по существу дѣло не измѣняется и въ томъ случаѣ, если мы усиливаемъ нашъ глазъ самыми тонкими инструментами, такъ какъ существуютъ физическія свойства, которыя лишаютъ насъ возможности выйти за извѣстныя границы точности. Такъ, напримѣръ, оптика учитъ насъ, что длина свѣтовой волны, отъ которой зависитъ цвѣтъ, есть величина порядка 0,001 миллиметра (1 микронъ). Она обнаруживаетъ далѣе, что предметы небольшіе, по сравненію съ этими размѣрами, не могутъ быть ясно видимы, потому что въ этомъ случаѣ не получается уже оптическаго изображенія, точно воспроизводящаго детали. Вслѣдствіе этого оптическимъ путемъ мы не можемъ уже различать длины, меньшія одного микрона, такъ что при выраженіи длины въ миллиметрахъ дѣйствительное значеніе могутъ имѣть только первые три десятичныхъ знака. Такимъ же образомъ и при всякихъ другихъ физическихъ наблюденіяхъ и измѣреніяхъ мы наталкиваемся на такого рода пороги ощущенія, которые устанавливаютъ предѣлъ возможной точности. Указанія, падающія за эти предѣлы, никакого значенія уже не имѣютъ и свидѣтельствуютъ о невѣжествѣ или даже о недобросовѣстности. Такого рода преувеличенно точныя числа мы находимъ,

*) Mathem. Annalen, Bd. V, 1872.

напримѣръ, въ курортныхъ рекламахъ, указывающихъ содержаніе той или иной соли въ источникѣ съ такою точностью, установленіе которой при помощи дѣйствительнаго взвѣшиванія совершенно невозможно.

По сравненію съ этимъ свойствомъ эмпирическаго представленія о пространствѣ, необходимо ограниченнаго извѣстнымъ приближеніемъ, абстрактное или идеальное представленіе о пространствѣ остается въ силѣ безъ такого ограниченія; и въ силу же Канторовой аксіомы оно вполнѣ параллельно ариѳметическому опредѣленію понятія о числѣ.

Сообразно этому подраздѣленію нашихъ представленій является цѣлесообразнымъ и самую математику раздѣлить на двѣ части: на математику точную и математику приближенную. Выяснимъ это различіе на уравненіи $f(x)=0$. Въ приближенной математикѣ, какъ и въ случаѣ нашихъ дѣйствительныхъ эмпирическихъ представленій, здѣсь рѣчь идетъ не о томъ, чтобы $f(x)$ точно обратилось въ нуль, а только о томъ, чтобы значеніе функціи $[f(x)]$ упало въ предѣлы достижимаго порога точности; такимъ образомъ, равенство $f(x)=0$ должно служить только сокращеннымъ выраженіемъ неравенства

$$[f(x)] < \varepsilon,$$

съ которымъ фактически и приходится имѣть дѣло. Выполнить же строго требованіе равенства $f(x)=0$ составляетъ уже задачу точной математики. Такъ какъ въ приложеніяхъ играетъ роль только приближенная математика, то можно, выражаясь рѣзко, сказать, что нужду мы имѣемъ собственно въ этой послѣдней дисциплинѣ, между тѣмъ какъ точная математика существуетъ только для удовольствія тѣхъ, которые ею занимаются, а въ остальномъ составляетъ лишь опору для математики приближенной.

Возвращаясь опять къ нашей темѣ, я долженъ сказать, что логическое опредѣленіе ирраціональнаго числа несомнѣнно относится къ точной математикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, утвержденіе, что двѣ точки отстоятъ другъ отъ друга на разстояніе, выражающееся ирраціональнымъ числомъ миллиметровъ, фактически не имѣетъ никакого смысла, такъ какъ десятичные знаки дальше третьяго не поддаются реальной повѣркѣ. Въ практикѣ мы можемъ, такимъ образомъ, свободно замѣнять ирраціональныя числа раціональными. На первый взглядъ это находится въ противорѣчіи съ закономъ раціональныхъ указателей въ кристаллизаціи, или, напримѣръ, съ тѣмъ обстоятельствомъ, что въ астрономіи приходится отличать случаи существенно различные, когда времена оборотовъ двухъ планетъ имѣютъ раціональное или ирраціональное отношеніе. Въ дѣйствительности здѣсь опять проявляется только многозначность нашего языка, такъ какъ здѣсь понятіе раціональное и ирраціональное нужно понимать въ совершенно другомъ смыслѣ,— въ смыслѣ, который именно и свойственъ приближенной математикѣ. Когда здѣсь говорятъ, что величины имѣютъ раціональное отношеніе, то подъ этимъ разумѣютъ, что ихъ отношеніе выражается парой небольшихъ чиселъ,—напримѣръ, $\frac{3}{7}$. Такое же отношеніе, какъ $\frac{2021}{7053}$ здѣсь несомнѣнно отнесли бы уже къ ирраціональнымъ. Насколько собственно велики могутъ быть числитель и знаменатель, это мѣняется отъ случая къ случаю, въ зависимости отъ условій вопроса.

Всѣ эти интересныя соображенія развиты мною въ лекціяхъ, читанныхъ въ весеннемъ семестрѣ 1901 года и изданныхъ подъ названіемъ „Anvendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ (Ausgearb. v. C. H. Müller).

Въ двухъ словахъ я хотѣлъ бы еще указать, въ заключеніе, какъ я себѣ представляю изложеніе этихъ вещей въ школѣ. Точное развитіе теоріи ирраціональныхъ чиселъ здѣсь врядъ ли умѣстно, такъ какъ она не соотвѣтствуетъ интересамъ большинства учениковъ. Юноша несомнѣнно всегда удовлетворится указаніемъ ограниченнаго приближенія; точность же въ 0,001 миллиметра уже вызоветъ полное изумленіе. Вслѣдствіе этого будетъ вполнѣ достаточно, если въ школѣ выяснить ирраціональное число только на общихъ примѣрахъ, какъ оно большею частью имѣетъ мѣсто. Конечно, немногіе юноши, обладающіе ясно выраженнымъ математическимъ дарованіемъ, этимъ не удовлетворятся и захотятъ вникнуть глубже въ сущность вопроса. Достойной задачей учителя будетъ удовлетворить эту потребность, не нарушая интересовъ большинства учениковъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Методъ работы Пуанкаре.

Эмиля Бореля.

Меня часто спрашивали, въ чемъ заключаются математическія работы, которымъ Пуанкаре обязанъ своей славой; къ несчастью, то обстоятельство, что имя математика получило всемірную извѣстность, еще не дѣлаетъ болѣе доступными теоріи математическаго анализа. Я хорошо знаю, что въ этихъ вещахъ любопытство публики отличается достаточной скромностью: она умѣетъ довольствоваться словами, не добиваясь пониманія идей. При такихъ условіяхъ удовлетворить публику было бы дѣломъ несерьезнымъ: быть можетъ, это и забавно, но мы этимъ не станемъ здѣсь заниматься. Тѣмъ же, которые пожелали бы дѣйствительно познакомиться съ содержаніемъ трудовъ Пуанкаре, мы по совѣсти можемъ дать лишь одинъ совѣтъ подготовиться къ чтенію этихъ работъ путемъ десятилѣтняго изученія математики; для лицъ же, основательно знакомыхъ съ элементами, которые преподаются въ среднихъ и высшихъ школахъ, пожалуй, достаточно будетъ трехъ или четырехъ лѣтъ.

Итакъ мы должны отказаться отъ мысли сдѣлать доступными результаты изслѣдованій, которыя отвели Пуанкаре мѣсто рядомъ съ пятью или шестью великими математиками XIX столѣтія и одно изъ первыхъ мѣстъ среди математиковъ XX столѣтія; нѣсколько лучше обстоитъ дѣло съ методомъ, которымъ Пуанкаре пользуется въ своихъ изысканіяхъ. Я желалъ бы попытаться охактеризовать вкратцѣ этотъ методъ; такая попытка не будетъ нескромной, потому что Пуанкаре никогда не старается скрывать путей своего генія*).

Методъ Пуанкаре отличается существенно активнымъ и зодческимъ характеромъ; приступая къ какому-нибудь вопросу, онъ не слишкомъ заботится объ исторіи его, но обращается къ современному изложенію; онъ непосредственно находитъ новыя аналитическія формулы, которыя могутъ подвинуть рѣшеніе этого вопроса, наскоро излагаетъ главные результаты и ... переходитъ къ другому вопросу. Онъ увѣряетъ, что, окончивъ какую-нибудь статью, онъ всякій разъ замѣчаетъ, какимъ образомъ можно было бы улучшить изложеніе; но ни разу ему не приходитъ на мысль посвятить нѣсколько дней этой дидактической работѣ: вѣдь эти дни онъ можетъ употребить съ бо́льшей пользой для новыхъ открытій.

Во всемъ этомъ нѣтъ ничего спеціально математическаго. Разсмотримъ глубже механизмъ, посредствомъ котораго онъ дѣлаетъ свои открытія. Существенную сторону этого механизма составляетъ, какъ мы уже отмѣтили, построеніе новыхъ формулъ; нелишнимъ будетъ подчеркнуть этотъ пунктъ, потому что эта созидательная мощь является, можетъ быть, (самой) существенной чертой генія Пуанкаре. Чтобы сдѣлать это болѣе понятнымъ для читателей, незнакомыхъ съ математикой, я долженъ здѣсь воспользоваться сравненіемъ. Они знакомы съ ариѳметическимъ вычисленіемъ, и часто бываютъ склонны думать, что математики занимаются безконечными сложеніями и умноженіями... а также извлеченіями кубическихъ корней. Дѣйствительно, ариѳметическія операціи представляютъ собой исключительно комбинаціи изъ цѣлыхъ чиселъ, составленныхъ изъ единицъ, которые всѣ равны между собой; эти дѣйствія можно сравнить съ постройкой совершенно правильныхъ стѣнъ изъ кирпичей одинаковой формы; такая работа требуетъ только терпѣнія и нѣкоторой аккуратности. Въ аналитическихъ же операціяхъ, напротивъ, приходится пользоваться чрезвычайно многочисленными матеріалами; по своему разнообразію послѣдніе могутъ быть сравнены съ матеріалами различныхъ архитектуръ, для которыхъ пользуются и камнемъ, и мраморомъ, и

*) См. его послѣднюю книгу „Наука и Методъ". Интересныя подробности читатель найдетъ въ замѣткѣ Notice sur Halphen, которую Пуанкаре посвятилъ своему предшественнику въ Академіи Наукъ, и въ его собственной Notice, написанной по поводу кандидатуры его въ Академію Наукъ.

и деревомъ и желѣзомъ и т. п.; эти операціи настолько же различны между собой, насколько броненосецъ, напримѣръ, можетъ отличаться отъ готической церкви; съ архитектурными строеніями онѣ имѣютъ то общее, что и здѣсь и тамъ простота и изящество основныхъ линій производятъ впечатлѣніе прекраснаго, тогда какъ усилія, посредствомъ которыхъ этотъ результатъ былъ достигнутъ, скрыты отъ глазъ.

Пуанкаре—великій строитель; онъ умѣетъ точно приспособлять свое строеніе къ той цѣли, которой онъ желаетъ достигнуть, и никакія трудности не могутъ заставить его сойти съ намѣченнаго пути. Съ этой точки зрѣнія онъ напоминаетъ намъ тѣхъ дѣятелей, которые сокрушаютъ всѣ препятствія, отдѣляющія ихъ отъ намѣченной цѣли; разница заключается въ томъ, что завоеванія Пуанкаре относятся къ области мысли.

Интересно было бы изслѣдовать, въ какой мѣрѣ этотъ методъ работы могъ повліять на философію Пуанкаре; люди дѣла обыкновенно относятся весьма презрительно къ тому людскому матеріалу, которымъ они распоряжаются по своему произволу; точно такъ же естественно, что человѣкъ, привыкшій видѣть, какъ формулы послушно слѣдуютъ за его мыслями (aux conceptions de son esprit), перестаетъ приписывать этимъ формуламъ абсолютное значеніе, выходящее за предѣлы его личнаго мнѣнія. Я ограничусь здѣсь указаніемъ, какой интересъ могло бы представить разсмотрѣніе съ этой точки зрѣнія философскихъ понятій Пуанкаре: тогда ихъ истинное значеніе будетъ, можетъ быть, лучше понятно.

Въ самомъ дѣлѣ, въ нихъ умудрялись находить какое-то отрицаніе во имя науки всѣхъ позитивныхъ и раціональныхъ понятій, какъ будто бы не было противорѣчія въ томъ, чтобы во имя науки отрицать самое основаніе всякой науки! Недавно на одномъ публичномъ академическомъ торжествѣ одинъ историкъ, предварительно похвавставшись тѣмъ, что онъ никогда не понималъ первыхъ элементовъ математики, выразился о тѣхъ, которые не такъ, какъ онъ, истолковываютъ идеи Пуанкаре, какъ объ „ученикахъ начальной школы"; онъ забылъ при этомъ, что для пониманія этихъ идей ему недостаетъ необходимыхъ знаній, включая сюда, можетъ быть, и тѣ свѣдѣнія, которыя пріобрѣтаются въ начальной школѣ. Нѣкоторыя лица отказываются, подобно этому историку, признать, что для того, чтобы говорить о „научной философіи", необходимо знать элементы; они предпочитаютъ относиться свысока къ тѣмъ людямъ, которые считаютъ важнымъ усвоеніе этихъ элементовъ.

Но возвратимся къ математическому методу Пуанкаре. Для характеристики его можно сказать также, что Пуанкаре больше завоеватель, чѣмъ колонизаторъ; въ неизвѣданной области онъ отважно занимаетъ возвышенныя мѣста и затѣмъ предоставляетъ другимъ позаботиться о благоустройствѣ новыхъ владѣній; самъ же онъ направляется въ другія области, гдѣ его присутствіе болѣе необходимо.

Онъ не приписываетъ особаго значенія тѣмъ концепціямъ, которыхъ нельзя примѣнить непосредственно въ какой-нибудь конкретной формѣ; вотъ еще черта, которая сближаетъ его съ людьми дѣла; онъ не мечтатель и не идеологъ. Мы сказали-бы,— если бы мы не опасались, что столь парадоксальное утвержденіе будетъ дурно понято,—что его мозгъ слишкомъ занятъ неустанной работой для того, чтобы имѣть покой, необходимый для размышленія. Скажемъ просто, что методъ его работы слишкомъ активенъ, чтобы оставлять мѣсто для размышленій, не приводящихъ непосредственно къ конкретному результату.

Благодаря этому методу онъ былъ въ состояніи дать намъ такое обильное количество научныхъ твореній — самое значительное со временъ Гаусса и Коши; оно не перестаетъ расти съ каждымъ годомъ, и со временемъ составитъ, быть можетъ, самый значительный вкладъ, какой математикъ когда-либо вносилъ въ сокровищницу человѣческаго ума.

Объ единствѣ вещества.

В. А. Гернета.

(Окончаніе).*

II.

Разсматривая матерію, какъ энергію, мы можемъ вычислить запасъ этой энергіи, содержащійся въ 1 граммѣ вещества. Допустимъ, что матерія состоитъ изъ электроновъ, обладающихъ скоростью, равной $1/3$ скорости свѣта. Тогда

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{0.001}{9.81} 10^{16} = 5.1 \times 10^9 \text{ килограммометровъ.}$$

Этой энергіи достаточно, по разсчету Le Bon'a, чтобы $4^1/_4$ раза обвести по экватору земного шара товарный поѣздъ изъ 40 вагоновъ по $12^1/_2$ тоннъ каждый. Эта энергія эквивалентна приблизительно энергіи, содержащейся въ 2.83 милліонахъ килограммовъ каменнаго угля. Легко вычислить, что тотъ, кто нашелъ бы способъ утилизировать эту энергію, смогъ бы превращать мѣдную копѣйку въ сотни тысячъ рублей.

Какъ ни грандіозны полученныя числа, они подтверждаются другими разсчетами. Такъ, г-жа Кюри нашла, что 1 гр. радія выдѣляетъ въ часъ около 80 малыхъ калорій, а позднѣйшая работа Швейдлера (E. V. Schweidler) и Гесса (V. F. Hess) даетъ даже 118 граммъ-калорій въ часъ, что вѣроятно точнѣе. Возьмемъ 100 калорій въ часъ; въ годъ это даетъ

$$24 \times 365 \times 100 = 876\,000 \text{ калорій,}$$

---

*) См. № 487 „Вѣстника".

а если принять продолжительность жизни радія въ 1000 лѣтъ, то за все время онъ выдѣлитъ 876 000 большихъ калорій, что составитъ около 3.7×10^8 килограммометровъ. Это число нѣсколько меньше предыдущаго, но вѣдь не вся энергія радія превращается въ тепло: значительная часть ея уходитъ въ видѣ лучей другого рода. Дж. Дж. Томсонъ, исходя изъ своей корпукулярной теоріи вещества, получаетъ около 10^9 килограммометровъ, а Максъ Абрагамъ (Max Abraham) приходитъ къ выводу, что 1 граммъ электроновъ несетъ запасъ энергіи около 6×10^{13} джаулей, что составляетъ около 6×10^{12} килограммометровъ.

Такимъ образомъ, оставаясь на изложенной точкѣ зрѣнія, мы должны сказать, что то, что мы называемъ нынѣ веществомъ, представляетъ колоссальный, неисчерпаемый запасъ энергіи, и что, если найдется человѣкъ, который сумѣетъ использовать этотъ запасъ энергіи, то онъ станетъ властителемъ міра, такъ какъ ему удастся разсѣять „тѣнь царицы міра"—зловѣщую энтропію*).

Прежде, чѣмъ разстаться съ этой областью идей, я позволю себѣ сдѣлать изъ всего сказаннаго нѣсколько общихъ выводовъ.

Наиболѣе молодые, созидающіеся міры посылаютъ намъ лишь лучи водорода, гелія и неизвѣстнаго элемента, который былъ раньше названъ небуляріемъ или небулозіемъ. Это элементы, имѣющіе наименьшіе атомные вѣса. Если допустить, что атомы современныхъ намъ элементовъ образовались постепенно изъ указанныхъ трехъ веществъ, какъ полагаетъ Морозовъ, или изъ протила Крукса, или, наконецъ, изъ электроновъ,—во всякомъ случаѣ наиболѣе правдоподобнымъ явится предположеніе, что первые появившіеся на свѣтъ атомы обладали наименьшимъ атомнымъ вѣсомъ, и что изъ нихъ и первобытнаго вещества или только изъ послѣдняго постепенно образовались все болѣе и болѣе тяжелые атомы. Если это такъ, то наиболѣе старыми изъ извѣстныхъ намъ на землѣ элементовъ являются: радій съ атомнымъ вѣсомъ 226.4, торій (232.42) и уранъ (238.5). Но эти элементы являются, какъ мы знаемъ, въ высшей степени радіоактивными. Такимъ образомъ, радіоактивность, т. е. способность атома распадаться на его составныя части, является признакомъ его старческаго состоянія. И сами собою напрашиваются дальнѣйшіе выводы. Слѣдовательно, въ будущемъ,—въ будущемъ, конечно, очень отъ насъ отдаленномъ,—атомы нашихъ элементовъ, еще больше устарѣютъ, ихъ способность распадаться еще больше усилится и такъ называемыя радіоактивныя явленія будутъ проявляться все въ большей и большей степени; наша земля раскалится до бѣла, вслѣдствіе сильнаго выдѣленія тепла, и, въ концѣ концовъ, вся превратится въ лучи, и теперь выдѣляемые радіоактивными веществами, и распадется на тотъ матеріалъ, изъ котораго она медленно и постепенно создавалась на протяженіи неисчислимыхъ вѣковъ. Это распаденіе должно сопровождаться громаднымъ выдѣленіемъ тепла и свѣта, и возможно, что мы уже были

*) См. брошюру: Проф. Ф. Ауэрбахъ. „Царица міра и ея тѣнь". Изд. 3-е. 1908. Одесса. „Mathesis".

свидѣтелями подобныхъ явленій, наблюдая такъ называемыя „временныя звѣзды“, какъ полагаетъ Ле Бонъ (Le Bon)*).

При всякомъ изслѣдованіи явленій природы наиболѣе важной цѣлью является обнаруженіе такъ называемыхъ константъ, т. е. тѣхъ постоянныхъ чиселъ, которыя управляютъ міромъ, ибо обнаружить константу значитъ открыть одинъ изъ законовъ природы. Въ теченіе ста лѣтъ атомные вѣса элементовъ были безспорными константами въ области науки, и ихъ опредѣленіе съ наибольшей степенью точности потребовало массы усилій со стороны самыхъ выдающихся химиковъ со временъ Стаса и до нашихъ дней, и, несомнѣнно, не меньшихъ усилій потребуетъ еще въ будущемъ. Но, если атомъ какъ было сказано, рождается, живетъ,— правда очень и очень долго,— и, наконецъ, умираетъ, разсыпаясь на іоны и электроны, при чемъ, конечно, вѣсъ его непрерывно, хотя и крайне медленно, измѣняется, то не становится ли его атомный вѣсъ числомъ, постояннымъ на „опредѣленный срокъ“, пока намъ неизвѣстный?

III.

На атомныхъ вѣсахъ извѣстныхъ намъ химическихъ элементовъ я хочу, въ заключеніе, остановить вниманіе читателя. Въ списокъ химическихъ элементовъ, ежегодно публикуемый международной коммиссіей по атомнымъ вѣсамъ, внесены въ 1909 году 81 элементъ. Главнѣйшей задачей коммиссіи является тщательный анализъ всѣхъ работъ, посвященныхъ провѣркѣ атомныхъ вѣсовъ извѣстныхъ уже элементовъ и опредѣленію атомныхъ вѣсовъ элементовъ вновь открытыхъ, и исправленіе и дополненіе списка атомныхъ вѣсовъ, ежегодно дѣлаемое на основаніе этого анализа. Нѣтъ сомнѣній, что значительно большая часть нынѣ общепринятыхъ атомныхъ вѣсовъ опредѣлена, не смотря на всѣ усилія, съ недостаточной точностью. Объясняется это громадными трудностями задачи и многочисленными источниками ошибокъ, о которыхъ было бы слишкомъ долго говорить. Въ таблицѣ 1909 года атомный вѣсъ водорода (1.008) приведенъ съ тремя десятичными знаками, 27 атомныхъ вѣсовъ — съ двумя, 49 — съ однимъ и 4 выражены въ цѣлыхъ числахъ. Эти послѣдніе принадлежатъ очень рѣдкимъ и мало изученнымъ элементамъ**) и несомнѣнно опредѣлены съ весьма малой степенью точности. Наибольшаго вниманія заслуживаютъ атомные вѣса, приведенные съ двумя десятичными знаками, такъ какъ это тѣ именно вѣса, которые являлись предметомъ болѣе тщательнаго изученія; имъ посвящено громадное, сравнительно, количество спеціальныхъ работъ, хотя, конечно, приведенные въ таблицѣ десятичные знаки не могутъ считаться окончательно установленными. Останавливаясь на этихъ 27 элементахъ, мы видимъ, что атомные вѣса четырехъ изъ нихъ выражаются цѣлыми числами съ нулями на

*) G. Le Bon. L'Evolution des forces. Paris. 1907, pp. 92—93.

**) Лютецій, неонъ, ксенонъ и неоиттербій.

мѣстахъ десятыхъ и сотыхъ*), для 14 элементовъ уклоненіе отъ цѣлаго значенія или отъ цѣлаго значенія съ дробью 0.5 не превышаетъ ± 0.10 и для двухъ оно заключается между 0.10 и 0.12; такимъ образомъ изъ 27 атомныхъ вѣсовъ 20 уклоняются не больше, чѣмъ на ± 0.12, и лишь 7 отходятъ дальше. Это такъ же трудно объяснить только случайностью, какъ и, то что изъ 49 атомныхъ вѣсовъ, помѣщенныхъ съ однимъ десятичнымъ знакомъ, 16 выражаются цѣлыми числами и 10 уклоняются на 0.1 отъ цѣлаго значенія. Такимъ образомъ, и гипотезу Проута нельзя считать окончательно похороненной. О мнѣніи Гинрихса было уже сказано выше.

Подводя итоги, мы должны признать прежде всего, что атомы химическихъ элементовъ перестали быть атомами въ точномъ смыслѣ этого слова, но что они представляютъ сложныя системы болѣе мелкихъ частичекъ вещества, находящихся въ чрезвычайно быстромъ движеніи. Затѣмъ мы не можемъ не признать, что рѣзкая грань между веществомъ и энергіей исчезла, и мы имѣемъ возможность наблюдать, какъ превращается въ энергію вещество,— если продолжать называть такъ устойчивую форму энергіи. Наконецъ, взаимное превращеніе химическихъ элементовъ, завѣтная мечта, которая увлекала много поколѣній алхимиковъ на протяженіи двухъ тысячелѣтій, стала въ наши дни несомнѣннымъ фактомъ, правда, пока лишь для весьма ограниченнаго числа элементовъ, и нѣтъ невозможнаго въ допущеніи, что эманація радія сыграетъ въ будущемъ ту роль, которую долженъ былъ сыграть философскій камень нашихъ предшественниковъ.

Трудно учесть всѣ разнообразныя послѣдствія этихъ открытій послѣднихъ лѣтъ, тѣмъ болѣе, что въ картинѣ, постепенно развертывающейся передъ нами, еще очень много туманныхъ пятенъ, которыя приходится дорисовывать при помощи фантазіи. Одно несомнѣнно: мы стоимъ на порогѣ новой эры въ наукѣ, и за туманной завѣсой, скрывающей отъ насъ тайны творенія, строенія и взаимнаго превращенія химическихъ элементовъ, уже вырисовываются заманчивыя перспективы, обѣщающія человѣку новые богатѣйшіе источники могущества и власти надъ мертвой природой.

---

*) Въ число этихъ 4-хъ элементовъ входитъ и кислородъ, атомный вѣсъ котораго (16.00) положенъ въ основу всей таблицы.

Солнечныя пятна и магнитизмъ.

А. Коттона.

Какъ извѣстно, солнечныя пятна кажутся намъ черными лишь благодаря дѣйствію контраста: ядро ихъ, т. е. центральная, наиболѣе темная часть, несомнѣнно испускаетъ гораздо меньше свѣта, чѣмъ остальная поверхность солнца, но все же оно по силѣ своего сіянія можетъ быть сравнено съ полнымъ мѣсяцемъ; можно даже, несмотря на нѣкоторыя трудности, изслѣдовать этотъ свѣтъ при помощи сильно разсѣивающаго спектроскопа. Это изслѣдованіе дало уже интересные результаты; оказалось, напримѣръ, что пятна имѣютъ спектръ, неодинаковый со спектромъ собственно солнца: нѣкоторыя темныя линіи, встрѣчающіяся въ обоихъ спектрахъ, въ спектрѣ пятенъ расширены или даже раздвоены. Сюда же относится весьма важное открытіе, недавно сдѣланное г. Гэлемъ (Hale).

Фай допускалъ, что въ солнечныхъ пятнахъ существуютъ вихри на подобіе гигантскихъ циклоновъ. Относительно нѣкоторыхъ пятенъ эту гипотезу подтвердили наблюденія, сдѣланныя по методамъ Деландра (Deslandres)*) и Гэля. Въ особенности прекрасныя фотографіи, совсѣмъ недавно**) полученныя г. Гэлемъ при помощи большихъ приборовъ, которые онъ установилъ въ обсерваторіи на горѣ Вильсонъ (въ Калифорніи) на высотѣ 2400 метровъ, дали возможность подтвердить, что въ нѣкоторыхъ пятнахъ имѣютъ мѣсто вихревыя движенія: смотря по пятну, эти движенія совершаются то въ одномъ направленіи, то въ другомъ. Основываясь на этомъ Гэль разсуждалъ слѣдующимъ образомъ: если вращающееся такимъ образомъ вещество, обладающее большими линейными скоростями, наэлектризовано, то въ силу т. н. явленія Роуланда въ областяхъ, расположенныхъ въ центрѣ вихря, должно существовать магнитное поле, направленное вдоль вихревой оси. И это магнитное поле, какъ открылъ Зееманъ, должно видоизмѣнять спектральныя линіи: не по этой ли причинѣ происходятъ тѣ особенныя измѣненія нѣкоторыхъ линій, которыя открылъ намъ спектроскопъ?

Если это такъ, то намъ сейчасъ же представляется способъ повѣрки: явленіе Зеемана обладаетъ драгоцѣннымъ свойствомъ, позволяющимъ точно отличать магнитныя измѣненія отъ другихъ измѣненій, вызванныхъ различными причинами; мы говоримъ о состояніи поляризаціи измѣненныхъ линій. Въ частности, если наблюдатель смотритъ по направленію магнитнаго поля, т. е. въ данномъ случаѣ вдоль вихревой оси, то онъ долженъ, какъ извѣстно, увидѣть, что края расширенной линіи испускаютъ свѣтъ, поляризованный круговымъ образомъ, и при томъ съ одной стороны линіи—вправо, а съ другой

---

*) Comptes rendus, 14 авг. 1905 г.

**) Contributions Mount Wilson Observatory. Obs. № 26.

стороны--влѣво. Сообразно съ этимъ, американскій физикъ помѣстилъ передъ щелью спектроскопа анализаторъ для поляризованныхъ круговымъ образомъ лучей (параллелепипедъ Френеля и николь); на этой щели онъ и получалъ изображеніе одного изъ пятенъ, подлежавшихъ изученію, при чемъ выбиралъ моментъ, когда изображеніе пятна было возможно ближе къ центру изображенія солнца*); тогда онъ обнаружилъ въ дѣйствительности**) оба предсказанныя явленія круговой поляризаціи. Онъ имѣлъ возможность сфотографировать обусловленныя этимъ измѣненія для 30 солнечныхъ линій, расположенныхъ въ красной части спектра. Напротивъ, сосѣднія теллурическія линіи (обусловленныя земной атмосферой) не обнаруживаютъ никакихъ слѣдовъ поляризаціи; это доказываетъ, что здѣсь не можетъ быть рѣчи о какомъ-нибудь источникѣ погрѣшности, зависящемъ отъ приборовъ для наблюденія. Далѣе, Гэль въ видѣ повѣрки нашелъ, что направленіе круговыхъ лучей мѣняется на обратное при переходѣ къ другому солнечному пятну, въ которомъ вихревое движеніе совершается въ противоположномъ направленіи, и что при визированіи самыхъ краевъ вихря наблюдается прямолинейная поляризація.

Такимъ образомъ установлено, что въ нѣкоторыхъ солнечныхъ пятнахъ существуютъ магнитныя поля, напряженность которыхъ достаточно велика для измѣненія линій. Мы будемъ въ состояніи измѣрить эти магнитныя поля, если мы будемъ лучше знать интенсивность явленія Зеемана для разсматриваемыхъ линій (главнымъ образомъ, линій желѣза и хрома). Теперь уже, согласно Зееману, эту величину для того случая, къ которому относятся наблюденія г. Гэля, можно оцѣнить приблизительно въ 3000 гауссовъ. Такимъ образомъ, напряженность поля, открытаго въ этихъ солнечныхъ пятнахъ, приблизительно въ 15 000 разъ превышаетъ горизонтальную слагающую земного поля, отъ которой въ нашихъ широтахъ зависитъ направленіе нашихъ буссолей и морскихъ компасовъ. Впрочемъ, не лишено вѣроятности, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ въ пятнахъ должны встрѣчаться поля съ гораздо бо́льшей напряженностью: уже давно различные физики замѣтили случаи, когда нѣкоторыя линіи [въ спектрахъ] пятенъ или протуберанцевъ были не только расширены, но и сильно раздвоены.

Это открытіе, важное само по себѣ, въ будущемъ можетъ дать намъ цѣнныя свѣдѣнія относительно физики солнца; можно предвидѣть, что въ лабораторіяхъ, посвященныхъ изученію физики солнца, поляризаціонные приборы найдутъ себѣ гораздо болѣе широкое примѣненіе, чѣмъ до сихъ поръ. Но, сверхъ того, слѣдуетъ замѣтить, что эти наблюденія надъ спектромъ пятенъ являются косвеннымъ доказатель-

---

*) Легко можно предвидѣть, что, если пятно не находится въ центрѣ, то края линіи поляризованы эллиптически.

**) Nature, № 2026. Гэль ограничился пока, насколько намъ извѣстно, этой короткой замѣткой въ англійскомъ журналѣ; нѣкоторыя дополненія, которыя мы ниже приводимъ, были сообщены имъ проф. Зееману, который недавно опубликовалъ ихъ съ приложеніемъ одного изъ клише въ журналѣ Physikalische Zeitschrift (9, стр. 834; 15 ноября 1908 г.).

ствомъ существованія поля, возбужденнаго электрической конвекціей. Это поле было открыто Роуландомъ; какъ извѣстно, чрезвычайно трудно было доказать существованіе его путемъ лабораторныхъ опытовъ; вспомнимъ, что одно время нѣкоторые физики даже сомнѣвались въ этомъ. Наблюдая, какъ это сдѣлалъ Гэль въ своей прекрасной работѣ, спектръ этихъ пятенъ съ вихревыми движеніями, мы нѣкоторымъ образомъ присутствуемъ при самыхъ опытахъ, но въ этихъ гигантскихъ вихряхъ, предъ которыми размѣры земли кажутся ничтожными, возникаютъ магнитныя поля, съ которыми совершенно не идутъ въ сравненіе поля, которыя можно возбудить, если посредствомъ динамомашинъ увлекать въ быстрое вращательное движеніе доски, заряженные электричествомъ.

Въ заключеніе прибавимъ, что открытіе Гэля можетъ имѣть также значеніе для физики земного шара. Во-первыхъ, [силовыя] поля, существованіе которыхъ было только что доказано, могутъ въ значительной степени содѣйствовать объясненію измѣненій земного магнитизма въ періоды максимума пятенъ. Затѣмъ можно идти еще далѣе: какъ извѣстно, вся солнечная атмосфера вращается съ періодомъ, приблизительно равнымъ 25 суткамъ; эта атмосфера должна быть наэлектризована, и благодаря вращенію должно возбуждаться магнитное поле. Спрашивается, нельзя ли привлечь это поле и къ объясненію измѣненій земного магнитизма, и не можетъ ли оно пролить немного свѣта на постоянную часть его, происхожденіе которой до сихъ поръ остается совершенно загадочнымъ?

РЕЦЕНЗІИ.

П. И. Павлиновъ, преподаватель Рижскаго реальнаго училища Императора Петра I. *Основанія аналитической геометріи на плоскости.* Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Рига. 1908 г. Ц. 75 к. Стр. 79.

Обращаясь со своимъ изложеніемъ къ ученикамъ седьмого класса реальныхъ училищъ, г. Павлиновъ нашелъ нужнымъ предпослать на первыхъ пяти страницахъ (глава I) понятія о геометрическихъ мѣстахъ, примѣры ихъ, встрѣчающіяся въ элементарной геометріи и въ томъ числѣ, главнымъ образомъ, плоскія сѣченія прямого кругового конуса, какъ геометрическія мѣста. Противъ такой предварительной главы нельзя, разумѣется, возражать: едва ли въ курсѣ элементарной геометріи достаточно подчеркивается понятіе о геометрическихъ мѣстахъ, и остановиться на немъ въ началѣ аналитической геометріи, гдѣ оно играетъ такую существенную роль, очень полезно. Мнѣ кажется скорѣе, что эти замѣчанія у г. Павлинова слишкомъ кратки и конспективны и слишкомъ много оставляютъ на долю классныхъ разъясненій преподавателя. Но главное содержаніе главы—опредѣленіе эллипса, параболы и гиперболы, какъ плоскихъ сѣченій прямого кругового конуса, и доказательство посредствомъ элементарныхъ геометрическихъ соображеній того основного свойства этихъ кривыхъ, что разстоянія точекъ каждой такой кривой отъ фокуса и отъ директрисы находятся въ постоянномъ отношеніи. Такимъ образомъ, эти кривыя при началѣ изложенія аналитической геометріи на плоскости вводятся, какъ результатъ разсмотрѣнія фигуръ пространства 3 измѣреній. Такъ, положимъ, вводятся эти кривыя и въ министерской программѣ, которую г. Павлиновъ перепечатываетъ на первой страницѣ своей книжки, но все же въ этой программѣ онѣ помѣщены послѣ прямой линіи и круга. Если же предпосылать вступительную главу, въ которой дать элементарный геометрическій выводъ нѣкоторыхъ главнѣйшихъ свойствъ разсматриваемыхъ кривыхъ, то это слѣдовало бы сдѣлать болѣе подробно. Въ западно-европейской литературѣ, особенно англійской, существуетъ цѣлый рядъ такихъ руководствъ, и даже въ нашей сравнительно бѣдной отечественной литературѣ можно указать, напримѣръ, на книжку однофамильца автора, А. Павлинова „Синтетическій обзоръ кривыхъ линій" (Москва, 1873, 73 стр. и 3 табл. черт.), преслѣдующую именно эту цѣль — познакомить, опираясь только на знаніе элементарной геометріи, со свойствами эллипса, параболы и гиперболы. Сверхъ того, и исторически эти кривыя явились впервые, какъ доказываетъ Г. Цейтенъ,*) не какъ сѣченія конуса, а въ связи съ эллиптичесскимъ, параболическимъ и гиперболическимъ построеніемъ при помощи гномона. Можетъ быть, именно съ этого опредѣленія и хорошо было бы начать, — тѣмъ болѣе, что оно крайне просто приводитъ къ уравненію въ прямоугольныхъ координатахъ, — и уже для сѣченій конуса плоскостью показать, что это тѣ же самыя кривыя.

Я остановился нѣсколько подробнѣе на этой первой главѣ, потому что она не совсѣмъ обычна въ элементарныхъ учебникахъ аналитической геометріи. Что касается дальнѣйшаго, то, какъ уже отчасти видно изъ предыдущаго, изложеніе автора вообще довольно конспективно, языкъ иногда оставляетъ желать лучшаго (напримѣръ, стр. 10: „Итакъ равенство $y = b$ или $y = -b$ будетъ имѣть для насъ смыслъ вполнѣ опредѣленной прямой $A \parallel X$"). Встрѣчаются и нѣкоторые промахи. Въ n^0 13 слишкомъ кратко сказано объ опредѣленіи разстоянія между двумя точками, — слѣдовало все же отмѣтить, что формула сохраняется, въ какихъ бы углахъ координатъ ни лежали данныя точки. Но это еще можно отнести на счетъ излишней сжатости изложенія. Въ слѣдующемъ же n^0 14, слѣдуя установившейся рутинѣ, авторъ находитъ для координатъ точки Q, дѣлящей отрѣзокъ MN въ отношеніи $m:n$ $(m:n>0)$ и лежащей между точками M и N, формулу $x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}$, хотя это и нарушаетъ правило придавать отрѣзку тотъ или другой знакъ, смотря по направленію, въ которомъ мы его откладываемъ: отрѣзки QM и QN въ этомъ случаѣ откладываются въ противоположныхъ направленіяхъ, и

*) H. Zeuthen. Geschichle der Mathematik im Altertum u. Mittelalter.

потому слѣдуетъ брать $\frac{QM}{QN} = -\frac{m}{n}$, какъ это и дѣлаетъ, напримѣръ, П. Аппель (P. Appell) въ пересмотрѣнныхъ имъ послѣднихъ изданіяхъ извѣстнаго курса аналитической геометріи Бріо и Буке (Briot и Bouquet).

Чертежи грубоваты; встрѣчаются въ нихъ и неточности: такъ, на чертежѣ 21 (стр. 26) совершенно искаженъ видъ замкнутой петли листа Декарта; чертежъ 30 (стр. 42) слишкомъ сложенъ, благодаря стремленію соединить на немъ линіи, нужныя для доказательства нѣсколькихъ теоремъ.

Какъ примѣръ сжатости изложенія во вредъ ясности и точности, приведу стр. 54, гдѣ, опредѣливъ асимптоту, какъ прямую, къ сліянію съ которой неограниченно приближается вѣтвь кривой, не достигая ея, однако, на конечномъ разстояніи, авторъ прибавляетъ: „Асимптота есть касательная къ кривой въ безконечно-удаленной точкѣ ея.“ Въ такомъ общемъ видѣ это и не вѣрно, — примѣромъ служитъ кривая $y = \frac{\cos x}{x}$, для которой ось x-овъ есть асимптота, но не касательная въ безконечно-удаленной точкѣ. Для гиперболы же надо было это утвержденіе доказать. Если же авторъ желалъ предоставить это учащимся, то слѣдовало помѣстить въ число упражненій.— Въ качествѣ другого примѣра излишней сжатости можно отмѣтить n^0 57 (стр. 35). Въ оглавленіи, — вѣроятно, подъ вліяніемъ стремленія выполнить требованія программы,—этому параграфу дано заглавіе „Биполярныя уравненія эллипса“ и пр. Въ текстѣ о биполярныхъ координатахъ ни слова. Какъ ни малоупотребительны эти координаты (кромѣ эллипса, гиперболы и лемнискаты они, кажется нигдѣ не примѣнимы), все же недостаточно дать хотя бы и очень простой выводъ уравненія $r_1 + r_2 = 2a$, а нужно еще дать понятіе о системѣ биполярныхъ координатъ и сказать, что выведенное уравненіе и есть уравненіе эллипса въ этой системѣ. Такъ это и дѣлается, напримѣръ, въ курсѣ Бріо и Буке.—Выполнивъ пунктуально все, что́ значится въ министерской программѣ, авторъ далъ, сверхъ того, въ главѣ XI краткій разборъ уравненія 2-ой степени въ Декартовыхъ координатахъ и свойствъ выражаемыхъ имъ кривыхъ. Примѣровъ для упражненія довольно много (всѣхъ 113).

Во всякомъ случаѣ, пользоваться этимъ руководствомъ можно, хотя и съ нѣкоторою осторожностью, тщательно разъясняя ученикамъ темныя мѣста, которыхъ при сжатости изложенія автора, боюсь, окажется немало и сверхъ указанныхъ выше.

Проф. Д. Синцовъ.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 180 (5 сер.). Доказать слѣдующую теорему: если нѣкоторую точку A окружности соединить съ вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ вписаннаго въ нее правильнаго многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ, то сумма

$$AA_2 + AA_4 + \ldots + AA_{2n}$$

хордъ четнаго порядка равна суммѣ

$$AA_1 + AA_3 + \ldots + AA_{2n+1}$$

хордъ нечетнаго порядка.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 181 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} + \frac{r_b + r}{r_b - r} + \frac{r_c + r}{r_c - r} = \frac{(a+b+c)^3}{4abc} + \frac{r}{2R} - 1,$$

гдѣ r, r_a, r_b, r_c, R суть радіусы вписаннаго, внѣвписанныхъ и описаннаго круговъ и a, b, c — стороны нѣкотораго треугольника.

Ат. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 182 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x - \sin^4 x = 0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 183 (5 сер.). Доказать, что уравненіе

$$x^2 + px + q = 0$$

не имѣетъ раціональныхъ корней, если p и q суть нечетныя числа.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 184 (5 сер.). На данной окружности дана точка A. Найти построеніемъ другую точку B данной окружности такъ, чтобы точка P, въ которой пересѣкаются касательныя, проведенныя въ точкахъ A и B, отстояла отъ прямой AB на разстояніе, равное данному отрѣзку l.

Н. С. (Одесса).

№ 185 (5 сер,). Привести къ логариѳмическому виду выраженіе

$$(1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C)^2 - 4 \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 73 (5 сер). *Данъ правильный многоугольникъ* P, *вписанный въ кругъ радіуса* R. *Вершины его соединяются черезъ одну хордами, которыя, пересѣкаясь, образуютъ многоугольникъ* P_1. *Затѣмъ стороны многоугольника* P *продолжаютъ черезъ одну; тогда послѣдовательныя пересѣченія являются вершинами новаго многоугольника* P_2. *Доказать, что многоугольники* P, P_1, P_2 *подобны, и что сторона многоугольника* P *есть средняя пропорціональная между сторонами многоугольниковъ* P_1 *и* P_2; *вычислить сторону каждаго изъ многоугольниковъ* P_1, P_2 *по сторонѣ* a_n *многоугольника* P *и по радіусу* R.

Пусть $ABCDEF\ldots$ послѣдовательныя вершины многоугольника, и пусть AC, BD, CE, DF и т. д. пересѣкаются послѣдовательно въ точкахъ α, β, γ и т. д. Въ равнобедренныхъ треугольникахъ ABC, BCD, CDE и т. д. углы при основаніяхъ AC, BD, CE и т. д. имѣютъ общую величину, равную:

$$\angle BAC = \frac{2d - \angle ABC}{2} = d - \frac{2d\,(n-2)}{2n} = \frac{2d}{n}, \text{ гдѣ } d = 90^\circ. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, углы BAC, BCA; CBD, CDB; DCE, DEC и т. д. равны между собой, откуда слѣдуетъ, что треугольники $B\alpha C$, $C\beta D$, $D\gamma E$ и т. д. съ равными основаніями BC, CD, DE и т. д. 1) равны между собою, 2) равнобедренны, 3) подобны треугольнику ABC, такъ что:

$$\angle B\alpha C = \angle C\beta D = \angle D\gamma E \ldots = ABC = \frac{2d\,(n-2)}{n}, \qquad (2)$$

$$B\alpha = C\alpha = C\beta = D\beta = D\gamma = E\gamma = \ldots \qquad (3)$$

Углы при основаніяхъ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ и т. д. равнобедренныхъ треугольниковъ $C\alpha\beta$, $D\beta\gamma$ и т. д. имѣютъ общую величину, равную [см. (1)]

$$\angle C\alpha\beta = \angle CB\alpha + \angle BC\alpha = 2 \cdot \frac{2d}{n} = \frac{4d}{n}, \qquad (4)$$

а такъ какъ ихъ боковыя стороны [см. (3)] равны, то и сами треугольники $C\alpha\beta$, $D\beta\gamma$ и т. д. равны между собою, а потому и ихъ основанія $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ и т. д. равны, т. е.

$$\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta \text{ и т. д.} \qquad (5)$$

Итакъ, стороны многоугольника $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, т. е. многоугольника P_1 равны между собой, и углы ихъ, равные, соотвѣтственно, какъ вертикальные, угламъ (2), также равны между собою, т. е. многоугольникъ P_1 есть правильный, одноименный съ P. Пусть теперь стороны AB и CD пересѣкаются въ M, BC и DE — въ N, CD и EF — въ S и т. д. Треугольники BMC, CND, DSE и т. д. равны между собою по равнымъ основаніямъ BC, CD и т. д. и по равенству угловъ при этихъ основаніяхъ; дѣйствительно, каждый изъ этихъ угловъ есть внѣшній уголъ многоугольника P. Такимъ образомъ, треугольники BMC, CND, DSE и т. д. суть равные между собою равнобедренные треугольники, откуда

$$BM = MC = CN = ND = DS = SE = \text{ и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что MCN, NDS и т. д. суть равнобедренные треугольники, которые, имѣя при вершинѣ C, D, E и т. д. углы, равные внутреннимъ угламъ многоугольника P, подобны каждому изъ треугольниковъ ряда ABC, BCD и т. д., такъ что

$$\angle NMC = \angle BAC, \quad \angle NSD = \angle BAC = BCA,$$

откуда

$$MN = NS = \text{ и т. д.}, \quad \angle MNS = \angle ABC = \frac{2d\,(n-2)}{n},$$

откуда вытекаетъ, что многоугольникъ $MNS\ldots$, т. е. P_2 также есть многоугольникъ правильный, одноименный съ P. Назовемъ стороны $\alpha\beta$ и MN многоугольниковъ P_1 и P_2 соотвѣтственно черезъ x и y. Изъ равнобедренныхъ треугольниковъ $B\alpha C$ и $C\alpha\beta$ имѣемъ, называя уголъ $\frac{2d}{n}$ черезъ ϑ [см. (1) и (4)]

$$\frac{\alpha\beta}{2} = \alpha C \,.\, \cos 2\vartheta,$$

$$x = \alpha\beta = 2 \,.\, \alpha C \,.\, \cos 2\vartheta,$$

$$a_n = BC = 2 \,.\, \alpha C \,.\, \cos \vartheta,$$

откуда

$$\frac{x}{a_n} = \frac{\cos 2\vartheta}{\cos \vartheta}, \tag{6}$$

т. е.

$$x = \frac{a_n \cos 2\vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{a_n (2 \cos^2 \vartheta - 1)}{\cos \vartheta}. \tag{7}$$

Проведя апоөему OK къ сторонѣ AB изъ центра O многоугольника P, имѣемъ:

$$OK = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}} = R \cos \frac{\angle AOB}{2} = R \cos \frac{4d}{2n} = R \cos \vartheta.$$

откуда

$$\cos \vartheta = \frac{OK}{R},$$

а потому [см. (7)]

$$x = \frac{a_n \left(\frac{2\overline{OK}^2}{R^2} - 1\right) \cdot R}{\overline{OK}} = \frac{(a_n 2\overline{OK}^2 - R^2)}{R\overline{OK}} =$$

$$= \frac{a_n \left(2R^2 - \frac{a_n^2}{2} - R^2\right)}{R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}} = \frac{a_n (2R^2 - a_n^2)}{2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}} = \frac{a_n (2R^2 - a_n^2)}{R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}. \tag{8}$$

Такъ какъ многоугольникъ P можетъ быть полученъ такимъ же построеніемъ изъ P_2, какимъ получена фигура P_1 изъ P, то [см. (6)]

$$\frac{a_n}{y} = \frac{\cos 2\vartheta}{\cos \vartheta}, \quad \frac{x}{a_n} = \frac{a_n}{y},$$

т. е. a_n есть средняя пропорціональная величина между x и y, откуда

$$y = \frac{a_n^2}{x} = \frac{a_n^2 R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{a_n (2R^2 - a_n^2)} = \frac{a_n R \sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2R^2 - a_n^2}.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 105 (5 сер.). *Построить треугольникъ* ABC, *зная положеніе центра тяжести* G, *центра* O *описаннаго круга и вершины* B.

Назовемъ черезъ M середину AC. Мы знаемъ, что G лежитъ на медіанѣ BM и при томъ такъ, что $BG = 2GM$, или $GM = \frac{1}{2} BG$. Кромѣ того, прямая OM перпендикулярна къ AC, такъ какъ O есть центръ круга описаннаго.

Отсюда вытекаетъ построеніе. Описываемъ изъ O, какъ изъ центра, радіусомъ OB окружность, откладываемъ на продолженіи BG отрѣзокъ $GM = \frac{1}{2} GB$; затѣмъ въ точкѣ M проводимъ перпендикуляръ къ OM до встрѣчи въ A и C съ окружностью O. Треугольникъ ABC есть искомый. Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы точка M лежала внутри окружности O. Въ исключительномъ случаѣ, если точки M и O совпадаютъ, задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній: любой прямоугольный треугольникъ, вершина котораго лежитъ въ B и основаніемъ котораго служитъ діаметръ AC окружности O, даетъ правильное рѣшеніе задачи.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 113 (5 сер.). *При какихъ значеніяхъ* x *можно найти уголъ* a, *удовлетворяющій уравненію*

$$\cos a = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}?$$

(Заимств. изъ *L'Education mathématique*).

Для того, чтобы можно было отыскать уголъ a, удовлетворяющій уравненію

$$\cos a = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4},$$

необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина выраженія $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}$ не превосходила единицы, или, что все равно, чтобы квадратъ этого выраженія не превосходилъ единицы. Итакъ, искомыя значенія x суть тѣ, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$\frac{(x^2 - 5x + 4)^2}{(x^2 - 4)^2} \leqq 1,$$

или

$$\frac{(x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 4)^2}{(x^2 - 4)^2} \leqq 0. \qquad (1)$$

Такъ какъ знаменатель первой части неравенства (1) есть число неотрицательное, то ему могутъ удовлетворять лишь тѣ значенія x, для которыхъ числитель первой части есть число отрицательное или нуль. Итакъ, искомыя значенія x необходимо должны удовлетворять неравенству

$$(x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 4)^2 \leqq 0,$$

которое можно преобразовать къ виду

$$[x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4]\,[x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 4)] \leqq 0,$$

$$(2x^2 - 5x)(8 - 5x) \leqq 0,$$

или же

$$(2x^2 - 5x)(5x - 8) \geqq 0. \qquad (2)$$

Записавъ неравенство (2) въ видѣ $2x\left(x - \frac{5}{2}\right).5\left(x - \frac{8}{5}\right) \geqq 0$, раздѣлимъ обѣ части на 10. Тогда имѣемъ:

$$x\left(x - \frac{8}{5}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \geqq 0. \qquad (3)$$

Всякое дѣйствительное значеніе x удовлетворяетъ одному изъ условій. $1^0\ x<0$, $2^0\ x\geqq 0$, $x\leqq\frac{8}{5}$, $3^0\ x>\frac{8}{5}$, $x<\frac{5}{2}$, $4^0\ x\geqq\frac{5}{2}\cdot$ Легко видѣть, что въ первомъ и третьемъ случаѣ лѣвая часть неравенства (3) отрицательна, а во второмъ и четвертомъ положительна. Итакъ для того, чтобы можно было найти уголъ α, удовлетворяющій данному уравненію, соотвѣтствующія значенія x необходимо должны удовлетворять одному изъ условій:

$$x\geqq 0,\quad x\leqq\frac{8}{5}, \tag{4}$$

$$x\geqq\frac{5}{2}\cdot \tag{5}$$

Такъ какъ при всѣхъ значеніяхъ x, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, знаменатель неравенства (1) остается положительнымъ, то формулы (4) и (5) даютъ намъ всѣ искомыя значенія x, а именно: x должно либо заключаться въ промежуткѣ отъ 0 до $\frac{8}{5}$ (не исключая границъ промежутка), либо должно быть положительнымъ числомъ, не меньшимъ $\frac{5}{2}\cdot$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса)

№ 118 (5 сер.). *По данному основанію a и діагонали d построить равнобокую трапецію такъ, чтобы высота ея равнялась ея средней линіи.*

Пусть $ABCD$ — искомая трапеція, AD и BC — ея параллельныя, AB и CD — равныя стороны. Такъ какъ углы BAD и CDA при основаніи AD равнобокой трапеціи равны, то и треугольники BAD и CDA равны по двумъ сторонамъ и углу между ними; значитъ, и углы CAD и BDA равны. Поэтому, называя черезъ O точку пересѣченія діагоналей трапеціи, мы видимъ, что треугольникъ AOD и подобный ему треугольникъ BOC суть треугольники равнобедренные. Слѣдовательно, высота OM треугольника BOC есть и его медіана, т. е.

$$BM=MC=\frac{BC}{2}; \tag{1}$$

продолжая MO до встрѣчи въ N со стороной AD, находимъ точно такъ же, что

$$AN=ND=\frac{AD}{2}\cdot \tag{2}$$

Изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ BOM и DON имѣемъ [см. (1), (2)]:

$$\frac{BM}{ND}=\frac{MO}{ON},$$

откуда

$$\frac{BM+ND}{ND}=\frac{MO+ON}{ON},\ \text{или}\ \frac{\left(\frac{AD+BC}{2}\right)}{ND}=\frac{MN}{ON}\cdot \tag{3}$$

Такъ какъ $\frac{AD+BC}{2}$ есть длина средней линіи трапеціи, то для равенства послѣдней высотѣ MN трапеціи необходимо и достаточно [см. (3)], чтобы было соблюдено условіе $ON=ND$, или чтобы уголъ ODN прямоугольнаго треугольника ODN равнялся 45^0. Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе искомой трапеціи: отложимъ на нѣкоторой прямой данное основаніе $AD = a$ и строимъ (по одну сторону прямой AD) отрѣзки $AC = BD = \delta$ подъ углами $\angle CAD = \angle BDA = 45^\circ$ къ основанію AD. Четырехугольникъ $ABCD$ есть искомая трапеція.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 125 (5 сер.). *Доказать, что, если* A *есть число, взаимно простое съ* 546, *то произведеніе* $(A^6 + 1)(A^6 - 1)$ *кратно* 4368.

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Такъ какъ $546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ и такъ какъ A, по условію, есть число, взаимно простое съ 546, то оно не кратно ни одного изъ чиселъ 2, 3, 7, 13. Такъ какъ A не кратно 13, то произведеніе

$$(A^6 + 1)(A^6 - 1) = A^{12} - 1, \tag{1}$$

по теоремѣ Fermat'a кратно 13. Такъ какъ число $A^{12} - 1 = (A^2)^6 - 1$ кратно $A^2 - 1$ и такъ какъ A не кратно 3, то, разсматриваемое произведеніе [см. (1)], по теоремѣ Fermat'a, кратно 3-хъ. Такъ какъ A не кратно 7, то $A^6 - 1$, согласно той же теоремѣ Fermat'a, кратно 8, а потому и произведеніе (1) кратно 7. Изъ тожества $A^{12} - 1 = (A^4)^3 - 1$ мы видимъ, что произведеніе (1) кратно числа

$$A^4 - 1 = (A^2 - 1)(A^2 + 1). \tag{2}$$

Число A не кратно 2, а потому $A^2 + 1$ четно; представивъ нечетное число A въ видѣ $2k - 1$, гдѣ k — цѣлое число, имѣемъ:

$$A^2 - 1 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k = 4k(k - 1). \tag{3}$$

Произведеніе двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ $k - 1$ и k четно, а потому [см. (3) число $A^2 - 1$ кратно 8. Итакъ, числа $A^2 + 1$ и $A^2 - 1$ кратны соотвѣтственно 2 и 8; слѣдовательно, число $A^4 - 1$ кратно [см. (2)] числа 16, а потому и произведеніе (1) дѣлится на 16. Такъ какъ произведеніе (1) дѣлится, какъ это доказано выше, на каждое изъ попарно взаимно простыхъ чиселъ 13, 3, 7, 16, то оно дѣлится и на произведеніе $16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 4368$.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Богдановичъ* (Ярославль).

НВ **№ 126** (5 сер.). *Доказать формулу*

$$\operatorname{tg}\frac{(n+1)x}{2} = \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx}.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Сложивъ рядъ тожествъ

$$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sin x,$$

$$\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x,$$

$$\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x,$$

. . . .

$$\cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sin nx,$$

имѣемъ:

$$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx),$$

откуда

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

или

$$\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin x + \sin 2x \ldots + \sin nx. \qquad (1)$$

Сложивъ рядъ тожествъ:

$$\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x,$$

$$\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos nx,$$

находимъ

$$\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx);$$

откуда

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

т. е.

$$\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx. \qquad (2)$$

Раздѣливъ почленно равенство (1) на равенство (2), получимъ:

$$\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\cos\frac{(n+1)x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{(n+1)x}{2} = \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx}.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Богдановичъ* (Ярославль).

Поправка: Въ отдѣлѣ „Задачи“ (см. №№ 483 и 484 „Вѣстника“) двѣ различныя задачи имѣютъ одинъ и тотъ же номеръ — № 144. Въ отдѣлѣ „Рѣшенія задачъ“ эти задачи будутъ приведены подъ номерами 144 и 144а.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. М. Астрябъ, преподаватель Кіевскаго коммерческаго училища Л. Н. Володкевича. *Наглядная геометрія.* Начальный курсъ геометріи для трехъ младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для городскихъ училищъ. Со 190 рисунками и таблицей въ текстѣ. Изданіе „Сотрудника". Кіевъ. 1909. Стр. 172. Цѣна 80 к.

А. Воиновъ, директоръ Павловскаго реальнаго училища. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ съ приложеніемъ краткихъ свѣдѣній изъ ариѳметики.* Курсъ младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Часть I. Цѣлыя числа. 3-ье изданіе. 140 стр. Ц. 40 коп. Часть II. Дробныя числа. 2-ое изданіе. 176 стр. Ц. 50 коп. Павловскъ н/Д. 1909. Обѣ части допущены Учен. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ учебнаго пособія.

Эрнстъ Махъ. *Принципъ сохраненія работы.* Исторія и корень его. Переводъ съ пересмотрѣннаго и исправленнаго авторомъ нѣмецкаго изданія Г. А. Котляра. Подъ редакціей проф. **Н. А. Гезехуса**. Съ предисловіемъ автора къ русскому изданію. С.-Петербургъ. 1909. Ц. 40 коп.

А. Симоновъ. *Сборникъ первоначальныхъ упражненій по алгебрѣ.* Съ объясненіями для учебныхъ заведеній и самообразованія. Новгородъ. 1903. Цѣна 30 коп.

А. Я. Симоновъ. *Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами.* Пособіе для среднихъ учебныхъ заведеній и самообразованія. Омскъ. 1908. Ц. 20 коп.

А. Тумерманъ. *Учебникъ ариѳметики.* Систематическій курсъ для школьнаго и самостоятельнаго изученія. Часть I. Цѣлыя числа. Изданіе книжн. маг. „Образованіе". 1909. Ц. 30 коп.

П. Долгушинъ. *Вычисленія по приближенію.* Вып. I (для учащихся въ старшихъ классахъ средней школы). Ц. 25 коп. Вып. II. Теорія значности и сокращенныхъ вычисленій. Ц. 25 коп. Складъ изданія въ книжн. маг. И. А. Розова въ Кіевѣ и Одессѣ.

Р. М. Шаргородскій. *Суммированіе ариѳметическихъ рядовъ и приложеніе къ измѣренію площадей и объемовъ.* Кишиневъ. 1909. Ц. 75 коп.

А. Щукаревъ, приватъ-доцентъ *Введеніе въ курсъ физики. Ученіе объ энергіи и энтропіи въ элементарномъ изложеніи.* Изъ лекцій, читанныхъ въ 1907 — 1908 г. по приглашенію Московскаго Общества Народнаго Университета. Изд. „Природа и Школа". Стр. 56. Ц. 30 коп.

А. П. Павловъ. *Методика нагляднаго обученія счисленію простыхъ дробей.* Съ приложеніемъ таблицы и примѣровъ для вычисленій. Москва. 1909. Стр. 40. Ц. 30 коп.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

СОРОКЪ ПЕРВЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 481—492.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печатнаго Дѣла.
(Пушкинская ул., соб. д., № 18).
1909.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"

ЗА СОРОКЪ ПЕРВЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 481—492.

Статьи, отмѣченныя звѣздочкой, имѣются въ отдѣльныхъ изданіяхъ.

Статьи.

Сообщенія.

Некрологи.

Стр.

Математическія мелочи.

Рецензіи.

Научная хроника.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

Поправки.

Задача на премію № 2.

Задачи.

Пятой серіи.

Рѣшенія задачъ.

Четвертой серіи.

Пятой серіи.

Обложка
ищется

Обложка
пщется