№№ 419—420.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXV-го Семестра №№ 11—12-й.

ОДЕССА.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

1906.

XXXV Сем. №№ 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№№ 419—420.

Содержаніе: О числахъ, произведеніе которыхъ равняется суммѣ ихъ квадратовъ. *Н. Флорова.* — Объ электронахъ. *Проф. W. Wien'a.* Перев. *I. Л.*— Рецензіи: Проф. Шустеръ „Популярныя лекціи по низшей и высшей математикѣ". *А.* — Е. Ефремовъ. Новая геометрія треугольника. *А.* — Задачи для учащихся, №№ 761—766 (4 сер.).—Рѣшенія задачъ, №№ 655, 656, 657. — Поправки. — Содержаніе „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" за XXXV семестръ. — Объявленія.

О ЧИСЛАХЪ,

произведеніе которыхъ равняется суммѣ ихъ квадратовъ.

П. С. Флорова.

(Рѣшеніе задачи профессора Ермакова).

Въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики" за 1906 годъ профессоръ Василій Петровичъ Ермаковъ помѣстилъ рядъ задачъ объ отысканіи цѣлыхъ чиселъ, произведеніе которыхъ равнялось бы суммѣ ихъ квадратовъ.

Въ настоящей замѣткѣ излагается задача г. Ермакова, которая заключается въ рѣшеніи уравненія съ k неизвѣстными:

$$x^2+y^2+z^2+\dots+u^2+v^2=xyz\dots uv$$

въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, неравныхъ нулю.

Покажемъ, какъ можно найти наименьшія числа, удовлетворяющія этому уравненію, и какъ по наименьшему рѣшенію можно найти безчисленное множество прочихъ рѣшеній уравненія.

При этомъ мы будемъ предполагать, что $k\geqq 3$, потому что уравненіе

$$x^2+y^2=xy,$$

которое соотвѣтствуетъ допущенію $k=2$ и которому можно дать видъ:

$$1=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq 2$$

очевидно не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ.

И такъ, пусть $k\geqq 3$. Расположимъ искомыя числа въ порядкѣ убыванія:

$$x\geqq y\geqq z\ \ldots\ \geqq u\geqq v.$$

Тогда

$$z^2+\ldots+u^2+v^2<(k-2)z^2.$$

Введя обозначенія

$$z^2+\ldots+u^2+v^2=\alpha$$

$$z\ \ldots\ uv=\beta,$$

получимъ:

$$\alpha\leqq(k-2)z^2 \text{ и } x^2+y^2+\alpha=\beta xy.$$

Найдемъ предѣлы между которыми заключается β.

Такъ какъ

$$\beta=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{\alpha}{xy} \text{ и } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2,$$

то ясно, что $\beta\geqq 3$.

Опредѣливъ x, получимъ:

$$x=\frac{\beta y-\sqrt{\beta^2y^2-4y^2-4\alpha}}{2}.$$

Отсюда видно, что число y должно удовлетворять условію

$$(\beta^2-4)y^2\geqq 4\alpha.$$

Передъ радикаломъ удержанъ знакъ минусъ, согласно предположенію, что x принадлежитъ къ системѣ наименьшихъ искомыхъ чиселъ.

Такъ какъ $x\geqq y$, то

$$\frac{\beta y-\sqrt{\beta^2y^2-4y^2-4\alpha}}{2}\geqq y.$$

Разрѣшивъ это неравенство, получимъ:

$$(\beta-2)y^2\leqq\alpha.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$z^2\leqq y^2 \quad\text{и}\quad \alpha\leqq(k-2)z^2,$$

будемъ имѣть:

$$(\beta-2)z^2\leqq(\beta-2)y^2\leqq\alpha\leqq(k-2)z^2;$$

откуда $\beta\leqq k$.

Такимъ образомъ, предѣлы, между которыми заключается β, таковы:

$$3\leqq\beta\leqq k.$$

Выведенныхъ формулъ достаточно для отысканія наименьшихъ рѣшеній.

Отысканіе производится слѣдующимъ образомъ. Сообщаютъ числу β одно изъ его значеній: $3, 4, 5, \ldots k$.

Разлагаютъ избранное значеніе β на $k-2$ множителей. Нѣкоторые изъ множителей могутъ быть равны единицѣ. Сумма квадратовъ этихъ множителей опредѣлитъ α. Большій изъ множителей есть z, и онъ не можетъ быть единицею, такъ въ противномъ случаѣ было бы $\beta=1$. Если β первоначальное число, то z имѣетъ единственное значеніе $z=\beta$, а числа меньшія z суть единицы. Избранное значеніе для $z \geqq 2$ можетъ служить низшимъ предѣломъ для y. Вообще же y найдется по неравенству:

$$\frac{4\alpha}{\beta^2-4} \leqq y^2 \leqq \frac{\alpha}{\beta-2},$$

а x опредѣлится по уравненію.

Разсмотримъ частные случаи $k=3$ и $k=4$.

При $k=3$ сразу находимъ:

$$\beta=3; \quad z=3; \quad \alpha=9; \quad y=3; \quad x=3.$$

Слѣдовательно, наименьшія рѣшенія уравненія

$$x^2+y^2+z^2=xyz$$

суть:

$$x=y=z=3.$$

Пусть $k=4$. Если $\beta=3$, то

$$z=3 \quad \alpha=1^2+3^2 \text{ и } y=3,$$

но соотвѣтствующаго цѣлаго значенія для x не оказывается.

Если $\beta=4$, то возможны два случая:

$$z=4, \quad \alpha=1^2+4^2$$

и

$$z=2, \quad \alpha=2^2+2^2.$$

Для перваго случая соотвѣтствующихъ значеній y и x нѣтъ; для второго находимъ $y=2$ и $x=2$.

Такимъ образомъ, наименьшія рѣшенія уравненія

$$x^2+y^2+z^2+u^2=xyzu$$

суть:

$$x=y=z=u=2.$$

Мы видимъ, что $\beta=k$ при $k=3$ и $k=4$.

Докажемъ, что это единственные случаи, для которыхъ $\beta=k$.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $\beta=k$ въ неравенствѣ

$$(\beta-2)z^2 \leqq (\beta-2)y^2 \leqq \alpha < (k-2)z^2,$$

найдемъ:

$$\alpha=(k-2)z^2 \text{ *)};$$

---

*) Отсюда слѣдуетъ, что въ лѣвой части равенства $z^2+\ldots+u^2+v^2=\alpha$ всѣ слагаемыя равны между собою.

и вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть

$$\beta = z^{k-2} \quad \text{или} \quad k = z^{k-2}.$$

Это уравненіе удовлетворяется только въ двухъ случаяхъ:

$$k = 3, \quad z = 3 \quad \text{и} \quad k = 4, \quad z = 2.$$

Слѣдовательно, если $k \geqq 5$, то $\beta \leqq k - 1$. Это замѣчаніе облегчитъ нашу работу по изслѣдованію случаевъ $k=5$ и $k=6$.

Пусть $k = 5$ и $\beta = 3$.

Тогда

$$\alpha = 1^2 + 1^2 + 3^2, \quad y = 3, \quad x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Отсюда видно, что искомыя числа будутъ:

$$k = 5, \quad x = 4, \quad y = 3, \quad z = 3, \quad u = 1, \quad v = 1.$$

При $\beta = 4$ другой системы наименьшихъ рѣшеній не оказывается.

Изучимъ теперь случай $k = 6$.

Если $\beta = 3$, то

$$\alpha = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2, \quad y = 3, \quad x^2 - 9x + 21 = 0.$$

Это уравненіе не имѣетъ цѣлаго корня.

Если $\beta = 4$, то возможны два случая:

$$\alpha = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$$

и

$$\alpha = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2.$$

Первый изъ нихъ не даетъ соотвѣтствующаго значенія для y, а во второмъ получаемъ:

$$y = 2 \quad \text{и} \quad x^2 - 8x + 14 = 0.$$

Но это уравненіе тоже не имѣетъ цѣлаго корня.

Если $\beta = 5$, то

$$\alpha = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$$

и соотвѣтствующаго цѣлаго значенія для y не отыскивается. Такимъ образомъ, убѣждаемся, что не существуетъ такихъ шести цѣлыхъ чиселъ, произведеніе которыхъ равнялось бы суммѣ ихъ квадратовъ. Для облегченія производства дальнѣйшей работы, выведемъ подготовительныя формулы съ цѣлью воздержаться отъ безполезныхъ испытаній и дать перечень такихъ совмѣстныхъ значеній β и z, которыя только и должны быть испытаны.

Разложимъ β на первоначальные множители, неравные единицѣ, и назовемъ сумму ихъ показателей черезъ r. Такъ же поступимъ съ z и назовемъ черезъ j сумму показателей первоначальныхъ множителей, неравныхъ единицѣ, входящихъ въ составъ z.

Получимъ $\beta > z.z^{r-j}$.

Затѣмъ составимъ выраженіе

$$z^2+(r-j)z^2+k-r+j-3$$

и сравнимъ его съ α, которая есть сумма квадратовъ множителей, входящихъ въ составъ β, включая въ число множителей единицу столько разъ, сколько потребуется, чтобы число слагаемыхъ было $k-2$. Очевидно, что

$$\alpha < z^2+(r-j)z^2+k-r+j-3.$$

Разность между суммою показателей β и суммою показателей r назовемъ черезъ i. Тогда

$$r-j=i, \quad \beta > z.2^i,$$

$$\alpha < (i+1)z^2+k-i+3;$$

при чемъ i можетъ имѣть слѣдующія значенія:

$$i=0, \quad 1, \quad 2 \ldots r-1.$$

Обратимся теперь къ неравенству

$$(\beta-2)z^2 < \alpha.$$

Замѣнивъ въ немъ α найденнымъ выше значеніемъ, получимъ:

$$(\beta-2)z^2 < (i+1)z^2+k-i-3.$$

Откуда

$$z^2 < y^2 < \frac{\alpha}{\beta-2} < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}.$$

При выводѣ этой формулы намъ пришлось дѣлить неравенство на $\beta-i-3$. Этотъ дѣлитель никогда не можетъ быть отрицательнымъ, потому что $\beta \geqq 3$. Въ двухъ случаяхъ онъ обращается въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$\beta-i-3=0,$$

то будемъ имѣть:

$$i=0, \quad \beta=3, \quad z=3$$

$$i=1, \quad \beta=4, \quad z=2.$$

Ограничимъ размѣры нашего изслѣдованія какимъ нибудь предѣломъ и выберемъ его такъ, чтобы i легко опредѣлялось. Удобнѣйшимъ предѣломъ оказывается степень двухъ. Пусть же

$$k \leqq 2^\rho.$$

Было доказано, что если

$$k \geqq 5, \text{ то } \beta \leqq k-1 \text{ или } \beta \leqq 2^\rho-1.$$

Это значитъ, что r сумма показателей β удовлетворяетъ условію

$$r \leqq \rho-1,$$

а i разность между суммою показателей β и z удовлетворяетъ условію

$$i \leqq \rho-2.$$

Такъ какъ наибольшее значеніе k есть 2^{ϱ}, а наименьшее значеніе z есть 2, то въ неравенство

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}$$

можно поставить 2^{ϱ} на мѣсто k и 2 на мѣсто z. Получимъ

$$\beta < \frac{2^{\varrho}+3i+9}{4}.$$

Замѣнивъ здѣсь i черезъ $\rho-2$, будемъ имѣть:

$$\beta < \frac{2^{\varrho}+3\rho+3}{4}.$$

Легко убѣдиться, что при $\rho > 3$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$2^{\varrho}+3\rho+3 < 3.2^{\varrho-1}+5.$$

Отсюда приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

$$\beta \leqq 3.2^{\varrho-3}+1,\quad r \leqq \rho-2,\quad i \leqq \rho-3.$$

Обратимся опять къ неравенству

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}$$

и, руководствуясь соотношеніями

$$k \leqq 2^{\varrho},\qquad \beta \geqq 2^i z,$$

замѣнимъ въ немъ k черезъ 2^{ϱ} и β черезъ $2^i z$. Получимъ:

$$(2^i z-i-3)z^2 < 2^{\varrho}-i-3.$$

Эта формула рѣшаетъ задачу. Ею надо пользоваться слѣдующимъ образомъ. Сообщивъ числу i послѣдовательно значенія ряда

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \rho-3,$$

гдѣ $\rho > 3$, мы откроемъ всѣ искомыя цѣлыя значенія z. Зная z и соотвѣтствующее i можно возстановить β. Это будетъ произведеніе z на i первоначальныхъ, равныхъ или неравныхъ, множителей, изъ которыхъ ни одинъ не превосходитъ z и каждый больше единицы. Найденныя совмѣстныя значенія β и z должны быть проконтролированы посредствомъ неравенства

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}.$$

Числа, выдержавшія контроль, подлежатъ дальнѣйшему испытанію, а не выдержавшія контроля должны быть отброшены.

Очевидно, что значенія β и z, проистекшія отъ допущенія

$$\beta - i - 3 = 0,$$

въ контролѣ не нуждаются.

Примѣнимъ изложенный способъ отысканія совмѣстныхъ значеній β и z къ изученію группы:

$$k = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16.$$

Здѣсь $\rho=4$, а потому i имѣетъ только два значенія:

$$i = 0, \quad i = 1.$$

Общая формула даетъ

$$(2^i z - i - 3)z^2 < 2^4 - i - 3.$$

При $i = 0$ получимъ:

$$(z-3)z^2 < 13.$$

Отсюда $z=2$ и $z=3$. Но $z=2$ удержать нельзя, такъ какъ при $i=0$ должно быть $\beta=z=2$, а между тѣмъ $\beta \geqq 3$. Слѣдовательно

$$z=3 \text{ и } \beta=3.$$

При $i=1$ будемъ имѣть:

$$(z-2)z^2 < 6$$

и, слѣдовательно,

$$z=2, \quad \beta=4.$$

Такимъ образомъ, для рѣшенія задачи надо разсмотрѣть только два случая:

$$\beta=4 \quad z=2 \quad \alpha=k+4$$
$$\beta=3 \quad z=3 \quad \alpha=k+6.$$

При опредѣленіи y надо принять въ соображеніе предѣлы, между которыми заключается k, именно $z \leqq k \leqq 16$; получимъ:

$$\beta=4 \quad z=2 \quad y=2 \quad x=4-\sqrt{8-k}$$
$$\beta=4 \quad z=2 \quad y=3 \quad x=6-\sqrt{23-k}$$
$$\beta=3 \quad z=3 \quad y=4 \quad x=6-\sqrt{14-k}.$$

Отсюда, оставаясь въ намѣченныхъ предѣлахъ изслѣдованія, заключаемъ, что задача Ермакова рѣшается для слѣдующихъ значеній k:

$$k=7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 14.$$

При составленіи таблицы рѣшеній мы выпишемъ только числа, большія единицы, а единицы будемъ подразумѣвать. Получимъ:

$k=7$	$x=3$	$y=2$	$z=2$	$u=2$
$k=8$	$x=4$	$y=2$	$z=2$	$u=2$
$k=10$	$x=4$	$y=4$	$z=3$	
$k=13$	$x=5$	$y=4$	$z=3$	
$k=14$	$x=3$	$y=3$	$z=2$	$u=2$
$k=14$	$x=6$	$y=4$	$z=3.$	

Произведенный анализъ показываетъ, что задача Ермакова не рѣшается, если

$$k=9,\quad 11,\quad 12,\quad 15,\quad 16.$$

Изложенный пріемъ рѣшенія задачи Ермакова можно представить въ другомъ видѣ. Неравенство

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}$$

доставляетъ

$$\beta < i+3+\frac{k-i-3}{z^2}.$$

На основаніи соотношеній:

$$i \leqq \rho-3,\qquad k \leqq 2^\rho$$

получимъ отсюда:

$$\beta < \rho + \frac{2^\rho-\rho}{z^2}.$$

Эта формула, въ которой $\rho > 3$, рѣшаетъ задачу.

При ея употребленіи надо помнить, что z есть дѣлитель β и притомъ такой, котораго не можетъ превзойти ни одинъ изъ первоначальныхъ множителей, входящихъ въ составъ β. Вспомнивъ это и положивъ въ предыдущей формулѣ $z=2$, мы отыщемъ всѣ числа вида:

$$\beta = z.2^{r_1},\qquad z=2,$$

подлежащія испытанію.

При $z=3$ найдемъ числа вида:

$$\beta = z.3^{r_1}2^{r_2},\qquad z=3.$$

При $z=4$ получимъ числа вида:

$$\beta = z.3^{r_1}2^{r_2},\qquad z=4.$$

При $z=5$ будемъ имѣть числа вида:

$$\beta = z.5^{r_1}3^{r_2}2^{r_3},\qquad z=5.$$

Потомъ надо полагать $z=6$, $z=7$ и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока будутъ перебраны всѣ значенія z, удовлетворяющія неравенству:

$$z^2 \leqq \frac{k-\rho}{z-\rho}.$$

Дальнѣйшихъ значеній z брать не придется, потому что, если бы мы взяли

$$z^2 > \frac{k-\rho}{\varepsilon-\rho},$$

то получили бы

$$\frac{k-\rho}{z-\rho} < z^2 < \frac{k-\rho}{\beta-\rho}$$

или $\beta < z$, что нелѣпо.

Найденныя указаннымъ пріемомъ совмѣстныя значенія β и z должны быть проконтролированы при помощи неравенства

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3}.$$

Примѣнимъ изложенный способъ къ изученію случая

$$\rho=5, \quad 2^4 < k \leqq 2^5.$$

Формула

$$\beta < \rho + \frac{k-\rho}{z^2} \quad \text{или} \quad \beta < 5 + \frac{27}{z^2}$$

послѣдовательно даетъ:

$$z=2 \quad \beta=4 \qquad z=2 \quad \beta=8$$

$$z=3 \quad \beta=3 \qquad z=3 \quad \beta=6$$

$$z=4 \quad \beta=4 \qquad z=5 \quad \beta=5.$$

Проконтролировавъ эти комбинаціи посредствомъ формулы:

$$z^2 < \frac{k-i-3}{\beta-i-3} \quad \text{или} \quad z < \frac{29-i}{\beta-i-3},$$

увидимъ, что числа $z=5$ и $\beta=5$ не выдерживаютъ контроля и должны быть отброшены. Оставшіеся пять случаевъ распадаются на слѣдующія семь:

$$z=2 \quad \beta=4 \quad \alpha=k+4 \quad y=3 \quad x=6-\sqrt{23-k}$$

$$z=2 \quad \beta=4 \quad \alpha=k+4 \quad y=4 \quad x=8-\sqrt{44-k}$$

$$z=2 \quad \beta=8 \quad \alpha=k+7 \quad y=2 \quad x=8-\sqrt{53-k}$$

$$z=3 \quad \beta=3 \quad \alpha=k+6 \quad y=5 \quad x=\frac{15-\sqrt{101-4k}}{2}$$

$$z=3 \quad \beta=3 \quad \alpha=k+6 \quad y=6 \quad x=9-\sqrt{39-k}$$

$$z=3 \quad \beta=6 \quad \alpha=k+9 \quad y=3 \quad x=9-\sqrt{63-k}$$

$$z=4 \quad \beta=4 \quad \alpha=k+13 \quad y=4 \quad x=8-\sqrt{35-k}.$$

Эти формулы показываютъ, что задача г. Ермакова рѣшается въ десяти случаяхъ:

$$k=17 \quad x=2 \quad y=2 \quad z=2 \quad u=2 \quad v=2$$
$$k=19 \quad x=5 \quad y=5 \quad z=3$$
$$k=19 \quad x=4 \quad y=3 \quad z=2 \quad u=2$$
$$k=19 \quad x=4 \quad y=4 \quad z=4$$
$$k=22 \quad x=5 \quad y=3 \quad z=2 \quad u=2$$
$$k=23 \quad x=6 \quad y=3 \quad z=2 \quad u=2$$
$$k=23 \quad x=6 \quad y=5 \quad z=3$$
$$k=25 \quad x=7 \quad y=5 \quad z=3$$
$$k=26 \quad x=5 \quad y=4 \quad z=4$$
$$k=27 \quad x=3 \quad y=3 \quad z=3 \quad u=2$$
$$k=28 \quad x=4 \quad y=4 \quad z=2 \quad u=2$$
$$k=28 \quad x=3 \quad y=2 \quad z=2 \quad u=2 \quad v=2$$
$$k=30 \quad x=6 \quad y=6 \quad z=3$$
$$k=31 \quad x=6 \quad y=4 \quad z=4$$

и не рѣшаются въ шести случаяхъ:

$$k=18, \quad 20, \quad 21, \quad 24, \quad 29, \quad 32.$$

Наконецъ изучимъ группу:

$$\rho=6, \quad 2^5<k\leqq 2^6.$$

Тутъ придется разсмотрѣть восемь уравненій:

$$z=2 \quad \beta=4 \quad \alpha=k+4 \quad k=4xy-x^2-y^2-4$$
$$z=2 \quad \beta=8 \quad \alpha=k+7 \quad k=8xy-x^2-y^2-7$$
$$z=2 \quad \beta=16 \quad \alpha=k+10 \quad k=16xy-x^2-y^2-10$$
$$z=3 \quad \beta=3 \quad \alpha=k+6 \quad k=3xy-x^2-y^2-6$$
$$z=3 \quad \beta=6 \quad \alpha=k+9 \quad k=6xy-x^2-y^2-9$$
$$z=3 \quad \beta=9 \quad \alpha=k+14 \quad k=9xy-x^2-y^2-14$$
$$z=4 \quad \beta=4 \quad \alpha=k+13 \quad k=4xy-x^2-y^2-13$$
$$z=5 \quad \beta=5 \quad \alpha=k+22 \quad k=5xy-x^2-y^2-22.$$

Для облегченія предстоящихъ вычисленій должно опредѣлить напередъ всѣ тѣ совмѣстныя значенія x и y, какія только и могутъ быть приписаны этимъ перемѣннымъ при условіи, что k остается въ намѣченныхъ предѣлахъ изслѣдованія. Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Сначала, по извѣстному намъ пріему, опредѣлимъ y. Затѣмъ замѣнимъ y найденнымъ числомъ и поставимъ на мѣсто k послѣдовательно 33 и 64. Найдемъ два квадратныхъ неравенства для опредѣленія x при каждомъ отдѣльномъ значеніи y. Могутъ встрѣтиться такіе случаи, въ которыхъ два различныя значенія x, соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же значеніямъ z, β и y, будутъ приводить къ одинаковымъ значеніямъ k. Въ этихъ случаяхъ изъ двухъ значеній x надо удержать только меньшее. Въ результатѣ окажется, что написаннымъ выше восьми уравненіямъ будутъ соотвѣтствовать слѣдующія восемь системъ совмѣстныхъ значеній x и y, по которымъ и должно быть вычислено k:

$$8 \geqq x \geqq 5, \quad y = 4 \text{ или } 7 \geqq x \geqq 5, \quad y = 5$$

$$8 \geqq x \geqq 4, \quad y = 2 \text{ или } 4 \geqq x \geqq 3, \quad y = 3$$

$$x = 2, \quad y = 2;$$

$$9 \geqq x \geqq 7, \quad y = 6 \text{ или } 10 \geqq x \geqq 7, \quad y = 7 \text{ или } x = 8, \quad y = 8$$

$$9 \geqq x \geqq 4, \quad y = 3 \text{ или } x = 4, \quad y = 4;$$

$$x = 3, \quad y = 3$$

$$8 \geqq x \geqq 7, \quad y = 4 \text{ или } 10 \geqq x \geqq 5, \quad y = 5 \text{ или } y = 6, \quad y = 6,$$

$$x = 5, \quad y = 5.$$

Произведя вычисленіе удостовѣримся, что задача Ермакова не рѣшается въ слѣдующихъ одиннадцати случаяхъ:

$$k = 33, \ 36, \ 41, \ 42, \ 45, \ 48, \ 50, \ 51, \ 56, \ 57, \ 60;$$

а въ прочихъ двадцати одномъ случаѣ имѣетъ рѣшенія, показанныя въ таблицѣ, гдѣ для каждаго k даны числа x, y, z и значенія $\frac{\beta}{z}$, произведенія прочихъ чиселъ, входящихъ въ систему наименьшихъ рѣшеній.

Въ графѣ подъ литерой E обозначено число единицъ, принадлежащихъ системѣ:

k	x	y	z	$\frac{\beta}{z}$	E	k	x	y	z	$\frac{\beta}{z}$	E
34	7	4	4	1	31	49	8	7	3	1	46
35	5	4	2	2	31	52	7	2	2	4	47
35	7	6	3	1	32	53	8	2	2	4	48
35	8	4	4	1	32	53	5	5	5	1	50
37	4	2	2	4	32	53	9	7	3	1	50
37	5	5	4	1	34	53	7	5	4	1	50
38	4	3	3	2	34	54	6	3	3	2	50
38	8	6	3	1	35	55	4	4	3	2	51
39	9	6	3	1	36	55	6	5	2	2	51
40	6	4	2	2	36	55	10	7	3	1	5
43	7	4	2	2	39	58	8	8	3	1	55
43	7	7	3	1	40	58	8	5	4	1	55
44	5	2	2	4	39	59	7	3	3	2	55
44	8	4	2	2	40	59	6	6	4	1	56
46	2	2	2	8	40	61	9	5	4	1	58
46	5	5	2	2	42	62	8	3	3	2	58
46	6	5	4	1	43	62	7	5	2	2	58
47	3	3	2	4	42	62	10	5	4	1	59
47	5	3	3	2	43	63	9	3	3	2	59
49	6	2	2	4	44	64	4	3	2	4	59
49	3	3	3	3	45						

Отыскавъ наименьшія рѣшенія уравненія съ k неизвѣстными, можно найти сколько угодно его рѣшеній. Изъ системы наименьшихъ рѣшеній возьмемъ два какихъ нибудь числа t_0 и t_1 и сумму квадратовъ всѣхъ остальныхъ обозначимъ черезъ α, а произведеніе ихъ черезъ β.

Уравненіе, подлежащее рѣшенію, приметъ видъ:

$$\alpha + t_n^2 + t_{n+1}^2 = \beta t_n t_{n+1}$$

и при $n=0$ будетъ тождественно имѣть мѣсто. Для отысканія t_n при всякомъ n перемѣнимъ n на $n+1$. Получимъ:

$$\alpha + t_{n+1}^2 + t_{n+2}^2 = \beta t_{n+1} t_{n+2}.$$

Это значитъ, что квадратное уравненіе

$$\alpha + t_{n+1}^2 + S^2 = \beta t_{n+1} S$$

имѣетъ два корня:

$$S = t_n \quad \text{и} \quad S = t_{n+2}.$$

Слѣдовательно,

$$t_n + t_{n+2} = \beta t_{n+1}, \quad t_n t_{n+2} = \alpha + t_{n+1}^2.$$

Для рѣшенія этихъ уравненій положимъ

$$t_n = p\omega_1{}^n + q\omega_2{}^n,$$

гдѣ p, q, ω_1 и ω_2 суть числа, независящія отъ n и подлежащія опредѣленію. Чтобы опредѣлить p и q, сдѣлаемъ $n=0$ и $n=1$. Получимъ:

$$p + q = t_0, \quad p\omega_1 + q\omega_2 = t_1.$$

Откуда

$$p = \frac{t_1 - t_0\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}, \quad q = \frac{t_0\omega_1 - t_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Для опредѣленія ω_1 и ω_2 поставимъ въ уравненіе

$$t_{n+2} - \beta t_{n+1} + t_n = 0$$

на мѣсто t_n, t_{n+1} и t_{n+2} ихъ значенія:

$$t_n = p\omega^n + q\omega_2{}^n$$

$$t_{n+1} = p\omega_1{}^{n+1} + q\omega_2{}^{n+1}$$

$$t_{n+2} = p\omega_1{}^{n+2} + q\omega_2{}^{n+2}.$$

Получимъ:

$$p\omega_1{}^n(\omega_1{}^2 - \beta\omega_1 + 1) + q\omega_2{}^n(\omega_2{}^2 - \beta\omega_2 + 1) = 0.$$

Это уравненіе мы обратимъ въ тождество, если потребуемъ, чтобы ω_1 и ω_2 были корнями уравненія

$$\omega^2 - \beta\omega + 1 = 0,$$

при чемъ

$$\omega_1 + \omega_2 = \beta \text{ и } \omega_1\omega_2 = 1.$$

Теперь остается убѣдиться, что для найденныхъ значеній t_n, t_{n+1} и t_{n+2} уравненіе

$$t_n t_{n+2} - t_{n+1}^2 - \alpha = 0$$

обращается въ тождество. Сдѣлавъ подстановку, получимъ:

$$pq(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)(\omega_1\omega_2)^n - 2pq(\omega_1\omega_2)^{n+1} - \alpha = 0.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$\omega_1\omega_2 = 1 \text{ и } \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = \beta^2 - 2,$$

найдемъ:

$$(\beta^2 - 4)pq - \alpha = 0.$$

Поставивъ сюда на мѣсто pq его значеніе

$$pq = \frac{(t_1 - t_0\omega_2)(t_0\omega_1 - t_1)}{(\omega_1 - \omega_2)^2}$$

или
$$pq = \frac{\beta t_0 t_1 - t_0^2 - t_1^2}{\beta^2 - 4},$$

будемъ имѣть:

$$\alpha + t_0^2 + t_1^2 = \beta t_0 t_1.$$

А это есть тождество.

И такъ, слѣдовательно

$$t_n = \frac{t_1 - t_0\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\,\omega_1^n + \frac{t_0\omega_1 - t_1}{\omega_1 - \omega_2}\,\omega_2^n.$$

Легко удостовѣриться, что въ этой формулѣ можно разумѣть подъ n не только положительныя, но и отрицательныя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣнивъ n на $-n$ и замѣтивъ, что

$$\omega_1^{-n} = \omega_2^n \quad \text{и} \quad \omega_2^{-n} = \omega_1^n,$$

получимъ формулу:

$$t_{-n} = \frac{t_0\omega_1 - t_1}{\omega_1 - \omega_2}\,\omega_1^n + \frac{t_1 - t_0\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\,\omega_2^n,$$

посредствомъ которой легко провѣряется равенство

$$\alpha + t_{-n}^2 + t_{-n-1}^n = \beta t_{-n} t_{-n-1}.$$

Предположимъ, что $\omega_1 > \omega_2$, а именно:

$$\omega_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \text{ и } \omega_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}.$$

Въ такомъ случаѣ можно удостовѣриться, что t_n есть положительно число.

Имѣемъ:
$$(t_1 - t_0\omega_2)(t_0\omega_1 - t_1) = \alpha.$$

Отсюда слѣдуетъ, что множители

$$t_1 - t_0\omega_2 \quad \text{и} \quad t_0\omega_2 - t_1$$

имѣютъ одинаковые знаки. Легко убѣдиться, что оба эти множители больше нуля, такъ какъ въ противномъ случаѣ было бы:

$$t_1 < t_0\omega_2, \quad t_0\omega_1 < t_1.$$

Перемноживъ это, получили бы

$$\omega_1 < \omega_2;$$

а это противорѣчитъ допущенію.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$t_1 - t_0\omega_2 > 0 \quad \text{и} \quad t_0\omega_1 - t_1 > 0;$$

или:

$$t_0\omega_2 < t_1 < t_0\omega_1 \quad \text{и} \quad t_1\omega_2 < t_0 < t_1\omega_1,$$

при чемъ очевидно, что эти неравенства не налагаютъ никакихъ обязательствъ на t_0 и t_1.

Окончательныя формулы могутъ быть представлены въ видѣ:

$$t_n = \frac{\omega_1{}^n + \omega_2{}^n}{\omega_1 - \omega_2} t_1 - \frac{\omega^{n-1} - \omega_2{}^{n-1}}{\omega_1 - \omega_2} t_0$$

$$t_{-n} = \frac{\omega_1{}^{n+1} - \omega_2{}^{n+1}}{\omega_1 - \omega_2} t_0 - \frac{\omega_1{}^n - \omega_2{}^n}{\omega_1 - \omega_2} t_1.$$

Это цѣлыя числа, такъ какъ они выражаются черезъ суммы одинаковыхъ степеней ω_1 и ω_2.

Теперь мы получимъ цѣлую серію рѣшеній соотвѣтствующихъ избраннымъ α и β.

Пользуясь этою серіею можно составить сколько угодно новыхъ α и β и получить сколько угодно новыхъ серій чиселъ, произведеніе которыхъ равно суммѣ ихъ квадратовъ.

Мы видѣли выше, что нѣкоторыя уравненія г. Ермакова допускаютъ двѣ, три и четыре системы наименьшихъ рѣшеній. Вопросъ о томъ, самостоятельна ли каждая система, или, напротивъ, одну изъ нихъ можно привести къ другой посредствомъ указанныхъ сейчасъ преобразованій, остается открытымъ.

ОБЪ ЭЛЕКТРОНАХЪ.

W. Wien. (Würzburg).

(Докладъ, читанный на послѣднемъ съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей въ Меранѣ, въ краткомъ изложеніи самого автора).

Перев. I. Л.

Гипотеза объ электронахъ, т. е. о чрезвычайно маленькихъ электрическихъ частичкахъ, въ настоящее время играетъ видную роль въ физикѣ; первоначально она возникла при наблюденіи явленій, возникающихъ при химическихъ разложеніяхъ съ помощью гальваническаго тока. Подобно всѣмъ химическимъ разложеніямъ, и эти послѣдния въ количественномъ отношеніи обнаруживаютъ пропорціональность атомнымъ вѣсамъ. При этомъ оказывалось постоянно, что отъ опредѣленнаго количества электричества отдѣлялись части, пропорціональныя атомнымъ вѣсамъ. При дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, главнымъ образомъ благодаря работамъ Кольрауша и Гитторфа, принята была слѣдующая гипотеза: при разложеніи гальваническимъ токомъ, атомы или молекулы, снабженные положительнымъ или отрицательнымъ электрическимъ зарядомъ, стремятся, подъ вліяніемъ электрическихъ силъ, къ мѣсту входа или выхода гальваническаго тока, и тамъ выдѣляются.

Химическіе атомы или молекулы въ заряженномъ состояніи называются іонами. Гельмгольцъ расширилъ эту теорію, распространивъ на область электричества химическое представленіе о количественныхъ элементахъ вещества, какъ объ атомахъ, и принявъ допущеніе, что всякій атомъ надѣленъ опредѣленнымъ элементарнымъ количествомъ электричества. Эти допущенія въ началѣ были сдѣланы для объясненія процессовъ электролиза; вскорѣ же они получили примѣненіе для согласованія электромагнитной теоріи свѣта съ явленіемъ дисперсіи свѣта при преломленіи. Согласно этой теоріи, опирающейся преимущественно на опыты Герца, свѣтъ представляетъ собою чрезвычайно быстрыя колебанія электрическихъ и магнитныхъ силъ, которыя именно, благодаря чрезвычайной скорости, съ которой онѣ мѣняютъ свое направленіе, ускользаютъ отъ всѣхъ нашихъ обычныхъ электрическихъ аппаратовъ. Эти то силы приводятъ въ колебанія іоны, имѣющіеся во всякомъ тѣлѣ, и благодаря ихъ обратному дѣйствію и возникаетъ дисперсія.

Послѣ открытія рёнтгеновскихъ лучей, начали ближе изучать явленія, сопровождающія ихъ возникновеніе; тогда скоро обнаружилось, что катодные лучи, которые, попадая на нѣкоторыя тѣла, порождаютъ рёнтгеновы лучи, представляютъ собою отрицательно заряженныя частички, которыя движутся съ неимовѣрно большой скоростью. Затѣмъ, дальнѣйшія изслѣдованія показали, что явленія электролиза постольку аналогичны явленіямъ, происходящимъ въ гейслеровыхъ или рёнтгеновыхъ трубкахъ, гдѣ возникаютъ катодные лучи, поскольку и здѣсь положительныя и отрицательныя частички, подъ вліяніемъ электрическихъ силъ, мчатся съ различной скоростью въ противоположныхъ направленіяхъ.

Количественныя измѣренія обнаружили, что массы положительныхъ частичекъ таковы же, какъ и массы іоновъ, т е. равны по величинѣ массамъ химическихъ атомовъ. Но отрицательно заряженныя частички, а именно частички катодныхъ лучей, обнаружили гораздо меньшую массу, а именно: масса этихъ частичекъ оказалась въ тысячу разъ меньшей, даже чѣмъ масса водороднаго атома. Еще раньше изъ вычисленія приходилось заключать, что требуется нѣкоторая затрата работы, чтобы привести въ движеніе электрическую частицу, другими словами, что движущая сила встрѣчаетъ сопротивленіе. Послѣднее подобно тому сопротивленію, которое всякое матеріальное тѣло проявляетъ по отношенію къ движущей силѣ. Здѣсь оно называется сопротивленіемъ инерціи. Такъ какъ эта инерція постоянно пропорціональна массѣ, то инерцію слѣдуетъ разсматривать, какъ одно изъ элементарныхъ проявленій массы. Такъ какъ и находящаяся въ движеніи электрическая частичка обнаруживаетъ такое же сопротивленіе инерціи, то и въ этомъ случаѣ можно говорить о массѣ, каковую называютъ кажущейся массой, такъ какъ она не имѣетъ ничего общаго съ обыкновенной массой. При малыхъ скоростяхъ вовсе нельзя и различить, имѣетъ ли такая частичка, состоящая изъ положительнаго или отрицательнаго электричества, кромѣ того еще и обыкновенную массу или нѣтъ. Въ этомъ отношеніи не составляютъ исключенія даже чрезвычайно большія скорости катодныхъ лучей. Разница между обыкновенной и кажущейся массой начинаетъ обнаруживаться лишь при такихъ скоростяхъ, которыя приближаются къ скорости свѣта. Вычисленіе въ этомъ случаѣ показало, что съ возрастаніемъ скорости возрастаетъ и сопротивленіе инерціи, а при этомъ должна также возрастать и кажущаяся масса. Столь быстро летящіе электроны мы наблюдаемъ въ β-лучахъ радія. Это замѣчательное тѣло, повидимому, представляетъ собою химическій элементъ въ процессѣ превращенія. При этомъ оно испускаетъ положительно заряженные α-лучи и отрицательно заряженные β-лучи. На этихъ послѣднихъ Кауфману удалось доказать, что масса тѣхъ частичекъ, которыя отличаются наибольшей скоростью, возрастаетъ соотвѣтственно этому въ такой именно степени, какая требуется по вычисленію, такъ что мы прежде всего можемъ принять, что эти отрицательныя частички — электроны — состоятъ исключительно изъ электричества, и поэтому имѣютъ лишь кажущуюся массу. Затѣмъ возникаетъ естественный вопросъ, нужно ли вообще принимать существованіе обыкновенной массы, или же можно ограничиться допущеніемъ одной лишь кажущейся массы. Въ послѣднемъ случаѣ наши представленія значительно выиграли бы въ простотѣ, такъ какъ мы имѣли бы дѣло исключительно съ электрическими атомами. При этомъ наши обычныя представленія и проблемы механики остались бы совершенно нетронутыми.

Не слѣдуетъ, однако, скрывать отъ себя, что и теорія электроновъ представляетъ значительныя трудности. Мы должны приписать каждому электрону опредѣленный размѣръ, который можно вычислить, надѣливъ электронъ нѣкоторой опредѣленной формой, напримѣръ, шарообразной. Согласно вычисленію, діаметръ оказывается равнымъ одной билліонной части миллиметра. Электрическій зарядъ, наполняющій такую часть пространства, обнаруживаетъ, однако, огромныя силы, стремящіяся оттолкнуть отдѣльныя части другъ отъ друга. Конечно, безъ натяжки нельзя допустить, что въ тѣлѣ, которое мы представляемъ себѣ, какъ недѣлимый элементъ, отдѣльныя части проявляютъ другъ по отношенію къ другу нѣкоторыя силы. На большія трудности наталкивается теорія электроновъ еще при объясненіи спектральныхъ линій. Такъ какъ каждый элементъ въ состояніи свѣченія даетъ опредѣленную группировку спектральныхъ линій, то каждый атомъ образуетъ неизмѣнную систему. Проще всего было бы принять представленіе объ атомѣ, какъ о нѣкоторой планетной системѣ, состоящей изъ одного положительно заряженнаго центра, вокругъ котораго вращаются, подобно планетамъ, отрицательно заряженные электроны. Но благодаря излучаемой электронами энергіи, подобная система не могла бы остаться неизмѣнной. Поэтому приходится прибѣгнуть къ представленію о системѣ, въ которой электроны находятся въ относительномъ покоѣ или имѣютъ небольшія скорости другъ по отношенію къ другу; это представленіе заключаетъ въ себѣ, однако, много сомнительныхъ пунктовъ.

Особенныя затрудненія для теоріи электроновъ представляетъ сила тяжести. Разсуждая послѣдовательно, необходимо допустить, что и эта сила должна быть объяснена теоріей электричества. Но основы современнаго ученія объ электричествѣ недостаточны для такого объясненія, и приходится вводить вспомогательныя гипотезы.

Такимъ образомъ, теорія электроновъ отнюдь не представляетъ собою законченнаго цѣлаго, постараемся же своими дальнѣйшими изысканіями способствовать ея совершенствованію.

РЕЦЕНЗІИ.

Проф. Шустеръ. „*Популярныя лекціи по низшей и высшей математикѣ*“—безплатное приложеніе къ журналу „Вѣстникъ Знанія“.

Издающійся въ Петербургѣ жуналъ „Вѣстникъ Знанія“ поставилъ себѣ цѣлью распространеніе популярныхъ сочиненій, въ видѣ приложеній къ журналу, въ широкихъ кругахъ общества. Цѣль, безусловно, симпатичная, но дѣло въ томъ, что распространяемыя сочиненія не всегда выбираются и редактируются съ должной осмотрительностью.

Предъ нами книжка подъ вышеприведеннымъ заглавіемъ. Состоитъ она изъ вступленія, содержащаго историческій очеркъ математики, и 25 лекцій.

Во вступленіи авторъ сѣтуетъ на печальную участь математики, которую всѣ находятъ скучной и трудной и старается доказать ошибочность этого мнѣнія слѣдующими словами: „для изученія экономическихъ наукъ нужна гораздо большая подготовка и значительно высшій уровень развитія, чѣмъ для занятія математикой“ (стр. 5).

Чтобы еще болѣе заинтересовать новичка, авторъ вступленія увѣряетъ, что, „формулы позволяютъ дать математическій портретъ любого человѣка“ (стр. 6).

Безусловно, подобный аргументъ возбудитъ интересъ у всякаго, даже у самаго заядлаго скептика и математикофоба.

Предварительный просмотръ книги еще болѣе обольститъ неофита. Чего тамъ только нѣтъ...? Тамъ и стихи изъ „Фауста“, тамъ и бесѣды за чашкой чая, тамъ и пресловутые быки Пиѳагора...

Къ сожалѣнію, намъ приходится охладить восторгъ новичка. Оставляя подобный юмористическій тонъ, хотя и свойственный предмету нашего разбора, но неудобный для страницъ „Вѣст. Оп. Физ.“, переходимъ къ указанію недостатковъ книги Шустера.

1) Безчисленное, умопомрачающее количество опечатокъ. Напр.: „еслина звать“ (стр. 24), вмѣсто $a^{n-2}-a^{n-}$ (стр. 70) и т. д. Никакого списка опечатокъ нѣтъ.

2) Во многихъ случаяхъ фигурируетъ буква 0, вносящая большую путаницу. Объемъ шара на 70 стр. изображается черезъ $\frac{r}{\delta}\cdot 0$

3) Французскія фразы въ популярныхъ книгахъ излишни (стр. 15, 18).

4) Безсистемность изложенія. Теорема о параллелограммѣ выводится безъ теоріи параллельныхъ линій (стр. 19). Основныя формулы интегральнаго исчисленія разбросаны, а не сведены, какъ обыкновенно, въ одну таблицу.

Формула интегрированія по частямъ стоитъ въ концѣ отдѣла интегральнаго исчисленія.

5) Многое важное пропущено, есть лишнее. Напримѣръ, нѣтъ началъ высшей алгебры, но, между тѣмъ, кубичное уравненіе рѣшается двумя способами (лекція 15).

6) Во многихъ случаяхъ неудачныя и длинныя доказательства. Рѣшеніе квадратнаго уравненія занимаетъ 2 страницы, а кубичнаго—нѣсколько.

7) Мелкія ошибки. Изъ массы подобныхъ замѣчаемъ слѣдующія: Интегралъ $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ называется основнымъ (стр. 107); биномъ Ньютона считается основаніемъ высшей математики (стр. 72); равенство $(b-c)(b+c)=b(b-c)+c(b-c)$ называется уравненіемъ (стр. 18) и т. д.

Выписать всѣ ошибки книги Шустера—Сизифова работа.

Общее впечатлѣніе отъ книги самое безотрадное.

Редакція „Вѣстника Знанія“ сдѣлала бы гораздо лучше, если бы издала отдѣльныя руководства по различнымъ отдѣламъ математики, а не старалась умѣстить всю математику въ 150 безграмотныхъ страницахъ.

А.

Е. Ефремовъ.—*Новая геометрія треугольника.*—Одесса. 1903 г.

Отдавая должное этой прекрасной книгѣ, я со своей стороны не могу не указать нѣкоторыхъ погрѣшностей въ ней.

На стр. 17 дано ошибочное условіе теоремы Жергона.

$$\text{Нужно } \frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1, \text{ а не } \frac{MA_1}{AM}+\frac{MB_1}{BM}+\frac{MC_1}{CM}=1,$$

какъ напечатано въ книгѣ.

Теорема Хузеля (стр. 19) представляетъ частный случай общаго предложенія о дополнительныхъ точкахъ треугольника и поэтому излишня.

Теорема Понселе (стр. 23) и теорема Карно (стр. 6) приведены, къ сожалѣнію, безъ доказательствъ.

Теорема Longchamps (стр 24), формулированная такъ: „Если A', B', C' суть проекціи центра круга вписаннаго въ тр-къ на его медіатрисы, то прямыя AA', BB', CC' пересѣкаются въ одной точкѣ“ неудачна, такъ какъ неясно, на какой медіатрисѣ взята та или иная проекція.

Теорема 25 Brocard'a (25 стр.) представляетъ изъ себя частный случай теоремы Дезарга и, какъ таковая, является излишней.

Теорема 30 Bonbals'a (25 стр.) должна быть распространена на добавочныя точки Нагеля.

Теорема 32 Neuberg'a (25 стр.) стоитъ не на мѣстѣ, такъ какъ свойства изогональныхъ прямыхъ еще неизвѣстны.

Упражненіе 6 на стр. 111 изложено неясно, такъ какъ радіусами, равными AH, AH_1 и т. п. нельзя описать окружности.

Построеніе 2-ой точки Еншабена (стр. 138) неясно.

Теорема 6 (стр. 144) повторяется два раза (теор. 19, стр. 24). Неудобно въ ней выраженіе: „точка, изотомически сопряженная съ точкой Жергона“. Гораздо проще сказать: „точка Нагеля“.

Теорема 2-я стр. 77 въ нѣсколько измѣненной формѣ приведена на стр. 157.

Теорема Гоффара повторяется два раза (стр. 253, стр. 23).

А.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 761 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4-(15+\sqrt{3})x^3+5(5+\sqrt{27})x^2-(25\sqrt{3}-13)x-13\sqrt{3}=0.$$

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 762 (4 сер.). Показать справедливость равенства

$$(Ra+bc)(Rb+ac)(Rc+ab)=(R^2-a^2)(R^2-b^2)(R^2-c^2),$$

гдѣ a, b, c суть соотвѣтственно половины сторонъ правильныхъ многоугольниковъ о трехъ, семи и сорока двухъ сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса R.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 763 (4 сер.). Доказать справедливость равенства

$$\sigma=\frac{2\alpha\beta\gamma s}{abc},$$

гдѣ s, a, b, c суть соотвѣтственно площадь и стороны треугольника ABC, а σ, α, β, γ—площадь и стороны ортоцентрическаго треугольника по отношенію къ ABC.

Н. Агрономовъ (Ревель).

№ 764 (4 сер.). Найти maximum выраженія

$$\log_{xy} x \cdot \log_{xy} y \left[\log_{xy}\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2.$$

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 765 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$10y+x=x^y.$$

Г. Оганянцъ (Ялта).

№ 766 (4 сер.). Два тѣла падаютъ: одно безъ начальной скорости съ высоты h метровъ, другое съ нѣкоторой начальной скоростью съ высоты $H>h$. Найти эту начальную скорость при одномъ изъ слѣдующихъ условій: 1) оба тѣла достигаютъ земли одновременно; 2) второе тѣло достигаетъ земли въ k разъ скорѣе; 3) второе тѣло опережаетъ первое на Θ секундъ.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 655 (4 сер.). *Одному изъ моихъ сыновей сейчасъ 10 лѣтъ; я высчиталъ, что его возрастъ представляетъ сейчасъ и будетъ представлять впредь $\frac{1}{5}$ суммы лѣтъ всѣхъ моихъ сыновей, пока всѣ они живы. Сколько лѣтъ сейчасъ каждому изъ моихъ сыновей, если извѣстно, что старшему изъ нихъ 13 лѣтъ и что лѣта всѣхъ сыновей, кромѣ десятилѣтняго, будучи расположены по старшинству, представляютъ ариѳметическую прогрессію?*

Предположимъ, что число остальныхъ сыновей, кромѣ десятилѣтнаго, равно x, и пусть лѣта каждаго изъ нихъ въ данный моментъ равны соотвѣтственно $y_1, y_2, \ldots, y_{x-1}, y_x$. По условію $10 = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_x+10}{5}$, откуда

$$y_1+y_2+\ldots+y_x+10=50 \qquad (1).$$

Черезъ нѣкоторое число лѣтъ t возрастъ десятилѣтняго сына обратится въ $10+t$, а сумма лѣтъ всѣхъ сыновей въ $y_1+y_2+\ldots+y_x+tx+10+t$, при чемъ, согласно съ условіемъ, останется справедливымъ соотношеніе $10+t=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_x+tx+10+t}{5}$, откуда

$$y_1+y_2+\ldots+y_x+tx+10+t=50+5t \qquad (2).$$

Вычитая изъ равенства (2) равенство (1), находимъ

$$tx+t=5t, \quad \text{откуда} \quad tx=4t \qquad (3).$$

Такъ какъ равенство (3) должно имѣть мѣсто при всякомъ значеніи t, то $x=4$. Итакъ число остальныхъ сыновей, кромѣ десятилѣтняго, равно 4. Пусть теперь y_1, y_2, y_3, y_4 (4) — лѣта остальныхъ сыновей, кромѣ десятилѣтняго, расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ, и пусть d — разность прогрессіи, которую, по условію, представляетъ рядъ чиселъ (4). По условію $y_4=13$; слѣдовательно (см. (1))

$$y_1+y_2+y_3+y_4=40=\frac{(y_1+13).4}{2}=2(y_1+13),$$

откуда $y_1=7$; но $y_4=y_1+3d=13=7+3d$, откуда $d=2$. Итакъ лѣта всѣхъ сыновей, кромѣ десятилѣтняго, равны 7, 9, 11, 13.

М. Рабиновичъ (Одесса); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *Н Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

№ 656 (4 сер.). *Рѣшить неравенство*

$$\frac{11-7x+11x^2-x^4}{x^2-7x+12}<12.$$

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Представимъ данное неравенство въ видѣ

$$\frac{11-7x+11x^2-x^4}{x^2-7x+12}-1<0, \quad \text{или} \quad \frac{-1+10x^2-x^4}{x^2-7x+12}<0.$$

Мѣняя въ обѣихъ частяхъ послѣдняго неравенства знаки на обратные, получимъ равносильное неравенство

$$\frac{x^4-10x^2+1}{x^2-7x+12}>0 \qquad (1).$$

Полагая $x'^4-10x'^2+1=0$, $x''^2-7x''+12=0$, находимъ, что $x'^2_{1,2}=5\pm\sqrt{24}$, $x''_1=3$, $x''_2=4$, откуда вытекаютъ тожества

$$x^4-10x^2+1=\left[x^2-(5+\sqrt{24})\right]\left[x^2-(5-\sqrt{24})\right]=$$

$$=\left[x-\left(-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right]\left[x-\left(-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right],$$

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

Такимъ образомъ неравенство (1) можно представить въ видѣ

$$\frac{\left[x-\left(-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right]\left[x-\left(-\sqrt{5-24}\right)\right]\left[x-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right]}{(x-3)(x-4)}>0,$$

или же, помноживъ числителя и знаменателя на $(x-3)(x-4)$, въ видѣ

$$\frac{\left[x-\left(-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\left(-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right]\left[x-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right](x-3)\left[x-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right](x-4)}{(x-3)^2(x-4)^2}>0 \quad (2).$$

Наконецъ, умноживъ обѣ части неравенства (2) на положительное число $(x-3)^2(x-4)^2$, приводимъ его къ виду:

$$\left[x-\left(-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\left(-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\right]\left[x-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right](x-3)\left[x-\sqrt{5+\sqrt{24}}\right](x-4)>0 \quad (3).$$

Такъ какъ $5-\sqrt{24}<9$, то $\sqrt{5-24}<3$; но $16>5+\sqrt{24}>9$, такъ какъ $5>\sqrt{24}>4$; поэтому $4>\sqrt{5+\sqrt{24}}>3$; слѣдовательно въ лѣвой части неравенства (3) числа

$$-\sqrt{5+\sqrt{24}},\ -\sqrt{5-\sqrt{24}},\ \sqrt{5-24},\ 3,\ \sqrt{5+\sqrt{24}},\ 4, \quad (4)$$

которыя вычитаются послѣдовательно изъ x, расположены въ возрастающемъ порядкѣ. Поэтому, если x меньше наименьшаго изъ нихъ, то всѣ шесть сомножителей лѣвой части неравенства (3) отрицательны, а потому лѣвая часть его положительна. Если x заключается между первымъ и вторымъ изъ чиселъ ряда (4), то въ лѣвой части неравенства (3) число отрицательныхъ сомножителей равна 5, а потому въ этомъ случаѣ лѣвая часть его отрицательна. Продолжая разсуждать подобнымъ образомъ, находимъ, что всѣ рѣшенія неравенства (3), а потому и даннаго неравенства, выражаются формулами:

$$x<-\sqrt{5+\sqrt{24}};\ -\sqrt{5-\sqrt{24}}<x<\sqrt{5-\sqrt{24}};\ 3<x<\sqrt{5+\sqrt{24}};\ 4<x.$$

С. Конюховъ (Никитовка); *В. Нерехтскій* (Кіевъ); *П. Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *А. Саркисянъ* (Тифлисъ).

№ 657 (4 сер.). *Доказать, что*

$$A'B'.B'C'.A'C'=\frac{2r^2s}{R},$$

гдѣ A′, B′, C′ *суть точки касанія сторонъ треугольника* ABC *къ кругу, вписанному* *въ него, а* r, R, s *суть соотвѣтственно радіусъ круга вписаннаго, радіусъ круга описаннаго и площадь треугольника* ABC.

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica.*

Опустивъ изъ центра O круга вписаннаго перпендикуляръ OM на прямую $A'B'$, получимъ $A'M=\frac{A'B'}{2}=A'O\sin A'OM=A'O\sin\frac{A'OB'}{2}=$ $=A'O\sin\frac{\pi-C}{2}=r\cos\frac{C}{2}$, откуда

$$A'B'=2r\cos\frac{C}{2}\qquad(1).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$B'C'=2r\cos\frac{A}{2}\quad(2),\qquad A'C'=2r\cos\frac{B}{2}\quad(3).$$

Перемноживъ равенства (1), (2), (3), получимъ:

$$A'B'.B'C'.A'C'=8r^3\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

— или, принимая во вниманіе тожество, которому удовлетворяютъ углы треугольника, а именно $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C$,—

$$A'B'.B'C'.A'C'=2r^3(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{2r^3(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)}{2R}\qquad(4).$$

Обозначая черезъ a, b, c стороны, черезъ $2p$ периметръ треугольника, имѣемъ: $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, $2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C=$ $=a+b+c=2p$. Поэтому (см. (4))

$$A'B'.B'C'.A'C'=\frac{2r^3.2p}{2R}=\frac{2r^2(rp)}{R},$$

откуда, такъ какъ $rp=s$,

$$A'B'.B'C'.A'C'=\frac{2r^2s}{R}.$$

Н. Плахово (Знаменка); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *А. Саркисянъ* (Тифлисъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ).

Поправки.

1) Въ условіи задачи № 722 въ № 411 „Вѣстника“ вмѣсто

$$n^{m+1}-(m+1)n-m$$

слѣдуетъ читать

$$n^{m+1}-(m+1)n+m.$$

2) Въ условіи задачи № 725 въ № 412 „Вѣстника“ вмѣсто

$$x(x+z)+3y(x+y+z)=a^2$$

слѣдуетъ читать

$$x(y+z)+3y(x+y+z)=a^2.$$

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
— И —
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. Кагана.

Тридцать пятый семестръ.

№№ 409—420.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66
1906.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“

ЗА ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 409 — 420.

Статьи, отмѣченныя звѣздочкой, имѣются въ отдѣльныхъ изданіяхъ

Статьи.

Стр.

Рѣчь надъ гробомъ Ѳ. Н. Шведова. *Проф. А. Клоссовскаго.* № 409 . . . 1

Электролитическіе іоны и электроны. *Проф. А. Риги.* № 409 . . . 4

Судьбы русской математической журналистики. *Д. Л. Волковскаго.* № 409 . . . 9

Правило пропорціональности при логариѳмическихъ вычисленіяхъ. *Е. Григорьева.* № 409 . . . 14

Жизнь и труды Генриха Герца. Посмертный неизданный мемуаръ Г. Гельмгольца. Перевелъ *І. Л.* № 410 . . . 25

Объ опредѣленіи дня празднованія Пасхи. *В. Шидловскаго.* № 410 . . . 35

Ортодіагональный четыреугольникъ. *Е. Григорьева.* №№ 410—411 . . . 38, 62

Памяти Ѳеодора Никифоровича Шведова. *И. Я. Точидловскаго.* №№ 411—413 . . . 49, 97

Электроны и свѣтовыя явленія. *Проф. А. Риги.* № 411 . . . 53

Природа катодныхъ лучей. *Проф. А. Риги.* № 412 . . . 73

Какимъ образомъ положительное электричество можетъ имѣть отрицательный потенціалъ, и отрицательное электричество—положительный потенціалъ? *I. Moser'a.* № 412 . . . 80

* О логариѳмахъ Непера. *С. Новосильцева.* № 412 . . . 85

Стр.

* Магнито-оптическія явленія. *Д. Фефелова.* №№ 413, 414, 15 . 103, 126, 145

Нѣсколько замѣчаній о „живой силѣ“ и „количествѣ движенія“. *Г. Бархова.* № 413 111

* Текучіе кристаллы и жидкія кристаллическія вещества. *Прив.-доц. М. Сидоренко.* №№ 414 - 415 . . . . . 121, 157

О составленіи химическихъ уравненій. *Л. Ямпольскаго.* № 414 . 131

Отношеніе физической химіи къ физикѣ и химіи. Проф. Вантъ-Гоффа. Перевелъ *І. Л.* № 416 169

О вихревыхъ теченіяхъ. *Проф. Адами (Adami).* Перевелъ *И. Левинъ* № 416 177

Дѣленіе окружности на равныя части. *Проф. Г. Вебера.* №№ 416—417 . . . . 180, 201

Іоны въ тѣлахъ твердыхъ и газообразныхъ. *Проф. А. Риги.* № 417 193

Матеріалы для учебника космографіи. *Ф. Павлова.* № 418 . . 217

Разговорный методъ въ алгебрѣ. *А. Шапошникова.* № 418 . . 226

* О двухъ гармоническихъ группахъ трансверсалей треугольника. *В. Шлыгина.* № 418 230

Гидростатическій способъ опредѣленія коэффиціента расширенія жидкостей И. Костанцо. *Н. Малова.* № 418 234

* О числахъ, произведеніе которыхъ равняется суммѣ ихъ квадратовъ. *И. Флорова.* №№ 419—420 241

Объ электронахъ. *Проф. W. Wien'a.* Перев. *І. Л.* №№ 419—420 . 255

ОПЫТЫ И ПРИБОРЫ.

Изъ: „Zeitschrift für den Physicalischen und Chemischen Unterricht“. *В. Лермантова.* № 409 18

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Профессоръ Ланглей. *Н. Адамовича.* № 411 68

Изслѣдованіе проф. Righi объ электризаціи тѣлъ дѣйствіемъ радіевыхъ лучей. № 412 90

Профессоръ П. Кюри. *Н. Адамовича.* № 414 137

Механика вольтовыхъ дугъ. № 415 164

Новый способъ фотографическаго регистрированія показаній физическихъ приборовъ. № 418 236

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Стр

Второй конгрессъ Нѣмецкаго Рёнтгеновскаго общества. № 410 . 43

Избраніе сэра Вильяма Крукса членомъ-корреспондентомъ физическаго отдѣленія Парижской Академіи Наукъ. № 410 . „

Метеорологическія станціи японцевъ въ Кореѣ и Манджуріи. № 410 . . . . „

РЕЦЕНЗІИ.

Jules Tannery. Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. *М. Попруженко.* № 410 43

Müller-Pouillet. Учебникъ физики и метеорологіи въ 4 частяхъ. *Э. Берга.* № 412 92

Проф. С. Ньюкомъ. Астрономія для всѣхъ, переводъ съ англійскаго съ предисловіемъ А. Р. Орбинскаго, прив.-доц. Новороссійскаго Университета. *В Стратонова.* № 414 . . 138

Оливеръ Лоджъ. Школьная учоба и реформа школы. *В. Лермантова.* № 417 211

Н. Л. Орлицкій. Элементарная математика. *П. Држевецкаго.* № 418 . 236

Проф. Шустеръ. „Популярныя лекціи по низшей и высшей математикѣ". *А* №№ 419—420 258

Е. Ефремовъ. „Новая геометрія треугольника". *А.* №№ 419—420 . 260

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Четвертой серіи.

№№ 707—712	въ № 409	стр.	21
„ 713—718	„ „ 410	„	44
„ 719—724	„ „ 411	„	69
„ 725—730	„ „ 412	„	93
„ 731—736	„ „ 413	„	116
„ 737—742	„ „ 414	„	141
№№ 743—748	въ № 415	стр.	165
„ 749—754	„ „ 416	„	189
„ 755—760	„ „ 418	„	237
„ 761—766	въ №№ 419—420		261

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Четвертой серіи.

№ 587	въ № 412	стр.	94
„ 599	„ „ 411	„	70
„ 602	„ „ 412	„	95
„ 603	„ „ 409	„	22
„ 609	„ „ 409	„	23
„ 611	„ „ 409	„	23
„ 613	„ „ 409	„	24
„ 614	„ „ 414	„	142
„ 615	„ „ 410	„	46
„ 617	„ „ 410	„	47
„ 618	„ „ 410	„	47
№ 619	въ № 410	стр.	48
„ 620	„ „ 411	„	71
„ 621	„ „ 411	„	72
„ 622	„ „ 413	„	117
„ 626	„ „ 412	„	96
„ 627	„ „ 413	„	118
„ 628	„ „ 413	„	118
„ 630	„ „ 414	„	142
„ 631	„ „ 413	„	119
„ 632	„ „ 413	„	120
„ 633	„ „ 414	„	143

№ 637	въ №	415	стр	166	№ 648	въ №	417	стр. 214
„ 638	„ „	414	„	144	„ 649	„ „	417	„ 215
„ 639	„ „	415	„	166	„ 650	„ „	418	„ 238
„ 641	„ „	415	„	167	„ 651	„ „	418	„ 239
„ 642	„ „	415	„	168	„ 652	„ „	418	„ 239
„ 643	„ „	417	„	213	„ 654	„ „	417	„ 216
„ 644	„ „	416	„	190	„ 655	„	419—420	„ 262
„ 645	„ „	416	„	191	„ 656	„	419—420	„ 262
„ 647	„ „	416	„	192	„ 657	„	419—420	„ 263

ПОПРАВКИ.

Въ № 417 . . . . стр. 216
„ „ 418 . . . . „ 240
Въ №№ 419—410 . . . . „ 264

4741