Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 464.

Ученіе о температурѣ по Маху.

Д. Крыжановскаго.

Если спросить себя, что̀ является особенно характернымъ для работы научной мысли въ послѣднія десятилѣтія, то наиболѣе вѣрнымъ отвѣтомъ, пожалуй, будетъ указаніе на общее всѣмъ дисциплинамъ ума стремленіе къ ревизіонизму, къ пересмотру принциповъ. Въ самомъ дѣлѣ, начиная съ наиболѣе отвлеченныхъ наукъ—анализа и геометріи—и кончая соціально-политическими доктринами,—вездѣ и всюду мы встрѣчаемся съ потребностью „переоцѣнки цѣнностей“ или, по крайней мѣрѣ, болѣе надежнаго застрахованія ихъ. А такъ какъ вопросъ о принципахъ той или другой науки настолько же относится къ спеціальной области этой науки, насколько и къ общему ученію о происхожденіи и систематизаціи человѣческаго знанія, то неудивительно, что такого рода ревизіонная работа, предпринятая въ области одной какой-нибудь дисциплины, отражается на всѣхъ другихъ частныхъ наукахъ и даже даетъ новые устои наукѣ наукъ—философіи. Быть можетъ, лучшей иллюстраціей этого могутъ служить работы вѣнскаго профессора Эрнеста Маха, одного изъ первыхъ и, во всякомъ случаѣ, наиболѣе настойчиваго піонера ревизіонизма въ области физики. Работая надъ критическимъ пересмотромъ основныхъ ученій механики и физики, Махъ попутно долженъ былъ касаться общихъ вопросовъ знанія и пришелъ въ результатѣ къ построенію своеобразной теоріи познанія, нашедшей свое наиболѣе полное выраженіе въ его послѣдней книгѣ „Erkenntnis und Irrtum“ („Познаніе и заблужденіе“). И вотъ, съ каждымъ днемъ обнаруживается все больше точекъ соприкосновенія между гносеологической системой Маха и идеями другихъ ученыхъ и философовъ, съ разныхъ сторонъ пришедшихъ къ общимъ заключеніямъ о принципахъ человѣческаго познаванія дѣйствительности*). Въ этомъ отношеніи крайне любопытны предисловія самого Маха къ новымъ изданіямъ его книги, гдѣ онъ указываетъ на то, какъ неожиданно для самого себя онъ находилъ родственныя идеи у Авенаріуса (Avenarius), Пецольда (Petzold), Корнеліуса (Cornelius), Клиффорда (Clifford), Дюгема (Duhem), Пуанкарэ (Poincarré), Сталло (Stallo) и др. Наиболѣе характернымъ признакомъ идей Маха является ихъ глубокая „антиметафизичность", стремленіе „изгнать изъ науки ея скрытые метафизическіе элементы". И критическая мысль Маха такъ сильна и ясна, горизонты ея такъ широки, изложеніе ея отличается такой простотой, что не только въ области физики и гносеологіи образовалась школа послѣдователей Маха, но даже вдали отъ чистой работы мысли, среди перипетій политической борьбы, одинъ изъ видныхъ партійныхъ теоретиковъ пытается обосновать свое ученіе философскими взглядами Маха**).

Наиболѣе крупными работами Маха спеціально по физикѣ являются „Механика" и „Принципы ученія о теплотѣ"—въ „критико-историческомъ изложеніи". Въ этихъ сочиненіяхъ Махъ старается раскрыть истинное содержаніе такихъ основныхъ понятій, какъ время, сила, масса, температура и т. д. Самъ Махъ разсказываетъ, какъ возникло большинство его идей: всякому учителю случается, излагая съ извѣстнымъ воодушевленіемъ всеобще принятые взгляды, вдругъ замѣтить, что дѣло обстоитъ не такъ-то просто. Тогда спокойное, настойчивое размышленіе обыкновенно вскрываетъ логическую несообразованность, которая, будучи однажды познана, становится нестерпимой.

Для конкретной характеристики историко-критическихъ изслѣдованій Маха я остановился на изложеніи главы о „Температурѣ" изъ упомянутаго выше сочиненія „Principien der Wärmelehre"; при этомъ выборѣ я руководствовался какъ элементарностью изложенія этого вопроса, такъ и тѣмъ самостоятельнымъ интересомъ, какой представляетъ вопросъ о тривіальномъ, но тѣмъ не менѣе туманномъ понятіи „степень нагрѣтости".

---

§ 1. Среди тѣхъ ощущеній, условіями возбужденія которыхъ мы считаемъ окружающія насъ тѣла, особый классъ родственныхъ между собою элементовъ составляютъ такъ называемыя тепловыя ощущенія (холодный, прохладный, тепловатый, горячій). Тѣла, вызывающія въ насъ эти ощущенія, одновременно проявляютъ своеобразныя физическія качества, какъ сами по себѣ, такъ и по отношенію къ другимъ тѣламъ. Такъ, очень горячее тѣло свѣтитъ, плавится, сгораетъ; холодное тѣло отвердѣваетъ; капля воды на кускѣ раскаленнаго желѣза съ

*) См., напримѣръ, помѣщенную въ № 462 „Вѣстника" рецензію В. Кагана книги Нейссера.

**) См. предисловіе А. Богданова къ переводу „Анализа ощущеній" Маха.

шипѣніемъ испаряется, а на очень холодномъ кускѣ желѣза замерзаетъ. Совокупность всѣхъ этихъ качествъ тѣла, связанныхъ съ тепловымъ ощущеніемъ, называютъ его тепловымъ состояніемъ.

Но сужденіе о тепловомъ состояніи тѣла по нашимъ тепловымъ ощущеніямъ крайне ненадежно. Одно и то же тѣло въ одномъ и томъ же состояніи вызываетъ иногда въ насъ то одно, то другое тепловое ощущеніе. Примѣромъ можетъ служить слѣдующій простой опытъ. Смѣшавъ въ сосудѣ B горячую воду изъ сосуда A и холодную изъ сосуда C, опустимъ на нѣсколько секундъ лѣвую руку въ сосудъ A, а правую въ сосудъ C; затѣмъ одновременно опустимъ обѣ руки въ сосудъ B. Вода этого сосуда покажется лѣвой рукѣ холодной, а правой—горячей. Объясняется этотъ и многіе другіе подобные факты (относящіеся также къ области зрительныхъ и другихъ воспріятій) тѣмъ, что ощущеніе опредѣляется (обусловливается) не только тѣломъ, которое его вызываетъ, но и состояніемъ соотвѣтствующаго органа чувствъ. Поскольку рѣчь идетъ только о нашихъ ощущеніяхъ, постольку, разумѣется, они одни являются рѣшающимъ моментомъ. Безсмысленно было бы утверждать, что тѣло, которое мы воспринимаемъ, какъ горячее, „на самомъ дѣлѣ“ или „собственно говоря“ холодное. Но когда рѣчь идетъ о физическихъ взаимодѣйствіяхъ тѣла (съ другими тѣлами), тогда приходится обзавестись такимъ признакомъ теплового состоянія тѣла, который не зависѣлъ бы отъ состоянія нашего органа чувствъ.

§ 2. Замѣчено, что съ измѣненіемъ тепловыхъ ощущеній, получаемыхъ нами отъ какого-нибудь тѣла, одновременно измѣняются его объемъ, электропроводность, діэлектрическая постоянная, термоэлектродвижущія силы, показатель преломленія и т. д. Каждое изъ этихъ свойствъ могло бы служить признакомъ, примѣтой теплового состоянія тѣла и, дѣйствительно, при случаѣ находитъ такое примѣненіе. Но, въ силу нѣкоторыхъ практическихъ соображеній, со временъ Галилея предпочтеніе всегда отдавалось именно объему, какъ признаку теплового состоянія. Въ этомъ предпочтеніи лежитъ извѣстная произвольность, а принятіе всѣми такого выбора содержитъ въ себѣ элементъ условности, или соглашенія.

§ 3. Но, замѣняя наше тепловое ощущеніе, какъ примѣту теплового состоянія тѣла, его объемомъ, мы становимся,—какъ мы сейчасъ увидимъ,—на существенно новую точку зрѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, что показываетъ тѣло, употребленное въ качествѣ термоскопа?*)— Прежде всего, конечно, свое собственное тепловое состояніе. Правда, грубыя наблюденія показываютъ, что два тѣла, достаточно долго бывшія во взаимномъ соприкосновеніи, вызываютъ въ насъ одинаковыя тепловыя ощущенія. Слѣдовательно, и термоскопъ, повидимому, показываетъ не только свое собственное тепловое состояніе, но и состояніе того тѣла, съ которымъ онъ достаточно долго находился въ соприкосновеніи. Но такое умозаключеніе по аналогіи недопустимо безъ спеціальной провѣрки. Вѣдь тепловое ощущеніе и объемъ пред-

*) Т. е. прибора, дающаго возможность обнаруживать измѣненія объема „термоскопическаго вещества“.

ставляютъ два *различныхъ* элемента наблюденія. Если *опытъ* научилъ насъ, что они вообще зависятъ другъ отъ друга, то только дальнѣйшій *опытъ* можетъ указать, какова эта зависимость, и какъ далеко она простирается.

Не трудно убѣдиться въ томъ, что объемъ и тепловое ощущеніе представляютъ признаки крайне различной *чувствительности* и вообще различнаго *рода*. Съ помощью наблюденій надъ объемомъ тѣла можно обнаружить измѣненія состоянія, совершенно неуловимыя для теплового ощущенія. Съ другой стороны, объемъ и тепловое ощущеніе, какъ признаки теплового состоянія тѣла, далеко не всегда идутъ параллельно другъ другу. Такъ, у воды, тепловое состояніе которой, судя по тепловому ощущенію, измѣняется въ одномъ направленіи (отъ 0^0 до 100^0), объемъ сперва уменьшается (до 4^0), а затѣмъ увеличивается. Другой опытъ можно произвести съ кускомъ желѣза и кускомъ дерева. Если оба кажутся теплыми, то, сколько бы времени оба куска ни касались другъ друга, желѣзо всегда будетъ казаться (на ощупь) горячѣе дерева. И наоборотъ: если оба холоднѣе поверхности нашей кожи, то желѣзо кажется всегда холоднѣе дерева. Объясняется это, какъ извѣстно, тѣмъ, что желѣзо, какъ лучшій проводникъ, скорѣе сообщаетъ свое тепловое состояніе рукѣ.

Но объясненіе объясненіемъ, а тотъ *фактъ*, что изъ двухъ тѣлъ, вызывающихъ въ термоскопѣ одно и то же показаніе, то одно, то другое *кажется* намъ болѣе теплымъ—остается фактомъ.

Въ виду того, что объемъ, какъ примѣта, гораздо чувствительнѣе тепловыхъ ощущеній, является болѣе *выгоднымъ* и болѣе *раціональнымъ* черпать всѣ свѣдѣнія изъ наблюденій надъ объемами, и на нихъ же основывать всѣ опредѣленія. А наблюденія надъ тепловыми ощущеніями, хотя и могутъ руководить нами, но ни въ коемъ случаѣ не должны быть примѣняемы безъ всякой критики и провѣрки. Вмѣстѣ съ такимъ взглядомъ мы занимаемъ совершенно *новую* точку зрѣнія, въ сравненіи съ основателями термометріи, не дѣлавшими принципіальнаго различія между показаніями термоскопа и нашего теплового чувства.

§ 4. Говоря объ измѣненіяхъ объема тѣла, мы подразумѣваемъ лишь такія измѣненія объема, которыя *не* вызываются ни давленіемъ, ни электрическими силами, ни прочими обстоятельствами, не зависящими отъ теплового состоянія тѣла. Такъ какъ, съ нашей новой точки зрѣнія, только измѣненія объема—въ указанномъ смыслѣ—являются характеристикой измѣненія теплового состоянія, то представляется раціональнымъ установить слѣдующее *опредѣленіе* равныхъ тепловыхъ состояній:

„*Тепловыя состоянія* различныхъ тѣлъ считаются *равными* въ томъ случаѣ, если эти тѣла при соприкосновеніи не вызываютъ другъ въ другѣ измѣненій объема“.

О такихъ тѣлахъ говорятъ, что они находятся въ „*термическомъ равновѣсіи*“.

Согласно этому опредѣленію, термоскопъ показываетъ тепловое состояніе какого-нибудь тѣла, какъ скоро его прикосновеніе къ этому тѣлу не сопровождается измѣненіями объемовъ (тѣла и термоскопа).

Чтобы иллюстрировать разницу между этимъ опредѣленіемъ и первоначальнымъ субъективнымъ, по которому равными тепловыми состояніями считались тѣ, которыя вызываютъ одинаковыя тепловыя ощущенія, обратимся къ такому примѣру.

Если два тѣла A и B такъ же теплы—въ обыкновенномъ смыслѣ слова, т. е. по отношенію къ тепловымъ ощущеніямъ,—какъ и третье тѣло C, то они и между собой одинаково теплы. Такое заключеніе является логически неизбѣжнымъ, такъ какъ мы не можемъ считать два ощущенія одновременно равными и неравными между собой. Но если намъ извѣстно только, что ни A ни B не вызываютъ при соприкосновеніи измѣненій объема въ тѣлѣ C, то отсюда еще отнюдь не слѣдуетъ, что A не вызываетъ при соприкосновеніи измѣненія объема въ B. Только опытъ можетъ дать отвѣтъ на этотъ вопросъ. Въ дѣйствительности оказывается, что если въ ряду тѣлъ $A, B, C, D, \ldots$ каждыя два сосѣднія находятся достаточно долго въ соприкосновеніи, то термоскопъ для всѣхъ ихъ даетъ одно и то же показаніе. Другими словами, термоскопъ, бывшій въ соприкосновеніи съ A и потому имѣющій одинаковое съ A тепловое состояніе, оказывается въ одинаковомъ тепловомъ состояніи и съ тѣломъ B, которое находится въ соприкосновеніи съ A.

Такимъ образомъ, опытъ заставляетъ насъ принять то положеніе, что два тѣла A и B, имѣющія съ тѣломъ C равныя—въ смыслѣ нашего опредѣленія—тепловыя состоянія, находятся и между собой въ одинаковомъ тепловомъ состояніи.

Разобранный примѣръ вызываетъ слѣдующее замѣчаніе общаго характера. Всякій разъ, когда мы навязываемъ природѣ какое-нибудь опредѣленіе, мы должны удостовѣриться въ томъ, оправдывается ли оно въ дѣйствительности.

Правда, мы вправѣ вполнѣ произвольно строить наши понятія, но вездѣ, кромѣ чистой математики,—начиная съ геометріи, а особенно въ физикѣ,—приходится изслѣдовать, дѣйствительно ли и въ какомъ смыслѣ отвѣчаетъ дѣйствительность нашимъ понятіямъ.

§ 5. Болѣе сильному тепловому ощущенію соотвѣтствуетъ—въ общемъ—большій объемъ термоскопическаго вещества. Руководствуясь такими данными тепловыхъ ощущеній, мы произвольно постулируемъ (по аналогіи):

„Тѣ тепловыя состоянія, при которыхъ тѣла обусловливаютъ въ термоскопѣ указанія бо́льшаго объема, называются болѣе высокими“.

Аналогія съ тепловыми ощущеніями приводитъ насъ къ тому заключенію, что, если тѣлу A соотвѣтствуетъ бо́льшій объемъ термоскопическаго вещества, чѣмъ тѣлу B, то при соприкосновеніи A съ B объемъ A уменьшится, а объемъ B увеличится. Но это положеніе, вѣрное въ общемъ, допускаетъ исключенія. Такъ, напримѣръ, двѣ массы воды при $+3^0C$ и $+5^0C$ взаимно уменьшаютъ свои объемы.

Вода при $+10^{0}C$ и $+15^{0}C$ представляетъ нормальный случай. Но если взять воду при $+1^{0}C$ и $+3^{0}C$, то соотношеніе получится прямо противоположное: болѣе холодная вода будетъ уменьшаться въ объемѣ, а болѣе теплая увеличиваться.

Такимъ образомъ, вода не годится для термоскопа, такъ какъ она можетъ при двухъ тепловыхъ состояніяхъ, различаемыхъ на другихъ термоскопахъ, давать одно и то же указаніе.

§ 6. Примѣръ съ водой указываетъ на то требованіе, которому должно удовлетворять всякое вещество, взятое для термоскопа: оно не должно при разныхъ тепловымъ состояніяхъ имѣть одинъ и тотъ же объемъ. Но такъ какъ этому условію удовлетворяетъ огромное большинство тѣлъ, то выборъ того или иного изъ нихъ представляетъ *второе произвольное соглашеніе* (считая первымъ выборъ *объема*, какъ примѣты теплового состоянія).

Но разъ такой выборъ сдѣланъ и получилъ всеобщее признаніе, то соотвѣтствующій термоскопъ можетъ въ существенномъ давать все, что отъ него требуется. Слѣдуетъ только установить при его помощи *постоянство* возможно большаго числа тепловыхъ состояній и отмѣтить соотвѣтственныя его указанія *знаками* или *названіями*: „точка замерзанія ртути", „точка плавленія льда", „точка плавленія коровьяго масла", „теплота крови", „точка кипѣнія воды" и т. д. *Эти отмѣтки дали бы намъ возможность не только распознать повторяющееся тепловое состояніе, но также возсоздать искусственно извѣстное намъ тепловое состояніе.* А въ этомъ—существенное назначеніе термоскопа.

§ 7. Такая система отмѣтокъ въ дѣйствительности господствовала нѣкоторое время. Но уже въ скоромъ времени должны были обнаружиться ея практическія неудобства. Чѣмъ точнѣе становились наблюденія, тѣмъ больше требовалось такихъ постоянныхъ точекъ, такъ что, наконецъ, стало невозможнымъ наносить ихъ на термоскопъ. Въ то же время число названій непріятно увеличивалось, и приходилось отдѣльно отмѣчать порядокъ, въ которомъ они слѣдуютъ другъ за другомъ, такъ какъ сами по себѣ они не давали указаній этого порядка.

Но есть такая система названій, которая одновременно является системой *порядковыхъ* обозначеній и можетъ быть расширена безпредѣльно и раздроблена на сколь угодно малые промежутки. Это—*числа*. Употребленіе *чиселъ* въ качествѣ *названій* для термоскопическихъ отмѣтокъ устраняетъ всѣ упомянутыя затрудненія. Рядъ чиселъ безъ труда можно продолжать до безконечности (и при томъ въ обѣ стороны, если воспользоваться отрицательными числами); между двумя числами можно вставить сколько угодно новыхъ, промежуточныхъ чиселъ по уже готовому методу; наконецъ, по всякому числу видно, между какими двумя другими лежитъ оно.

§ 8. Примѣненіе этой новой системы числовыхъ термоскопическихъ обозначеній требуетъ новаго, *третьяго*, *соглашенія* относительно *принципа сопряженія* чиселъ съ термоскопическими значками (отмѣтками), или *принципа градуированія*.

Со временъ *Цельзія* (1742) принято наносить на капиллярной трубкѣ термоскопическаго сосуда *двѣ* постоянныя точки (плавленія льда и кипѣнія воды), дѣлить *кажущееся* приращеніе объема термоскопическаго вещества (т. е. не обращая вниманія на расширеніе сосуда) на 100 *равныхъ* частей (градусовъ) и продолжать *эти* дѣленія выше точки кипѣнія и ниже точки замерзанія. При помощи двухъ постоянныхъ точекъ и принятаго градуированія, всякое число, *повидимому*, оказывается однозначно связаннымъ съ физически опредѣленнымъ тепловымъ состояніемъ.

Но это соотвѣтствіе оказывается тотчасъ нарушеннымъ съ выборомъ другого *термоскопическаго вещества* или сосуда изъ другого *матеріала*. Дѣло въ томъ, что различныя вещества, при *равныхъ* для всѣхъ измѣненіяхъ теплового состоянія, расширяются *не пропорціонально* другъ другу.

Если на оси абсциссъ откладывать объемы одного вещества, а на оси ординатъ—другого, то, какъ показали еще Dulong и Petit, линія, соединяющая тѣ точки, абсциссы и ординаты которыхъ соотвѣтствуютъ одинаковымъ тепловымъ состояніямъ обоихъ тѣлъ, представляетъ *не прямую*, а нѣкоторую *кривую*, *иную* для каждой пары веществъ.

Но если даже употреблять одно и то-же термоскопическое вещество,—напримѣръ, ртуть,—то все-таки кажущееся расширеніе его будетъ зависѣть замѣтнымъ образомъ отъ выбора того или иного сорта стекла для сосуда.

Такимъ образомъ, строго говоря, соотношеніе между числомъ и тепловымъ состояніемъ является, несмотря на одинъ и тотъ же способъ градуированія, индивидуальнымъ качествомъ всякаго термометра. Другими словами, два термометра, градуированные по одному и тому же принципу, могутъ давать *разныя* показанія при одномъ и томъ же тепловомъ состояніи.

§ 9. Наибольшія преимущества при употребленіи въ качествѣ термоскопическаго вещества представляютъ *газы*. Какъ извѣстно, всѣ газы расширяются почти одинаково при нагрѣваніи (при постоянномъ давленіи); съ другой стороны, ихъ большое расширеніе дѣлаетъ газовый термоскопъ крайне чувствительнымъ и въ то же время отодвигаетъ на заднiй планъ вліяніе матеріала сосуда. Въ то время, какъ ртуть расширяется только въ 7 разъ сильнѣе, чѣмъ стекло, газы расширяются въ 146 разъ сильнѣе стекла. Такимъ образомъ, расширеніе сосуда оказываетъ лишь незначительное вліяніе на кажущееся расширеніе газа, а вліяніе измѣненія коэффиціента расширенія съ замѣной одного сорта стекла другимъ является почти неуловимымъ. Благодаря этому газовые термоскопы являются въ большой степени сравнимыми, особенно если брать всегда одинъ и тотъ же газъ, напримѣръ, воздухъ. Все дальнѣйшее изложеніе будетъ относиться къ показаніямъ именно воздушнаго термоскопа.

§ 10. *Число*, которое, согласно тому или другому принципу градуированія, *сопрягается однозначнымъ образомъ* съ термоскопическимъ указаніемъ объема и, слѣдовательно, *съ нѣкото-*

рымъ тепловымъ состоянiемъ, мы назовемъ температурой (термоскопа и тѣлъ, находящихся съ нимъ въ термическомъ равновѣсiи) и будемъ обозначать буквой t. Если черезъ v обозначимъ термоскопическiй объемъ, то одному и тому же тепловому состоянiю будутъ соотвѣтствовать весьма различныя температурныя числа, въ зависимости отъ принятаго принципа сопряженiя чиселъ съ объемами, выражаемыми вообще нѣкоторой функцiональной зависимостью

$$t = f(v).$$

§ 11. Въ дѣйствительности, въ разное время были предложены различные принципы градуированiя, хотя лишь одинъ изъ нихъ получилъ всеобщее признанiе.

По одному изъ этихъ принциповъ, который можно назвать Галилеевымъ, температурныя числа берутъ пропорцiональными дѣйствительнымъ или кажущимся приращенiямъ объема по сравненiю съ нѣкоторымъ начальнымъ объемомъ v_0. Такимъ образомъ, объемамъ

$$v_o,\ v_o(1+a),\ v_o(1+2a), \ldots v_o(1+ta)$$

отвѣчаютъ температуры:

$$0,\quad 1,\quad 2, \ldots t.$$

При этомъ для a берутъ сотую долю расширенiя единицы объема воздуха отъ точки плавленiя льда до точки кипѣнiя воды, т. е. $a = {}^1/_{273}$. Поэтому, считая начальнымъ объемомъ v_o объемъ при точкѣ плавленiя льда, получимъ для точки кипѣнiя температуру въ 100 градусовъ. Продолжая по тому же принципу отмѣчать тепловыя состоянiя выше кипѣнiя воды и ниже таянiя льда, получимъ температуры выше 100^0 и ниже 0^0, т. е. отрицательныя.

Совершенно другой принципъ предложенъ былъ Дальтономъ: объемамъ

$$\cdots \frac{v_o}{(1{,}0179)^2},\ \frac{v_o}{1{,}0179},\ v_o,\ v_o \times 1{,}0179,\ v_o \times (1{,}0179)^2 \ldots$$

соотвѣтствуютъ температуры:

$$\cdots -20,\quad -10,\quad 0,\quad +10,\quad +20, \ldots;$$

другими словами, при увеличенiи объема (отъ нагрѣванiя) въ 1,0179 разъ, температура считается на 10^0 выше, при уменьшенiи объема въ 1,0179 разъ температура понижается на 10^0. При этомъ температуры 32^0 и 212^0 Дальтона совпадаютъ съ тѣми же температурами Фаренгейта.

Третiй принципъ былъ предложенъ Амонтонсомъ (Amontons) и Ламбертомъ (Lambert). Они принимаютъ за термоскопическое указаніе теплового состоянія упругость газа при постоянномъ объемѣ и полагаютъ температуру пропорціональной такой упругости газа. Но, благодаря приложимости въ широкихъ предѣлахъ закона Марріота-Гэ-Люссака и, слѣдовательно, незначительности уклоненія коэффиціента упругости отъ коэффиціента расширенія, Амонтонова скала температуръ почти не отличается отъ Галилеевой.

Обозначимъ черезъ p упругость нѣкоторой массы газа при неизмѣнномъ объемѣ, черезъ p_o упругость его при точкѣ таянія льда, черезъ k нѣкоторую постоянную; тогда Амонтоновъ принципъ сопряженія выразится уравненіемъ

$$T = \frac{kp}{p_o}.$$

Вторая основная точка здѣсь излишня. Въ виду того, что p_o, p зависятъ такимъ же образомъ отъ тепловыхъ состояній, какъ v_o, v *), то такая скала обладаетъ всѣми свойствами Галилеевой. При $p=0$ температура $T=0$. Положимъ $k=273$. Тогда, по Амонтоновой скалѣ температура будетъ возрастать на 1 градусъ при увеличеніи упругости p на $\frac{p_o}{273}$; но при такомъ измѣненіи теплового состоянія объемъ v (при неизмѣнной упругости) тоже измѣнится на $\frac{v_o}{273}$ **), и, слѣдовательно, по скалѣ Галилея температура возрастетъ тоже на 1 градусъ. Такимъ образомъ, при $k=273$ градусы той и другой скалы представляютъ одинаковыя измѣненія теплового состоянія. При этомъ, точкѣ таянія льда отвѣчаетъ 273^0 Амонтона, а кипѣнію воды 373^0 Амонтона. Если всѣ температуры Амонтона уменьшить на 273^0, т. е. положить $t = \frac{kp}{p_o} - 273$, то эта скала вполнѣ совпадаетъ съ Галилеевой.

(Окончаніе слѣдуетъ).

---

*) Пусть начальныя значенія упругости и объема суть p_o, v_o. При нагрѣваніи—при постоянномъ объемѣ v_o—упругость пусть станетъ равной kp_o. Не измѣняя температуры, уменьшимъ эту упругость въ k разъ; при этомъ—по закону Маріотта—объемъ увеличится въ k разъ и станетъ равнымъ kv_o. Итакъ, одно и то же нагрѣваніе можетъ увеличить въ k разъ либо объемъ, либо упругость.

**) Гдѣ v_o есть объемъ той же массы газа при температурѣ таянія льда.

Нѣкоторыя свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени*).

Дм. Ефремова

(преподавателя Школы Колористовъ въ г. Иваново-Вознесенскѣ).

---

1. Обозначимъ черезъ $F(x)$ цѣлый алгебраическій многочленъ 4-й степени относительно x и положимъ

$$F(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4. \tag{1}$$

Производная по x отъ этого многочлена будетъ

$$F'(x) = 4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3. \tag{2}$$

Раздѣлимъ квадратъ этой производной на $F(x)$ и обозначимъ черезъ $Q(x)$ и $R(x)$ частное и остатокъ отъ этого дѣленія, такъ что

$$[F'(x)]^2 = F(x)\,.\,Q(x) + R(x). \tag{3}$$

Такъ какъ

$$[F'(x)]^2 = (4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3)^2 =$$
$$= 16a^2{}_0x^6 + 24a_0a_1x^5 + \left.\begin{array}{l} 9a_1{}^2 \\ +16a_0a_2 \end{array}\right| x^4 + \left.\begin{array}{l} 12a_1a_2 \\ +8a_0a_3 \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{l} 4a_2{}^2 \\ +6a_1a_3 \end{array}\right| x^2 + 4a_2a_3x + a_3{}^2, \tag{4}$$

то непосредственно дѣленіемъ этого многочлена на многочленъ $F(x)$ найдемъ, что частное

$$Q(x) = 16a_0x^2 + 8a_1x + \frac{a_1{}^2}{a_0} = a_0\left(4x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2 \tag{5}$$

и остатокъ

$$R(x) = k_0x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3, \tag{6}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} k_0 &= 4a_1a_2 - 8a_0a_3 - \frac{a_1{}^3}{a_0}, \\ k_1 &= 4a_2{}^2 - 2a_1a_3 - 16a_0a_4 - \frac{a_1{}^2a_2}{a_0}, \\ k_2 &= 4a_2a_3 - 8a_1a_4 - \frac{a_1{}^2a_3}{a_0} \end{aligned} \tag{7}$$

и $$k_3 = a_3{}^2 - \frac{a_1{}^2a_4}{a_0}.$$

---

*) Статья эта составляетъ часть работы, написанной на тему, предложенную журналомъ Nouvelles Annales de Mathématiques въ 1896 г.

Такимъ образомъ, частное отъ дѣленія квадрата производной цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени на этотъ многочленъ есть полный квадратъ двучлена 1-й степени.

2. Изъ равенствъ (7) слѣдуетъ, что

$$a_1k_1 - a_2k_0 = 2a_0\left(4a_2a_3 - 8a_1a_4 - \frac{a_1{}^2a_3}{a_0}\right) = 2a_0k_2$$

и

$$a_1k_2 - a_3k_0 = 8a_0\left(a_3{}^2 - \frac{a_1{}^2a_4}{a_0}\right) = 8a_0k_3;$$

отсюда

$$k_2 = \frac{a_1k_1 - a_2k_0}{2a_0} \quad \text{и} \quad k_3 = \frac{a_1k_2 - a_3k_0}{8a_0} =$$

$$= \frac{1}{16a_0{}^2}\left[a_1{}^2k_1 - (a_1a_2 + 2a_0a_3)k_0\right]. \tag{8}$$

Слѣдовательно, коэффиціенты k_2 и k_3 остатка $R(x)$ суть линейныя функціи двухъ другихъ коэффиціентовъ его k_0 и k_1.

3. Обозначимъ корни многочлена $F(x)$ черезъ a, b, c, d, т. е. положимъ, что

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0, \quad F(c) = 0 \quad \text{и} \quad F(d) = 0. \tag{9}$$

Въ такомъ случаѣ

$$F(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= \frac{a_2}{a_0}, \\ abc+abd+acd+bcd &= -\frac{a_3}{a_0}, \\ abcd &= \frac{a_4}{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

На основаніи перваго изъ этихъ равенствъ (11) частное $Q(x)$ представляется въ такомъ видѣ:

$$Q(x) = a_0(4x - a - b - c - d)^2. \tag{12}$$

4. Чтобы выразить остатокъ $R(x)$ черезъ a, b, c, d, подставимъ въ равенство (3) вмѣсто x послѣдовательно эти значенія его; принимая во вниманіе равенства (9), получимъ:

$$[F'(a)]^2 = R(a), \quad [F'(b)]^2 = R(b), \quad [F'(c)]^2 = R(c) \quad \text{и} \quad [F'(d)]^2 = R(d). \tag{13}$$

Такъ какъ $R(x)$—цѣлый алгебраическій многочленъ 3-й степени (6), то, зная значенія его для четырехъ значеній перемѣнной x, можемъ написать (по формулѣ Лагранжа), что

$$R(x) = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} \cdot [F'(a)]^2 + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}[F'(b)]^2 +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} \cdot [F'(c)]^2 + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} \cdot [F'(d)]^2.$$

Дѣйствительно, правая часть этого равенства есть цѣлый алгебраическій многочленъ 3-й степени отъ x, и обѣ части того же равенства, вслѣдствіе равенствъ (13), тождественно равны при четырехъ значеніяхъ (a, b, c, d) перемѣнной x; слѣдовательно, это равенство вѣрно и при всѣхъ значеніяхъ x.

Но, дифференцируя равенство (10), находимъ, что

$$F'(x) = F(x) \cdot \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} \right) =$$

$$= a_0(x-b)(x-c)(x-d) + a_0(x-a)(x-c)(x-d) + \tag{14}$$

$$+ a_0(x-a)(x-b)(x-d) + a_0(x-a)(x-b)(x-c);$$

отсюда

$$\begin{aligned} F'(a) &= a_0(a-b)(a-c)(a-d), \\ F'(b) &= a_0(b-a)(b-c)(b-d), \\ F'(c) &= a_0(c-a)(c-b)(c-d) \end{aligned} \tag{15}$$

и
$$F'(d) = a_0(d-a)(d-b)(d-c).$$

Подставивъ эти выраженія въ послѣднее равенство для $R(x)$, по сокращеніи получимъ:

$$R(x) = a_0(x-b)(x-c)(x-d)F'(a) + a_0(x-a)(x-c)(x-d)F'(b) +$$

$$+ a_0(x-a)(x-b)(x-d)F'(c) + a_0(x-a)(x-b)(x-c)F'(d) = \tag{16}$$

$$= F(x) \cdot \left[\frac{F'(a)}{x-a} + \frac{F'(b)}{x-b} + \frac{F'(c)}{x-c} + \frac{F'(d)}{x-d} \right].$$

5. Расположивъ правую часть этого равенства по степенямъ x и замѣтивъ, что (11)

$$a_0(b+c+d) = -a_1 - a_0 a, \ldots$$

$$a_0(bc+bd+cd) = a_2 - a_0 a(b+c+d) = a_2 + a_1 a + a_0 a^2, \ldots$$

$$a_0 \cdot bcd = -a_3 - a_0 a(bc+bd+cd) = -a_3 - a_2 a - a_1 a^2 - a_0 a^3, \ldots$$

представимъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$R(x) = a_0 K x^3 + (a_1 K + a_0 L)x^2 + (a_2 K + a_1 L + a_0 M)x +$$

$$+ (a_3 K + a_2 L + a_1 M + a_0 N), \tag{17}$$

гдѣ для краткости положено:

$$F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)=K,$$
$$aF'(a)+bF'(b)+cF'(c)+dF'(d)=L,$$
$$a^2F'(a)+b^2F'(b)+c^2F'(c)+d^2F'(d)=M \qquad (17)$$

и

$$a^3F'(a)+b^3F'(b)+c^3F'(c)+d^3F'(d)=N.$$

Изъ сравненія равенствъ (6) и (17) заключаемъ, что

$$k_0=a_0K=a_0[F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)],$$
$$k_1=a_1K+a_0L=a_1K+a_0[aF'(a)+bF'(b)+cF'(c)+dF'(d)],$$
$$k_2=a_2K+a_1L+a_0M=\frac{a_1k_1-a_2k_0}{2a_0} \qquad (18)$$

и $\quad k_3=a_3K+a_2L+a_1M+a_0N=\dfrac{1}{16a_0{}^2}[a_1{}^2k_1-(a_1a_2+2a_0a_3)k_0].$

6. Такъ какъ (15)

$$F'(a)+F'(b)=a_0(a-b)(a-c)(a-d)+a_0(b-a)(b-c)(b-d)=$$
$$=a_0(a-b)[(a^2-b^2)-(c+d)(a-b)]=$$
$$=a_0(a-b)^2(a+b-c-d)$$

и, по аналогіи,

$$F'(c)+F'(d)=a_0(c-d)^2(c+d-a-b),$$

то

$$K=F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)=$$
$$=a_0(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d). \qquad (19)$$

Поэтому, если

$$K=F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)=0, \qquad (20)$$

то

$$a+b=c+d,$$

или

$$a+c=b+d,$$

или

$$a+d=b+c,$$

т. е. сумма двухъ корней многочлена $F(x)$ равна суммѣ двухъ другихъ корней его.

Обратно, если корни многочлена $F(x)$ удовлетворяютъ этому условію, то

$$k_0=a_0K=0,$$

т. е. остатокъ отъ дѣленія $[F'(x)]^2$ на $F(x)$ будетъ 2-ой степени.

7. Въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. при $K=0$ (20), коэффиціенты остатка $R(x)$ суть (18):

$$k_0=0,\quad k_2=\frac{a_1}{2a_0}k_1 \quad \text{и} \quad k_3=\frac{a_1^2}{16a_0^2}k_1; \tag{21}$$

поэтому (6)

$$R(x)=k_1\left(x^2+\frac{a_1}{2a_0}x+\frac{a_1^2}{16a_0^2}\right)=\frac{k_1}{16}\left(4x+\frac{a_1}{a_0}\right)^2,$$

или, вслѣдствіе равенства (5),

$$R(x)=\frac{k_1}{16a_0}\cdot Q(x). \tag{22}$$

Итакъ, если

$$F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)=0,$$

то остатокъ отъ дѣленія квадрата производной $F'(x)$ на $F(x)$ такъ же, какъ и частное, есть полный квадратъ и отличается отъ частнаго только постояннымъ множителемъ

$$C=\frac{k_1}{16a_0}=\frac{L}{16}=\frac{a_0a_3^2}{a_1^2}-a_4. \tag{23}$$

8. Замѣтимъ, что равенство (3) при $K=0$ принимаетъ видъ:

$$[F'(x)]^2=[F(x)+C]\cdot Q(x)=[F(x)+C]\cdot a_0\left(4x+\frac{a_1}{a_0}\right)^2;$$

отсюда

$$F(x)+C=\left[\frac{F'(x)}{\sqrt{a_0}\left(4x+\frac{a_1}{a_0}\right)}\right]^2;$$

т. е., если

$$F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)=0,$$

то многочленъ $F(x)$ отъ прибавленія къ нему постоянной

$$C=\frac{a_0a_3^2}{a_1^2}-a_4$$

обращается въ полный квадратъ.

9. Если одновременно

$$K=F'(a)+F'(b)+F(c)+F'(d)=0$$

и

$$L=aF'(a)+bF'(b)+cF'(c)+dF'(d)=0,$$

то, какъ видно изъ формулы (23), постоянная C равна нулю, т. е. многочленъ (1) $F(x)$ есть полный квадратъ.

Это слѣдуетъ также изъ того, что при $K=0$ и $L=0$ остатокъ $R(x)$ отъ дѣленія квадрата производной $F'(x)$ на $F(x)$ тождественно равенъ нулю, ибо каждый изъ коэффиціентовъ его при этихъ условіяхъ равенъ нулю (18).

10. Посмотримъ теперь, не существуетъ ли такой множитель ρ, при которомъ сумма

$$F(x)+\rho R(x)=$$

$$=a_0x^4+(a_1+\rho k_0)x^3+(a_2+\rho k_1)x^2+(a_3+\rho k_2)x+(a_4+\rho k_3) \quad (24)$$

дѣлается полнымъ квадратомъ.

При непосредственномъ извлеченіи корня изъ этого многочлена получается остатокъ

$$S=\left[a_3+\rho k_2-\frac{(a_1+\rho k_0)(a_2+\rho k_1)}{2a_0}+\frac{(a_1+\rho k_0)^3}{8a_0^2}\right]x+$$
$$+a_4+\rho k_3-\left[\frac{a_2+\rho k_1}{2\sqrt{a_0}}-\frac{(a_1+\rho k_0)^2}{8a_0\sqrt{a_0}}\right]^2;$$

слѣдовательно, многочленъ (24) будетъ полнымъ квадратомъ при тѣхъ значеніяхъ ϱ, при которыхъ этотъ остатокъ тождественно обращается въ нуль, т. е. которыми одновременно удовлетворяются уравненія

$$a_3+\rho k_2-\frac{a_1+\rho k_0}{2a_0}\left[a_1+\rho k_1-\frac{(a+\rho k_0)^2}{4a_0}\right]=0$$

и (25)

$$a_4+\rho k_3-\frac{1}{4a_0}\left[a_2+\rho k_1-\frac{(a_1+\rho k_0)^2}{4a_0}\right]^2=0.$$

11. Первое изъ этихъ уравненій представляется въ видѣ:

$$8a_0^2(a_3+\rho k_2)-4a_0(a_1+\rho k_0)(a_2+\rho k_1)+(a_1+\rho k_0)^3=0,$$

или

$$k_0^3\rho^3-k_0(4a_0k_1-3a_1k_0)\rho^2+(8a_0^2k_2-4a_0a_2k_0-4a_0a_1k_1+3a_1^2k_0)\rho-$$
$$-a_0\left(4a_1a_2-8a_0a_3-\frac{a_1^3}{a_0}\right)=0.$$

Замѣнивъ здѣсь k_2 его выраженіемъ черезъ k_0 и k_1 (18) и замѣтивъ, что (7)

$$4a_1a_2-8a_0a_3-\frac{a_1^3}{a_0}=k_0,$$

получимъ это уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$k_0^3\rho^3-(4a_0k_1-3a_1k_0)k_0\rho^2+(3a_1^2-8a_0a_2)k_0\rho-a_0k_0=0.$$

Второе изъ уравненій (25) приводится къ виду:

$$64a_0^3(a_4+\rho k_3)-16a_0^2(a_2+\rho k_1)^2+8a_0(a_1+\rho k_0)^2(a_2+\rho k_1)-(a_1+\rho k_0)^4=0;$$

но изъ перваго уравненія

$$(a_1+\rho k_0)^3=4a_0(a_1+\rho k_0)(a_2+\rho k_1)-8a_0^2(a_3+\rho k_2);$$

умноживъ обѣ части этого равенства на $a_1+\rho k_0$ и подставивъ въ предыдущее уравненіе полученное выраженіе вмѣсто $(a_1+\rho k_0)^4$, получимъ послѣ упрощеній

$$k_0^2k_1\rho^3-(4a_0k_1-3a_1k_0)k_1\rho^2+(3a_1^2-8a_0a_2)k_1\rho-a_0k_1=0.$$

Въ общемъ случаѣ, когда ни K ни L (18) не равны нулю, k_0 и k_1 также не равны нулю; поэтому первое изъ полученныхъ уравненій можно сократить на k_0, а второе — на k_1; послѣ чего оказывается, что оба уравненія (25) приводятся къ одному слѣдующему

$$k_0^2\rho^3-(4a_0k_1-3a_1^2k_0)\rho^2+(3a_1^2-8a_0a_2)\rho-a_0=0. \tag{26}$$

Такимъ образомъ, многочленъ (24) дѣлается полнымъ квадратомъ при трехъ значеніяхъ ρ, удовлетворяющихъ уравненію (26).

12. Выразимъ коэффиціенты уравненія (26) черезъ корни a, b, c, d многочлена $F(x)$.

Такъ какъ (18) $k_0=a_0K$, то, подставивъ сюда выраженіе K черезъ a, b, c, d (19), получимъ:

$$k_0^2=a_0^4(a+b-c-d)^2\,.\,(a+c-b-d)^2\,.\,(a+d-b-c)^2.$$

Далѣе находимъ, что (18)

$$4a_0k_1-3a_1k_0=a_0(a_1K+4a_0L);$$

подставляя сюда значеніе a_1 (11), K и L (17), получимъ:

$$\begin{aligned}4a_0k_1-3a_1k_0&=-a_0^2(a+b+c+d)[F'(a)+F'(b)+F'(c)+F'(d)]+\\&+4a_0^2[aF'(a)+bF'(b)+cF'(c)+dF'(d)]=\\&=a_0^2[(3a-b-c-d)F'(a)+(3b-a-c-d)F'(b)+\\&+(3c-a-b-d)F'(c)+(3d-a-b-c)F'(d)];\end{aligned}$$

отсюда, при помощи формулъ (15), находимъ, что

$$\begin{aligned}&4a_0k_1-3a_1k_0=\\&=a_0^3[(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2+(a+b-c-d)^2(a+d-b-c)^2+\\&+(a+c-b-d)^2(a+d-b-c)^2].\end{aligned}$$

Наконецъ, вслѣдствіе равенствъ (11),

$$\begin{aligned}&3a_1^2-8a_0a_2=\\&=3a_0^2(a+b+c+d)^2-8a_0^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=\\&=a_0^2[(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2].\end{aligned}$$

13. Уравненіе (26), вслѣдствіе такихъ преобразованій, принимаетъ видъ:

$$a_0^4(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2(a+d-b-c)^2\rho^3 -$$
$$-a_0^3[(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2+(a+b-c-d)^2(a+d-b-c)^2+$$
$$+(a+c-b-d)^2(a+d-b-c)^2]\rho^2+ \tag{26*}$$
$$+a_0^2[(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+$$
$$(a+d-b-c)^2]\rho-a_0=0,$$

или

$$\rho^3-\left[\frac{1}{a_0(a+b-c-d)^2}+\frac{1}{a_0(a+c-b-d)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a_0(a+d-b-c)^2}\right]\rho^2+$$
$$+\left[\frac{1}{a_0^2(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2}+\right.$$
$$+\frac{1}{a_0^2(a+b-c-a)^2(a+d-b-c)^2}+$$
$$\left.+\frac{1}{a_0^2(a+c-b-d)^2(a+d-b-c)^2}\right]\rho-$$
$$-\frac{1}{a_0^3(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2(a+d-b-c)^2}=0.$$

Положивъ здѣсь

$$\rho_1=\frac{1}{a_0(a+b-c-d)^2},$$
$$\rho_2=\frac{1}{a_0(a+c-b-d)^2}, \tag{27}$$
$$\rho_3=\frac{1}{a_0(a+d-b-c)^2},$$

получимъ:

$$\rho^3-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)\rho^2+(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)\rho-\rho_1\rho_2\rho_3=0,$$

или

$$(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)=0.$$

Слѣдовательно, ρ_1, ρ_2, ρ_3 (27) суть корни уравненія (26).

14. Итакъ, разумѣя подъ ρ одно изъ трехъ найденныхъ значеній его (27), можно положить

$$F(x)+\rho\,.\,R(x)=[\pm\Phi(x)]^2, \tag{28}$$

гдѣ, соотвѣтственно тремъ значеніямъ ρ, функція $\Phi(x)$ имѣетъ также три различныхъ значенія; обозначимъ ихъ черезъ $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$.

Такъ какъ ρ не зависитъ отъ x (27), то, подставляя въ равенство (28) вмѣсто x послѣдовательно a, b, c, d, вслѣдствіе равенства (9), найдемъ, что

$$\rho R(a) = [\Phi(a)]^2,\ \rho R(b) = [\Phi(b)]^2,\ \rho R(c) = [\Phi(c)]^2,\ \rho R(d) = [\Phi(d)]^2,$$

или (13)

$$\Phi(a) = \pm \sqrt{\rho} F'(a), \quad \Phi(b) = \pm \sqrt{\rho} F'(b), \quad \Phi(c) = \pm \sqrt{\rho}\, F'(c),$$

$$\Phi(d) = \pm \sqrt{\rho}\, F'(d).$$

Такъ какъ лѣвая часть равенства (28) есть многочленъ 4-й степени отъ x, то $\Phi(x)$ долженъ быть многочленъ 2-й степени; поэтому, пользуясь формулой Лагранжа для составленія $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \sqrt{\rho} \left[F'(a) \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + F'(b) \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \right.$$

$$\left. + F'(c) \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + F'(d) \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} \right],$$

необходимо два изъ множителей $F'(a)$, $F'(b)$, $F'(c)$ и $F'(d)$ принимать со знакомъ $+$, а другіе два со знакомъ $-$, т. е.

или $\qquad + F'(a), \quad + F'(b), \quad - F'(c), \quad - F'(d),$

или $\qquad + F'(a), \quad - F'(b), \quad + F'(c), \quad - F'(a),$

или $\qquad + F'(a), \quad - F'(b), \quad - F'(c), \quad + F'(d).$

15. Удерживая знаки первой изъ этихъ трехъ строкъ, на основаніи равенствъ (15), по формулѣ Лагранжа находимъ, что

$$\Phi(x) = \pm a_0 \sqrt{\rho}\, [(x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-c)(x-d) -$$

$$- (x-a)(x-b)(x-d) - (x-a)(x-b)(x-c)] =$$

$$= \pm \sqrt{\rho}\, F(x) \left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d} \right],$$

или

$$\Phi(x) = \pm a_0 \sqrt{\rho}\, [(a+b-c-d)x^2 - 2(ab-cd)x + (abc +$$

$$+ abd - acd - bcd)].$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x^4 въ лѣвой части равенства (28) равенъ a_0, то коэффиціентъ при x^2 въ многочленѣ $\Phi(x)$ долженъ быть $\pm \sqrt{a_0}$, т. е. коэффиціентъ при x^2 въ правой части послѣдняго равенства долженъ сократиться на

$$\sqrt{a_0}(a+b-c-d)$$

послѣ подстановки соотвѣтствующаго значенія ρ; изъ этого слѣдуетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ должно принять

$$\rho = \rho_1 = \frac{1}{a_0(a+b-c-d)^2};$$

такимъ образомъ, находимъ, что

$$\Phi_1(x) = \pm\sqrt{a_0}\left[x^2 - \frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d}x + \frac{abc+abd-acd-bcd}{a+b-c-d}\right].$$

По аналогіи съ этимъ выраженіемъ можно написать, что

$$\Phi_2(x) = \pm\sqrt{a_0}\left[x^2 - \frac{2(ac-bd)}{a+c-b-d}x + \frac{abc+acd-abd-bcd}{a+c-b-d}\right]$$

и

$$\Phi_3(x) = \pm\sqrt{a_0}\left[x^2 - \frac{2(ad-bc)}{a+d-b-c}x + \frac{abd+acd-abc-bcd}{a+d-b-c}\right].$$

16. Если

$$K = F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) = 0,$$

то, какъ мы уже видѣли (n^0 6), сумма двухъ корней многочлена $F(x)$ равна суммѣ двухъ другихъ корней его: напримѣръ,

$$a + d = b + c.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (26*) принимаетъ видъ

$$a_0^3(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2\rho^2 - a_0^2[(a+b-c-d)^2 +$$
$$+ (a+c-b-d)^2]\rho + a_0 = 0,$$

или

$$\rho^2 - \left[\frac{1}{a_0(a+b-c-d)^2} + \frac{1}{a_0(a+c-b-d)^2}\right]\rho +$$
$$+ \frac{1}{a_0^2(a+b-c-d)^2(a+c-b-d)^2} = 0;$$

отсюда видно, что корни этого уравненія суть

$$\rho_1 = \frac{1}{a_0(a+b-c-d)^2}$$

и

$$\rho_2 = \frac{1}{a_0(a+c-b-d)^2}.$$

Соотвѣтственныя этимъ корнямъ выраженія многочлена $\Phi(x)$ суть $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x_1)$.

Такимъ образомъ, при $K = 0$ сумма

$$F(x) + \rho R(x)$$

обращается въ полный квадратъ при двухъ значеніяхъ ρ.

РЕЦЕНЗІИ.

С. И. Шохоръ-Троцкій. *Геометрія на задачахъ. Книга для учителей: а) начальныхъ школъ съ продолжительнымъ курсомъ; б) низшихъ и среднихъ классовъ средне-учебныхъ заведеній; в) профессіональныхъ школъ и курсовъ, и т. п.* Москва 1908 г. Цѣна 2 руб.

Курсъ основанъ на методическихъ упражненіяхъ въ геометрическомъ черченіи. Доказательства теоремъ вводятся по мѣрѣ возникновенія потребности въ нихъ у учащихся.

Курсъ этотъ принадлежитъ къ математической серіи книгъ для современной школы; цѣль изданія такихъ книгъ—способствовать осуществленію реформы школьнаго математическаго образованія въ Россіи, пойти навстрѣчу давно уже сознаваемой многими учителями потребности въ измѣненіи курса математики въ школахъ разныхъ типовъ. Необходимость этого измѣненія вполнѣ сознана американской и западно-европейской школами. Основныя требованія новаго направленія въ учебномъ дѣлѣ сводятся къ сближенію учебнаго матеріала съ жизнью, къ согласованію его съ положеніями психологіи возраста учащихся и съ основными идеями и принципами истиннаго знанія; это направленіе отрицательно относится къ преклоненію передъ отвлеченно-діалектическими и схоластическими методами обработки учебнаго математическаго матеріала.

„Геометрія на задачахъ" Шохоръ-Троцкаго содержитъ въ себѣ полный курсъ геометріи, отличающійся отъ господствовавшаго въ школѣ до настоящаго времени въ слѣдующихъ отношеніяхъ: а) въ этомъ основномъ курсѣ господствуютъ не исключительно діалектическія точки зрѣнія; б) главное вниманіе въ немъ обращается на чувственныя пространственныя воспріятія, на непосредственное усмотрѣніе (т. е. на интуицію) и на ясныя геометрическія представленія; в) поэтому доказательства теоремъ появляются не съ первыхъ же шаговъ учащагося въ области геометрическихъ знаній, а по мѣрѣ возникновенія у учащихся истиннаго къ нимъ интереса; г) благодаря основному курсу ученики могутъ пріобрѣсти совершенно сознательные навыки въ геометрическомъ черченіи при рѣшеніи посильныхъ геометрическихъ задачъ на построеніе; д) благодаря ему же они должны выработать себѣ вполнѣ точныя геометрическія понятія, усвоить себѣ доказательства такихъ теоремъ, которыя относятся къ разряду не слишкомъ очевидныхъ истинъ; е) они могутъ добраться также и до нѣкоторыхъ плодотворныхъ геометрическихъ идей и до нѣкоторой потребности въ діалектической систематизаціи всего пріобрѣтеннаго ими геометрическаго знанія; эта потребность, благодаря основному курсу, можетъ и должна возникнуть естественнымъ, а не искусственно навязываемымъ ученику путемъ.

Составлена „Геометрія на задачахъ" согласно съ требованіями „методы цѣлесообразныхъ задачъ", надъ разработкой которой г. Шохоръ-Троцкій работаетъ въ теченіе свыше четверти вѣка. „Геометрія на задачахъ" состоитъ изъ двухъ книгъ: одна (для учителей) содержитъ тѣ упражненія, которыя ученики должны проработать подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, другая (книга для учениковъ)—тѣ упражненія, которыя ученики должны и могутъ проработать болѣе самостоятельно, въ классѣ или на дому. Такое раздѣленіе учебнаго матеріала чрезвычайно упорядочиваетъ и дѣлаетъ планомѣрною всю работу учителя и учениковъ. Въ германскихъ школахъ давно принято въ учебномъ дѣлѣ, при обученіи разнымъ отдѣламъ математики, имѣть два задачника, одинъ для учителей, другой для учениковъ.

По мнѣнію г. Шохоръ-Троцкаго, пользуясь изданными имъ книгами: „Геометрія на задачахъ", можно начинать занятія геометріей съ учащимися 10-ти, 11-ти, 12-ти лѣтняго возраста. Дѣтямъ 10—12-тилѣтняго возраста весьма интересно выработать себѣ естественнымъ путемъ вполнѣ ясныя и вѣрныя пространственныя представленія, пользуясь для этого наглядными пособіями, изготовляемыми ими самими, чертежами, ими выполняемыми съ помощью чертежныхъ инструментовъ на классной доскѣ или въ тетрадяхъ. Именно въ этомъ возрастѣ дѣтямъ интересно, благодаря намѣченной выше работѣ, составить себѣ ясныя представленія о равныхъ и неравныхъ фигурахъ, о фигурахъ подобныхъ, о площадяхъ разныхъ фигуръ и т. п. Именно въ этомъ возрастѣ дѣти съ величайшимъ интересомъ, рвеніемъ и удовольствіемъ и съ величайшею для своего истиннаго образованія пользою выполняютъ чертежи разнаго рода и занимаются изученіемъ свойствъ этихъ чертежей. Потребность мастерить, клеить, рисовать и т. д., съ ростомъ и развитіемъ мыслительныхъ способностей, падаетъ уже къ 14—15-тилѣтнему возрасту. Что касается до интереса къ аксіомамъ, опредѣленіямъ, теоремамъ и т. п., излагаемымъ догматически въ учебникахъ, то дѣтямъ 10—15 лѣтъ еще чуждо пониманіе того, что какія-то „истины" надо принимать безъ доказательствъ, а другія непремѣнно надо доказывать; вообще имъ не свойственно пониманіе діалектическихъ тонкостей. Во Франціи выдающіеся математики—педагоги давно признали, что для пониманія математики въ ея научной формѣ нуженъ извѣстный возрастъ, что въ возрастѣ отъ 10—15 лѣтъ тщетны попытки привить діалектическія точки зрѣнія: это значитъ производить насиліе надъ дѣтской природой.

Замѣтимъ, что „Геометрія на задачахъ" Шохоръ-Троцкаго можетъ, при извѣстныхъ условіяхъ, оказаться полезной также при современномъ строѣ программъ. Учитель можетъ найти въ этой книгѣ планомѣрно расположенный матеріалъ для упражненій, весьма полезныхъ въ качествѣ предварительныхъ или попутныхъ при прохожденіи обычнаго курса геометріи.

Сравнительно съ практикуемыми у насъ курсами въ „Геометріи на задачахъ" есть добавленія: напримѣръ, отведено мѣсто симметріи, рѣшенію треугольниковъ помощью тригонометріи; дано понятіе о начаткахъ проекціоннаго черченія; въ книгѣ для учениковъ приведены нѣкоторыя задачи изъ области „новой" геометріи и т. п.

Насколько у насъ въ Россіи обученіе геометріи въ духѣ идей, проводимыхъ въ книгѣ, составленной г. С. И. Шохоръ-Троцкимъ, найдетъ себѣ успѣшное осуществленіе, покажетъ опытъ и будетъ много зависѣть отъ г.г. руководителей; горячо привѣтствуемъ появленіе труда г. Шохоръ-Троцкаго, съ любовью отнесшагося къ дѣлу обновленія нашей школы, постоянно борющагося противъ сухой, мертвящей учебы, внесшаго струю живой воды въ дѣло обученія элементарной математики и привитію къ ней интереса малымъ симъ.

Гг. С. И. Шохоръ-Троцкій и нѣкоторые другіе русскіе математики-педагоги принадлежатъ къ послѣдователямъ того направленія въ дѣлѣ обученія геометріи, которое въ Западной Европѣ въ числѣ своихъ послѣдователей имѣетъ: покойнаго Джона Тиндаля, Евгенія Дюринга, Джона Перри, Лоджа Клейна, Бореля, Жюля Таннери, Лезана.

Трудъ г. Шохоръ-Троцкаго „Геометрія на задачахъ" составляетъ весьма цѣнный вкладъ въ нашу учебно-математическую литературу; книга эта заслуживаетъ полнаго вниманія г.г. преподавателей математики и вообще лицъ, кому столь дорого учебное дѣло въ Россіи.

Владиміръ Шидловскій.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 43 (5 сер.). Даны точки O, O_1 и O_2. Построить геометрически треугольникъ ABC такъ, чтобы эти точки были центрами описаннаго и двухъ внѣшнихъ вписанныхъ круговъ треугольника ABC.

И. Александровъ (Москва, реальное училище Бажанова).

№ 44 (5 сер.). Показать, что, если цѣлое положительное число N равно суммѣ четырехъ квадратовъ цѣлыхъ чиселъ, то выраженіе

$$N^2 + t^2,$$

гдѣ t—цѣлое число, также равно суммѣ четырехъ квадратовъ.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 45 (5 сер.). Первый и семнадцатый члены нѣкотораго ряда равны 2 и 66; общій членъ u_n является цѣлой линейной функціей отъ n. Возстановить рядъ и показать, что сумма n его членовъ равна $2n^2$.

А. Абиндеръ (Тамбовъ).

№ 46 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0.$$

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 47 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = m^2,$$

$$x + y + u + v = 2n,$$

$$xy + vu = q^2.$$

(Заимств.).

№ 48 (5 сер.). Выпуклая линза, будучи помѣщена въ разстояніи 1 метра отъ прямолинейнаго предмета, перпендикулярнаго къ его главной оптической оси, даетъ дѣйствительное изображеніе длиной въ 5 сантиметровъ; будучи помѣщена на разстояніи 50 сантиметровъ отъ того же предмета, эта линза даетъ дѣйствительное изображеніе, равное $\frac{2}{3}$ предмета. Вычислить фокусное разстояніе линзы и длину предмета.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 853 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC, *зная стороны* AB = c, BC = a *и сумму угловъ* B + 2C = α.

Изъ равенства $A + B + C = \pi$, $B + 2C = \alpha$ вытекаетъ $A - C = \pi - \alpha$. Такимъ образомъ, извѣстна абсолютная величина $|\pi - \alpha| = \beta$ разности угловъ A и C, при чемъ извѣстно, по знаку выраженія $\pi - \alpha$, какой изъ угловъ A или C больше. Пусть $\beta \neq 0$ и пусть, для большей опредѣленности, $A > C$ (предположеніе $A < C$ лишь измѣняетъ обозначенія). Предполагая, что задача рѣшена, дѣлаемъ изъ B на AC радіусомъ $BA = c$ засѣчку D. Обозначая черезъ D внѣшній уголъ при вершинѣ D треугольника CBD и замѣчая, что, вслѣдствіе равенства $BA = BD = c$, $D = A$ (будетъ ли уголъ A тупой, или нѣтъ), имѣемъ $\angle CBD = A - C = \beta$. Отсюда вытекаетъ построеніе для случая $\beta \neq 0$: по сторонамъ $BC = a$, $BD = c$ и $\angle CBD = A - C = \beta$ строимъ треугольникъ CBD и изъ B дѣлаемъ на прямой CD засѣчку A радіусомъ $BD = C$. Треугольникъ ABC есть искомый, и задача всегда возможна, за исключеніемъ случая $a = c$, когда точки A и C совпадаютъ и треугольникъ ABC, сплющиваясь въ отрѣзокъ BC, теряетъ геометрическій смыслъ. Въ случаѣ $\beta = 0$, т. е. $\pi = \alpha$ задача возможна лишь при $a = c$, становясь при томъ неопредѣленной.

В. Пчелкинъ (Дербентъ); *Е. Ханова* (Петербургъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *М. Субботинъ* (Сув. корп.).

НР

№ 865 (4 сер.). *Доказать, что прямыя, соединяющія послѣдовательно центры квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ параллелограмма и примыкающихъ къ нему извнѣ, образуютъ также квадратъ.*

Пусть $ABCD$—нѣкоторый параллелограммъ, O, O', O'', O'''—центры квадратовъ, построенныхъ соотвѣтственно на сторонахъ AB, BC, CD, DA. Пусть черезъ B обозначена вершина остраго угла параллелограмма. Тогда, называя черезъ A и B внутренніе углы параллелограмма при вершинахъ A и B, имѣемъ:

$$\angle OBO' = \angle B + \angle ABO + \angle CBO' = \angle B + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \angle B + \frac{\pi}{2},$$

$$\angle OAO''' = 2\pi - \angle A - \angle OAB - \angle O'''AD = 2\pi - \angle A - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \pi - \angle A + \frac{\pi}{2} = \angle B + \frac{\pi}{2},$$

откуда $\angle OBO' = OAO'''$. Кромѣ того, такъ какъ O—центръ квадрата, построеннаго на AB, то $OB = OA$, и полудіагонали BO' и AO''' квадратовъ, построенныхъ на равныхъ отрѣзкахъ AD и BC, тоже равны. Поэтому треугольники OBO' и OAO''' равны, откуда $OO' = OO'''$, и $\angle BOO' = \angle AOO'''$. Отнимая эти углы отъ одного и того же угла BOO''', имѣемъ $\angle O'''OO' = \angle AOB = \frac{\pi}{2}$. Итакъ, любыя двѣ смежныя стороны четыреугольника $OO'O''O'''$, напримѣръ, OO' и OO'', равны и перпендикулярны, откуда видно, что этотъ четыреугольникъ есть квадратъ.

Я. Шатуновскій (Страсбургъ); *Н. Лавровъ* и *Л. Рязанцевъ* (Кіевъ); *А. Шенкманъ* (Петербургъ); *Л. Барановскій* (Харбинъ); *Д. Павлиновъ* (Каменецъ-Подольскъ); *Ф. Доброхотовъ* (Петербургъ).

№ 875 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^5 - (3 - x)^5 = 243.$$

Полагая $x = 3y$, приводимъ данное уравненіе къ виду $3^5y^5 - 3^5(1-y)^5 = 3^5$, откуда, сокращая на 3^5 и перенося всѣ члены въ первую часть, находимъ:

$$y^5 - 1 + (y - 1)^5 = 0.$$

Разлагая лѣвую часть на множителей, получимъ:

$$(y-1)[(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1)] = 0,$$

или

$$(y-1)(2y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 2) = 0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два, а именно, на уравненіе $y - 1 = 0$, дающее рѣшеніе $y = 1$, $x = 3$, и на другое—возвратное

$$2y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 2 = 0,$$

которое рѣшается обычнымъ способомъ, приводясь при помощи подстановки $y + \frac{1}{y} = z$ къ квадратному уравненію $2z^2 - 3z + 3 = 0$.

А. Турчаниновъ (Одесса); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 876 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^3 = 7x + 3y, \quad y^3 = 7y + 3x.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Рѣшеніе $x=0$, $y=0$ удовлетворяетъ данной системѣ, при чемъ изъ перваго уравненія видно, что изъ $x=0$ вытекаетъ $y=0$. Въ случаѣ $x \neq 0$, полагая

$$y = tx, \qquad (1)$$

приводимъ данную систему къ виду $x^3 = 7x + 3tx$, $t^3x^3 = 7tx + 3x$, или, сокращая на x (что можно сдѣлать, такъ какъ $x \neq 0$),

$$x^2 = 7 + 3t, \qquad (2)$$

$$t^3x^2 = 7t + 3. \qquad (3)$$

Подставляя x^2 изъ уравненія (2) въ (3) и перенося всѣ члены въ первую часть, находимъ:

$$3t^4 + 7t^3 - 7t - 3 = 7t(t^2 - 1) + 3(t^4 - 1) = 0,$$

или, разлагая лѣвую часть на множители,

$$(t^2 - 1)(3t^2 + 7t + 3) = 0,$$

откуда

$$t_1 = 1,\ \ t_2 = -1,\ \ t_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Подставляя эти значенія t въ равенство (2), опредѣляемъ x, а затѣмъ, съ помощью равенства (1), y.

Такимъ образомъ находимъ таблицу всѣхъ рѣшеній данной системы:

$$x=0;\ x = \pm\sqrt{10};\ x = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}},$$

$$y=0;\ y = \pm\sqrt{10};\ y = \mp 2;\ y = \pm\frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}\cdot\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{7 \mp \sqrt{13}}{2}}.$$

Въ этой таблицѣ соотвѣтствующія значенія x и y подписаны одно подъ другимъ, при чемъ во всѣхъ рѣшеніяхъ слѣдуетъ взять одновременно либо верхніе, либо нижніе знаки во всевозможныхъ комбинаціяхъ.

Э. Лейникъ (Москва); *Ф. Доброхотовъ* (Петербургъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его програму и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Гансъ Гёферъ. Профессоръ. *Нефть и ея производныя.* Исторія, физическія и химическія свойства, мѣстонахожденія, происхожденіе, развѣдочныя работы и добываніе нефти. Переводъ со второго нѣмецк. изданія Генр. Крейцера. Съ 17 рисунками и одной таблицей. Изданіе т-ва М О. Вольфъ. Спб. и Москва. 1908. Цѣна 3 р. 50 коп.

И. А. Корзухинъ. Инженеръ. *Механическая обработка (обогащеніе) полезныхъ ископаемыхъ.* Съ 481 рисункомъ. Изданіе т-ва М. О. Вольфъ. С.-Петербургъ. 1908. Цѣна 7 р. 50 коп.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется