Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLI Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 481.

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ 190⁷/₈ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

I. Дѣйствія надъ натуральными числами.

Естественно, что мы начнемъ прежде всего съ основного вопроса всей ариѳметики, т. е. съ дѣйствій надъ цѣлыми положительными числами. Здѣсь, какъ и во всемъ своемъ изложеніи, я намѣренъ прежде всего поставить вопросъ о томъ, какъ этотъ предметъ трактуется въ школѣ, а затѣмъ уже займусь изслѣдованіемъ того, что онъ, собственно, въ себѣ содержитъ съ болѣе глубокой точки зрѣнія.

1. Введеніе чиселъ въ школѣ.

Я ограничусь здѣсь краткими указаніями, такъ какъ вы, несомнѣнно, еще помните, какъ вы сами учились этимъ вещамъ въ школѣ. Я здѣсь, конечно, отнюдь не имѣю въ виду дѣйствительно ввести васъ въ практику школьнаго обученія, какъ это дѣлается на семинарскихъ занятіяхъ, учрежденныхъ при средне-учебныхъ заведеніяхъ. Я намѣренъ только привести матеріалъ, который поможетъ намъ оріентироваться въ нашихъ критическихъ разсужденіяхъ.

Ознакомить дѣтей съ ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, приспособляясь къ ихъ пониманію, научить ихъ дѣйствіямъ надъ ними такъ, чтобы они этимъ предметомъ вполнѣ овладѣли, въ высшей степени трудно и требуетъ многолѣтнихъ усилій, начиная съ перваго года обученія вплоть до третьяго класса гимназіи. Тотъ способъ изложенія этихъ началъ, который въ настоящее время господствуетъ почти во всѣхъ нашихъ школахъ, можно лучше всего характеризовать словами „наглядно“ и „генетически“. Это значитъ, что весь матеріалъ разрабатывается постепенно, съ самаго начала, на почвѣ хорошо извѣстныхъ, наглядныхъ представленій. Въ этомъ заключается коренное различіе отъ логической и систематической системы обученія, какая практикуется въ высшей школѣ. Весь матеріалъ расчленяется приблизительно слѣдующимъ образомъ (въ точности, конечно, этого указать невозможно). Весь первый годъ обученія посвящается счету въ предѣлахъ первыхъ двухъ десятковъ, а, примѣрно, первое полугодіе даже счету въ предѣлахъ одного десятка. Числа вводятся, какъ числовые образы, составленные изъ точекъ, или какъ количества всевозможныхъ доступныхъ дѣтямъ предметовъ. Сложеніе и умноженіе объясняется дѣтямъ и усваивается ими на наглядныхъ представленіяхъ. На второй ступени разрабатывается числовая область отъ единицы до ста; въ этотъ періодъ обученія, а зачастую еще и раньше, вводятся арабскія цифры, выясняется значеніе мѣста, занимаемаго цифрой въ числѣ, и вообще вводится десятичная система. Хочу здѣсь попутно указать, что установившееся названіе „арабскія цифры“, какъ и многое въ обычной терминологіи, исторически неправильно. Эта система счисленія въ дѣйствительности ведетъ начало отъ индусовъ, а не отъ арабовъ. Слѣдующая важная задача, относящаяся къ этой ступени обученія, есть разучиваніе таблицы умноженія. Сколько составитъ 5×3 или 3×8, нужно всегда помнить наизусть, а поэтому и заставляютъ дѣтей выучить табличку наизусть, конечно, выяснивъ имъ ее предварительно на наглядныхъ примѣрахъ. Для этого служитъ, главнымъ образомъ, „счетная машина“, которую обычно проще называютъ счетами. Она состоитъ изъ десяти параллельно укрѣпленныхъ проволокъ, по которымъ свободно передвигаются по десять шариковъ на каждой. Отбрасывая надлежащимъ образомъ эти шарики, мы можемъ прочесть на доскѣ результатъ умноженія, написанный уже въ десятичной формѣ.

Третій годъ обученія посвящается дѣйствіямъ надъ многозначными числами по извѣстнымъ простымъ правиламъ, справедливость которыхъ дѣтямъ обыкновенно ясна или, по крайней мѣрѣ, должна была бы быть ясна. Правда, этой ясности еще обыкновенно недостаточно для того, чтобы ученикъ вполнѣ усвоилъ правило, и учитель нерѣдко апеллируетъ къ авторитету очень дѣйствительнаго средства: „такъ оно есть, и, если ты этого не будешь знать, то тебѣ придется плохо!“

Я хочу здѣсь подчеркнуть еще одну сторону всего этого обученія, ибо этой стороной дѣла обыкновенно пренебрегаютъ въ высшей школѣ; именно, съ самаго начала удѣляется особенное вниманіе приложеніямъ счета къ потребностямъ практической жизни. Числа съ самаго начала приводятся на конкретныхъ примѣрахъ практической жизни; ученикъ очень скоро начинаетъ считать монетами, мѣрами, вѣсами, и вопросъ, столь важный въ повседневной жизни,— „что стоитъ“?—начинаетъ собой, обыкновенно, большую часть школьныхъ задачъ. Отсюда преподаватель постепенно восходитъ къ такимъ задачамъ (къ такъ называемымъ „скрытымъ“ задачамъ), въ которыхъ ходъ вычисленія предполагаетъ уже нѣкоторое самостоятельное разсужденіе; это приводитъ къ задачамъ на пропорціональное дѣленіе, смѣшеніе. Къ словамъ „наглядно“ и „генетически“, которыми мы старались выше охарактеризовать школьное обученіе, мы могли бы присоединить, въ качествѣ третьей характеристики, „практическія приложенія“.

Если бы мы, наконецъ, еще хотѣли охарактеризовать въ немногихъ словахъ и цѣль обученія ариѳметикѣ, то мы должны были бы сказать слѣдующее: она заключается въ томъ, чтобы пріучить дѣтей увѣренно владѣть ариѳметическими дѣйствіями, пользуясь при этомъ различными параллельно развивающимися душевными свойствами, къ которымъ приходится апеллировать, но не настаивая глубоко на логической концепціи, связывающей этотъ матеріалъ.

Упомяну здѣсь кстати о нѣкоторой враждѣ, играющей для школы нерѣдко фатальную роль, — именно, о враждѣ между преподавателями, получившими образованіе въ учительскихъ семинаріяхъ и преподавателями, вышедшими изъ высшихъ учебныхъ заведеній*). Начиная съ третьяго класса, на мѣсто преподавателя, получившаго образованіе въ семинаріи, вступаетъ лицо съ высшимъ образованіемъ. Вслѣдствіе этого въ ходѣ обученія часто происходитъ разрывъ, достойный всякаго сожалѣнія. Бѣдныя дѣти часто бываютъ вынуждены внезапно оперировать совершенно другими выраженіями, нежели тѣ, къ которымъ они до того привыкли и надъ которыми теперь даже издѣваются. Небольшимъ примѣромъ является, скажемъ, различіе въ знакахъ умноженія: крестъ, который предпочитаетъ начальный учитель, и точка, которой охотнѣе пользуются академисты. Это враждебное отношеніе можно изгладить только такимъ путемъ, что преподаватели, идущіе изъ высшей школы, отнесутся съ бо́льшимъ вниманіемъ къ своимъ коллегамъ изъ семинаріи и будутъ стараться сойтись съ ними. Это вамъ легко удастся выполнить, если вы всегда будете помнить, съ какимъ уваженіемъ вы должны относиться къ народному учителю. Подумайте только, какую нужно выработать въ себѣ методическую выдержку, чтобы постоянно обучать ариѳметикѣ сотни тысячъ неразумныхъ мальчишекъ, не приносящихъ въ школу никакой предварительной подготовки. Попытайтесь это сдѣлать и вы убѣдитесь, что вся ваша академическая подготовка принесетъ вамъ здѣсь мало пользы.

Однако, послѣ этого краткаго отступленія возвратимся къ школьному преподаванію. Въ третьемъ и, въ особенности, въ четвертомъ классѣ обученіе счету постепенно принимаетъ уже благородное облаченіе математики, что характеризуется прежде всего переходомъ къ буквенному исчисленію. Буквами a, b, c или x, y, z обозначаютъ какія-нибудь, хотя первоначально все-же цѣлыя положительныя, числа; надъ этими числовыми понятіями, изобра-

*) Мы имѣемъ въ виду семинаріи для подготовленія начальныхъ учителей; это не относится къ семинарскимъ занятіямъ при средне-учебныхъ заведеніяхъ, о которыхъ мы упоминали выше.

жаемыми буквами, производятъ дѣйствія, исходя изъ конкретнаго, нагляднаго содержанія, которое присваивается числамъ. Это представляетъ уже такой шагъ впередъ въ дѣлѣ абстракціи, что математика, собственно, именно и начинается съ дѣйствій надъ буквами. Конечно, этотъ переходъ не долженъ совершаться въ школѣ внезапно; напротивъ, мы должны пріучать юношу къ этой абстракціи постепенно.

Но уже здѣсь въ дѣлѣ обученія становится совершенно необходимымъ, чтобы самъ преподаватель былъ хорошо знакомъ съ логическими законами и основами счета и теоріи цѣлыхъ чиселъ, хотя бы ему естественно и не приходилось непосредственно сообщать ихъ ученикамъ. Займемся, поэтому, теперь нѣсколько подробнѣе основными законами счета.

2. Основные законы ариѳметическихъ дѣйствій.

Въ ходѣ историческаго развитія, конечно, долго складывали и умножали, не отдавая себѣ отчета въ тѣхъ законахъ, которымъ слѣдуютъ эти операціи. Лишь въ 20-хъ и 30-хъ годахъ предыдущаго столѣтія, главнымъ образомъ, французскіе и англійскіе математики выяснили основныя свойства этихъ операцій, на чемъ я, впрочемъ, не буду здѣсь останавливаться. Кто хочетъ ознакомиться съ исторіей этого вопроса подробнѣе, тому я могу рекомендовать здѣсь, какъ буду это дѣлать неоднократно ниже, большую „Энциклопедію математическихъ наукъ“ *), а также ея французское изданіе, отчасти носящее характеръ второго переработаннаго изданія **). Эта „Энциклопедія“ больше, чѣмъ какое бы то ни было другое сочиненіе, должно было бы найти себѣ мѣсто во всякой школьной библіотекѣ, потому что оно даетъ возможность всякому математику, учителю въ томъ числѣ, оріентироваться въ любомъ интересующемъ его вопросѣ. Къ тому предмету, которымъ мы теперь занимаемся, относится первая статья I тома ***) „Основы ариѳметики“ Шуберта ****), французское изданіе которой переработано Ж. Таннери (J. Tannery) и Ж. Молькомъ (J. Molk).

Возвращаясь къ нашей темѣ, я имѣю въ виду теперь дѣйствительно перечислить тѣ пять основныхъ законовъ, къ которымъ приводится сложеніе:

1) $a+b$ всегда представляетъ собой число; иначе говоря, дѣйствіе сложенія всегда безъ всякихъ исключеній выполнимо (въ противоположность вычитанію, которое въ области положительныхъ чиселъ не всегда выполняется);

---

*) „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“. Leipzig. B. G. Teubner, съ 1898 года; т. I вышелъ весь, томы II—VI выходятъ постепенно.

**) „Encyklopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées“. Paris (Gauthier-Villars) и Leipzig (Teubner), съ 1904 г.; т. I выходитъ въ настоящее время.

***) I томъ посвященъ ариѳметикѣ и алгебрѣ и выпущенъ подъ редакціей В. Ф. Мейера (W. Fr. Meyer, 1896—1904); во франц. изданіи I томъ редактируетъ Ж. Молькъ.

****) H. Schubert. „Grundlagen der Arithmetik“.

2) сумма $a+b$ всегда однозначна;

3) имѣетъ мѣсто сочетательный, или ассоціативный законъ: $(a+b)+c=a+(b+c)$, такъ что скобки можно и вовсе опустить;

4) имѣетъ мѣсто перемѣстительный, или коммутативный законъ: $a+b=b+a$.

5) имѣетъ мѣсто законъ монотонности: если $b>c$, то $a+b>a+c$.

Эти свойства всѣ понятны безъ дальнѣйшихъ поясненій, если мы имѣемъ передъ глазами наглядное представленіе о числѣ, какъ о количествѣ. Но они должны быть выражены строго формально, чтобы на нихъ можно было основать дальнѣйшее развитіе теоріи строго логически.

Что касается умноженія, то здѣсь дѣйствуетъ, прежде всего, пять законовъ, аналогичныхъ только-что перечисленнымъ:

1) $a.b$ всегда есть число;

2) произведеніе $a.b$ однозначно;

3) законъ сочетательный: $a.(b.c)=(a.b).c=a.b.c$;

4) законъ перемѣстительный: $a.b=b.a$;

5) законъ монотонности: если $b>c$, то $a.b>a.c$.

Наконецъ, связь сложенія съ умноженіемъ устанавливается шестымъ закономъ:

6) законъ распредѣлительный, или дистрибутивный: $a.(b+c)=a.b+a.c$.

Что всѣ вычисленія опираются исключительно на эти 11 законовъ, можно себѣ легко уяснить. Я ограничусь простымъ примѣромъ, скажемъ, умноженіемъ числа 7 на 12; согласно закону распредѣлительному,

$$7.12=7(10+2)=70+14;$$

далѣе, если мы разобьемъ 14 на $10+4$ (чтобы вывести „перенесеніе десятковъ"), то, опираясь на законъ сочетательный, имѣемъ:

$$=70+(10+4)=(70+10)+4=80+4=84.$$

Въ этомъ короткомъ разсужденіи вы, конечно, узнаете отдѣльные шаги, которые мы производимъ при вычисленіяхъ въ десятичной системѣ. Предоставляю вамъ самимъ разобрать примѣры посложнѣе. Мы здѣсь выскажемъ только сводный результатъ: наши цифровыя вычисленія заключаются въ повторномъ примѣненіи перечисленныхъ выше одиннадцати основныхъ положеній, а также въ примѣненіи заученныхъ наизусть результатовъ дѣйствій надъ простыми единицами (таблица сложенія и таблица умноженія).

Однако, гдѣ же находятъ себѣ примѣненіе законы монотонности? Въ обыкновенныхъ, формальныхъ вычисленіяхъ мы на нихъ дѣйствительно не опираемся, но они оказываются необходимыми въ задачахъ нѣсколько иного рода. Напомню вамъ здѣсь о передѣлкѣ, которую въ десятичномъ счетѣ называютъ *сокращеннымъ умноженіемъ и дѣленіемъ*. Это пріемъ величайшей практической важности, который, къ сожалѣнію, въ школѣ и среди студентовъ далеко еще недостаточно извѣстенъ, хотя при случаѣ о немъ говорятъ уже во второмъ классѣ; и здѣсь ограничусь только примѣромъ. Положимъ, что намъ нужно помножить 567 на 134, при чемъ въ этихъ числахъ простыя единицы установлены, — скажемъ, посредствомъ физическихъ измѣреній, — лишь весьма неточно. Въ такомъ случаѣ было бы совершенно безполезно вычислять произведеніе съ полною точностью, такъ какъ таковое все равно не гарантируетъ намъ точнаго значенія интересующаго насъ числа. Но что намъ дѣйствительно важно, это — знать *порядокъ величины* произведенія, т. е. опредѣлить, въ предѣлахъ какого числа десятковъ или сотенъ число заключается. Но эту оцѣнку законъ монотонности дѣйствительно даетъ вамъ непосредственно, ибо изъ него вытекаетъ, что искомое число содержится между 560.134 и 570.134 или между 560.130 и 570.140. Дальнѣйшее развитіе этихъ соображеній я опять-таки предоставляю вамъ самимъ. Во всякомъ случаѣ, вы видите, что при *„сокращенныхъ вычисленіяхъ“ приходится постоянно пользоваться законами монотонности*.

Что касается дѣйствительнаго примѣненія всѣхъ этихъ вещей въ школьномъ преподаваніи, то о систематическомъ изложеніи всѣхъ этихъ основныхъ законовъ сложенія и умноженія не можетъ быть и рѣчи. Учитель можетъ остановиться только на законахъ сочетательномъ, перемѣстительномъ и распредѣлительномъ, и то только при переходѣ къ буквеннымъ вычисленіямъ, эвристически выводя ихъ изъ простыхъ и ясныхъ численныхъ примѣровъ.

3. Логическія основы теоріи цѣлыхъ чиселъ.

Если въ дѣлѣ школьнаго преподаванія мы, естественно, еще менѣе можемъ дойти до постановки болѣе трудныхъ вопросовъ, то *въ современномъ математическомъ изслѣдованіи* серьезные вопросы здѣсь, собственно, и возникаютъ: *какъ обосновать эти законы, какъ обосновать понятіе о числѣ?* Здѣсь я намѣренъ оріентировать васъ въ этомъ вопросѣ, оставаясь вѣрнымъ цѣли настоящаго сочиненія — освѣтить матеріалъ школьнаго преподаванія съ высшей точки зрѣнія, и я дѣлаю это тѣмъ охотнѣе, что эти современныя идеи и помимо того проникаютъ къ вамъ со всѣхъ сторонъ въ теченіе вашихъ академическихъ занятій, между тѣмъ какъ психологическая сторона этого дѣла обычно не оговаривается въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо.

Что касается, прежде всего, самаго *понятія* о числѣ, то корни его въ высшей степени трудно вскрыть. Легче всего дышится, быть можетъ, тогда, когда рѣшаешься вовсе оставить въ сторонѣ эти трудныя вещи. За болѣе подробными указаніями относительно этихъ вопросовъ, очень усердно дебатируемыхъ философами, я вновь долженъ указать вамъ на приведенную выше статью французской энциклопедіи; здѣсь же ограничусь немногими замѣчаніями. Очень распространена точка зрѣнія, что понятіе о числѣ тѣсно связано съ понятіемъ о послѣдовательности во времени. Изъ представителей этого воззрѣнія укажу изъ философовъ Канта, изъ математиковъ — Гамильтона. Другіе, напротивъ, полагаютъ, что понятіе о числѣ стоитъ ближе къ пространственнымъ представленіямъ; они сводятъ понятіе о числѣ къ одновременному созерцанію различныхъ предметовъ, находящихся въ пространствѣ другъ подлѣ друга. Наконецъ, третье направленіе усматриваетъ въ представленіи о числѣ выраженіе особой способности нашего духа, независимо стоящей рядомъ съ нашими представленіями о пространствѣ и времени, а, можетъ быть, и выше ихъ. Я полагаю, что эта точка зрѣнія хорошо выражается цитатой изъ „Фауста“, которую профессоръ Г. Миньковскій*) приводитъ относительно чиселъ въ сообщеніи о новомъ его сочиненіи „Діофантовы приближенія“:

„Göttinen thronen hier in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit“**).

Если въ этой задачѣ мы имѣемъ дѣло болѣе съ вопросами теоріи познанія и психологіи, то въ проблемѣ объ обоснованіи нашихъ одиннадцати законовъ мы стоимъ существенно передъ вопросомъ логики.

Мы здѣсь будемъ различать четыре точки зрѣнія.

1. Первая точка зрѣнія, представителемъ которой я могу назвать Канта, смотритъ на правила дѣйствій, какъ на непосредственный результатъ воззрѣнія (Anschauung), при чемъ это слово въ наиболѣе широкомъ его значеніи нужно понимать, какъ „внутреннее воззрѣніе“, или интуицію. Впрочемъ, этотъ взглядъ отнюдь не сводится къ тому, что вся математика опирается на экспериментально контролируемые факты грубаго внѣшняго опыта. Приведемъ простой примѣръ. Законъ перемѣстительный доказывается ссылкой на приведенную здѣсь фигуру, въ которой соединены двѣ группы по три точки въ каждой, при чемъ мы видимъ, что совокупность ихъ распадается также на три группы по двѣ точки въ каждой: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Если на это, однако, возражаютъ, что, при сколько-нибудь значительныхъ числахъ, это непосредственное воззрѣніе уже не приводитъ къ сознанію справедливости высказанной истины, то приходится прибѣгнуть къ закону совершенной индукціи: если нѣкоторое предложеніе справедливо для небольшихъ чиселъ, и если, сверхъ того, оно остается справедливымъ для числа $n+1$ всякій разъ, какъ оно справедливо для числа n, то оно справедливо вообще для всякаго числа. Это предложеніе, имѣющее интуитивное происхожденіе, дѣйствительно всегда помогаетъ намъ выйти за тѣ предѣлы, въ которые насъ необходимо ставитъ конкретное воззрѣніе. На этой, приблизительно, точкѣ

*) H. Minkowsky. „Diophantische Approximationen“.

**) „Тамъ царятъ въ уединеніи богини, вокругъ нихъ нѣтъ никакого мѣста, нѣтъ никакого времени“.

зрѣнія стоитъ также и Пуанкарэ въ своихъ извѣстныхъ философскихъ сочиненіяхъ.

Если мы хотимъ уяснить себѣ значеніе этого вопроса объ обоснованіи одиннадцати основныхъ законовъ счета, то мы должны принять въ соображеніе, что, совмѣстно съ ариѳметикой, на нихъ, въ конечномъ счетѣ, покоится и вся математика. Мы не впадемъ, поэтому, въ преувеличеніе, если скажемъ, что, согласно выясненной сейчасъ точкѣ зрѣнія, достовѣрность всего зданія математики, въ конечномъ счетѣ, опирается на воззрѣніе (интуицію), въ самомъ обычномъ смыслѣ этого слова.

2. Во вторую очередь мы приведемъ нѣкоторую модификацію первой точки зрѣнія. Она заключается въ томъ, что пытаются свести эти основные законы въ ихъ примѣненіи къ бо́льшимъ числамъ на меньшія, такъ что на непосредственномъ воззрѣніи приходится обосновать только немногіе простѣйшіе случаи, изъ которыхъ можно вывести остальные уже чисто логически, не прибѣгая вновь къ воззрѣнію. Въ то время, какъ обычно чисто логическія операціи примѣняются лишь по установленіи названныхъ одиннадцати законовъ, здѣсь оказывается возможнымъ воспользоваться ими раньше, именно послѣ введенія упомянутыхъ болѣе простыхъ предложеній. Граница, отдѣляющая воззрѣніе отъ логики, отодвигается, и притомъ въ пользу послѣдней. Эту точку зрѣнія впервые провелъ Германъ Грассманнъ (H. Grassmann) въ своемъ „Учебникѣ ариѳметики“*), выпущенномъ въ 1861 году.

Въ качествѣ примѣра я укажу, что законъ перемѣстительности съ помощью совершенной индукціи можетъ быть выведенъ изъ закона сочетательности. Послѣ книги Грассманна слѣдуетъ указать сочиненіе итальянскаго ученаго Пеано**) (Peano): „Начала ариѳметики, изложенныя новымъ методомъ“. Однако, не думайте по этому заголовку, что книга написана по латыни. Напротивъ, она написана на собственномъ символическомъ языкѣ автора, который имѣетъ цѣлью выдѣлить каждый шагъ логическаго доказательства. Пеано имѣетъ въ виду такимъ образомъ достигнуть гарантій, что онѣ дѣйствительно опирается исключительно на тѣ положенія, которыя онъ предварительно принялъ, и не пользуется никакимъ другимъ интуитивнымъ матеріаломъ. Онъ хочетъ избѣжать опасности, которую необходимо вноситъ обыкновенный языкъ своими безконтрольными ассоціаціями идей и воспоминаніями о наглядныхъ образахъ.

---

*) H. Grassmann. „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten“. Berlin, 1861. Важнѣйшія главы отпечатаны въ полномъ собраніи математическихъ и физическихъ сочиненій Г. Грассманна „H. Grassmanns gessammelte mathematische und physikalische Werken“ (Herausgegeb. v. F. Engel), Bd. II, 1 (Leipzig 1904), pag. 295—349.

**) Peano. „Arithemeticae principia nova methode exposta“. Augustae Taurinorum. Torino, 1889. Замѣтимъ, что авторъ развилъ идею, изложенную въ указанномъ выше сочиненіи, въ новой книгѣ „Aritmetica generale e algebra elementare“ (1902), написанной въ идеографической системѣ.

Долженъ сказать вамъ къ тому же, что Пеано является главой цѣлой школы, очень обширной въ Италіи, которая такимъ же образомъ расчленяетъ предпосылки каждой отдѣльной математической дисциплины и старается посредствомъ идеографіи (по нѣмецки Begriffsschrift, писаніе понятіями) изслѣдовать ея логическія концепціи.

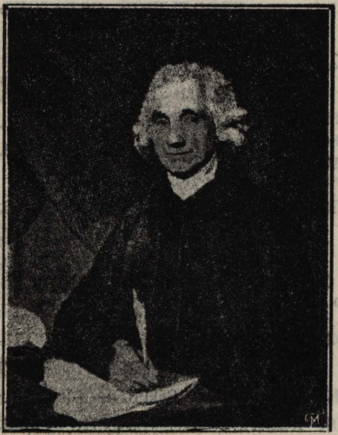
(Продолженіе слѣдуетъ).

Благородные и радіоактивные газы.

Вилліама Рамзая, профессора Лондонскаго университета.

Докладъ, сдѣланный въ собраніи австрійскихъ инженеровъ и архитекторовъ въ Вѣнѣ.

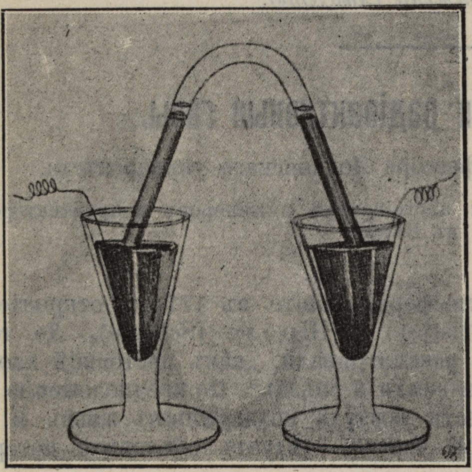
Изслѣдованіе состава атмосферы начато въ 1774 г. открытіемъ кислорода Пристлеемъ (Pristley) и Шееле (Scheele). До того времени атмосферный воздухъ разсматривали, „какъ настоящій хаосъ, въ который стекались эманаціи земли и звѣздъ“. По предположенію же Пристлея, утрату способности воздуха поддерживать жизнь и горѣніе, при удаленіи ея „доброй части“, слѣдуетъ объяснить потерей



Фиг. 1.
Іосифъ Пристлей.

Фиг. 2.
Генрихъ Кавендишъ.

его принципа „флогистона“, существованіе котораго тогда всѣми принималось. Сообразно этому, онъ назвалъ кислородъ „дефлогистированнымъ воздухомъ“. Спустя нѣсколько лѣтъ, когда Рётгерфордъ (Rutherford) изслѣдовалъ недѣятельный остатокъ, названный имъ „мефитическимъ воздухомъ“, а теперь называемый азотомъ, кислородъ стали называть, наоборотъ, „флогистированнымъ воздухомъ“; при этомъ опять-таки предполагали, что флогистонъ выдѣлился въ этотъ воздухъ изъ горящаго матеріала. Лѣтъ десять спустя, „мефитическій воздухъ“ (aër mephiticus), или азотъ, былъ вновь изслѣдованъ Кавендишемъ (Cavendish), который имѣлъ въ виду узнать, однороденъ ли онъ. Съ этой цѣлью онъ пропускалъ, по предложенію Пристлея, черезъ воздухъ, смѣшанный съ кислородомъ, въ присутствіи „мыльнаго щелока“, или ѣдкаго натра, электрическія искры. Въ то время еще не существовало машины Румкорфа и трансформатора, даже электрическій токъ былъ въ то время совершенно неизвѣстенъ. Кавендишъ и его ассистентъ должны были вслѣдствіе этого вращать цилиндрическую электрическую машину въ теченіе почти трехъ утомительныхъ недѣль, прежде чѣмъ слабыя искры привели въ соединеніе достаточное количество азота и кислорода. Онъ получилъ при этомъ небольшой остатокъ: пузырекъ, объемъ котораго составлялъ, по его оцѣнкѣ, около 120-й части взятаго имъ объема азота. Очень жаль, что должно было пройти цѣлое столѣтіе прежде, чѣмъ признали важность его открытія, хотя онъ, по всей вѣроятности, имѣлъ въ рукахъ аргонъ.

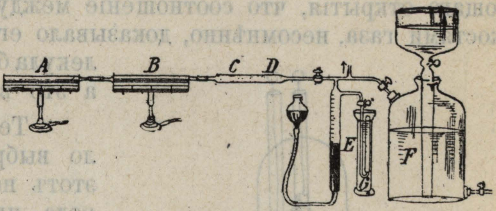


Фиг. 3.
Опытъ Кавендиша.
Проволоки соединялись съ „кондукторами“ электрической машины; искры проскакивали тогда черезъ воздухъ, находившійся въ изогнутой трубкѣ. Время отъ времени можно было вводить въ нее пипеткой воздухъ и кислородъ.

Въ 1894 г., при изслѣдованіи плотности обыкновенныхъ газовъ (кислорода, водорода и т. п.), лордъ Рэлей (Rayleigh) обратилъ вниманіе на то, что азотъ, получаемый изъ воздуха по удаленіи кислорода, имѣетъ нѣсколько большую плотность, чѣмъ добытый изъ химическихъ источниковъ, какъ, напримѣръ, изъ амміака или изъ азотной кислоты. Когда попытка объяснить это замѣчательное наблюденіе ему не удалась, онъ обратился съ письмомъ въ журналъ „Nature“ и просилъ совѣта. Но отвѣта не получилъ. Вскорѣ послѣ того, въ разговорѣ съ нимъ, я сообщилъ ему, что, по моему мнѣнію, истинная причина неодинаковой плотности кроется въ присутствіи еще неоткрытаго тяжелаго газа. Онъ же предполагалъ, что большая плотность должна быть объяснена озоно-подобной модификаціей азота. Я защищалъ свое мнѣніе и испросилъ разрѣшенія экспериментально провѣрить свою идею; онъ охотно согласился, и работа такимъ образомъ началась.

Уже многіе годы я демонстрировалъ лекціонный опытъ, который имѣетъ въ виду доказать, что горящее тѣло увеличивается въ вѣсѣ.

Я пользовался для этого порошкомъ магнія, послѣ сожженія котораго получается окись его. Для того, чтобы не улетучивалось слишкомъ много металла, я имѣлъ обыкновеніе отчасти закрывать тигель крышкой; послѣ такого опыта я чувствовалъ отъ остатка запахъ амміака, очевидно, вслѣдствіе поглощенія азота. Я примѣнилъ поэтому совмѣстно съ моимъ тогдашнимъ ученикомъ П. Вилліамсомъ (P. Williams) магніевые опилки для отдѣленія атмосфернаго азота отъ настоящаго. Время отъ времени опредѣлялась плотность остающагося газа и вскорѣ было замѣчено, что онъ сдѣлался тяжелѣе. Плотности газовъ сравниваютъ обыкновенно съ плотностью водорода: плотность азота равна 14, кислорода 16 и воздуха (т. е. смѣси азота и кислорода) 14,4. Плотность же остатка увеличивалась до 16, до 17,5 и, наконецъ, до 19.

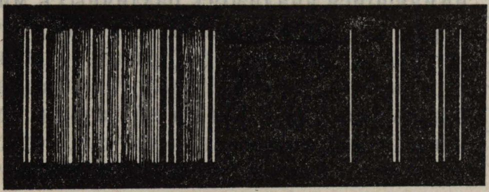


Фиг. 4.

Первый аппаратъ для приготовленія аргона.

Въ газометрѣ F находится азотъ, полученный изъ воздуха дѣйствіемъ накаленной до красна мѣди. A — накаленная до красна трубка изъ тугоплавкаго стекла, наполненная магніемъ; въ ней азотъ превращается въ нитридъ магнія и такимъ образомъ поглощается. Трубка B содержитъ раскаленную окись мѣди, для сожженія могущихъ быть органическихъ веществъ, и полученная изъ этого угольная кислота поглощается натристой известью въ трубкѣ C, а вода — фосфорнымъ ангидридомъ въ трубкѣ D. Помощью трубки E можно отобрать любое количество газа, для изслѣдованія его спектра или его плотности.

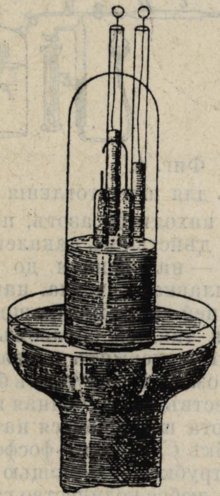
Причина неодинаковой плотности „атмосфернаго" и „химическаго" азота была, слѣдовательно, та, которую я предполагалъ, т. е. къ первому былъ примѣшанъ болѣе тяжелый газъ. При изслѣдованіи спектра остатка въ немъ были найдены еще неизвѣстныя красныя и зеленыя линіи. Я собралъ приблизительно около 100 $см^3$ этого новаго газа. Послѣ этой счастливой удачи я написалъ лорду Рэлею. Онъ сообщилъ мнѣ, что и имъ были произведены опыты въ томъ же самомъ направленіи, при чемъ онъ примѣнялъ при этомъ старый методъ Пристлея и Кавендиша; онъ получилъ около $^1/_2$ $см^3$ газа, объемъ котораго не поддавался уменьшенію при дальнѣйшемъ пропусканіи искръ, и который давалъ также неизвѣстный еще спектръ. Количества газа, полученныя имъ изъ различныхъ количествъ воздуха, были приблизительно пропорціональны послѣднимъ; произведенные же имъ опыты надъ диффузіей воздуха доказали, что новая составная часть атмосферы концентрируется въ частяхъ послѣдней, наименѣе способныхъ къ диффузіи. Все почти лѣто 1894 г. я велъ непрерывную переписку съ лордомъ Рэлеемъ, а 13 августа мы сдѣлали предварительное сообщеніе на



Красный. Фиг. 5. Фіолетовый.

Спектръ аргона.

съѣздѣ Британскаго общества естествоиспытателей въ Оксфордѣ объ открытіи новой составной части воздуха. Физикъ Лоджъ (Lodge) спросилъ тогда, „не открыли ли вы, господа, и имени этого газа“? Мы объ этомъ-то думали, но не имѣли еще права разсматривать новый газъ, какъ элементъ, пока я, незадолго до съѣзда, не сдѣлалъ рѣшающаго открытія, что соотношеніе между обѣими удѣльными теплоемкостями газа, несомнѣнно, доказывало его одноатомность. Атомъ и молекула были, слѣдовательно, идентичны, а это возможно только у элементовъ.



Фиг. 6.

Искровой аппаратъ лорда Рэлея.

Воздухъ, смѣшанный съ кислородомъ, находится въ пробирной трубочкѣ надъ ртутью. Ушки соединяются съ полюсами индукціонной машины; когда послѣдняя приводится въ дѣйствіе, то искры проскакиваютъ между проволоками въ трубкѣ. Подъ ихъ вліяніемъ азотъ соединяется съ кислородомъ, образуя двуокись азота, которая поглощается слоемъ ѣдкаго натра, находящагося на поверхности ртути, при чемъ одновременно образуются азотистокислый и азотнокислый натрій.

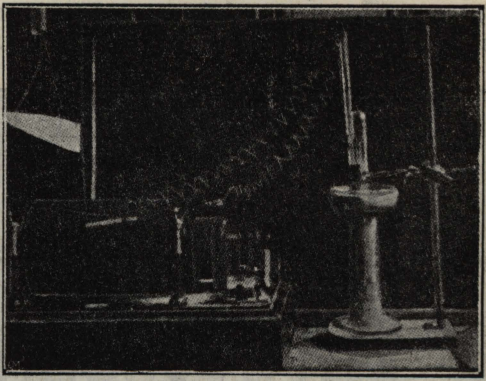
Теперь, слѣдовательно, нужно было выбрать имя, и, такъ какъ газъ этотъ не поддается дѣйствію ни кислорода, ни магнія, то мы его назвали „аргономъ“, вслѣдствіе его индифферентнаго характера.

Подробное описаніе нашихъ опытовъ было представлено въ началѣ января Королевскому Обществу и напечатано въ „Philosophical Transactions“ этого общества.

Многочисленные опыты, предпринятые мною для опредѣленія возможныхъ химическихъ свойствъ этого газа, дали всѣ отрицательный результатъ. Казалось, что этотъ газъ не способенъ вступать въ соединенія. Но я продолжалъ всевозможныя изысканія, чтобы напасть на идею, съ какимъ бы тѣломъ возможно было его соединить.

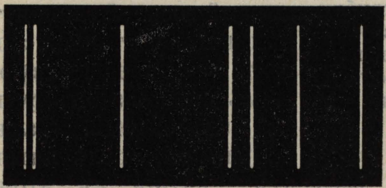
Д-ръ Гиллебрандъ (Hillebrand), членъ Геологическаго Института Соединенныхъ Штатовъ въ Вашингтонѣ, занимавшійся анализомъ различныхъ минераловъ, сдѣлалъ наблюденіе, что всѣ минералы, которые содержатъ уранъ, при раствореніи въ кислотахъ выдѣляютъ газъ. Д-ръ Гиллебрандъ сообщилъ мнѣ потомъ, при случаѣ, устно, что хотя его газъ въ общихъ чертахъ давалъ спектръ азота, но онъ и тогда замѣтилъ въ немъ еще новыя, ему неизвѣстныя, линіи; дальнѣйшимъ же изслѣдованіемъ этого предмета онъ не занялся, потому что его коллеги трунили надъ его новымъ „элементомъ“, а онъ былъ слишкомъ робокъ, чтобы защищать его. Кромѣ того, онъ былъ мало знакомъ со спектроскопическими методами; поэтому, описывая этотъ газъ, онъ призналъ его азотомъ.

Минералъ, давшій ему наибольшее количество азота, былъ клевеитъ. Сейчасъ же я началъ искать этотъ минералъ въ Лондонѣ, и, по счастью, мнѣ удалось купить двѣ унціи его за 18 шиллинговъ у одного торговца минералами. Д. Матьюсъ (Matthews), бывшій тогда моимъ ученикомъ, вскипятилъ сейчасъ же этотъ минералъ съ сѣрной кислотой, но выдѣлившійся при этомъ газъ я оставилъ мѣсяца на полтора, такъ какъ былъ занятъ другими работами. Наступилъ уже апрѣль мѣсяцъ, когда я нашелъ время заняться изслѣдованіемъ спектра. Къ великому моему удивленію, я увидѣлъ новый спектръ. Сейчасъ же выступила желтая блестящая линія. Я сравнилъ, конечно, новый спектръ со спектромъ аргона; я воспользовался для этого трубкой Плюккера, наполненной аргономъ, съ магніевыми электродами, чтобы отдѣлить азотъ, который могъ при томъ оказаться. Магній содержалъ натрій и давалъ характерныя натріевыя линіи. Оба спектра были одновременно видны въ полѣ зрѣнія, и я былъ сильно пораженъ, замѣтивъ, что желтая линія новаго газа не совпадала съ линіями натрія. Я со стыдомъ долженъ сознаться, что я разобралъ мой спектроскопъ, такъ какъ я предполагалъ скорѣе неправильное устройство его, чѣмъ присутствіе новаго газа. Но и послѣ провѣрки прибора совпаденія линій все же не было. Лишь весьма медленно я пришелъ къ убѣжденію, что у меня былъ въ рукахъ новый газъ.



Фиг. 7.
Дѣйствительный видъ аппарата, схематически изображеннаго на фиг. 6.

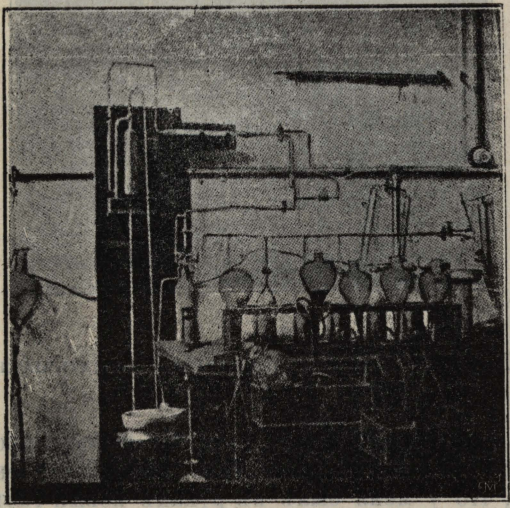
Для изученія свойствъ этого новаго газа не понадобилось много времени, такъ какъ опыты съ аргономъ научили меня преодолѣвать трудности соотвѣтствующихъ методовъ. Плотность новаго газа равнялась 2, плотность же аргона была 20. Такъ какъ плотности газовъ отнесены къ плотности двухатомнаго газа (водорода), какъ къ единицѣ, то для полученія атомнаго вѣса этихъ газовъ числа эти нужно удвоить. Атомный вѣсъ болѣе легкаго изъ новыхъ газовъ, такимъ образомъ, равенъ 4, болѣе же тяжелаго — 40.



Красный. Фиг. 8. Фіолетовый.
Спектръ гелія.

Спектръ болѣе легкаго газа уже наблюдался въ 1868 г. французскимъ астрономомъ Жансеномъ (Jansen), недавно послѣдовавшую смерть котораго мы горячо оплакиваемъ; во время солнечнаго затменія въ Остъ-Индіи онъ замѣтилъ эту же самую желтую линію въ хромосферѣ солнца. Франкландъ (Frankland) и Локіеръ (Lockyer) назвали элементъ, соотвѣтствующій этой линіи, тогда еще неизвѣстный на землѣ, „геліемъ“.

Послѣ того, какъ я установилъ свойства гелія, при содѣйствіи своего тогдашняго ассистента и теперешняго коллеги Нормана Колли (Collie), Локіеръ, Рунге (Runge), Пашенъ (Paschen) и другіе выступили съ заявленіемъ, что гелій, собственно, состоитъ изъ смѣси двухъ газовъ, изъ которыхъ одинъ даетъ желтую линію, между тѣмъ какъ второй, который предлагали назвать „asterium", даетъ зеленую линію. Чтобы доказать несостоятельность этой гипотезы, я, совмѣстно съ моимъ ассистентомъ Траверсомъ (Trawers), подвергъ гелій длинному ряду дробныхъ диффузій, при чемъ раздѣленіе оказалось невозможнымъ. При этомъ же мы замѣтили, что давленіе имѣетъ большое вліяніе на интенсивность этихъ линій; давленіе въ нѣсколько миллиметровъ уже увеличиваетъ силу свѣта желтой линіи; при болѣе же низкомъ давленіи на первый планъ выступаетъ линія зеленая. Возможность, чтобы гелій состоялъ изъ двухъ новыхъ тѣлъ, была, такимъ образомъ, исключена; газъ оказался однороднымъ и долженъ былъ быть разсматриваемъ, какъ элементъ.



Фиг. 9.

Диффузія гелія.

Гелій находился въ шести резервуарахъ *c* съ ртутью; черезъ соотвѣтствующія стеклянныя трубки онъ входилъ въ диффузіонную трубку *b* изъ пористой глины, находившуюся внутри стеклянной трубки. Газъ всасывался черезъ глиняную трубку и попадалъ въ ртутный насосъ *a*, а оттуда вновь вводился въ соотвѣтствующіе резервуары.

Уже въ 1863 г. мой соотечественникъ Ньюландсъ (Newlands) замѣтилъ, что, если расположить элементы по величинѣ ихъ атомныхъ вѣсовъ, то оказывается, что каждый восьмой элементъ въ нѣкоторой степени сходенъ съ предшествующимъ ему въ этомъ смыслѣ элементомъ. Такъ, напримѣръ, послѣ литія, имѣющаго атомный вѣсъ 7, восьмой элементъ — натрій съ атомнымъ вѣсомъ 23; восьмой послѣ натрія — калій, имѣющій атомный вѣсъ 39; потомъ послѣ 15 другихъ элементовъ слѣдуетъ рубидій, атомный вѣсъ котораго 85, и, наконецъ, еще разъ 15-й элементъ — цезій съ атомнымъ вѣсомъ 133. Элементы эти образуютъ рядъ, всѣ члены котораго представляютъ собою бѣлые, мягкіе металлы; послѣдніе всѣ очень легко окисляются, и вода дѣйствуетъ на нихъ столь энергично, что они загораются. Схема эта была затѣмъ разработана Лотаромъ Майеромъ (Lothar Meyer) и Менделѣевымъ; законъ правильнаго распредѣленія былъ названъ Ньюландсомъ закономъ октавъ, Менделѣевъ же назвалъ его періодическимъ закономъ.

Слѣдовало, конечно, ожидать, что новооткрытые тогда элементы аргонъ и гелій тоже найдутъ себѣ мѣсто въ такомъ ряду. Свойства обоихъ элементовъ были очень сходны; оба были индифферентны по отношенію къ химическимъ дѣйствіямъ, оба обладали очень характерными спектрами и были одноатомны. Какимъ же образомъ возможно было помѣстить ихъ въ періодическую систему? До гелія съ его малымъ атомнымъ вѣсомъ, находился только водородъ; и атомный вѣсъ аргона, равный круглымъ числомъ 40, выше атомнаго вѣса калія (39) и почти точно совпадаетъ съ атомнымъ вѣсомъ кальція. Согласно же періодической системѣ, атомный вѣсъ аргона долженъ былъ быть равенъ 38.

Законъ Авогадро (Avogadro), не имѣющій исключеній, гласитъ, что въ одинаковыхъ объемахъ газовъ, при одинаковомъ давленіи и температурѣ, заключается одинаковое число молекулъ. Было, такимъ образомъ, возможно допущеніе, что наблюдаемая слишкомъ большая плотность аргона обусловливается тѣмъ, что вмѣстѣ съ одноатомными молекулами имѣется нѣкоторое число и молекулъ двухатомныхъ. Плотность газа вслѣдствіе этого увеличилась бы, такъ какъ вполнѣ понятно, что если бы всѣ молекулы удвоились, то тотъ же объемъ содержалъ бы двойное количество по вѣсу газа. Такіе комплексы разлагаются обыкновенно теплотой, но плотность аргона, по нашимъ опытамъ, повидимому, не измѣнялась съ температурой. Было возможно также предположеніе, что бóльшая плотность могла быть обусловлена присутствіемъ болѣе тяжелаго газа; предположеніе это также было провѣрено помощью диффузіи, но опредѣленнаго результата мы не получили.

Атомные вѣса элементовъ, сосѣднихъ съ аргономъ, суть приблизительно слѣдующіе:

		$He = 4$	$Li = 7$	$Be = 9$
$O = 16$	$F = 19$	$(Ne = 20)$	$Na = 23$	$Mg = 24$
$S = 32$	$Kl = 35.5$	$A = 40$	$K = 39$	$Ca = 40$
$Se = 79$	$Br = 80$	$(Kr = 82)$	$Rb = 85$	$Sr = 87$
$Te = 128$	$I = 127$	$(Xe = 128)$	$Cs = 133$	$Ba = 137.$

Въ таблицѣ теперь ясно видны три пробѣла: первый между геліемъ и аргономъ и еще два послѣ аргона. Осенью 1897 г. я долженъ былъ, въ качествѣ президента химическаго отдѣла „Британской Ассоціаціи“, на собраніи послѣдней въ Торонто, въ Канадѣ, сдѣлать докладъ; предметомъ послѣдняго я избралъ: „Еще неоткрытый газъ“. По образцу нашего учителя Менделѣева, я описалъ, поскольку возможно было, ожидаемыя свойства и предполагаемыя отношенія газообразнаго элемента, который долженъ былъ бы заполнить пробѣлъ между геліемъ и аргономъ. Я могъ бы предсказать также еще два другихъ элемента, но предполагалъ, что нужно быть очень осторожнымъ при предсказаніяхъ. Но въ то время какъ я, такъ и ассистентъ мой Траверсъ не имѣли еще ни малѣйшаго понятія, гдѣ слѣдовало бы искать эти элементы; мы изслѣдовали 20 минеральныхъ водъ, 150 минераловъ и

7 метеоритовъ, не найдя въ полученныхъ изъ нихъ газахъ ни малѣйшаго слѣда еще неизвѣстныхъ спектральныхъ линій. Мы даже предположили, что, быть можетъ, газы, подлежащіе открытію, отличаются отъ аргона и гелія способностью соединяться съ магніемъ; мы приготовили поэтому амміакъ изъ нитрида магнія; но всѣ попытки найти въ немъ что-нибудь новое были безуспѣшны.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Международная коммиссія по преподаванію математики.

Предварительный докладъ*) объ организаціи коммиссіи, какъ сообщаетъ ея оффиціальный органъ, встрѣченъ весьма сочувственно въ различныхъ странахъ. Въ настоящее время можно уже съ увѣренностью сказать, что, въ виду важности и интереса задачи, предпринятой коммиссіей, делегаціи всюду встрѣтятъ необходимую поддержку не только со стороны правительствъ, но и со стороны всѣхъ тѣхъ, которые интересуются успѣхами въ дѣлѣ преподаванія чистаго и прикладного знанія.

Необходимые шаги для осуществленія коммиссіи, въ частности для полученія разрѣшенія со стороны правительствъ, уже сдѣланы. Въ сравнительно непродолжительномъ времени будетъ уже возможно дать списокъ лицъ, стоящихъ во главѣ дѣла въ различныхъ странахъ. Въ нѣкоторыхъ большихъ странахъ делегаціи уже образованы и принялись за дѣло; онѣ заняты въ настоящее время составленіемъ національныхъ подкоммиссій и распредѣленіемъ работъ между соучастниками, сообразно плану, указанному въ предварительномъ докладѣ.

† Германъ Миньковскій.

12-го января новаго стиля, на 44-мъ году своей жизни, умеръ въ Гёттингенѣ одинъ изъ наиболѣе талантливыхъ современныхъ математиковъ, профессоръ Гёттингенскаго университета Германъ Миньковскій. Покойный родился 22 іюня 1864 г. въ Россіи въ небольшомъ мѣстечкѣ Алексотѣ, около Ковно. Свое математическое образованіе онъ получилъ въ Германіи, сначала въ Берлинѣ, а потомъ въ Кёнигсбергѣ. Его первая работа „Théorie d. formes quadratiques á coefficients entiers“, написанная на 23-мъ году его жизни, была въ 1887 г. премирована Парижской Академіей Наукъ. Съ этого года начинается его ученая и преподавательская дѣятельность. Съ 1887 по 1893 г. онъ былъ прив.-доц. въ Кёнигсбергѣ, съ 1893 по 1894 г.—профессоромъ въ Боннѣ, съ 1894 по 1896 г.—проф. въ Кёнигсбергѣ, съ 1896 по 1902 г.—проф.

*) См. „Вѣстникъ“, № 475—476.

Цюрихскаго Политехникума. Въ 1902 г. онъ занялъ каѳедру Римана въ Гёттингенскомъ университетѣ и умеръ въ расцвѣтѣ силъ и творчества въ томъ же возрастѣ, какъ и его геніальный предшественникъ.

Многочисленныя работы Миньковскаго относятся большею частью къ теоріи чиселъ. Многія изъ его работъ, какъ, напримѣръ, „Geometrie der Zahlen", пользуются широкой и большой извѣстностью.

Гёттингенская математическая школа въ лицѣ Клейна, Гильберта и Миньковскаго получила огромную извѣстность не только благодаря силѣ таланта ея представителей, но еще болѣе благодаря своему направленію. Служа дальнѣйшему развитію математики, они, кромѣ того, посвятили много силъ ея обоснованію. Относящіяся сюда работы Гильберта въ геометріи и Миньковскаго въ теоріи чиселъ проложили для этихъ наукъ новые пути.

Къ Клейну, Гильберту и Миньковскому съѣзжались учиться математикѣ со всего міра. Въ математическихъ аудиторіяхъ и семинаріяхъ Гёттингенскаго университета встрѣчаются представители всѣхъ культурныхъ странъ и народовъ всѣхъ возрастовъ, всѣхъ ступеней математическаго развитія.

Съ тѣхъ поръ, какъ Гильбертъ боленъ, а Клейнъ приглашенъ въ Прусскую Палату Господъ, все это держалось, главнымъ образомъ, Миньковскимъ. Его смерть является поэтому утратой тѣмъ болѣе тяжелой.

РЕЦЕНЗІИ.

Г. Ковалевскій, профессоръ университета въ Боннѣ. *Введеніе въ исчисленіе безконечно малыхъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями приватъ-доцента С. О. Шатуновскаго. Съ 18 чертежами. „Mathesis". Одесса, 1909. IV + 140.

Оригиналъ этого сочиненія входитъ въ составъ предпринятой извѣстнымъ Лейпцигскимъ издательствомъ B. G. Teubner большой серіи сочиненій подъ общимъ заглавіемъ: „Aus Natur und Geisteswelt". Въ составъ этой серіи входитъ большое число сравнительно небольшихъ сочиненій, охватывающихъ всѣ отдѣлы чистаго и прикладного знанія и предназначенныхъ для весьма широкихъ круговъ читателей. Этимъ, казалось бы, опредѣляется и характеръ настоящаго сочиненія, какъ введеніе въ анализъ безконечно малыхъ, предназначенное для широкой публики. Однако, это не совсѣмъ такъ. Въ руководствахъ по элементамъ высшей математики, предназначенныхъ для нематематиковъ, нѣтъ недостатка. Лучшимъ изъ нихъ обыкновенно признается книга Нернста и Шенфлиса въ Германіи и книга Фохта во Франціи. Однако, эти книги воистину написаны не для математиковъ. Когда же ихъ беретъ въ руки математикъ, даже лучшія изъ нихъ, онъ всегда испытываетъ тяжелое чувство отъ того приглаживанія точныхъ и глубокихъ математическихъ идей ко вкусамъ и привычкамъ нематематиковъ, которое нерѣдко прямо искажаетъ эти идеи. Отъ этихъ сочиненій всегда отдаетъ стариной, точно они написаны въ эпоху, когда анализъ лишь только нарождался. Конечно, это обусловливается стремленіемъ упростить изложеніе и выяснить смыслъ метода анализа безконечно малыхъ въ тѣхъ узкихъ рамкахъ, въ которыя обыкновенно бываютъ поставлены авторы этихъ сочиненій. Но достигается ли бо́льшая ясность отъ такого препарированія точныхъ идей? Что дается легче?—Усвоеніе точной математической истины или упрощенной путемъ избыточнаго приспособленія къ нагляднымъ образамъ, приспособленія, отъ котораго у читателя всегда остается осадокъ логическаго несовершенства употребляемыхъ при этомъ пріемовъ, — это вопросъ весьма спорный.

Проф. Ковалевскій поставилъ себѣ цѣлью соединить доступное изложеніе съ тою точностью, какая необходима для установленія и выясненія строгой математической идеи. „Введеніе въ исчисленіе безконечно малыхъ“ г. Ковалевскаго не есть введеніе въ анализъ безконечно малыхъ Лейбница, Ньютона и Эйлера, — это есть введеніе въ современную разработку идей и методовъ, созданныхъ великими творцами анализа. Книга начинается главой, которую, быть можетъ, правильнѣе было бы назвать введеніемъ въ теорію функцій, такъ какъ она содержитъ тѣ важнѣйшія свѣдѣнія о числахъ, числовыхъ комплексахъ, рядахъ и функціяхъ, безъ которыхъ невозможно обоснованіе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Двѣ слѣдующія главы содержатъ сжатое, но достаточно полное изложеніе началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, которое математикъ прочтетъ не только безъ тяжелаго чувства, но, напротивъ, съ большимъ удовольствіемъ, такъ какъ во многихъ мѣстахъ онъ найдетъ своеобразную, а зачасто и совершенно новую обработку доказательствъ. Такъ, напримѣръ, значительное упрощеніе даютъ нѣкоторые выводимые авторомъ термины и понятія; совершенно оригинально разработанъ вопросъ о максимумѣ и минимумѣ въ конечномъ интервалѣ; ученіе о неявной функціи разработано лучше, чѣмъ во многихъ сочиненіяхъ, предназначенныхъ для математиковъ; нельзя не отмѣтить и той точности, съ которой устанавливается понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ. Книга заканчивается краткимъ, но очень интереснымъ историческимъ очеркомъ развитія началъ безконечно малыхъ.

Въ какой мѣрѣ, однако, достигнута цѣль автора? Конечно, для очень широкаго круга читателей, для тѣхъ, собственно, читателей, для которыхъ предназначается серія „Aus der Natur u. Geisteswelt“, книга мало пригодна. Она предполагаетъ уже нѣкоторую привычку къ серьезному и, въ частности, математическому мышленію, требуетъ вдумчивости и извѣстнаго труда. Но для читателя, имѣющаго элементарную подготовку, какую даетъ средняя школа, для студента-натуралиста, для интеллигентнаго техника, для учителя она будетъ, несомнѣно, очень интересна. Если бы насъ спросили, какую книгу слѣдуетъ дать въ руки начинающему студенту-математику для пропедевтическаго ознакомленія съ анализомъ безконечно малыхъ, мы не умѣли бы указать лучшей книги. Наконецъ, мы должны высказать убѣжденіе, что въ рукахъ хорошаго учителя эта книга можетъ служить прекраснымъ учебникомъ для средней школы. Къ числу недостатковъ сочиненія слѣдуетъ указать недостаточность геометрическихъ приложеній; и вообще число примѣровъ примѣненія анализа къ прикладному знанію слѣдовало бы нѣсколько увеличить. Въ книгѣ есть упражненія, но число ихъ слѣдовало бы также увеличить.

Переводъ выполненъ безукоризненно, по внѣшности книга издана лучше оригинала.

В. Каганъ.

Н. К. Де-Сеньи. *Курсъ прямолинейной тригонометріи.* Составленъ по программѣ и примѣнительно къ требованіямъ конкурсныхъ экзаменовъ для поступленія въ высшія техническія учебныя заведенія. С.-Петербургъ, 1909 г. Цѣна 1 р. 25 к.

Въ предисловіи къ этому 2-му изданію учебника тригонометріи авторъ заявляетъ, что „многія статьи въ немъ подверглись коренной переработкѣ“ и что, съ цѣлью облегчить учащимся усвоеніе предмета, „всѣ наиболѣе важные отдѣлы „Курса“ иллюстрированы типичными примѣрами и задачами (съ рѣшеніями)“. Однако, мы не замѣчаемъ, чтобы 2-е изданіе чѣмъ-нибудь существенно отличалось отъ 1-го и потому объ этомъ 2-мъ изданіи можно повторить то, что было сказано о 1-мъ*), именно, что въ немъ 1) особенно подробно разобранъ вопросъ о двойственности знаковъ въ тригонометрическихъ формулахъ, и 2) главы о рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій и треугольниковъ въ немъ развиты болѣе подробно, чѣмъ въ другихъ учебникахъ. Къ особенностямъ учебника слѣдуетъ отнести весьма удачное опредѣленіе линіи секанса

*) См. „Вѣстникъ“, № 330.

и косеканса, не встрѣчающееся въ другихъ учебникахъ триноиетріи, на что было обращено вниманіе при разборѣ 1-го изданія. Статья объ опредѣленіи тригонометрическихъ величинъ нѣкоторыхъ дугъ при помощи правильныхъ многоугольниковъ осталась недостаточно разработанной, какъ и въ 1-мъ изданіи. Въ главѣ о соотношеніяхъ между сторонами и углами треугольника не выяснено (какъ и въ 1-мъ изд.), сколько есть такихъ соотношеній, не зависящихъ одно отъ другого.

Изложеніе отличается чрезвычайною простотою, такъ что этотъ учебникъ можно особенно рекомендовать лицамъ, изучающимъ тригонометрію безъ помощи преподавателя.

Въ концѣ книги приложены программа вступительнаго экзамена по тригонометріи во всѣ высшія техническія учебныя заведенія и „экзаменаціонные вопросы", предлагавшіеся на конкурсныхъ экзаменахъ. *Д. Е.*

Задача на премію № 2.

Подъ квадратичной формой подразумѣвается выраженіе:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

въ которомъ x и y — перемѣнныя, а коэффиціенты A, B и C — нѣкоторыя постоянныя цѣлыя числа.

Требуется найти такую квадратичную форму, которая обладала бы свойствомъ перемноженія:

$$f(x, y) \,.\, f(x', y') = f(x'', y''). \qquad (1)$$

При этомъ x'', y'' должны выражаться черезъ x, y, x', y' слѣдующимъ образомъ:

$$x'' = \alpha xx' + \beta(xy' + yx') + \gamma yy',$$
$$y'' = \alpha' xx' + \beta'(xy' + yx') + \gamma' yy'.$$

Задача состоитъ въ опредѣленіи девяти цѣлыхъ чиселъ A, B, C, α, β, γ, α', β', γ' такъ, чтобы равенство (1) обращалось въ тождество при произвольныхъ значеніяхъ x, y, x', y'.

Частнымъ рѣшеніемъ задачи будетъ квадратичная форма $x^2 + y^2$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2.$$

Требуется найти самое общее рѣшеніе задачи.

Проф. В. Ермаковъ.

Авторы двухъ лучшихъ рѣшеній получатъ каждый книги физико-математическаго содержанія стоимостью въ 10 руб. по собственному выбору. Рѣшенія должны быть присланы въ редакцію къ 1-му мая 1909 года.

Примѣчаніе. Рѣшеніе задачи на премію должно быть написано на особомъ листѣ бумаги, на которомъ никакой другой переписки съ редакціей быть не должно. Авторы должны назвать свою фамилію и указать адресъ.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 127 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$(k-1)^{k-1} = C_k^{k-2}(k-1)^{k-3} + 2C_k^{k-3}(k-1)^{k-4} + 3C_k^{k-4}(k-1)^{k-5} + \ldots + \\ + (k-3)\,C_k^2(k-1) + (k-2)\,C_k^1 + 1.$$

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 128 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3 = ax + by,$$
$$y^3 = bx + ay.$$

А. Турчаниновъ (Брестъ).

№ 129 (5 сер.). Доказать, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ трехъ чиселъ a, b, c, связанныхъ зависимостью

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

дѣлится на 5.

В. Добровольскій (Брянскъ).

№ 130 (5 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ ABC по суммѣ высоты AD и медіаны AM, проведенныхъ изъ вершины A прямого угла, и по величинѣ $\overline{AD}^2 - \overline{DM}^2 = \pm k^2$.

Г. Оганянцъ (Гомадзоръ).

№ 131 (5 сер.). Показать, что уравненіе

$$1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} = 0$$

не имѣетъ вещественныхъ корней.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 132 (5 сер.). Установить справедливость тожествъ

$$\frac{r_a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{r_b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{r_c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{4k+r}{p}$$

и

$$\frac{r_a^2}{(b+c)(a-b)(a-c)} + \frac{r_b^2}{(c+a)(b-a)(b-c)} + \\ + \frac{r_c^2}{(a+b)(c-a)(c-b)} - \frac{r^2}{(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{4R}{S},$$

гдѣ a, b, c суть стороны, R, r, r_a, r_b, r_c — радіусы описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ, p — полупериметръ и S — площадь нѣкотораго треугольника.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 781 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 + ax^3\sqrt{3} + a^4 = 0.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di matematica*).

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$\frac{3}{4}x^4 + ax^3\sqrt{3} + \frac{x^4}{4} + a^4 - a^2x^2 + a^2x^2 =$$

$$= \left[\left(x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2ax^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a^2x^2\right] + \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2a^2 \cdot \frac{x^2}{2} + (a^2)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + ax\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - a^2\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + ax + i\left(\frac{x^2}{2} - a^2\right)\right] \cdot \left[\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + ax - i\left(\frac{x^2}{2} - a^2\right)\right] = 0,$$

мы видимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x^2(\sqrt{3} + i) + 2ax - 2a^2i = 0, \quad x^2(\sqrt{3} - i) + 2ax + 2a^2i = 0,$$

откуда получаемъ четыре рѣшенія:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2a^2(\sqrt{3} + i)\,i}}{\sqrt{3} + i} = \frac{a\left(-1 \pm \sqrt{-1 + 2i\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3} + i},$$

$$x_{3,4} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2(\sqrt{3} - i)\,i}}{\sqrt{3} - i} = \frac{a\left(-1 \pm \sqrt{-1 - 2i\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3} - i}.$$

Г. Лебедевъ (Обоянь); *Н. С.* (Одесса).

№ 784 (4 сер.). *Черезъ точку* A, *взятую на окружности даннаго круга радіуса* R, *проводятъ діаметръ* AB; *изъ той же точки* A *проводятъ хорду* AA_1, *равную сторонѣ правильнаго вписаннаго треугольника, изъ точки* A_1 — *хорду* A_1A_2, *равную сторонѣ вписаннаго квадрата такъ, что точки* A_2 *и* B *лежатъ по разныя стороны прямой* AA_1, *изъ точки* A_2 — *хорду* A_2A_3, *равную сторонѣ правильнаго вписаннаго пятиугольника (при томъ такъ, что точки* A_3 *и* A *лежатъ по разныя стороны прямой* A_1A_2) *и т. д., . . . , наконецъ, изъ точки* A_{n-1} *проводятъ хорду* $A_{n-1}A_n$, *равную сторонѣ правильнаго* $n+2$*-угольника (такъ, что* A_n *и* A_{n-3} *лежатъ по разныя стороны прямой* $A_{n-2}A_{n-1}$). ***Найти предѣлъ, къ которому стремится длина дуги*** BA_n *при безконечномъ возрастаніи числа* n.

Вся дуга AA_1B равна π, а часть ея AA_2A_1 равна, по условію, $\frac{2\pi}{3}$; поэтому дуга BA_1 равна величинѣ

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \qquad (1)$$

Точно такъ же найдемъ:

$$\smile A_1A_3 = \smile A_2A_4A_1 - \smile A_2A_4A_3 = \frac{2\pi}{4} - \frac{2\pi}{5} = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \qquad (2)$$

$$\smile A_3A_5 = \smile A_4A_6A_3 - \smile A_4A_6A_5 = 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right), \qquad (3)$$

$$\smile A_5A_7 = \smile A_6A_8A_5 - \smile A_6A_8A_7 = 2\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \qquad (4)$$

и т. д., вообще

$$\smile A_{2k-1}A_{2k+1}=2\pi\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+3}\right). \quad (5)$$

Такимъ образомъ, дуга BA_n при нечетномъ n равна [см. (1), (2), (5)]

$$\smile BA_n=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right). \quad (6)$$

Такъ какъ, по условію, $\smile A_{n-1}A_n=\frac{2\pi}{n+2}$, то при четномъ n [см. (6)] имѣемъ:

$$\smile BA_n=\smile BA_{n-1}+\smile A_{n-1}A_n=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right). \quad (7)$$

Изъ разложенія

$$\lg_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,$$

въ которомъ e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, и которое, какъ извѣстно, остается вѣрнымъ при $x=1$, имѣемъ:

$$\lg_e 2=\lim_{m=\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{m}\right),$$

откуда

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots\pm\frac{1}{m}\right)=1-\lg_e 2=\lg_e e-\lg_e 2=\lg_e\frac{e}{2},$$

откуда видно, что при безконечномъ возрастаніи n [см. (6), (7)[дуга BA_n стремится къ предѣлу $2\pi\lg_e\frac{e}{2}$ или, въ градусахъ, $360^0.\lg\frac{e}{2}$, гдѣ $\lg$ обозначаетъ Неперовъ логариѳмъ числа, а длина BA_n стремится къ предѣлу $2\pi R\lg\frac{e}{2}$.

Н. Агрономовъ (Ревель); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

№ 899 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по двумъ трисекторамъ* AT = t, AT′ = t′ *(т. е. линіямъ, дѣлящимъ уголъ на три части) и биссекторъ* AD = l *угла* A.

Предположимъ для большей опредѣленности, что точки T, D, T' расположены на основаніи BC въ порядкѣ B, T, D, T', C. Согласно съ условіемъ, $\angle BAD=\angle CAD$ и $\angle BAT=\angle CAT'$, откуда слѣдуетъ, что $\angle TAD=\angle T'AD$. Такимъ образомъ, въ треугольникѣ TAT' извѣстны стороны $AT=t$, $AT'=t'$ и биссекторъ $AD=l$, при чемъ, по свойству биссектора,

$$\frac{TD}{DT'}=\frac{AT}{AT'}=\frac{t}{t'}. \quad (1)$$

Кромѣ того, согласно съ условіемъ,

$$\angle BAT=\angle TAT'=\angle T'AC. \quad (2)$$

Принимая во вниманіе равенство (1) и тожество

$$\frac{TA}{AD}=\frac{t}{l}, \quad (3)$$

можно построить треугольникъ TAT' съ помощью метода подобія. Съ этой цѣлью отложимъ на произвольной прямой отрѣзки $\partial\delta$ и $\delta\partial'$ (такъ, чтобы точка δ лежала между ∂ и ∂'), удовлетворяющіе условію $\frac{\partial\delta}{\delta\partial'}=\frac{t}{t'}$, строимъ точку

δ', дѣлящую отрѣзокъ $\vartheta\vartheta'$ внѣшнимъ образомъ въ томъ же отношенiи (т. е. такъ, что $\frac{\vartheta\delta'}{\delta'\vartheta'} = \frac{t}{t'}$); затѣмъ описываемъ на $\delta\delta'$, какъ на дiаметрѣ, окружность, которая представляетъ собою, какъ извѣстно, геометрическое мѣсто точекъ, разстоянiя которыхъ отъ ϑ и ϑ' находятся въ отношенiи $t:t'$; точно такъ же, раздѣливъ отрѣзокъ $\vartheta\delta$ въ отношенiи $t:l$ внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ соотвѣтственно въ точкахъ m и m', строимъ на mm', какъ на дiаметрѣ, окружность и находимъ такимъ образомъ геометрическое мѣсто точекъ, отношенiе разстоянiй которыхъ отъ точекъ ϑ и δ равно отношенiю $\frac{t}{l} = \frac{TA}{AD}$ [см. (3)]. Соединяя одну изъ точекъ пересѣченiя a построенныхъ нами окружностей съ точками ϑ, δ, ϑ', строимъ полупрямыя ax и ay соотвѣтственно подъ углами $\angle \vartheta ax = \angle \vartheta a\vartheta' = \angle \vartheta ay$ къ прямымъ ϑa и $\vartheta' a$ (такъ, чтобы прямыя ax и ay не совпадали съ $a\vartheta'$ и $a\vartheta$) [см. (2)]. Пусть ax и ay встрѣчаютъ прямую $\vartheta\vartheta'$ соотвѣтственно въ точкахъ β и γ; увеличивая треугольникъ $a\beta\gamma$ въ отношенiи $a\delta:l$, получимъ искомый треугольникъ ABC. Задача возможна лишь тогда, если полупрямыя ax и ay дѣйствительно пересѣкаютъ $\vartheta\vartheta'$ въ точкахъ β и γ и при томъ такъ, что эти точки вмѣстѣ съ ϑ и ϑ' расположены въ послѣдовательности β, ϑ, ϑ', γ.

Э. Лейнъкъ (Рига).

№ 922 (4 сер.) *Показать, что возвратное уравненiе 4-й степени подстановкой*

$$x = 1 + \frac{2}{z-1}$$

приводится къ биквадратному.

Подставляя въ лѣвую часть возвратнаго уравненiя четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (1)$$

вмѣсто x выраженiе

$$x = 1 + \frac{2}{z-1} = \frac{z+1}{z-1},$$

получимъ:

$$a\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 + b\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + c\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + b\frac{z+1}{z-1} + a = 0.$$

Освобождаясь отъ знаменателей, послѣ обычныхъ преобразованiй находимъ:

$$a[(z+1)^4 + (z-1)^4] + b[(z+1)^3(z-1) + (z+1)(z-1)^3] + c(z+1)^2(z-1)^2 =$$

$$= a(2z^4 + 12z^2 + 2) + b(z+1)(z-1)(2z^2+2) + c(z^2-1)^2 =$$

$$= a(2z^4 + 12z^2 + 2) + 2b(z^2-1)(z^2+1) + c(z^2-1)^2 =$$

$$= a(2z^4 + 12z^2 + 2) + 2b(z^4-1) + c(z^4 - 2z^2 + 1) = 0,$$

или

$$z^4(2a + 2b + c) + z^2(12a - 2c) + 2a - 2b + c = 0.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ, дѣйствительно, къ биквадратному уравненiю. Этотъ результатъ можно было предвидѣть на основанiи слѣдующихъ соображенiй. Четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 возвратнаго уравненiя (1) связаны попарно, какъ извѣстно, слѣдующими соотношенiями:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_3 x_4 = 1. \qquad (2)$$

Полагая

$$x_i = 1 + \frac{2}{z_i - 1} = \frac{z_i + 1}{z_i - 1} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

можно записать соотношенiя (2) въ видѣ:

$$\frac{z_1+1}{z_1-1}\cdot\frac{z_2+1}{z_2-1} = 1, \quad \frac{z_3+1}{z_3-1}\cdot\frac{z_4+1}{z_4-1} = 1,$$

откуда, освобождаясь отъ знаменателей и перенося всѣ члены въ первую часть, находимъ, послѣ приведенія и сокращенія на 2:

$$z_1 + z_2 = 0, \quad z_3 + z_4 = 0. \tag{3}$$

Соотношенія (3) даютъ, какъ извѣстно, необходимое и достаточное условіе для того, чтобы уравненіе, корни котораго суть z_1, z_2, z_3, z_4, было биквадратнымъ. Итакъ, указанная въ условіи задачи подстановка должна преобразовывать возвратное уравненіе (1) къ биквадратному.

Ф. Доброхотовъ (Камчатка).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Г. И. Лобовиковъ, инспекторъ Московскаго Промышленнаго училища въ память 25-ти лѣтія царствованія Императора Александра II. *Основаніе механической теоріи теплоты и ея примѣненій къ ученію о тепловыхъ машинахъ.* Курсъ среднихъ техническихъ училищъ. Второе (улучшенное и дополненное) изданіе. Съ 25 фиг. въ текстѣ. Москва. 1908. 140 стр. Ц. 1 руб.

Н. К. Ди-Сеньи. *Курсъ прямолинейной тригонометріи.* Составленъ по программамъ и примѣнительно къ требованіямъ конкурсныхъ экзаменовъ для поступленія въ высшія техническія учебныя заведенія. Изданіе II-е, исправленное и дополненное. С.-Петербургъ. 1909. 144 стр. Ц. 1 р. 25 коп.

А. П. Охитовичъ. *Геометрія круга (циклометрія).* Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань. 1908. 114 стр. Ц. 1 руб.

Извѣстія Московскаго Сельскохозяйственнаго Института. Годъ XIV. Книга 4-я. Москва. 1908.

Рѣчь и отчетъ о состояніи Московскаго Сельскохозяйственнаго Института за 1907 г. Москва. 1908.

К. Пеніонжкевичъ, инспекторъ Екатеринбургской гимназіи. Основанія анализа безконечно-малыхъ. Съ 730-ю примѣрами для упражненій. Курсъ 7-го класса реальныхъ училищъ. Изданіе С. А. Козловскаго Ц. 1 руб. Сумы (Харьковской губ.). 1909.

З. З. Цетлинъ. Таблица множителей чиселъ.

Николай Морозовъ. *Начала векторіальной алгебры въ ихъ генезисѣ изъ чистой математики.* С. Петербургъ 1909. Ц. 2 руб. 178 стр.

William Ramsay, Nobel Laur., Professor an der Universität London. *Die edlen und die radioaktiven Gase.* Vortrag, gehalten im Österreichischen Ingeenieur-u. Architekten-Verein zu Wien. Leipzig. 1908. 39 p.

Dr. Heinrich Greinacher. Privatdozent an der Universität Zürich. *Die neueren Fortschritte auf dem Gebiete der Radioaktivität (von Anfang 1906 bis Mitte 1908).* Braunschweig. 1908. 47 p.

F. Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907 — 08. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig. 1908. 590 p.

Dr. W. Ostwald. Professor. (Изъ серіи книгъ подъ общимъ заглавіемъ Wissen und Können, Sammlung von Einzelschriften aus reiner und angewandter Wissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr. B. Weinstein). *Die Energie.* Leipzig. 1909. 167 p.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется