№ 442.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVII-го Семестра № 10-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907.

http://vofem.ru

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. Г. **АБРАГАМЪ**, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность - Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI + 272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV + 434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. **АРРЕНІУСЪ**, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII + 250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ,* Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ.* Радій и его лучи—*Дебіернъ,* Радій и радіоактивность—*Рихарцъ,* Электрическія волны—*Слаби,* Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ,* Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV + 144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5. Ф. **АУЭРБАХЪ**, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома,* Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII + 56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. С. **НЬЮКОМЪ**, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.*

XXIV + 285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и съ безпл. нар. библ. и читальни.

7. Г. **ВЕБЕРЪ** и І. **ВЕЛЬШТЕЙНЪ. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана.* Книга I, **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**. гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. 1 р. 50 к., вып. II окончаніе, ц. 2 р.

8. Дж. **ПЕРРИ**, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII + 96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. Р. **ДЕДЕКИНДЪ**, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

10. К. **ШЕЙДЪ**, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова.* 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. Э. **ВИХЕРТЪ**, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

Одесса, Типографія М. Шпенцера, Новосельская 66.

XXXVII Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 442.

Къ современной энергетикѣ.

Профессора В. Оствальда.

*(Продолженіе *).*

Поэтому оказывается очень важнымъ найти надежное средство для распознаванія гипотезъ въ узкомъ смыслѣ этого слова и псевдо-проблемъ. Вышеизложенное, собственно говоря, даетъ уже такой признакъ, по крайней мѣрѣ, для измѣрительныхъ наукъ. Но если въ какую-либо формулу, выражающую тѣ или иныя физическія соотношенія, входятъ выраженія или величины, которыя не поддаются наблюденію или измѣренію, вмѣсто которыхъ мы, такимъ образомъ, не можемъ подставить опредѣленныхъ значеній, найденныхъ изъ опыта, то мы имѣемъ предъ собою выраженіе нѣкоторой *гипотезы.* Ибо задача измѣрительныхъ наукъ заключается въ томъ, чтобы установить взаимную зависимость между величинами, допускающими точное опредѣленіе и измѣреніе,— иными словами, найти математическія формы или функціи, которыя связываютъ эти величины другъ съ другомъ, такъ что мы имѣемъ возможность вычислить одну изъ нихъ, когда остальныя даны. Чтобы такого рода функціональную зависимость эмпирически установить, необходимо имѣть возможность измѣрять всѣ

*) См. №№ 439—440 „Вѣстника".

перемѣнныя или постоянныя величины, которыя фигурируютъ въ такого рода уравненіи. Мы не имѣемъ никакихъ иныхъ средствъ установить, существуетъ ли такого рода функціональная зависимость, принятая нами въ качествѣ прототезы, или нѣтъ. Если поэтому въ такомъ соотношеніи появляется хотя бы только одна величина, не поддающаяся измѣренію, то мы уже совершенно лишены возможности доказать это соотношеніе,—уравненіе такого рода безцѣльно: выражая соотношенія величинъ, которыя намъ совершенно недоступны, оно даетъ намъ свѣдѣнія объ объектѣ, который не имѣетъ никакого вліянія, никакого значенія ни для науки, ни для жизни. Въ самомъ дѣлѣ, недоступность представляетъ собою только другое выраженіе того факта, что отъ этого объекта ничего не зависитъ;если бы что-либо отъ этого объекта зависѣло, то самая эта зависимостъ указывала бы уже путь, слѣдуя которому мы могли бы что-либо объ этомъ объектѣ узнать, онъ сдѣлался бы намъ доступнымъ.

Однако, этотъ рецептъ для раскрытія псевдо-проблемъ относится только къ соотношеніямъ между *измѣримыми* величинами, которыя могутъ быть выражены математическими уравненіями. Но въ послѣднее время математика пришла къ тому, что кромѣ *величинъ* существуютъ еще другіе объекты—болѣе общаго характера, допускающіе математическую разработку. Однако, техника соотвѣтствующихъ вычисленій еще не развита для всеобщаго употребленія. Такимъ образомъ, для общей характеристики понятія о кажущихся проблемахъ мы вынуждены пользоваться исключительно несовершенными средствами нашего языка. Путь къ тому мы находимъ въ указаніи, сдѣланномъ нами выше. Если разрѣшеніе нѣкоторой задачи рѣшительно неспособно что-либо измѣнить въ нашемъ восприятіи фактическихъ соотношеній, то таковая вслѣдствіе этого становится уже кажущейся проблемой, псевдо-проблемой. Рецептъ сводится, такимъ образомъ, къ слѣдующему. Представимъ себѣ, что задача рѣшена, и примемъ какое-либо изъ возможныхъ рѣшеній за правильное, затѣмъ изслѣдуемъ, какія измѣненія это вызоветъ въ нашемъ отношеніи къ внѣшнему міру. Если мы такихъ измѣненій вовсе не найдемъ, то мы имѣемъ дѣло съ кажущейся проблемой.

Чтобы на примѣрѣ познакомиться съ примѣненіемъ этого правила, поставимъ себѣ вопросъ: *имѣла ли вселенная начало во времени или она существовала вѣчно?* Примемъ, скажемъ, что она существовала вѣчно, и спросимъ себя: что измѣнится въ моемъ отношеніи къ міру вслѣдствіе этого познанія? Я нахожу, по крайней мѣрѣ для себя, что не измѣнится рѣшительно ничего, какъ не измѣнится ничего и въ томъ случаѣ, если мы допустимъ, что вселенная имѣла опредѣленное начало. Я вынужденъ, такимъ образомъ, сказать: если бы даже какимъ либо образомъ намъ удалось узнать, какая изъ двухъ возможностей здѣсь имѣетъ мѣсто, то это было бы для насъ совершенно безразлично; мы имѣемъ дѣло съ псевдо-проблемой.

Значеніе такой постановки вопроса выясняется отвѣтомъ на другой вопросъ, поставленный нами выше, на вопросъ о томъ, что мы называемъ *правильнымъ* или *истиннымъ*. Мы отвѣтили: то, что даетъ намъ предсказаніе, оправдывающееся въ дѣйствительности. То, что вообще не ведетъ ни къ какимъ предсказаніямъ, фактически насъ нисколько не интересуетъ, и всякія занятія такими вопросами сами по себѣ безполезны.

Если мы теперь примѣнимъ всѣ эти соображенія къ энергетикѣ, то мы убѣдимся, что постановка энергетическихъ вопросовъ относительно явленій всегда успѣшно оберегаетъ насъ отъ кажущихся проблемъ. Въ настоящее время нужно считать совершенно общепризнаннымъ, что между различными областями физическихъ явленій не существуетъ никакихъ иныхъ общихъ соотношеній, кромѣ энергетическихъ. Это значитъ: что бы ни происходило въ области физики (химическія и физіологическія явленія мы, какъ обыкновенно, относимъ сюда же), мы всегда можемъ установить равенство между исчезнувшими и вновь появившимся видами энергіи. Не существуетъ никакой другой физической величины, которая допускала бы такое общее примѣненіе. Такъ какъ, съ другой стороны, энергія всегда поддается опредѣленію и измѣренію, и всякое утвержденіе, сюда относящееся, всегда относится къ измѣримымъ и къ доступнымъ объектамъ, то при всѣхъ примѣненіяхъ закона сохраненія энергіи мы всегда имѣемъ дѣло съ дѣйствительными, а не съ кажущимися проблемами. Бываютъ случаи, въ которыхъ точное измѣреніе соотвѣтствующихъ видовъ энергіи сопряжено съ существенными затрудненіями, такъ что мы бываемъ иногда вынуждены ограничиваться грубыми приближеніями. Однако, это не подрываетъ общаго принципа. Имѣется также много случаевъ примѣненія этого закона, въ которыхъ не всѣ члены уравненія поддаются измѣренію; такіе случаи нужно разсматривать какъ прототезы; это значитъ: тамъ, гдѣ мы не можемъ провѣрить закона сохраненія энергіи путемъ измѣренія всѣхъ отдѣльныхъ членовъ, мы дѣлаемъ допущенiе, что законъ остается въ силѣ. Но мы при этомъ имѣемъ въ виду подвергнуть это допущенiе провѣркѣ, какъ только мы найдемъ нужныя для этого средства.

Хорошiй примѣръ научнаго успѣха этого рода представляетъ собой измѣренiе физiологическаго развитiя тепла у животныхъ и людей. Первыя измѣренiя, произведенныя Депретцомъ (Despretz) въ первой половинѣ XIX столѣтiя, дали результаты, находившiеся въ противорѣчiи съ господствующими воззрѣнiями; но именно болѣе глубокiя изслѣдованiя этого вопроса привели какъ Роберта Майера, такъ и Гельмгольца къ открытiю закона сохраненiя энергiи. Въ послѣднее уже время средства измѣренiя доведены до такого совершенства, что справедливость закона при физiологическомъ сгоранiи (включая механическую и психическую работу) были подтверждены съ точностью до $^1/_{1000}$. Пока послѣднiя измѣренiя не были произведены, допущенiе справедливости закона сохраненiя энергiи при физiологическомъ сгоранiи представляло собой прототезу, относившуюся къ объектамъ, въ принципѣ допускавшимъ измѣренiе, хотя техническое выполненiе этихъ измѣренiй было настолько затруднено, что къ нимъ нельзя было относиться съ довѣрiемъ; теперь же мы имѣемъ предъ собою научную истину, которую мы можемъ считать таковой съ вѣроятностью ошибки только до $^1/_{1000}$. Что законъ сохраненiя остается правильнымъ и за предѣлами этой погрѣшности—это опять прототеза, ожидающая еще подтвержденiя при дальнѣйшемъ усовершенствованiи нашихъ измѣрительныхъ средствъ. На вопросъ, какимъ образомъ понятiе энергiи при большой его общности можетъ служить для выраженiя безконечнаго многообразiя происходящаго, нужно отвѣтить, что существуетъ большое число различныхъ видовъ энергiи; всѣ эти виды подходятъ подъ указанное выше опредѣленiе относительно характера величины, они имѣютъ существенно положительныя значенiя и удовлетворяютъ закону сохраненiя; но рядомъ съ этимъ они имѣютъ и дополнительные признаки и свойства, которыми и обусловливается ихъ различiе. Такъ, напримѣръ, *теплота* совершенно не имѣетъ двойно-симметрическаго характера *электрической* и *магнитной* энергiи, ибо теплота вполнѣ опредѣляется однимъ числомъ, если указана единица мѣры. Кинетическая энергiя имѣетъ *опредѣленное направленiе* въ пространствѣ, между тѣмъ какъ объемная энергiя проявляется въ каждомъ мѣстѣ и во всѣхъ направленiяхъ, гдѣ только возможно измѣренiе объема. Такъ какъ въ общемъ понятiи энергiи не содержится ничего, что касалось бы соотношенiй въ пространствѣ и во времени, то послѣднія допускаютъ еще болѣе узкія опредѣленія, и возможныя здѣсь различія опредѣляютъ разнообразіе отдѣльныхъ видовъ энергіи.

Этимъ исчерпывается также постоянно повторяемое возраженіе, что число различныхъ видовъ энергіи необычайно велико, а между тѣмъ нужно имѣть въ виду возможность еще неизвѣстныхъ намъ видовъ энергіи. Если энергія представляетъ собою понятіе, пригодное для изображенія явленій, то ея многообразіе необходимо должно соотвѣтствовать многообразію происходящихъ явленій. Въ самомъ дѣлѣ, если наука овладѣваетъ извѣстной совокупностью явленій и характеризуетъ ее, то это сводится къ тому, что мы относимъ многообразію явленій изслѣдуемой области другое схематическое многообразіе символовъ (математическаго или словеснаго характера), въ которыхъ соотвѣтствующая функціональная зависимость находитъ себѣ выраженіе. Насколько велико значеніе такого научнаго символическаго языка, въ какой мѣрѣ онъ даетъ намъ возможность овладѣть научною областью, быть можетъ наиболѣе отчетливо сказывается на химическихъ формулахъ: въ нихъ удалось сконцентрировать значительную часть тѣхъ общихъ выводовъ, которые наукѣ удалось получить въ области химіи. Нельзя поставить химіи въ упрекъ ея 80 элементовъ, такъ какъ она не вольна устанавливать то или иное число ихъ, а вынуждена признавать элементомъ всякое вещество, удовлетворяющее основнымъ опредѣленіямъ. Точно также энергетика не вольна устанавливать по произволу число видовъ энергіи, а должна тщательно регистрировать всѣ наблюдаемые виды и строго устанавливать признаки каждаго отдѣльнаго вида; единство же этого многообразія эмпирически и принципіально устанавливается общимъ закономъ преобразованія.

Дальнѣйшее весьма важное обстоятельство въ этихъ многообразіяхъ заключается въ томъ, что всѣ виды энергіи разлагаются каждый на два фактора съ характерными общими свойствами. Для каждаго вида энергіи можно опредѣлить прежде всего факторъ *интенсивности* или *напряженія*, который не имѣетъ простого характера величины, т. е. онъ не наращается путемъ непосредственнаго сложенія (онъ не обладаетъ слагаемостью), и, во вторыхъ, факторъ *емкости или количества*, который обладаетъ непосредственнымъ свойствомъ слагаемости, который, такимъ образомъ, представляетъ собою величину въ болѣе узкомъ смыслѣ этого слова. Простѣйшій путь къ тому, чтобы составить себѣ представленіе объ этомъ основномъ различіи, заключается въ томъ, чтобы физически соединить два равныхъ значенія соотвѣтствующаго вида энергіи. При такомъ соединеніи два равныхъ напряженія остаются неизмѣнными; между тѣмъ двѣ равныхъ емкости при соединеніи даютъ двойное количество. Если, напримѣръ, мы соединимъ два тѣла одинаковой температуры или одинаковаго электрическаго потенціала, то температура или соотвѣтственно потенціалъ остаются неизмѣнными. Между тѣмъ двѣ одинаковыя массы энтропіи или электрическія массы даютъ при соединеніи двойное количество. Первыя представляютъ собою, такимъ образомъ, напряженія, вторыя—емкости.

Значенія этихъ факторовъ энергіи вводятъ новое многообразіе въ понятіе энергіи, служащее выраженіемъ важныхъ общихъ соотношеній, которыя не охватываются закономъ сохраненія энергіи. Данное количество тепла, напримѣръ, всегда эквивалентно опредѣленному количеству электрической энергіи, какова бы ни была его температура; всякій разъ, какъ мы переводимъ энергію изъ одного вида въ другой, мы получаемъ то же количество. Это указываетъ на независимость закона сохраненія отъ различія напряженій; такая же независимость имѣетъ мѣсто относительно емкости, какъ это слѣдуетъ уже изъ того, что произведеніе обоихъ численныхъ значеній выражаетъ энергію. Но за то степень напряженія имѣетъ рѣшающее значеніе въ вопросѣ, *произойдетъ ли* въ данномъ случаѣ преобразованіе энергіи *и въ какомъ размѣрѣ.* Наиболѣе извѣстны эти соотношенія при тепловомъ процессѣ; извѣстно, что данное количество тепла переходитъ въ другіе виды энергіи только въ томъ случаѣ, если имѣетъ мѣсто разница въ температурѣ. Часть, подвергающаяся преобразованію, опредѣляется отношеніемъ наличной разности температуръ къ абсолютной температурѣ, при которой процессъ протекаетъ. Но и при всѣхъ другихъ видахъ энергіи остается въ силѣ то же предложеніе. Карандашъ, который я держу въ рукѣ, вслѣдствіе движенія въ міровомъ пространствѣ, которое онъ совершаетъ вмѣстѣ съ земнымъ шаромъ, обладаетъ кинетической энергіей, превосходящей во много разъ энергію пушечнаго снаряда; онъ могъ бы, такимъ образомъ, произвести невѣроятное опустошеніе, если бы онъ могъ передать свою кинетическую энергію другимъ тѣламъ. Между тѣмъ это можетъ осуществиться только въ томъ случаѣ, если имѣется разница въ скорости. Вслѣдствіе этого огромная скорость, которую онъ имѣетъ относительно координатной системы солнца, совершенно не проявляется въ земныхъ процессахъ.

Итакъ, первое основное предложеніе объ энергіи или законъ преобразованія энергіи сохраненіемъ численнаго ея значенія устанавливаетъ уравненіе, имѣющее мѣсто въ каждомъ случаѣ, когда одинъ видъ энергіи преобразовывается въ другой; второе же основное предложеніе, регулирующее соотношенія между напряженіями энергіи, отвѣчаетъ на вопросъ, наступаетъ ли преобразованіе энергіи и при какихъ условіяхъ таковое наступаетъ. Такъ такъ два равныхъ напряженія не оказываютъ другъ на друга вліянія (въ дѣйствительности это отсутствіе взаимодѣйствія представляетъ собою опредѣленіе равенства напряженій), то каждое преобразованіе какихъ бы то ни было видовъ энергіи необходимо предполагаетъ различіе тѣхъ или иныхъ напряженій. Такъ какъ, съ другой стороны, все происходящее можетъ быть разсматриваемо, какъ опредѣленнаго рода преобразованіе энергіи, то *всякій процессъ необходимо предполагаетъ наличность нѣкоторой разности въ напряженіяхъ* *). Если такого рода разность имѣется, то размѣръ „происходящаго", т. е. количество преобразованной энергіи пропорціонально разности напряженій, а въ остальномъ зависитъ только отъ наличныхъ видовъ энергіи и ихъ факторовъ. Совокупность этихъ соотношеній выражается вторымъ основнымъ закономъ энергетики, который въ примѣненіи къ теплотѣ былъ открытъ еще въ 1827 г. Сади Карно. Слѣдуя Клаузіусу, можно выразить это второе основное положеніе слѣдующимъ образомъ: *покоющаяся энергія самопроизвольно не преобразовывается*. Подъ покоющейся энергіей здѣсь разумѣется такая, при которой нѣтъ разности напряженій; понужденіе же, вызывающее такого рода преобразованія, заключается въ появленіи разности напряженій въ разсматриваемомъ объектѣ. Болѣе общую форму имѣетъ слѣдующее выраженіе: *чтобы нѣчто происходило, должны существовать некомпенсированныя разности напряженій*, и происходящее пропорціонально этимъ разностямъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

*) Хотя это условіе и необходимое, но оно не достаточно, ибо возможны также „компенсированныя" разности напряженія, при которыхъ никакихъ процессовъ не происходитъ, и эти соотношенія также регулируются закономѣрно; мы не входимъ здѣсь въ ихъ разсмотрѣніе только съ тою цѣлью, чтобы не слишкомъ усложнить изложеніе.

http://vofem.ru

Дидактическое значеніе математики и физики.

Дж. Кастельнуово,

(проф. Римскаго Университета).

ПЕРЕВОДЪ СЪ ИТАЛЬЯНСКАГО

Ю. А. Говсѣева.

I.

Съ весьма давняго времени распространено мнѣніе, что математика дисциплинируетъ и уравновѣшиваетъ умъ, что она лучше всякой другой науки учитъ искусству разсуждать. Но въ хорѣ этихъ похвалъ раздаются подчасъ и противоположные отзывы, и, если даже игнорировать дешевое осужденіе профановъ, все же иногда приходится слышать и отъ серьезныхъ людей, что никто такъ плохо не разсуждаетъ, какъ математикъ за предѣлами своей специальной области.

Можно ли принять безъ возраженій этотъ традиціонный взглядъ? Не слѣдуетъ ли подвергнуть его серьезной критикѣ?

Если бросить общій взглядъ на содержаніе математики и ограничиться лишь методомъ, которымъ она оперируетъ, то надобно будетъ признать, что эта наука представляетъ наилучшую школу дедуктивной логики, такъ какъ является наиболѣе блестящимъ ея примѣненіемъ. Въ такомъ случаѣ поставленный нами вопросъ сведется къ вопросу о дидактическомъ значеніи логики въ тѣсномъ смыслѣ слова.

Безсильная творить что-нибудь заново, логика представляетъ собою удивительный аппаратъ для преобразованія. Изъ нѣсколькихъ посылокъ она развертываетъ цѣлый рядъ неожиданныхъ послѣдствій, столь далекихъ отъ первоначальныхъ предположеній, что ихъ надо считать истиннымъ завоеваніемъ мысли. Конечно, этотъ аппаратъ весьма деликатенъ. Его плодотворность тѣмъ меньше, чѣмъ дальше отъ идеальнаго совершенства вещи, къ которымъ онъ прилагается, чѣмъ болѣе сохраняютъ онѣ грубыхъ, конкретныхъ чертъ, съ какими представляются нашимъ чувствамъ. А если при помощи чистой логики мы преобразуемъ истину, которая намъ не вполнѣ ясна, которая рисуется намъ лишь въ туманныхъ очертаніяхъ, то мы можемъ прійти къ самымъ страннымъ и нелѣпымъ выводамъ, и вмѣсто того, чтобы разсѣять этотъ туманъ, сгустимъ его до такой степени, что потеряемъ возможность отличить въ своемъ выводѣ истину отъ заблужденія.

И въ этомъ нѣтъ ничего удивительнаго. Когда мы говоримъ въ неясныхъ выраженіяхъ о фактѣ, который непосредственно доступенъ нашимъ чувствамъ, мы не подвергаемся опасности дать этимъ неопредѣленнымъ выраженіямъ ошибочное толкованіе, потому что постоянное сравненіе съ дѣйствительностью исключаетъ возможность недоразумѣнія. Но можетъ случиться, что логическое слѣдствіе этого факта не подлежитъ непосредственной опытной провѣркѣ. Гдѣ намъ найти тогда правильное истолкованіе? Гдѣ намъ искать спасенія отъ ошибки? Конечно, не въ логикѣ, такъ какъ это не ея дѣло. И логика нисколько не отвѣтственна за то затрудненіе, въ которомъ мы оказались. Мы пользовались ею тамъ, гдѣ это не было позволено, почему же мы жалуемся, что она привела насъ къ нелѣпости?

Несчастье заключается въ томъ, что чистая логика неприложима къ истинамъ, которыя почерпаются непосредственно изъ нашихъ чувствъ, а только къ абстрактнымъ, символическимъ предложеніямъ, которыя получаются изъ этихъ истинъ посредствомъ предварительной очистки. И если такая дистиллировка чрезвычайно легка въ геометріи, гдѣ мы выполняемъ ее, почти сами не замѣчая того, она значительно труднѣе въ наукахъ положительныхъ и становится весьма тяжелой и ненадежной задачей въ наукахъ моральныхъ. Поэтому чистый математикъ, который тѣмъ не менѣе пожелалъ бы пустить въ ходъ знакомые ему логическіе пріемы въ экономическихъ наукахъ, конечно, оказался бы плохимъ діалектикомъ.

Возможность извлекать изъ опыта и наблюденія рядъ отвлеченныхъ понятій и отношеній и преобразовывать ихъ затѣмъ съ помощью строгаго логическаго разсужденія составляетъ тотъ идеалъ, къ которому всѣ науки стремятся, но котораго достигла въ настоящее время лишь математика (вмѣстѣ съ ея ближайшими приложеніями). И если отъ этого идеала такъ далеки науки, соприкасающіяся съ жизнью, то слѣдуетъ ли отсюда, что мы должны отказаться отъ ихъ изученія? Все же онѣ прогрессируютъ изо дня въ день, благодаря трудамъ многочисленныхъ работниковъ, изъ которыхъ лишь немногіе выдающіеся умѣютъ примирить логическія способности математика съ даромъ наблюденія и отвлеченнаго мышленія, отъ которыхъ математикъ въ значительной мѣрѣ освобожденъ трудами основателей науки.

Этотъ кажущійся контрастъ объясняется очень просто, если вникнуть въ то, какія формы логическаго разсужденія примѣняются въ ежедневной жизни. Дѣло въ томъ, что безукоризненное въ формальномъ отношеніи разсужденіе отнюдь не является единственнымъ и зачастую не бываетъ лучшимъ способомъ достиженія истины. Во многихъ случаяхъ предпочтительно, не довѣряясь непогрѣшимой логикѣ, которая закрываетъ глаза на явленія внѣшняго міра, прибѣгать къ приблизительному разсужденію, послѣдовательные шаги котораго провѣряются фактами, съ цѣлью отдѣлить истину отъ заблужденія.

Между тѣмъ математика (какъ она въ настоящее время преподается въ средней школѣ) относится съ несправедливымъ пренебреженіемъ къ этому первоначальному типу логическаго разсужденія и осуждаетъ, такимъ образомъ, ту единственную форму мышленія, которая свойственна большинству людей.

При такой постановкѣ преподаваніе математики вліяетъ на духъ такъ же, какъ атлетическая гимнастика на тѣло. Если послѣдняя и достигаетъ поразительныхъ результатовъ у отдѣльныхъ индивидуумовъ, то все же она является безполезной или даже вредной тамъ, гдѣ не оказываетъ дѣйствія или гдѣ развиваетъ мышцы, неприспособленныя для потребностей жизни, въ ущербъ органамъ, болѣе важнымъ.

Нелишнимъ будетъ, поэтому, разсмотрѣть, какъ бы слѣдовало видоизмѣнить элементарное преподаваніе точныхъ наукъ для того, чтобы получить всѣ тѣ плодотворные результаты, которые онѣ способны дать для здороваго развитія ума. Постараюсь въ краткихъ чертахъ изложить мои мысли, ограничиваясь геометріей, которая въ этомъ отношеніи, какъ мнѣ кажется, имѣетъ особенно высокія задачи.

Изложеніе конкретнаго геометрическаго вопроса, какъ извѣстно, представляетъ три стадіи. Въ первой стадіи мы замѣняемъ матеріальныя точки, линіи, поверхности разсматриваемой фигуры извѣстными отвлеченными символами, къ которымъ въ точной формѣ (подъ названіемъ постулатовъ) прилагаемъ приблизительныя отношенія, существующія въ дѣйствительности. Во второй стадіи къ этимъ символамъ примѣняются логическіе процессы, съ цѣлью вывести изъ постулатовъ новыя предложенія, болѣе отдаленныя. Въ третьей стадіи эти отвлеченныя предложенія переводятся въ реальные, практическіе результаты, съ цѣлью провѣрить, съ какою степенью приближенія теоретическое предвидѣніе оправдывается на дѣлѣ.

Изъ этихъ трехъ стадій преподаваніе геометріи, при современномъ положеніи дѣла, выдвигаетъ на первый планъ лишь вторую, оставляя въ тѣни первую и третью, которыя, однако, въ философскомъ и дидактическомъ отношеніи имѣютъ большое значеніе.

Это серьезное неудобство, однако, можно весьма легко устранить.

Прежде всего, чтобы показать, какъ совершается переходъ отъ дѣйствительности къ символической схемѣ, слѣдуетъ гораздо чаще, чѣмъ это дѣлается въ настоящее время, прибѣгать къ опыту и интуиціи (которая есть, въ сущности, результатъ безсознательнаго или только воображаемаго опыта). Постулаты классической геометріи, конечно, должны черпаться изъ интуиціи, хотя ихъ экспериментальное происхожденіе настолько неуловимо, что потребовалось болѣе 20 вѣковъ для обнаруженія этого. Но и всѣ первоначальныя предложенія геометріи полезно почерпать изъ наблюденія, и для многихъ изъ нихъ ихъ экспериментальный характеръ будетъ самъ по себѣ ясенъ въ доказательствахъ Евклида, если мы оставимъ свои тщетныя попытки замаскировать его. Доказывая логически то, что очевидно изъ интуиціи, мы причиняемъ двойной вредъ: мы дискредитируемъ, во-первыхъ, логику, въ задачи которой такое доказательство не входитъ, а во-вторыхъ, интуицію, громадное значеніе которой при этомъ отрицается. Говорятъ, конечно, что интуиція можетъ вводить въ заблужденіе. Быть можетъ, оно и такъ, но все же интуиція представляетъ главный, если не единственный, путь къ открытію истины. Или мы должны отказаться отъ истины изъ боязни заблужденія?

Изъ наблюденія, кромѣ того, нужно выводить рядъ понятій, которыя хотя и пріобрѣли съ давнихъ поръ полное право гражданства въ точныхъ наукахъ, но еще не успѣли проникнуть — по крайней мѣрѣ, у насъ, въ Италіи,—въ область элементарной математики. Я имѣю въ виду идею функціи (которая дала бы случай привести многочисленные примѣры изъ физики), методъ графическаго изображенія (записывающіе приборы и т. п.), понятія касательной, периметра и поверхности криволинейной фигуры и т. п., которыя опредѣлялись бы со степенью приближенія, доступною элементарнымъ методамъ.

Когда истина выведена изъ опыта, со всѣми присущими ей матеріальными чертами, преподаватель долженъ показать, какимъ образомъ экспериментальный фактъ можетъ быть сведенъ къ точному символическому предложенію, которое допускаетъ примѣненіе строгаго логическаго разсужденія, съ цѣлью полученія новыхъ результатовъ. Послѣдніе опять-таки нужно сопоставить съ фактами, прибѣгая ли къ спеціальнымъ школьнымъ опытамъ, гдѣ это возможно, или приводя косвенныя подтвержденія въ приложеніяхъ математики (геодезіи, астрономіи и т. д.). Кто считаетъ такую провѣрку излишней, тотъ впадаетъ въ ошибку. Только опытъ можетъ опредѣлить степень приближенія, съ которою отвлеченная теорема воплощается въ реальномъ фактѣ. Бываетъ и такъ, что выводъ болѣе доступенъ экспериментальной провѣркѣ, нежели первоначальная гипотеза, и, такимъ образомъ, изъ подтвержденія вывода мы почерпаемъ косвенное подтвержденіе нашихъ посылокъ.

Существуетъ однако и другое дидактическое соображеніе, которое говоритъ въ пользу постояннаго сопоставленія между абстракціей и дѣйствительностью. Такое сопоставленіе помогаетъ уяснить то понятіе, о которомъ учащіеся имѣютъ весьма смутныя, иной разъ даже мистическія представленія. Я говорю о двухъ различныхъ значеніяхъ, которыя придаются въ теоріи и въ практикѣ термину „точный". Весьма важно внушить ученикамъ, что теоретическая или абсолютная точность есть чисто отвлеченное понятіе, которое не имѣетъ и не можетъ имѣть практическаго приложенія. На практикѣ можно говорить только о практической точности, совмѣстимой съ извѣстною ошибкой, которая стремится къ уменьшенію по мѣрѣ усовершенствованія инструментовъ, но никогда не можетъ исчезнуть совершенно. Въ этихъ видахъ полезно оттѣнить, что теоретически точное построеніе можетъ оказаться *на практикѣ* менѣе точнымъ, нежели приблизительное построеніе. Цѣнность перваго заключается лишь въ томъ, что оно не даетъ мѣста систематическимъ ошибкамъ, помимо тѣхъ, которыя зависятъ отъ употребляемыхъ инструментовъ.

Съ другой стороны, приложенія математики могутъ дать поучительные и интересные примѣры, бросающіе свѣтъ на значеніе науки. Такъ, бѣглый обзоръ способовъ измѣренія дугъ меридіана, высоты горъ, разстоянія между звѣздами дастъ живое доказательство пользы тригонометріи.

Если мы будемъ сообразоваться съ приведенными указаніями и лишимъ элементарную геометрію характера интеллектуальнаго акробатическаго упражненія, не приносящаго никакой практической пользы, то, какъ я твердо вѣрю, намъ удастся соединить двѣ цѣли, которыя, на первый взглядъ, кажутся несовмѣстимыми: во первыхъ, мы поднимемъ дидактическое значеніе математики, способствуя гармоническому развитію различныхъ сторонъ ума, вмѣсто того чтобы жертвовать всѣми въ пользу одной, а во-вторыхъ, мы сдѣлаемъ математику болѣе интересной и доступной, опровергая тотъ предразсудокъ, будто даже элементы этой науки доступны лишь для немногихъ умовъ.

II.

Правила и методы, которые учащіеся усвоятъ въ геометріи, трактуемой въ смыслѣ экспериментальной науки, найдутъ блестящее подтвержденіе въ другой научной области, которая имѣетъ не меньшее воспитательное значеніе, но болѣе доступна современнымъ тенденціямъ. Я говорю о физикѣ, которой приписываю громадную дидактическую цѣнность, если только преподаватель задастся цѣлью не сообщать ученикамъ рядъ энциклопедическихъ знаній, скоро опровергаемыхъ, а освѣщать передъ ними тѣ способы и пути, которыми человѣкъ проникаетъ въ тайны природы.

Критическій духъ, которымъ такъ злоупотребляютъ при преподаваніи математики, повидимому, отсутствуетъ во многихъ курсахъ физики. А между тѣмъ въ умѣренной степени, безъ излишнихъ подробностей и безцѣльнаго педантизма, онъ можетъ принести полезные результаты. Сюда относится, напримѣръ, выясненіе происхожденія многочисленныхъ понятій, встрѣчающихся въ физикѣ. Какія изъ нихъ условны? Какія изъ нихъ гипотезы? Какія изъ нихъ представляютъ собой данныя опыта или результаты логическаго вывода?

Факты, которые изучаетъ физика, доказываются либо опытомъ, либо логическимъ разсужденіемъ.

О дидактической цѣнности физическихъ опытовъ нѣтъ надобности распространяться: это всѣми признается. Здѣсь достаточно будетъ указать, что опытъ тѣмъ краснорѣчивѣе, чѣмъ онъ проще. Для цѣлей преподаванія, гдѣ обыкновенно не требуется точныхъ измѣреній, часто болѣе умѣстенъ грубый опытъ, производимый обыкновенными средствами, нежели тщательное изслѣдованіе при помощи сложныхъ аппаратовъ, гдѣ второстепенныя подробности отвлекаютъ вниманіе учащихся отъ болѣе существенныхъ частей. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ оказаться наиболѣе полезнымъ даже опытъ схематическій, воображаемый, а не осуществляемый, такъ какъ онъ способствуетъ развитію драгоцѣннаго дара научной фантазіи.

Въ особенности же не слѣдуетъ пренебрегать простыми, даже обыденными наблюденіями. Какъ часто сокровища мудрости скрываются въ самой повседневной истинѣ.

Итакъ, значеніе опытовъ само по себѣ ясно, но зато необходимо болѣе подробно остановиться на математическихъ доказательствахъ, употребленіе которыхъ въ элементарныхъ курсахъ физики, не всегда подходящее, рождаетъ въ молодыхъ умахъ самыя превратныя и мистическія представленія о могуществѣ логики.

Здѣсь надо различать два типа логическаго разсужденія.

Первый типъ всецѣло удовлетворяетъ правиламъ дедуктивной логики. При немъ точно устанавливаются всѣ исходныя гипотезы, и строгимъ логическимъ процессомъ получается выводъ, который подвергается затѣмъ экспериментальной провѣркѣ. Въ этихъ случаяхъ обыкновенно говорятъ, что фактъ доказывается разсужденіемъ и подтверждается опытомъ, и этимъ порождаютъ странную иллюзію, будто разсужденіе, основанное на гипотезѣ, не допускающей провѣрки, заслуживаетъ большей вѣры, нежели результатъ тысячи опытовъ. Значеніе математическаго доказательства совершенно иное. Его ближайшая задача, такъ сказать, ретроактивнаго характера, такъ какъ доказательство придаетъ вѣроятность гипотезѣ благодаря экспериментальной провѣркѣ ея слѣдствій. Но послѣдняя предпринимается не для одного только удовлетворенія ученаго, создавшаго гипотезу. Исходя изъ нея, удается доказать цѣлый рядъ истинъ, и, если здѣсь, среди различныхъ доказательствъ, удается выдѣлить общія гипотезы, то мы устанавливаемъ между фактами (въ ихъ абстрактномъ видѣ) логическія отношенія, которыя составляютъ истинное завоеваніе мысли.

Къ несчастью, при тѣхъ средствахъ, которыми располагаетъ элементарная математика, лишь въ немногихъ случаяхъ удается дать строгое доказательство физическихъ истинъ. Въ такихъ случаяхъ учитель говоритъ, что это можно доказать... Но при этомъ онъ забываетъ, что слово „доказать" ничего не обозначаетъ, если не указаны тѣ посылки, изъ которыхъ исходятъ. Въ математикѣ, правда, посылки, часто только подразумѣваются, но это зависитъ отъ того, что относительно постулатовъ этой науки царитъ стройное согласіе. Далеко не такъ въ физикѣ, гдѣ каждая теорія и каждый физикъ-теоретикъ имѣютъ свои гипотезы. Въ виду этого необходимо отчетливо ихъ указывать,—между прочимъ и для того, чтобы избѣжать столь обычнаго у учащихся предразсудка, что логика имѣетъ божественную силу творить изъ ничего.

Но есть и другой типъ разсужденія, который, не смотря на возраженія со стороны адептовъ чистой логики, имѣетъ величайшее значеніе для физики и для всѣхъ положительныхъ наукъ. Рѣчь идетъ о процессахъ, которымъ чужда математическая строгость, и объ этомъ недостаткѣ полезно предупредить учащихся. Опасность, съ которою сопряжено такое неправильное разсужденіе, исключается здѣсь потому, что послѣднее имѣетъ цѣлью не доказать истину, а предвидѣть ее и придумать опытъ, которымъ это предвидѣніе либо подтвердится, либо будетъ опровергнуто. Однимъ словомъ, рѣчь идетъ о томъ методѣ, который носитъ названіе эвристическаго. Изъ различныхъ формъ, которыя можетъ принимать этотъ методъ, достаточно будетъ назвать одинъ, плодотворность котораго хорошо извѣстна, а именно, *разсужденіе по аналогіи,* гдѣ мы распространяемъ на новую теорію результаты, полученные въ предшествующей теоріи, имѣющей къ ней какое-либо отношеніе.

Два различныхъ соображенія показываютъ, какую громадную дидактическую цѣнность имѣетъ эвристическій методъ. Первое и болѣе важное соображеніе заключается въ томъ, что этотъ методъ представляетъ наиболѣе дѣйствительный путь къ достиженію истины, и не только въ положительныхъ наукахъ, но и въ самой математикѣ. Такая творческая способность достаточно говоритъ за него.

Второе соображеніе заключается въ томъ, что этотъ методъ составляетъ единственную форму логическаго процесса, примѣнимую въ повседневной жизни и во всѣхъ знаніяхъ, имѣющихъ къ этой жизни отношеніе. Знакомить съ примѣрами его осторожнаго примѣненія, указывать на его преимущества и недостатки—значитъ сообщать молодымъ умамъ то свойство должнаго равновѣсія, которое наиболѣе необходимо для жизни.

Какова бы ни была форма разсужденія, мы должны стараться всесторонне выяснить тѣ гипотезы, изъ которыхъ мы исходимъ и которыя составляютъ, какъ выражаются, физическую теорію. Если многія теоріи имѣютъ для обученія величайшую важность, такъ какъ позволяютъ связывать разрозненные факты, то надобно сознаться, что другія теоріи, которыя еще не получили стройности и устойчивости, могутъ внести болѣе тьмы, чѣмъ свѣта. Чтобы имѣть въ данномъ случаѣ критерій для выбора, слѣдуетъ всегда имѣть въ виду экономическую роль теоріи. Полезно излагать теорію и держаться ея лишь тогда, когда ея употребленіе (въ тѣхъ границахъ, которыя очерчены элементарнымъ преподаваніемъ) создастъ экономію мысли и памяти.

Не слѣдуетъ скрывать отъ молодежи этого условнаго и временнаго характера каждой теоріи; надо напомнить ученикамъ, что каждая теорія зависитъ отъ всей совокупности гипотезъ, которыя, при современномъ состояніи науки, наиболѣе пригодны для объясненія извѣстныхъ фактовъ и открытія новыхъ. Каждая теорія должна измѣняться въ будущемъ, какъ она измѣнялась до сихъ поръ, и наиболѣе дѣйствительнымъ способомъ оттѣнить эту постоянную эволюцію теорій являются, быть можетъ, экскурсіи въ область исторіи науки. Это покажетъ, что многія теоріи вышли изъ употребленія не столько вслѣдствіе своихъ коренныхъ ошибокъ, сколько потому, что онѣ давали слишкомъ грубыя или слишкомъ антропоморфическія объясненія сравнительно съ тѣми, какія наука способна дать въ настоящее время. Чтобы избѣжать опасныхъ иллюзій и разочарованій, могущихъ привести къ мистицизму или скептицизму, учащіеся должны сознавать, что̀ наука можетъ дать, и чего отъ нея нельзя требовать. Они должны помнить, что величіе науки заключается не въ совершенствѣ, которое недостижимо и не имѣетъ смысла, а въ безграничномъ совершенствованіи.

Выводъ изъ настоящей статьи, уже слишкомъ растянувшейся, явствуетъ самъ собою. Но изъ вышеизложеннаго можно сдѣлать и другое, болѣе широкое заключеніе, выходящее за предѣлы научнаго преподаванія и касающееся всего строя нашей общеобразовательной школы.

Главная задача, которую преподаватель долженъ себѣ поставить, заключается не въ томъ, чтобы дать ученику неудобоваримое и эфемерное знаніе, а въ томъ, чтобы гармонически воспитать различныя стороны его ума, пробуждая дремлющія способности и дисциплинируя существующія. Наибольшія заботы должны быть посвящаемы болѣе благородной способности, а именно, творческой фантазіи, которая зависитъ отъ счастливаго сочетанія интуиціи съ даромъ наблюденія. Нехватитъ времени, чтобы выполнить широкую программу? Что за бѣда! Только тѣ понятія, которыя умъ успѣетъ сохранить, онъ и способенъ вообще воспринять, или—осмѣлюсь сказать—способенъ самъ доставить себѣ.

Самое важное—воздѣлать почву. Природа полна плодотворныхъ зародышей. Если почва хорошо воздѣлана, не заставятъ себя ждать самые роскошные цвѣты.

http://vofem.ru

Задача Мальфатти.

Н. Агрономова.

*(Продолженіе *).*

IV.

1. Оставляемъ всѣ тѣ условія и обозначенія, которыя были введены въ 1 §-ѣ 1 части. Значенія α, β, γ остаются тѣ же, но радіусъ вписаннаго круга уже не принимается равнымъ 1, какъ это было въ послѣднемъ рѣшеніи.

Долгое время предполагали, что задача Мальфатти имѣетъ 1 рѣшеніе. Уже въ приведенныхъ рѣшеніяхъ было замѣтно, что мы не всегда брали два знака при радикалахъ. Отсюда вполнѣ ясно, что мы пренебрегали вторымъ рѣшеніемъ задачи Мальфатти. Но дѣло, собственно, не въ этомъ, и какъ бы мы ни комбинировали знаковъ, мы этимъ путемъ не получили бы всѣхъ рѣшеній задачи.

Для того, чтобы получить, однако, всѣ рѣшенія задачи, нужно предположить, что окружности Мальфатти могутъ касаться не только сторонъ треугольника, но и ихъ продолженій.

При такой постановкѣ задача имѣетъ 32 рѣшенія, распадающихся на 12 случаевъ, которые въ свою очередь могутъ быть разбиты на 6 группъ.

2. *I группа, 1 случай.*

Къ 1 случаю I группы относится тотъ случай, когда три окружности Мальфатти находятся внутри треугольника и касаются его сторонъ, а не продолженій ихъ. Этотъ случай былъ рѣшенъ нами четырьмя различными способами. Но такъ какъ всѣ эти рѣшенія неприложимы или трудно-приложимы къ остальнымъ 31 случаямъ, то мы въ видахъ однообразія рѣшимъ задачу еще однимъ способомъ. Этотъ способъ, наиболѣе простой и изящный, принадлежитъ бельгійскому математику Каталану.

Какъ и въ предшествовавшихъ рѣшеніяхъ, находимъ уравненіе:

$$x\,\mathrm{tg}\alpha + 2\sqrt{xy} + y\,\mathrm{tg}\beta = r(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta). \qquad (M)$$

Рѣшимъ это уравненіе, принимая за неизвѣстное $\sqrt{x}$.

Безъ всякихъ затрудненій находимъ, что

$$\sqrt{x}\sin\alpha + \sqrt{y}\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}} \cdot \sqrt{y\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + r\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}} \sqrt{r\sin\alpha\sin\gamma - y\cos\alpha\cos\gamma}.$$

*) См. №№ 439—440 „Вѣстника“.

http://vofem.ru

Симметричный видъ второго члена относительно α и γ или непосредственное вычисленіе даетъ намъ право утверждать, что

$$\sqrt{z}\sin\gamma+\sqrt{y}\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\sqrt{r\sin\alpha\sin\gamma-y\cos\alpha\cos\gamma}.$$

Отсюда:

$$\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha=\sqrt{z}\sin\gamma+\sqrt{y}\cos\gamma, \tag{22a}$$

а по аналогіи:

$$\sqrt{y}\sin\beta+\sqrt{z}\cos\beta=\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{z}\cos\alpha, \tag{22б}$$

$$\sqrt{z}\sin\gamma+\sqrt{x}\cos\gamma=\sqrt{y}\sin\beta+\sqrt{x}\cos\beta. \tag{22c}$$

Изъ уравненій (22a) и (22б) выводимъ слѣдующее соотношеніе:

$$\sqrt{y}\,(\cos\alpha-\cos\gamma+\sin\beta)=\sqrt{z}\,(\cos\alpha-\cos\beta+\sin\gamma),$$

или

$$\sqrt{y}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{z}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right),$$

или

$$\sqrt{y}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{z}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Круговая перестановка буквъ дастъ еще два равенства:

$$\sqrt{z}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{x}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\sqrt{x}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{y}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Отсюда по вполнѣ яснымъ причинамъ получимъ:

$$\frac{x}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{y}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}=\frac{z}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \tag{23}$$

Обозначимъ знаменатель отношенія черезъ λ и подставимъ въ равенство M значенія x, y, опредѣляемыя изъ отношеній (23). Въ полученномъ выраженіи будутъ находиться λ, r, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Очевидно, что изъ него будетъ вполнѣ возможно опредѣлить λ:

$$\lambda=r\cdot\frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{24}$$

Отношенія (23) и выраженіе (24) даютъ для x, y, z слѣду-

http://vofem.ru

ющія классическія выраженія:

$$
\left.\begin{aligned}
x &= r\cdot\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}\\
y &= r\cdot\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\\
z &= r\cdot\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (25)
$$

Къ этимъ значеніямъ для x, y, z можно привести всѣ полученныя уже значенія для x, y, z.

3. Опредѣлимъ точки касанія B_x, C_y, A_z.

Изъ чертежа видно, что

$$
CA_z = CA'' - A''A_x = \frac{1}{2}\,(CB+OC-OB-AO-OC'+AC') =
$$

$$
= \frac{1}{2}\,(CO-AO-BO+p-r), \text{ ибо}
$$

$$
CA'' = CA_z + A_zA'' = z\operatorname{tg}\gamma + \sqrt{yz} =
$$

$$
= r\left\{\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\,(CA'+A'O+OC) - \frac{1}{2}\,(OB+OA'-A'B) =
$$

$$
= \frac{1}{2}\,(CB+OC-OB).
$$

Обозначая

$$
AO-AB_x = BO-BC_y = CO-CA_x = \frac{1}{2}\,(OA+BO-p+r) = \rho \qquad (26\text{а})
$$

мы получимъ, что

$$
\left.\begin{aligned}
AB_x &= AO-\rho,\\
BC_y &= BO-\rho,\\
CA_z &= CO-\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (26\text{б})
$$

Формулами (26а) и (26б) мы воспользуемся для построенія.

http://vofem.ru

Изъ центра вписаннаго круга O радіусомъ, равнымъ ρ, опишемъ окружности, которыя пересѣкаютъ биссекторы угловъ въ точкахъ f, i, h; изъ вершинъ треугольника A, B, C, какъ изъ центровъ, радіусами Af, Bi, Ch описываемъ окружности, которые засѣкаютъ стороны треугольника въ точкахъ касанія ихъ съ окружностями Мальфатти. (Построеніе Симонса).

Этотъ случай можетъ быть помѣченъ символомъ $\begin{matrix} & A & \\ C & & B \end{matrix}$, который ясно указываетъ, какъ и въ какихъ углахъ расположены окружности Мальфатти.

4. *2 случай.* Положеніе окружностей Мальфатти относительно угловъ и сторонъ столь же симметрично въ этомъ случаѣ, какъ и въ первомъ, но съ той разницей, что окружности могутъ касаться и продолженій сторонъ.

Какъ и въ первомъ случаѣ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x\,\mathrm{tg}\alpha - 2\sqrt{xy} + y\,\mathrm{tg}\beta &= r(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta), \\ z\,\mathrm{tg}\gamma - 2\sqrt{zy} + y\,\mathrm{tg}\beta &= r(\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\beta); \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

для радіусовъ окружностей Мальфатти найдемъ слѣдующія выраженія, пользуясь тѣми же соображеніями, что и въ первомъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\frac{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)}, \\ y &= r\cdot\frac{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)}, \\ z &= r\,\frac{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ и ρ:

$$\rho = \frac{1}{2}\,(AO + BO + CO + p + r). \qquad (29)$$

Построеніе для этого случая вполнѣ аналогично первому случаю.

Изъ точки O, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ ρ, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ биссектрисы въ точкахъ f, i, h.

Отрѣзки AB_x, BC_y, CA_z будутъ равны Af, Bi, Ch.

http://vofem.ru

Положеніе окружностей Мальфатти въ этомъ случаѣ изобразится такъ: $\begin{matrix} B\ C \\ A \end{matrix}$.

5. Между радіусами окружностей Мальфатти 1 и 2 случая существуютъ интересныя соотношенія.

Пусть x, y, z—радіусы окружностей Мальфатти 1-го случая, а x', y', z',—радіусы окружностей Мальфатти 2-го случая. Легко провѣрить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{y'z'}}&=\frac{2}{r}, \\ \frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{z'x'}}&=\frac{2}{r}, \\ \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{x'y'}}&=\frac{2}{r}; \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{x'y'}}+\frac{1}{\sqrt{y'z'}}+\frac{1}{\sqrt{z'x'}}=\frac{6}{r}.$$

Равнымъ образомъ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{yz}}-\frac{1}{\sqrt{y'z'}}&=2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{r}, \\ \frac{1}{\sqrt{zx}}-\frac{1}{\sqrt{z'x'}}&=2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{r}, \\ \frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{\sqrt{x'y'}}&=2\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1}{r}; \end{aligned} \tag{31}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{\sqrt{y'z'}}-\frac{1}{\sqrt{z'x'}}-\frac{1}{\sqrt{x'y'}}=\frac{2}{r}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

Равнымъ образомъ, обозначимъ черезъ ρ вспомогательный кругъ 1 случая, черезъ ρ'—вспомогательный кругъ 2 случая:

$$\rho+\rho'=AO+BO+CO+r.$$

Укажемъ еще причины, побудившія насъ соединить въ одну группу 1-ый и 2-ой случай. Сравнивая значенія x, y, z въ первомъ случаѣ и во второмъ, мы увидимъ, что x можно изобразить такъ:

$$x=r\cdot\frac{\left(1\pm\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1\pm\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)\left(1\pm\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Знакъ $+$ въ этомъ выраженіи соотвѣтствуетъ 1 случаю,

http://vofem.ru

знакъ — соотвѣтствуетъ второму случаю.

Можно замѣтить нѣкоторое сходство и для ρ, а именно, ρ опредѣляется такой общей формулой:

$$\rho = \frac{1}{2}(AO + BO + CO \mp p + r),$$

гдѣ знакъ — взять для перваго случая, знакъ + для второго случая.

Вотъ эта аналогія побудила насъ соединить эти два случая въ одну группу.

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 883 (4 сер.). Показать, что задача „построить треугольникъ ABC, зная $AB=c$, $BC=a$ и сумму угловъ $A+2C=\alpha$", вообще неразрѣшима при помощи циркуля и линейки.

И. Александровъ (Москва).

№ 884 (4 сер.). Найдены суммы кубовъ, пятыхъ и седьмыхъ степеней n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда; затѣмъ найденныя суммы сложены, и въ результатѣ получено число a. Вычислить n, если дано a. Рѣшить задачу въ частномъ случаѣ, полагая $a=2628$.

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 885 (4 сер.). Доказать, что число

$$2^{41}-1$$

дѣлится на 83.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 886 (4 сер.). Пусть O и H суть соотвѣтственно центръ круга описаннаго и ортоцентръ треугольника ABC. Доказать, что всякая точка M окружности, имѣющей діаметромъ прямую OH, удовлетворяетъ равенству

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{MO}^2 = 3R^2,$$

гдѣ R—радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC.

(Заимств.) *Д. Е.*

№ 887 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 + 8a(x+a) + 1 = 0.$$

(Заимств.).

№ 888 (4 сер.). Мѣдный полый шаръ покрытъ равномѣрной позолотой. Онъ вѣситъ въ воздухѣ p граммовъ, а въ водѣ q граммовъ. Прогрѣтый въ парахъ кипящей воды и опущенный въ водяной калориметръ, состоящій изъ мѣднаго сосуда вѣсомъ въ m граммовъ, наполненнаго M граммами воды, онъ повышаетъ температуру прибора съ t^0 до Θ^0. Зная удѣльные вѣса d_1 и d_2 и удѣльныя теплоемкости c_1 и c_2 мѣди и золота, опредѣлить толщину золотой оболочки шара.

Л. Ямпольскій (Одесса)

http://vofem.ru

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 751 (4 сер.). *Въ полукругъ вписана ломанная, состоящая изъ трехъ сторонъ* a_p a_q, a_r, *которыя суть соотвѣтственно стороны правильныхъ многоугольниковъ о* p, q, r *сторонахъ. Опредѣлить численныя значенія* p, q, r.

Хорды a_p, a_q, a_r стягиваютъ при центрѣ соотвѣтственно углы $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{2\pi}{q}$, $\frac{2\pi}{r}$, сумма которыхъ, по условію, равна π, т. е. $\frac{2\pi}{p}+\frac{2\pi}{q}+\frac{2\pi}{r}=\pi$, откуда

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2} \quad (1)$$

Итакъ, задача сводится къ рѣшенію уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Предположеніе $p>6$, $q>6$, $r>6$ (одновременно) невозможно, такъ какъ тогда оказалось бы: $\frac{1}{p}<\frac{1}{6}$, $\frac{1}{q}<\frac{1}{6}$, $\frac{1}{r}<\frac{1}{6}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, что противорѣчитъ равенству (1). Слѣдовательно, одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, p (вслѣдствіе симметричности уравненія (1) относительно p, q, r все равно, какое) равно 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Но предположенія $p=1$, 2 невозможны, такъ какъ тогда мы имѣли бы $\frac{1}{q}+$ $+\frac{1}{r}\leq 0$. При $p=3$ находимъ [см. (1)]: $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{6}$ (2), откуда видно, что нельзя предположить одновременно $q>12$ и $r>12$, такъ какъ отсюда вытекаетъ $\frac{1}{q}<\frac{1}{12}$, $\frac{1}{r}<\frac{1}{12}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, что противорѣчитъ равенству (2). Поэтому одно изъ неизвѣстныхъ q, r, напримѣръ, q не болѣе 12, т. е. имѣетъ мѣсто одно изъ равенствъ $q=1$, 2, . . . , 7, 8, 9, 10, 11, 12; но изъ этихъ вообще возможныхъ цѣлыхъ положительныхъ значеній q лишь значеніямъ $q=7$, 8, 9, 10, 12 отвѣчаютъ [см. (2)] цѣлыя положительныя значенія r, а именно: $r=42$, 24, 18, 15, 12. Итакъ, полагая одно изъ неизвѣстныхъ равнымъ 3, приходимъ къ пяти рѣшеніямъ:

$$p,\ q,\ r=\left\{\begin{array}{ccccc} 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 12 \\ 42, & 24 & 18, & 15, & 12 \end{array}\right. \quad (3)$$

(соотвѣтствующія значенія p, q, r расположены въ вертикаляхъ таблицы). Подобнымъ же образомъ, полагая въ равенствѣ (1) $p=4$, получимъ: $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{4}$ (4), откуда видно, что q и r не могутъ быть одновременно больше 8, а потому одно изъ чиселъ q и r, напримѣръ q, имѣетъ одно изъ значеній $q=1$, 2, . . . 5, 6, 7, 8, изъ которыхъ значеніямъ 5, 6, 8 [см. (4)] дѣйствительно отвѣчаютъ цѣлыя положительныя значенія r, а именно $r=20$, 12, 8. Такимъ образомъ приходимъ къ тремъ новымъ рѣшеніямъ:

$$p,\ q,\ r=\left\{\begin{array}{ccc} 4, & 4, & 4 \\ 5, & 6, & 8 \\ 20, & 12, & 8 \end{array}\right. \quad (5).$$

Полагая $p=5$, находимъ [см. (1)]: $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{10}$ (6), откуда видно, что

http://vofem.ru

нельзя одновременно положить $q > 6$, $r > 6$, такъ какъ тогда мы имѣли бы $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} < \frac{3}{10}$, что [см. (6)] невозможно, а потому q (или r) $= 1, 2, 3, 4, 5$ или 6; изъ этихъ значенiй q лишь значенiямъ $q=4$, 5 отвѣчаютъ [см. (6)] цѣлыя положительныя значенiя r, а именно $r=20$, 10. Такимъ образомъ, при $p=5$ приходимъ лишь къ одному новому рѣшенiю $p, q, r=5, 5, 10$ (7), такъ какъ другое, т. е. $p, q, r=5, 4, 20$, уже найдено въ таблицѣ (5). Наконецъ, полагая $p=6$, находимъ $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{3}$ (8), откуда видно, что одно изъ чиселъ q, r, напримѣръ q, не болѣе 6, т. е. имѣетъ мѣсто одно изъ предположенiй $q=1, 2, \ldots 4, 5, 6$. Изъ этихъ значенiй q лишь значенiямъ $q=4$, 6 отвѣчаютъ [см. (8)] цѣлыя положительныя значенiя r, а именно: $r=12$, 6, откуда вытекаетъ еще одно новое рѣшенiе: $p, q, r=6, 6, 6$ (9) [рѣшенiе $p, q, r = 6, 4, 12$ уже получено въ таблицѣ (5)]. Итакъ, таблицы (3), (5), (7), (9) даютъ всѣ искомыя значенiя p, q, r.

Г. Оганянцъ (Ялта); *В. Булыгинъ*; *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 762 (4 сер.). *Показать справедливость равенства*

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{R}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{R}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{R}^2-\mathfrak{a}^2)(\mathfrak{R}^2-\mathfrak{b}^2)(\mathfrak{R}^2-\mathfrak{c}^2),$$

гдѣ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *суть соотвѣтственно половины сторонъ правильныхъ многоугольниковъ о трехъ, семи и сорока двухъ сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ радiуса* $\mathfrak{R}$.

Стороны $a_3=2a$, $a_7=2b$, $a_{42}=2c$ (1) правильныхъ многоугольниковъ о 3, 7 и 42 сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ радiуса R, стягиваютъ при центрѣ этого круга соотвѣтственно углы, равные $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{42}$, сумма которыхъ измѣряется дугой $\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{7}+\frac{2}{42}\right)=\pi$, равной полуокружности. Поэтому отрѣзки a_3, a_7, a_{42} и $2R$ образуютъ четыреугольникъ, вписанный въ кругъ радiуса R, при чемъ возможны три различныя послѣдовательности сторонъ: $a_3, a_7, a_{42}, 2R$; $a_7, a_{42}, a_3, 2R$; $a_{42}, a_3, a_7, 2R$ (2). Примѣнимъ къ первому изъ этихъ четыреугольниковъ теорему Птоломея; тогда, обозначая его стороны черезъ $AB=a_3$, $BC=a_7$, $CD=a_{42}$, $AD=2R$, имѣемъ:

$$2R.a_7 + a_3.a_{42} = AC.BD \quad (3).$$

Такъ какъ AD—дiаметръ круга, то $\angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{2}$, а потому $BD=\sqrt{(2R)^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4R^2-a_3^2}$, $AC=\sqrt{(2R)^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{4R^2-a_{42}^2}$. Слѣдовательно, равенство (3) можно записать въ видѣ $2R.a_7 + a_3.a_{42} = \sqrt{4R^2-a_3^2}\,.\,\sqrt{4R^2-a_{42}^2}$, или [см. (1)] $4Rb+4ac=4\sqrt{R^2-a^2}\,.\,\sqrt{R^2-c^2}$, откуда $Rb+ac=\sqrt{R^2-a^2}\,.\,\sqrt{R^2-c^2}$ (4). Примѣняя такiя же разсужденiя къ двумъ четыреугольникамъ съ другой послѣдовательностью сторонъ [см. (2)], получимъ равенства:

$$Ra+bc=\sqrt{R^2-b^2}\cdot\sqrt{R^2-c^2} \quad (5), \quad Rc+ab=\sqrt{R^2-a^2}\cdot\sqrt{R^2-b^2} \quad (6).$$

Перемноживъ равенства (4), (5), (6), получимъ:

$$(Ra+bc)(Rb+ac)(Rc+ab)=(R^2-a^2)(R^2-b^2)(R^2-c^2).$$

Формула эта вѣрна, какъ это видно изъ ея вывода, для всякихъ трехъ правильныхъ вписанныхъ въ общiй кругъ многоугольниковъ, три стороны которыхъ $2a$, $2b$, $2c$ укладываются послѣдовательно въ полуокружности; эти три многоугольника могутъ быть выбраны десятью способами [см. рѣшенiе задачи № 751 (4 сер.)].

Г. Лебедевъ (Обоянь); *Н. С.* (Одесса); *Э. Лейнъкъ* (Рига).

№ 753 (4 сер.). ***Построить отрѣзокъ наименьшей длины, раздѣляющій данный треугольникъ*** ABC ***на двѣ равновеликія части.***

(Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica*).

Пусть искомый отрѣзокъ встрѣчаетъ двѣ стороны треугольника, напримѣръ, AB и AC соотвѣтственно въ точкахъ P и Q. Вводя обозначенія $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $PQ=x$, $AQ=y$, $AP=z$ и замѣчая, что площадь треугольника APQ равна половинѣ площади ABC, имѣемъ:

$$\frac{yz}{bc}=\frac{1}{2}, \text{ откуда } yz=\frac{bc}{2} \quad (1) \text{ и}$$

$$x^2=y^2+z^2-2yz\cos A=(y+z)^2-2yz(1+\cos A),$$

$$\text{или [см. (1)] } x^2=(y+z)^2-bc(1+\cos A) \quad (2).$$

Изъ равенства (2) слѣдуетъ, что x^2, а вмѣстѣ съ тѣмъ и x достигаетъ наименьшаго значенія одновременно съ суммой $y+z$; а такъ какъ произведеніе yz остается [см. (1)] постояннымъ, то эта сумма достигаетъ minimum'а, по извѣстной теоремѣ, при $y=z$, откуда [см. (1)]:

$$y^2=\frac{bc}{2}, \quad y=z=\sqrt{\frac{bc}{2}} \quad (3).$$

При выводѣ равенства (3) было сдѣлано произвольное предположеніе, что искомый отрѣзокъ PQ лэжитъ противъ угла A. Чтобы узнать, какой изъ трехъ отрѣзковъ, противолежащихъ одному изъ угловъ A, B, C, представляетъ искомый minimum, проведемъ высоту AD равнобедреннаго треугольника PAQ; тогда, согласно съ условіемъ, $\frac{PQ.AD}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}=\frac{S}{2}$, гдѣ S — площадь треугольника ABC, т. е. $x^2.\cot\frac{A}{2}=2S$, откуда $x^2=2S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ (4). Построивъ аналогичные минимальные отрѣзки x' и x'', противолежащіе угламъ B и C, получимъ $x'^2=2S\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $x''^2=2S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, откуда слѣдуетъ [см. (4)], что дѣйствительный *minimum* отвѣчаетъ наименьшему изъ угловъ A, B, C, если углы неравны, а вообще каждому изъ угловъ, который не болѣе двухъ другихъ. Однако надо рѣшить еще одинъ важный вопросъ: отрѣзокъ PQ можетъ дать искомое рѣшеніе только тогда, если его концы лежатъ соотвѣтственно между A и B, A и C. Но это условіе соблюдается, если уголъ A не болѣе каждаго изъ угловъ B и C; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $a\leqslant b$, $a\leqslant c$, а потому $b<a+c\leqslant 2c$, откуда $\frac{b}{2}<c$, $\frac{bc}{2}<c^2$, $\sqrt{\frac{bc}{2}}<c$, т. е. [см. (3)] $AP<AB$; также выводится, что $AQ<AC$. Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что для построенія искомаго отрѣзка надо [см. (3)] на сторонахъ наименьшаго (или небольшаго каждаго изъ двухъ другихъ) угла (напр., A) отложить отрѣзки AP и AQ, равные среднему пропорціональному между одной и половиной другой изъ сторонъ, заключающихъ уголъ A. Отрѣзокъ PQ есть искомый. Задача имѣетъ одно, два и три рѣшенія соотвѣтственно случаямъ разносторонняго, равнобедреннаго и равносторонняго треугольника.

Г. Оганянцъ (Ялта); *В. Булыгинъ*.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

http://vofem.ru

Отъ Физическаго Отдѣленія

Русск. Физ.-Хим. Общества при Императорскомъ С.П.Б. Университетѣ.

Физическое отдѣленіе съ 1907 г. издаетъ свой отдѣльный журналъ:

ЖУРНАЛЪ Р. Ф.-Х. О. ФИЗИЧЕСКІЙ ОТДѢЛЪ

Подобно предыдущимъ **тридцати восьми** годамъ XXXIX-ый томъ журнала Физическаго Отдѣленія будетъ состоять изъ двухъ частей:

Первая часть заключаетъ въ себѣ оригинальныя статьи русскихъ физиковъ и протоколы засѣданій Ф. О.

Вторая часть состоитъ изъ обзоровъ, преимущественно по новѣйшимъ вопросамъ физики, рефератовъ, библіографіи и статей, посвященныхъ вопросамъ лабораторной критики.

Первый шагъ преобразованія второй части, разчитываемой для широкихъ круговъ публики, былъ уже сдѣланъ въ Физ. Отдѣлѣ Ж. Р. Ф.-Х. О. за 1906 г. *). Въ этомъ начинаніи Физ. Отдѣленія принимаютъ участіе:

К. К. Баумгартъ, проф. И. И Боргманъ, пр.-доц. Н. А. Булгаковъ, пр.-доц. Б. П. Вейнбергъ, проф. Н. А. Гезехусъ, проф. А. Л. Корольковъ, В. Я. Курбатовъ, В. К. Лебединскій, пр.-доц В. В. Лермантовъ, С. О. Майзель, Д. С. Рождественскій, проф. О. Д. Хвольсонъ, А. А. Шапошниковъ, И. С. Щегляевъ и др.

Подписаная цѣна на „Физическій Отдѣлъ“ Ж. Р. Ф.-Х. О. (**обѣ части**) **5 руб. въ годъ** съ доставкой и пересылкой.

Въ видахъ большаго распространенія физическихъ знаній Физическое Отдѣленіе постановило открыть съ 1907 г. отдѣльную подписку на **вторую часть** своего журнала, выпускаемую въ свѣтъ подъ названіемъ

ВОПРОСЫ ФИЗИКИ

„Вопросы Физики“ будутъ выходить 10 разъ въ годъ выпусками приблизительно по 2 листа каждый. Подписная цѣна **2 рубля въ годъ** съ доставкой и пересылкой.

Цѣна отдѣльнаго выпуска 30 коп.

Редакторъ ***В. К. Лебединскій.***

Подписка на оба изданія принимается казначеемъ Физическаго Отдѣленія **Аполлономъ Павловичемъ Аѳанасьевымъ.**

Адресъ редакціи: С.-Петербургъ, Университетъ, Физическій Институтъ.

---

*) „Обзоры по Физикѣ за 1906 г.“ изданы двумя отдѣльными выпусками по 75 коп. каждый.

http://vofem.ru

XX г. изд. XX г. изд.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый, подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., г род. уч., учит. инст. и семинарій; Главнымъ Управл. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; №№ 1 — 48 **одобре** Уч. Ком. при Св. Синодѣ для дух. семин. и училищъ.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригин. и переводн. статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященн вопросамъ преподаванія математики и физики. Научн. хроника. Разн. извѣстія. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія зада съ фамил. рѣшившихъ. Упражн. для учениковъ. Библіограф. отдѣлъ: обзоръ иностран. журналовъ; замѣтки и реценз о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются въ такой мѣрѣ популярно, въ какой это возможно безъ ущерба для научн. стороны дѣла. Стат посвящ. педагог. вопросамъ, имѣютъ цѣлью обмѣнъ мнѣній преподавателей по различн. вопросамъ преподаванія элеме тарной мат. и физики. Въ отдѣлѣ „Науч. хроника" помѣщ. рефераты о важнѣйшихъ научн. работахъ, отчеты о съѣздах конгрессахъ и т. п. Въ отдѣлѣ „Разныя извѣстія" помѣщаются свѣдѣнія о текущихъ событіяхъ въ жизни различн. уч и учебн. заведеній. Задачи дѣлятся на двѣ категоріи: болѣе легкія, доступн. хорошему ученику, и болѣе трудныя, т бующія бо́льшей подготовки. Отъ времени до времени предлагаются задачи и темы на премію.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ:

Подписная цѣна съ пересылкой за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ у щіеся **при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи** платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается р срочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Отдѣльные номера текущаго семестра по 30 коп., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. Семестры XVI и XXIII распроданы.

Пробный номеръ высылается безплатно по первому требованію.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики". **Городской адресъ:** Елисаветинская, 4

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**