Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXXIV Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 399.

О разложеніи функцій въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

*(Окончаніе *).*

17. Обозначимъ черезъ $\frac{p'}{q'}, \frac{p'_1}{q'_1}, \frac{p'_2}{q'_2}$ и т. д. особыя подходящія дроби $a+b_1$, $a+\frac{b_1}{a_1+b_2}=\frac{aa_1+b_1+ab_2}{a_1+b_2}$, $a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{b_2+b_3}}$ и т. д.

Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что дробь $\frac{p'_n}{q'_n}$ можетъ быть получена изъ дроби $\frac{p_n}{q_n}$, если въ послѣдней замѣнимъ a_n черезъ a_n+b_{n+1}. Такимъ образомъ $\frac{p'_n}{q'_n}=\frac{p_{n-1}(a_n+b_{n+1})+p_{n-2}b_n}{q_{n-1}(a_n+b_{n+1})+q_{n-2}b_n}$. Раскрывая скобки и пользуясь свойствомъ подходящихъ дробей перваго вида, находимъ $\frac{p'_n}{q'_n}=\frac{p_n+p_{n-1}b_{n+1}}{q_n+q_{n-1}b_{n+1}}$.

Точно такъ же $\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}=\frac{p_{n+1}+p_nb_{n+2}}{q_{n+1}+q_nb_{n+2}}$.

*) См. № 398 „Вѣстника“.

Находимъ разность $\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} - \frac{p'_n}{q'_n} =$

$$= \frac{(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) + b_{n+1}(p_{n+1}q_{n-1} - q_{n+1}p_{n-1}) + b_{n+1}b_{n+2}(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1})}{q'_{n+1}q'_n}.$$

Но $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_n b_{n+1}$,

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} b_1 b_2 b_3 \ldots b_n,$$

$$p_{n+1}q_{n-1} - q_{n+1}p_{n-1} = \frac{(-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_n (b_{n+1}q_{n-1} - q_{n+1})}{q_n}$$

Поэтому $\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} - \frac{p'_n}{q'_n} =$

$$= \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 b_3 \ldots b_n b_{n+1}(-q_n - b_{n+1}q_{n-1} + q_{n+1} + q_n b_{n+2})}{q'_{n+1}q'_n q_n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}(q_n a_{n+1} + q_{n-1}b_{n+1} + q_n b_{n+2} - q_n - q_{n-1}b_{n+1})}{q'_{n+1}q'_n q} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 c_3 \ldots b_{n+1}(a_{n+1} + b_{n+2} - 1)}{q'_{n+1}q'_n}.$$

Далѣе находимъ:

$$x - \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{p_n y_{n+1} + p_{n-1}b_{n+1}}{q_n y_{n+1} + q_{n-1}b_{n+1}} - \frac{p_n + p_{n-1}b_{n+1}}{q_n + q_{n-1}b_{n+1}} =$$

$$= \frac{b_{n+1}(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})(y_{n+1} - 1)}{(q_n y_{n+1} + q_{n-1}b_{n+1})q'_n} = \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}(y_{n+1} - 1)}{(q_n y_{n+1} + q_{n-1}b_{n+1})q'_n};$$

$$x - \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{(-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}(a_{n+1} + b_{n+2} - y_{n+1})}{q'_{n+1}(q_n y_{n+1} + q_{n-1}b_{n+1})};$$

$$\frac{p'_n}{q'_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-b_{n+1}(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})}{q'_n q_n} = \frac{(-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q'_n q_n}.$$

Расмотримъ случай, когда числители звеньевъ непрерывной дроби отрицательны, кромѣ b_1. Тогда получимъ:

$$\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} - \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{-c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}(a_{n+1} - c_{n+2} - 1)}{q'_{n+1}q'_n},$$

$$x - \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{-c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}(y_{n+1} - 1)}{(q_n y_{n+1} - q_{n-1}c_{n+1})q'_n},$$

$$x - \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{-c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}(y_{n+1} + c_{n+2} - a_{n+1})}{q'_{n+1}(q_n y_{n+1} - q_{n-1}c_{n+1})},$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p'_n}{q'_n} = -\frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}}{q'_n q_n}$$

Положимъ, что $a_n - c_n \geqq 1$, $a_n - c_{n+1} > 1$ при всякихъ значеніяхъ n. Тогда

$q_{n-1}a_n > q_n > q_{n-1}(a_n - c_n) > q_{n-1}$, $a_n - 1 > y_n - 1 > a_n - c_{n+1} - 1 > 0$, $q_{n+1} > q_n y_{n+1} - q_{n-1}c_{n+1} > q'_{n+1}$, $q'_n > q'_{n-1}$. Всѣ написанныя разности отрицательны, а также разность $\frac{p_n}{q_n} - x$. Напишемъ рядъ (c')

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{c_1(a_1 - c_2 - 1)}{q'q'_1} + \frac{c_1c_2(a_2 - c_3 - 1)}{q'_1q'_2} + \ldots +$$

$$+ \frac{c_1c_2\ldots c_{n+1}(a_{n+1} - c_{n+2} - 1)}{q'_nq'_{n+1}}.$$

Положимъ, что $\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{n+1}}{q_nq'_n}$ стремится къ нулю при неограниченномъ увеличеніи n. Тогда x будетъ предѣломъ каждой изъ дробей $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p'_n}{q'_n}$. Эти дроби будутъ представлять приближенныя значенія x съ недостаткомъ и съ избыткомъ съ ошибкой, менѣе $\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{n+1}}{q'_nq_n}$. Чтобы эта ошибка стремилась къ нулю, достаточно, чтобы предѣлъ отношенія $\frac{c_1c_2c_3\ldots c_nc_{n+1}}{q'_nq_n} : \frac{c_1c_2c_3\ldots c_n}{q'_{n-1}q_{n-1}}$ былъ менѣе 1, или предѣлъ выраженія $\frac{q'_nq_n}{c_{n+1}q'_{n-1}q_{n-1}}$ былъ болѣе 1. Замѣтимъ, что $\frac{q'_n}{q'_{n-1}} = \frac{q_{n-1}(a_n - c_{n+1}) - q_{n-2}c_n}{q_{n-1} - q_{n-2}c_n} = a_n - c_{n+1} +$

$$+ \frac{c_n(a_n - c_{n+1} - 1)}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} - c_n}.$$

Но $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} < a_{n-1}$. Поэтому

$$\frac{q'_n}{q'_{n-1}} > a_n - c_{n+1} + \frac{c_n(a_n - c_{n+1} - 1)}{a_{n-1} - c_n} \text{ или } \frac{q'_n}{q'_{n-1}} > \frac{a_{n-1}a_n - a_{n-1}c_{n+1} - c_n}{a_{n-1} - c_n}.$$

Такъ какъ $\frac{q_n}{q_{n-1}} > a_n - c_n$, то

$$\frac{q_nq'_n}{c_{n+1}q_{n-1}q'_{n-1}} > \frac{(a_n - c_n)(a_{n-1}a_n - a_{n-1}c_{n+2} - c_n)}{c_{n+1}(a_{n-1} - c_n)}.$$

Если правая часть стремится къ предѣлу, большему 1, то x есть предѣлъ каждой изъ дробей $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p'_n}{q'_n}$, и ряды (c) и (c') будутъ сходящимися.—Возьмемъ разложенія:

$$\frac{p_n}{q_n} = a + \cfrac{\frac{c_1}{1.d_1}}{a_1 - \cfrac{\frac{c_2}{d_1d_2}}{a_2 - \cfrac{\frac{c_3}{d_2d_3}}{a_3 - \ldots - \cfrac{\frac{c_n}{d_{n-1}d_n}}{a_n}}}} = \frac{P_n}{Q_n} = a + \cfrac{c_1}{a_1d_1 - \cfrac{c_2}{a_2d_2 - \cfrac{c_3}{a_3d_3 - \ldots - \cfrac{c_n}{a_nd_n}}}},$$

$$\frac{p'_n}{q'_n} = a + \cfrac{\frac{c_1}{1.d_1}}{a_1 - \cfrac{\frac{c_2}{d_1d_2}}{a_2 - \cfrac{\frac{c_3}{d_2d_3}}{a_3 - \ldots - \cfrac{\frac{c_n}{d_{n-1}d_n}}{a_n - \frac{c_{n+1}}{d_nd_{n+1}}}}}} = \frac{P'_n}{Q'_n} = a + \cfrac{c_1}{a_1d_1 - \cfrac{c_2}{a_2d_2 - \cfrac{c_3}{a_3d_3 - \ldots - \cfrac{c_n}{a_nd_n - \frac{c_{n+1}}{d_{n+1}}}}}},$$

$$\frac{P''_n}{Q''_n} = a + \cfrac{c_1}{a_1d_1 - \cfrac{c_2}{a_2d_2 - \cfrac{c_3}{a_3d_3 - \ldots - \cfrac{c_n}{a_nd_n - c_{n+2}}}}},$$

$$x = a + \cfrac{\frac{c_1}{1.d_1}}{a_1 - \cfrac{\frac{c_2}{d_1d_2}}{a_2 - \cfrac{\frac{c_3}{d_2d_3}}{a_3 - \ldots - \cfrac{\frac{c_n}{d_{n-1}d_n}}{a_n - \ldots}}}}.$$

Составляемъ разности

$$\frac{p'_n}{q'_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1}}{1d_1^2d_2^2d_3^2 \ldots d_n^2d_{n+1}q'_nq_n}$$

$$\frac{P'_n}{Q'_n} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1}}{Q'_nQ_n}, \text{ ибо } \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_nd_{n+1} - P_{n-1}c_{n+1}}{Q_nd_{n+1} - Q_{n-1}c_{n+1}}.$$

Хотя разности $\frac{p'_n}{q'_n}-\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{P'_n}{Q'_n}-\frac{P_n}{Q_n}$ равны, но первая разность представлена въ видѣ, болѣе удобномъ для доказательства того, что она стремится къ нулю, тогда какъ по виду второй гораздо труднѣе доказать, что она стремится къ нулю.

$$\frac{P''_n}{Q''_n}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_n-P_{n-1}c_{n+1}}{Q_n-Q_{n-1}c_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{n+1}}{Q''_nQ_n}.$$

Для вычисленій проще брать $\frac{P''_n}{Q''_n}$ вмѣсто $\frac{P'_n}{Q'_n}$, но тогда ошибка будетъ значительно больше.

Для примѣра возьмемъ

$$\lg\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}=\cfrac{1}{y-\cfrac{\frac{1}{1.3}}{y-\cfrac{\frac{4}{3.5}}{y-\cfrac{\frac{9}{5.7}}{y-\ldots-\cfrac{\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}}{y-\cfrac{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}}{y-\ldots}}}}}},\ \text{гдѣ } y>1.$$

Полагая $y=2z+1$, находимъ: $\lg\frac{z+1}{z}=\lg(z+1)-\lg z=$

$$=\cfrac{2}{2z+1-\cfrac{\frac{1}{1.3}}{2z+1-\cfrac{\frac{4}{3.5}}{2z+1-\cfrac{\frac{9}{5.7}}{2z+1-\ldots-\cfrac{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}}{2z+1-\ldots}}}}}.$$

Полагая $a_n=2z+1$ и $c_n=\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}$, находимъ:

$$q_nq'_n:c_{n+1}q_{n-1}q'_{n-1}>\left[(2z+1)^2-(2z+1)\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}-\right.$$

$$-\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}\Bigg]:\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$\text{пред.}\ \frac{q_n q'_n}{c_{n+1}q_{n-1}q'_{n-1}}>\left[(2z+1)^2-\frac{2z+1}{4}-\frac{1}{4}\right]:\frac{1}{4}>16z^2+14z+2.$$

Значитъ $\lg\left(1+\frac{1}{z}\right)$ есть предѣлъ каждой изъ дробей

$$\frac{P_n}{Q_n}=\cfrac{2}{2z+1-\cfrac{1}{3(2z+1)-\cfrac{4}{5(2z+1)-\cfrac{9}{7(2z+1)-\ldots-\cfrac{(n-1)^2}{(2n-1)(2z+1)}}}}}.$$

$$\frac{P'_n}{Q'_n}=\cfrac{2}{2z+1-\cfrac{1}{3(2z+1)-\cfrac{4}{5(2z+1)-\cfrac{9}{7(2z+1)-\ldots-\cfrac{(n-1)^2}{(2n-1)(2z+1)-\cfrac{n^2}{2n+1}}}}}}.$$

Абсолютная величина разности между $\lg\frac{z+1}{z}$ и каждой изъ написанныхъ дробей менѣе $\frac{2.1.4.9.16\ldots(n-1)^2n^2}{Q_n\,Q'_n}$.

Полагая $z=1$, находимъ:

$$\lg 2=\cfrac{2}{3-\cfrac{1}{9-\cfrac{4}{15-\cfrac{9}{21-\cfrac{16}{27-\cfrac{25}{33-\cfrac{36}{39-\cfrac{49}{45-\ldots}}}}}}}}.$$

Составляя послѣдовательныя подходящія дроби, получимъ:

$$\frac{P}{Q}=\frac{0}{1},\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{3},\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{18}{26},\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{18.15-2.4}{26.15-3.4}=\frac{262}{378},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{262.21-18.9}{378.21-26.9}=\frac{5340}{7704}=0{,}693146\ldots;$$

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{2}{1},\ \frac{P'_1}{Q'_1}=\frac{6}{8},\ \frac{P'_2}{Q'_2}=\frac{82}{118},\ \frac{P'_3}{Q'_3}=\frac{262.7-18.9}{378.7-26.9}=\frac{1672}{2412},$$

$$\frac{P'_4}{Q'_4}=\frac{5340.9-262.16}{7704.9-378.16}=\frac{43868}{63288}=0{,}693148\ldots;$$

$$\frac{P'_4}{Q'_4}-\frac{P_4}{Q_4}=\frac{2.1.4.9.16}{7704.63288}=\frac{1}{423238{,}5}<\frac{1}{10^5},$$

$\lg 2=0{,}69315$ съ ошибкой менѣе $\dfrac{1}{2.10^5}$.

Отсюда видно, что если въ непрерывной дроби

$$a+\cfrac{c_1}{a_1-\cfrac{c_2}{a_2-\cfrac{c_3}{a_3-\ldots}}},$$

въ которой числители и знаменатели звеньевъ числа цѣлыя, будемъ имѣть $a_n-c_n<1$ или $a_n-c_n<0$, то для выясненія вопроса о сходимости рядовъ (c) и (c') слѣдуетъ преобразовать данную непрерывную дробь, раздѣливъ каждыя три числа c_n, a_n, c_{n+1} на одно и то же число d_n. Тогда данная дробь приметъ видъ:

$$a+\cfrac{\frac{c_1}{d_1}}{\frac{a_1}{d_1}-\cfrac{\frac{c_2}{d_1d_2}}{\frac{a_2}{d_2}-\cfrac{\frac{c_3}{d_2d_3}}{\frac{a_3}{d_3}-\ldots}}}.$$

При извѣстномъ выборѣ чиселъ $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ можетъ случиться, что $\dfrac{a_n}{d_n}-\dfrac{c_n}{d_{n-1}d_n}$ будетъ болѣе 1, а также

$$\frac{a_n}{d_n}-\frac{c_{n+1}}{d_nd_{n+1}}>1 \text{ при всякомъ значеніи } n.$$

Примѣнивъ для преобразованной непрерывной дроби выведенный признакъ сходимости соотвѣтствующихъ ей рядовъ (c) и (c'), можемъ рѣшить вопросъ о томъ, стремятся ли къ опредѣленному конечному предѣлу подходящія дроби къ данной непрерывной.

Объ одной замѣчательной точкѣ треугольника.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

Въ майской книжкѣ журнала *Mathesis* за 1905 г. помѣщена замѣтка *J. Neuberg'a* *), въ которой сообщается, что въ журналѣ *Enseignement mathématique* за мартъ 1904 г. помѣщена статья подъ заглавіемъ: *Un théorème sur le triangle*, подписанная *J. Kariya* (*Tokio*) и содержащая слѣдующія строки:

„Voici un théorème que je crois nouveau; il comprend comme „cas particulier des théorèmes déjà connus:

„Théorème. Jnscrivons un cercle O dans un triangle donné „ABC; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact „avec les trois côtés BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites „OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, „les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point que „je me permettrai d'appeler *Point de Kariya*".

Замѣтивъ, что доказательство этой теоремы, предложенное J. Kariya, довольно сложно, J. Neuberg обращаетъ вниманіе на то, что въ 1889 г. *M. Lemoine* доказалъ теорему, изъ которой теорема Kariya получается какъ частный случай (AFAS, Paris, 1889, p. 202).

По поводу той же статьи Kariya въ іюньской книжкѣ *Mathesis'a* за 1905 г. помѣщена еще замѣтка *V. Retali* **), въ которой онъ говоритъ, что теорема, которую Kariya считаетъ новою, была опубликована имъ въ *Periodico di Matematica* въ 1896 г. (Roma, XI, p. 71).

Такимъ образомъ, теорема и точка, которую японскій математикъ позволяетъ себѣ называть своимъ именемъ, по праву пріоритета, должны называться *теоремою* и *точкою Retali*.

Хотя теорема Retali легко доказывается самостоятельно, но я предпочитаю ее какъ слѣдствіе теоремы Lemoine'а, на которую указалъ J. Neuberg.

Теорема Лемуана. *Если изъ какой нибудь точки* M *въ плоскости треугольника* ABC *опустить перпендикуляры* MX, MY, MZ, *на его стороны* BC, CA, AB *и отложить на нихъ отрѣзки* MA_1, MB_1, MC_1, *обратно пропорціональные* MX, MY, MZ, *то прямыя* AA_1, BB_1, CC_1 *пересѣкутся въ одной точкѣ* L. (Фиг.).

---

*) *Mathesis*. 1905, p. 117.

**) *Mathesis*. 1905, p. 118.

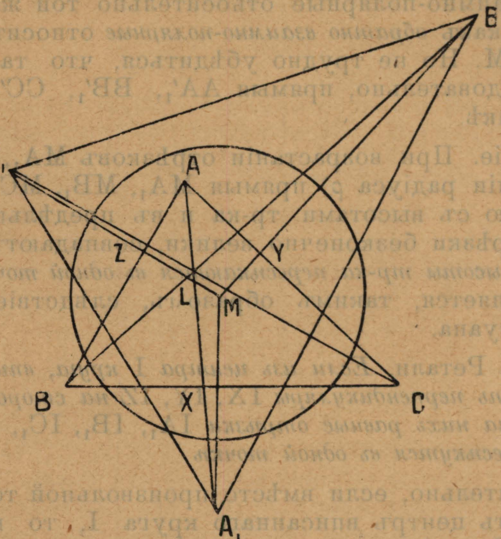
Для построенія точекъ A_1, B_1, C_1 опишемъ около точки M окружность произвольнымъ радіусомъ ρ и построимъ полюсы сторонъ тр-ка BC, CA, AB относительно этой окружности. Обозначивъ ихъ чрезъ A_1, B_1, C_1, получимъ:

$$MX.MA_1 = MY.MB_1 = MZ.MC_1 = \rho^2,$$

откуда

$$MA_1 : MB_1 : MC_1 = \frac{\rho^2}{MX} : \frac{\rho^2}{MY} : \frac{\rho^2}{MZ},$$

т. е. отрѣзки MA_1, MB_1, MC_1 и MX, MY, MZ обратно пропорціональны.



Такъ какъ, по свойству полюсовъ и поляръ, прямыя B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 суть поляры вершинъ тр-ка ABC, то тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$ взаимно-полярны относительно окружности M; но взаимно-полярные тр-ки гомологичны, т. е. прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины ихъ, пересѣкаются въ одной точкѣ *); слѣдовательно, прямыя AA_1, BB_1, CC_1, согласно съ заключеніемъ теоремы, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Точки A'_1, B'_1, C'_1, симметричныя съ A_1, B_1, C_1 относительно M, очевидно, также удовлетворяютъ требованію теоремы, ибо

$$MA'_1 = -MA_1,\quad MB'_1 = -MB_1,\quad MC'_1 = -MC_1,$$

---

*) Новая геом. тр ка. *Д. Ефремова.* Стр. 61.

а потому

$$MA'_1 : MB'_1 : MC'_1 = \frac{-\rho^2}{MX} : \frac{-\rho^2}{MY} : \frac{-\rho^2}{MZ}.$$

Вслѣдствіе равенствъ:

$$MX.MA'_1 = MY.MB'_1 = MZ.MC'_1 = -\rho^2,$$

точки A'_1, B'_1, C'_1 можно разсматривать, какъ полюсы прямыхъ BC, CA, AB относительно воображаемой окружности, описанной около точки M радіусомъ $\rho\sqrt{-1}$, или какъ *обратные полюсы* тѣхъ же прямыхъ относительно реальной окружности M *); сообразно съ этимъ, и тр-ки ABC и $A'B'C'$ можно разсматривать какъ взаимно-полярные относительно той же воображаемой окружности, какъ *обратно взаимно-полярные* относительно реальной окружности M. Но не трудно убѣдиться, что такіе тр-ки гомологичны; слѣдовательно, прямыя AA'_1, BB'_1, CC'_1 пересѣкаются въ одной точкѣ.

Слѣдствіе. При возрастаніи отрѣзковъ MA_1, MB_1, MC_1 (т. е. при увеличеніи радіуса ρ) прямыя MA_1, MB_1, MC_1 приближаются къ совпаденію съ высотами тр-ка и въ предѣльномъ положеніи, когда эти отрѣзки безконечно велики, совпадаютъ съ ними; слѣдовательно, *высоты тр-ка пересѣкаются въ одной точкѣ*. Эта теорема Архимеда является, такимъ образомъ, слѣдствіемъ доказанной теоремы Лемуана.

Теорема Ретали. *Если изъ центра* I *круга, вписаннаго въ тр-къ* ABC, *опустить перпендикуляры* IX, IY, IZ *на стороны* BC, AC, AB *и отложить на нихъ равные отрѣзки* IA_1, IB_1, IC_1, *то прямыя* AA_1, BB_1, CC_1 *пересѣкутся въ одной точкѣ.*

Дѣйствительно, если вмѣсто произвольной точки M теоремы Лемуана взять центръ вписаннаго круга I, то перпендикуляры MX, MY, MZ замѣняются равными между собой перпендикулярами IX, IY, IZ, а потому и обратно пропорціональные имъ отрѣзки IA_1, IB_1, IC_1 будутъ равны.

Понятно, что теорема Ретали остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда вмѣсто центра круга I, вписаннаго въ тр-къ, берется одинъ изъ центровъ внѣ-вписанныхъ круговъ I_1, I_2, I_3.

Слѣдствіе. При равенствѣ отрѣзковъ IA_1, IB_1, IC_1 или I_1A_1, I_1B_1, I_1C_1, точки A_1, B_1, C_1 могутъ совпадать съ X, Y, Z, т. е. съ точками касанія сторонъ тр-ка и круга вписаннаго или внѣ-вписаннаго въ него. Въ этомъ случаѣ теорема Ретали выражаетъ извѣстную теорему, что *прямыя, соединяющія вершины тр-ка съ точками касанія вписаннаго или внѣ-вписаннаго круга, пересѣкутся въ одной точкѣ.*

---

*) См. „Вѣстн. Оп. Физ." № 377, стр. 101.

О нѣкоторыхъ свойствахъ логариѳмовъ.

Студ. Харьк. унив. И. Чернушенко.

*(Продолженіе *).*

Радикальная прогрессія.

Опредѣленіе. Радикальной прогрессіей называется рядъ чиселъ, въ которомъ радикальное отношеніе каждаго послѣдующаго къ своему предыдущему или наоборотъ есть величина постоянная.

Напримѣръ, ряды чиселъ: $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot}{-}}$ 1; 2; 4; 16; 65536 . . . ; $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot}{-}}$ 19683; 9; 2; 0,6309. . . , . . . представляютъ радикальныя прогрессіи; въ первомъ изъ нихъ постоянно радикальное отношеніе послѣдующаго къ предыдущему и равно 2, во второмъ постоянно отношеніе предыдущаго къ послѣдующему и равно 3.

Для обозначенія того, что данный рядъ есть радикальная прогрессія, мы будемъ употреблять знакъ $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot}{-}}$.

Возьмемъ прогрессію, въ которой постоянно отношеніе послѣдующаго къ предыдущему: $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot}{-}}\ a_1, a_2, a_3, \ldots$; по опредѣленію прогрессіи, имѣемъ: $\sqrt[a_1]{a_2}=\sqrt[a_2]{a_3}=\sqrt[a_3]{a_4}=q$, а отсюда получаемъ слѣдующій рядъ равенствъ: $a_2=q^{a_1}$, $a_3=q^{a_2}$, $a_4=q^{a_3}\ldots$ и т. д.

Эти равенства показываютъ, какъ можно построить радикальную прогрессію перваго вида, выбравъ первый членъ и постоянное отношеніе; для этого достаточно возвысить это отношеніе въ степень выражаемую первымъ членомъ,—получимъ второй; позвысивши постоянное въ степень, выражаемую вторымъ членомъ, получимъ третій и т. д.

Теперь покажемъ, какъ построить радикальную прогрессію второго вида; для этого возьмемъ прогрессію $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot}{-}}\ b_1, b_2, b_3\ldots$; по опредѣленію, имѣемъ: $\sqrt[b_2]{b_1}=\sqrt[b_3]{b_2}=\sqrt[b_4]{b_3}=\ldots=q$, а отсюда получаемъ $b_2=\overset{b_1}{\underset{q}{\sim}}$; $b_3=\overset{b_2}{\underset{q}{\sim}}$; $b_4=\overset{b_3}{\underset{q}{\sim}}$; . . . Изъ этихъ равенствъ видно, что для того, чтобы построить радикальную прогрессію второго вида, имѣя первый членъ и отношеніе, нужно первый членъ логариѳмировать по этому отношенію—получимъ второй членъ; логариѳмируя второй членъ, получимъ третій и т. д

*) См. № 397 „Вѣстника“.

Формула общаго члена прогрессіи. На основаніи всего сказаннаго о построеніи радикальной прогрессіи мы прямо можемъ написать формулы для любого ея члена:

$$a_n = q^{q^{\cdot^{\cdot^{q^{a_1}}}}}, \quad a_n = \left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c} a_1 \\ \hline q \end{array}\right) \\ \hline q \\ \vdots \\ \hline q \end{array}\right); \tag{1}$$

первое выраженіе для перваго вида радикальной прогрессіи, второе для второго; въ обоихъ изъ нихъ q повторяется $(n-1)$ разъ.

Изъ формулъ (1) a_1 опредѣляется очень легко; но какъ опредѣлить q или n, на этотъ счетъ трудно дать опредѣленное правило.

Впрочемъ, если $n=3$, то q отыскивается довольно легко. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $a_3 = q^{q^{a_1}}$; возвышая обѣ части равенства въ a_1, получимъ: $a_3^{a_1} = \left(q^{a_1}\right)^{q^{a_1}}$; $a_3^{a_1} = \left(q^{a_1}\right)^{\overset{2}{-}}$; $q^{a_1} = \sqrt[\overset{2}{-}]{a_3^{a_1}}$, и наконецъ $q = \sqrt[a_1]{\sqrt[\overset{2}{-}]{a_3^{a_1}}}$. (2)

Извѣстно, что въ разностной и кратной прогрессіяхъ сумма или произведеніе членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ, равна соотвѣтственно суммѣ или произведенію крайнихъ членовъ; радикальная прогрессія обладаетъ свойствомъ, напоминающимъ это свойство.

По опредѣленію прогрессіи $\sqrt[a_1]{a_2} = \sqrt[a_2]{a_3} = \ldots = \sqrt[a_{n-2}]{a_{n-1}} = \sqrt[a_{n-1}]{a_n}$; соединяя попарно равноотстоящіе отъ концовъ радикалы, мы получимъ, пользуясь формулой (1) радикальной пропорціи:

$$a_n^{a_1} = a_2^{a_{n-1}};\ a_{n-1}^{a_2} = a_3^{a_{n-2}};\ a_{n-2}^{a_3} = a_4^{a_{n-3}} \ldots\ a_{n-k}^{a_{k+1}} = a_{k+2}^{a_{n-k-1}} \tag{3}$$

Изъ этихъ формулъ видно, что если бы степень была симметрична относительно основанія и показателя, то свойство радикальной прогрессіи было бы вполнѣ аналогично свойствамъ разностной и кратной прогрессій.

Что касается формулъ для суммы и произведенія членовъ радикальной прогрессіи, то найти ихъ мнѣ не удалось; я нашелъ только формулу, выражающую зависимость между суммой и произведеніемъ.

Для вывода этой формулы воспользуемся формулой (7) радикальной прогрессіи, примѣнивъ ее къ ряду равенствъ:

$$\sqrt[a_1]{a_2} = \sqrt[a_2]{a_3} = \ldots \sqrt[a_{n-1}]{a_n}; \text{ тогда получимъ:}$$

$$\sqrt[a_1+a_2+\ldots a_{n-1}]{a_2 a_3 \ldots a_n} = q; \quad \sqrt[s_n - a_n]{P_n : a_1} = q; \text{ или}$$

$$P_n : a_1 = q^{s_n - a_n}. \tag{4}$$

Такъ какъ мы не умѣемъ пока опредѣлять q изъ формулы общаго члена радикальной прогрессіи, то мы не можемъ рѣшить задачи о вставленіи между двумя числами n промежуточныхъ членовъ радикальной прогрессіи.

Относительно же другой задачи можно показать, что „если между каждыми двумя членами радикальной прогрессіи вставимъ по n среднихъ, то полученный рядъ уже не будетъ представлять радикальной прогрессіи“.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы можно было, не нарушая закона прогрессіи, вставить во всѣхъ промежуткахъ по n среднихъ, то и наоборотъ изъ радикальной прогрессіи можно было бы выпустить по n промежуточныхъ членовъ. Покажемъ, что этого сдѣлать нельзя. Возьмемъ прогрессію, у которой постоянное отношеніе равно q

$$\div a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} \ldots a_{2n+2}, a_{2n+3}, a_{2n+4}, \ldots;$$

составляя первый членъ a_1, выпустимъ слѣдующіе n членовъ; оставимъ $(n+2)$-й членъ и выпустимъ слѣдующіе за нимъ n членовъ; снова оставимъ $(2n+3)$-й и т. д.; тогда мы получимъ рядъ: a_1, a_{n+2}, a_{2n+3}, $a_{3n+4} \ldots a_{mn+m+1}$; если это радикальная прогрессія, то должно существовать равенство: $a_{2n+3}^{a_1} = a_{n+2}^{a_{n+2}}$; подставляя въ полученное равенство вмѣсто a_{n+2} и a_{2n+3} ихъ выраженія черезъ a_1 и q изъ вышенаписанной прогрессіи, получаемъ равенство

$$\left(q^{q^{\cdot^{\cdot^{q^{a_1}}}}}\right)^{a_1} = \left(q^{q^{\cdot^{\cdot^{q^{a_1}}}}}\right)^{q^{q^{\cdot^{\cdot^{q^{a_1}}}}}}$$

(въ лѣвой части q повторено $2n+2$ разъ, а въ правой оба раза по $n+1$ разу); но это равенство невозможно вслѣдствіе несимметричности степени.

Логариѳмическая пропорція.

Опредѣленіе. Логариѳмической пропорціей называется равенство двухъ логариѳмическихъ отношеній. Например, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (логариѳмич.); для чиселъ a, b, c, d мы оставляемъ названія, данныя имъ въ радикальной пропорціи. Логариѳмическая пропорція не обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ среднихъ и крайнихъ членовъ, но свойствомъ перестановки членовъ обладаетъ въ полной степени.

Перестановка членовъ. Подобно разностной и кратной пропорціи логариѳмическая можетъ быть также написана въ 8 видахъ. Вотъ онѣ:

$$1)\ \overset{a}{\underset{b}{\sim}} = \overset{c}{\underset{d}{\sim}};$$

отсюда по теоремѣ 2 (стр. 14), получаемъ:

$$2)\ \overset{b}{\underset{a}{\sim}} = \overset{d}{\underset{c}{\sim}}:$$

помножая равенство 1) на $\overset{b}{\underset{c}{\sim}}$, получимъ:

$$3)\ \overset{a}{\underset{c}{\sim}} = \overset{b}{\underset{d}{\sim}} \text{ и снова:}$$

$$4)\ \overset{c}{\underset{a}{\sim}} = \overset{d}{\underset{b}{\sim}};$$

переставляя теперь лѣвыя части на мѣсто правыхъ, получимъ еще четыре фигуры:

$$5)\ \overset{c}{\underset{d}{\sim}} = \overset{a}{\underset{b}{\sim}};$$

$$6)\ \overset{d}{\underset{c}{\sim}} = \overset{b}{\underset{a}{\sim}};$$

$$7)\ \overset{b}{\underset{d}{\sim}} = \overset{a}{\underset{c}{\sim}};$$

$$8)\ \overset{d}{\underset{b}{\sim}} = \overset{c}{\underset{a}{\sim}}.$$

Что касается формулъ для опредѣленія неизвѣстнаго четвертаго члена по тремъ даннымъ, то онѣ получаются на основаніи общихъ правилъ. Возьмемъ пропорцію $\overset{a}{\underset{b}{\sim}} = \overset{c}{\underset{d}{\sim}}$; отсюда получимъ:

$$a = b^{\overset{c}{\underset{d}{\sim}}};\quad c = d^{\overset{a}{\underset{b}{\sim}}};$$

$$b = a^{\overset{d}{\underset{c}{\sim}}};\quad d = c^{\overset{b}{\underset{a}{\sim}}}. \qquad (1)$$

Непрерывная пропорція. Если въ логариѳмической пропорціи оба крайнихъ или оба среднихъ равны, то пропорція называется непрерывною. Напримѣръ, $\overset{a}{\underset{b}{\sim}} = \overset{b}{\underset{c}{\sim}}$.

Опредѣлимъ неизвѣстный членъ логариѳмической непрерывной пропорціи $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; пусть $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} = q$, тогда $a = x^q$; $x = b^q$; подставляя значеніе x изъ второго уравненія въ первое, получимъ $b^{q^2} = a$; откуда $q^2 = \frac{a}{b}$ и $q = \sqrt{\frac{a}{b}}$; обращаясь снова къ данной пропорціи, получимъ два уравненія: $\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ и $\frac{x}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; опредѣляя изъ нихъ x, получимъ:

$$x = a^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \text{ и } x = b^{\sqrt{\frac{a}{b}}}. \tag{2}$$

Оба результата тождественны на основаніи слѣдствія 3, на стр. 15, частный случай котораго они представляютъ.

Полученная для неизвѣстнаго члена непрерывной логариѳмической пропорціи формула замѣчательна въ томъ отношеніи, что не указываетъ на новыя дѣйствія, между тѣмъ какъ формула для неизвѣстнаго члена непрерывной разностной пропорціи указываетъ на дѣленіе, кратной—на извлеченіе, радикальной—на совершенно новое дѣйствіе.

Средній членъ непрерывной логариѳмической пропорціи въ противоположность среднему члену непрерывной радикальной пропорціи можетъ быть названъ среднимъ логариѳмическимъ между a и b, потому что имѣетъ вполнѣ опредѣленную числовую величину, такъ какъ не измѣняется отъ перемѣны a на b. Но я не вижу возможности ввести понятіе о среднемъ логариѳмическомъ нѣскольскихъ чиселъ, если ихъ больше двухъ.

Теорема 1. Среднее геометрическое двухъ чиселъ, одновременно большихъ или меньшихъ единицы, больше ихъ средняго логариѳмическаго.

Доказительство. Предположимъ, что справедливо неравенство $\sqrt{ab} > a^{\sqrt{\frac{b}{a}}}$; возвышаемъ обѣ части въ квадратъ (обѣ части имѣютъ одинаковый знакъ $+$, потому что мы принимаемъ въ разсчетъ только ариѳметическое значеніе корня): $ab > a^{2\sqrt{\frac{b}{a}}}$; логариѳмируемъ по a: $1 + \frac{b}{a} > 2\sqrt{\frac{b}{a}}$; переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть: $1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} > 0$ или $\left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 > 0$. Послѣднее неравенство справедливо при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ корня; а вещественныя значенія получаются тогда, когда a и b одновременно больше или меньше единицы,—слѣдовательно, теорема доказана.

Теорема 2. Если въ двухъ логариѳмическихъ пропорціяхъ предыдущіе логариѳмически пропорціональны, то и послѣдующіе логариѳмически пропорціональны и наоборотъ.

Доказательство. Возьмемъ двѣ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{a^m}{b'}=\frac{c^m}{d'}$;

въ нихъ предыдущіе пропорціональны, потому что $\frac{a}{a^m}=\frac{c}{c^m}$;

раздѣливши первую на вторую, получимъ: $\frac{b'}{b}=\frac{d'}{d}$, что и требовалось доказать. Такъ какъ въ логариѳмической пропорціи всегда можно поставить предыдущіе на мѣсто послѣдующихъ и послѣдующіе на мѣсто предыдущихъ, то, по доказанному, и обратная теорема справедлива.

Производныя пропорціи. Такъ какъ логариѳмическая пропорція имѣетъ всѣ восемь фигуръ, то мы можемъ получить всѣ производныя пропорціи, аналогичныя производнымъ пропорціямъ для кратной пропорціи.

Возьмемъ пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, прибавивъ къ обоимъ частямъ ея ± 1 и приведя ± 1 къ одному основанію съ логариѳмами, получимъ:

$$\frac{a \cdot: b}{b}=\frac{c \cdot: d}{d}; \tag{3}$$

раздѣливъ (4) на данную пропорцію, получимъ:

$$\frac{a \cdot: b}{a}=\frac{c \cdot: d}{d}; \tag{4}$$

напишемъ раздѣльно пропорціи, представляемыя (8): $\frac{a.b}{b}=\frac{c.d}{d}$ и

$\frac{a:b}{b}=\frac{c:d}{d}$; раздѣливъ первую на вторую, получимъ:

$$\frac{a.b}{a:b}=\frac{c.d}{c:d}. \tag{5}$$

Теорема 3. Если мы имѣемъ рядъ равныхъ логариѳмическихъ отношеній, то произведеніе всѣхъ предыдущихъ такъ относится (логариѳмически) къ произведенію всѣхъ послѣдующихъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

Доказательство. Возьмемъ рядъ равныхъ логариѳмическихъ отношеній, каждое изъ которыхъ равно q: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=$

$=\frac{a_n}{b_n}=q$; тогда получимъ слѣдующій рядъ равенствъ: $a_1=b_1{}^q$;

$a_2 = b_2{}^q$; $a_3 = b_3{}^q$; $\ldots a_n = b_n{}^q$; перемножая эти равенства почленно, получимъ $a_1 a_2 \ldots a_n = (b_1 b_2 \ldots b_n)^q$ или

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} = q = \frac{a_k}{b_k}. \tag{6}$$

Если же мы предварительно каждое $\frac{a_k}{b_k}$ замѣнимъ равнымъ ему отношеніемъ $\frac{a_k^{\lambda_k}}{b_k^{\lambda_k}}$ и затѣмъ къ ряду новыхъ отношеній примѣнимъ только что доказанную теорему, то получимъ болѣе общую формулу:

$$\frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}}{b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_n^{\lambda_n}} = \frac{a_k}{b_k}. \tag{7}$$

Извѣстно, что кратныя пропорціи мы можемъ всегда перемножать и дѣлить почленно, складывать же и вычитать можно только въ извѣстныхъ случаяхъ. Что касается логариѳмическихъ пропорцій, то ихъ можно только перемножать и дѣлить, да и то лишь въ извѣстныхъ случаяхъ; какіе это случаи мы сейчасъ увидимъ. Возьмемъ двѣ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$. Перемножая и дѣля почленно, получимъ: $\frac{a \cdot: a'}{b \cdot: b'} = \frac{c \cdot: c'}{d \cdot: d'}$; отсюда

$a \cdot: a' = b^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}}$; замѣняемъ и a' ихъ значеніями изъ данныхъ пропорцій: $b^{\frac{c}{d}} \cdot: b'^{\frac{c'}{d'}} = b^{\frac{c \,\cdot: c'}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}}$ замѣняемъ $\frac{c}{d}$ и $\frac{c'}{d'}$ равными имъ величинами

$\frac{(d \cdot: d')^{\frac{c}{d}}}{d \cdot: d}$ и $\frac{(d \cdot: d')^{\frac{c'}{d'}}}{d \cdot: d'}$, получимъ: $b^{\frac{(d \,\cdot\, d')^{\frac{c}{d}}}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{(d \,\cdot :d')^{\frac{c'}{d'}}}{d \,\cdot :d}} = b^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}}$,

преобразуемъ показателей при b и b' лѣвой части по слѣд. 2 (стр. 15).

$$b^{\frac{c^{1 \pm \frac{d'}{d}}}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{c'^{\frac{d}{d'} \pm 1}}{d \,\cdot :d'}} = b^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}} \cdot: b'^{\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}};$$

переносимъ b въ лѣвую часть b' въ правую:

$$b^{\frac{c^{1 \pm \frac{d'}{d}}}{d \,\cdot :d'} - \frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'}} = b'^{\pm\left(\frac{c \,\cdot :c'}{d \,\cdot :d'} - \frac{c'^{\frac{d}{d'} \pm 1}}{d \,\cdot :d'}\right)};$$

производимъ дѣйствія надъ показателями:

$$b^{\frac{c^{1 \pm \frac{d'}{d} : (c \cdot : c')}}{d \cdot : d'}} = b'^{\pm \frac{(c \cdot : c') : c'^{\frac{d}{d'} \pm 1}}{d \cdot : d'}};$$

отсюда по свойству радикальной пропорціи и послѣ выполненія надъ показателями остающихся дѣйствій, получаемъ:

$$\frac{b}{b'} = \pm \frac{c . c'^{-\frac{d}{d'}}}{c^{\pm \frac{d'}{d}} \cdot : c'},$$ замѣняемъ c и c' черезъ $c'^{\frac{c}{c'}}$ и $c^{\frac{c'}{c}}$:

$$\frac{b}{b''} = \pm \frac{c'^{\frac{c}{c'}} . c'^{-\frac{d}{d'}}}{c^{\pm \frac{d'}{d}} \cdot : c^{\frac{c'}{c}}};$$ производимъ умноженія, а изъ основанія

логариѳма, кромѣ того, извлекаемъ корень ± 1 степени:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c'^{\frac{c}{c'} - \frac{d}{d'}}}{c^{\frac{d'}{d} - \frac{c'}{c}}};$$ отдѣляемъ показателей: $$\frac{b}{b'} = \frac{c'}{c} \cdot \frac{\frac{c}{c'} - \frac{d}{d'}}{\frac{d'}{d} - \frac{c'}{c}};$$

дѣлимъ обѣ части на $\frac{c'}{c} : \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{\frac{c}{c'} - \frac{d}{d'}}{\frac{d'}{d} - \frac{c'}{c}}$; умножаемъ знамена-

теля и переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть:

$$\frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{d'}{d} - \frac{b}{b'} - \frac{c}{c'} + \frac{d}{d'} = 0;$$ выносимъ въ первомъ и второмъ членѣ общаго множителя $\frac{b}{b'}$, а въ третьемъ и въ четвертомъ $-\frac{d}{d'} : \frac{b}{b'}\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d'}{d} - 1\right) - \frac{d}{d}\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d'}{c'} - 1\right) = 0$ или

$$\left(\frac{b}{b'} - \frac{d}{d'}\right)\left(\frac{c}{c'} \cdot \frac{d'}{d} - 1\right) = 0;$$ отсюда $\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'}$ или $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, т. е.

Теорема 4. Двѣ логариѳмическія пропорціи можно перемножать и дѣлить почленно, когда 1) предыдущіе (послѣдующіе) пропорціональны и 2) постоянныя отношенія пропорціи равны.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О микрофотографіи помощью ультрафіолетовыхъ лучей. (Изъ доклада, представленнаго Съѣзду нѣмецкихъ естествоиспытателей въ Бреславлѣ A. Köhler'омъ).

Геометрическая оптика даетъ элементарную теорію микроскопа, исходя изъ представленія о прямолинейномъ свѣтовомъ лучѣ. Основное положеніе физической оптики о томъ, что свѣтъ распространяется по законамъ волнообразнаго движенія, не принимается во вниманіе геометрической оптикой. Пока размѣры объекта значительно превышаютъ величину соотвѣтственныхъ свѣтовыхъ волнъ, результаты геометрической оптики согласуются съ наблюденіями; когда же указанное условіе не выполняется, тогда приходится считаться съ явленіемъ диффракціи, для пониманія котораго необходимо прибѣгнуть къ волнообразной теоріи свѣта.

Основныя черты диффракціонной теоріи микроскопа состоятъ въ слѣдующемъ: когда разсматриваемый подъ микроскопомъ объектъ имѣетъ величину того же порядка, что и длина волны, тогда изображеніе уже не является болѣе изображеніемъ въ настоящемъ смыслѣ слова, т. е. увеличенной проекціей объекта на визируемую плоскость, а представляетъ собою лишь нѣкоторую схему, которая болѣе или менѣе точно воспроизводитъ взаимное расположеніе элементовъ объекта. Но и такое схематическое изображеніе можно получить лишь въ томъ случаѣ, когда размѣры элементовъ объекта не меньше полудлины соотвѣтственныхъ волнъ: здѣсь мы достигаемъ предѣла разрѣшающей силы микроскопа. Чтобы отдалить этотъ предѣлъ, нужно, очевидно, пользоваться свѣтовыми волнами возможно меньшей длины. Извѣстное соотношеніе

$$\lambda = \frac{V}{N}$$

между длиной волны λ, скоростью распространенія ея V и числомъ N указываетъ намъ, что для намѣченной цѣли нужно стремиться либо къ уменьшенію числителя V, либо же къ увеличенію числа колебаній N. Первое достигается помощью иммерсіонныхъ системъ, гдѣ объектъ разсматривается сквозь среду съ большимъ показателемъ преломленія, что равносильно уменьшенію V, т. е. скорости распространенія свѣта. Этотъ способъ имѣетъ то огромное неудобство, что вещества съ болѣе или менѣе значительнымъ показателемъ преломленія разрушающе дѣйствуютъ на объекты, и не могутъ служить для нихъ средой. Поэтому для увеличенія разрѣшающей силы микроскопа нужно прибѣгнуть ко второму методу: увеличенію числа (N) колебаній. Съ этой цѣлью вмѣсто бѣлаго свѣта пользуются синими или фіолетовыми лучами, которымъ, какъ извѣстно, соотвѣтствуетъ наибольшее число колебаній. Референтъ съ своей стороны примѣнилъ впервые ультрафіолетовые лучи; число колебаній, соотвѣтствующее имъ, еще больше, чѣмъ для вышеупомянутыхъ синихъ и фіолетовыхъ лучей, которые примѣнялись до сихъ поръ. Для того, чтобы сдѣлать недѣйствующіе на нашъ глазъ ультрафіолетовые лучи видимыми, референтъ прибѣгаетъ къ помощи фотографіи.

Чтобы пользоваться ультрафіолетовыми лучами для микрофотографическихъ изслѣдованій, необходимо имѣть аппаратъ для освѣщенія и спеціальный оптическій приборъ для микроскопа, а именно такъ называемую микрофотографическую камеру. Въ качествѣ источника свѣта референтъ пользуется электрической искрой между кадміевыми или магніевыми электродами. Искру онъ получаетъ помощью Лейденской банки, заряжаемой индукціонной катушкой. Чтобы выдѣлить изъ этого источника свѣта лучи съ наименьшей длиной волны (275 $\mu\mu$ для кадмія. 280 $\mu\mu$ для магнія), референтъ разлагаетъ свѣтъ помощью чечевицъ и призмъ спектральнаго прибора. Чечевицы и призмы сдѣланы изъ горнаго хрусталя. Лучи съ указанной длиной волны отдѣляются отъ остальныхъ помощью діафрагмы—ирисъ; черезъ эту послѣднюю на препаратъ падаетъ коническій пучокъ лучей. Препаратъ помѣщается на кварцевой объективной пластинкѣ, или на пластинкѣ изъ особаго рода стекла *UV*, (пропускающаго ультрафіолетовые лучи), и покрывается покровной пластинкой изъ сплавленнаго литого кварца. Объективы изготовляются по спеціальной формулѣ, предложенной г-омъ Rohr. Объективы состоятъ исключительно изъ литого кварца. Поправку нужно дѣлать только относительно сферической аберраціи, окуляръ сдѣланъ изъ горнаго хрусталя.

Путемъ такихъ приспособленій референтъ достигъ того, что разрѣшающая сила микроскопа увеличилась на 150%, тогда какъ помощью иммерсіи увеличеніе не превосходитъ 40%.

Оказывается, что микрофотографія помощью ультрафіолетовыхъ лучей имѣетъ еще одну выгодную сторону: опытъ показалъ, что нѣкоторыя части тканей, вродѣ хроматина ядеръ, ороговѣвшихъ клѣтокъ и др. почти не пропускаютъ ультрафіолетовыхъ лучей, и такимъ образомъ эти части сами собой выдѣляются на фотографической пластинкѣ, причемъ для этого вовсе не требуется спеціальныхъ окрашиваній.

Rev. Gen.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ

„Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ. будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ

№ 659 (4 сер.) Построить треугольникъ ABC, зная высоту AD, уголъ A и разность отрѣзковъ $BD-DC$.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 660 (4 сер.). Девять величинъ связаны уравненіями

$$a^2+a'^2-k^2=1,\quad b^2+b'^2-l^2=1,\quad c^2+c'^2-m^2=-1,$$

$$ab+a'b'-kl=0,\quad bc+b'c'-lm=0,\quad ca+c'a'-mk=0,$$

$$b+c=0.$$

Выразить всѣ величины въ зависимости отъ двухъ изъ нихъ.

В. К. (Одесса).

№ 661 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$y^n+z^{-n}=a,$$

$$z^n+x^{-n}=b,$$

$$x^n+y^{-n}=c.$$

Г. Оганянцъ (Москва).

№ 662 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^{4n}-4x^n-1=0.$$

(Заимств.).

№ 663 (4 сер.). Доказать, что произведеніе

$$n(n+1)\ldots(2n-3)(2n-2),$$

гдѣ n — цѣлое положительное число, дѣлится на 2^{n-1}.

(Заимств.).

№ 664 (4 сер.). Три наклонныя плоскости AB, AC и CB образуютъ грани полой трехгранной призмы, ребра которой параллельны горизонту. Дано, что $\angle CAB=\alpha$ и что матеріальная точка, двигаясь по плоскостямъ AB и AC безъ тренія, употребляетъ для прохожденія этихъ плоскостей одно и то же время τ. Опредѣлить длину плоскости CB.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

№ 547 (4 сер.). *Мой возрастъ выражается двузначнымъ числомъ лѣтъ, цифра единицъ котораго единицею больше цифры десятковъ. Если возвысить цифру десятковъ въ степень, равную цифрѣ единицъ, и прибавить къ полученному числу умноженный на* 1,4 *результатъ возвышенія цифры единицъ въ степень, равную цифрѣ десятковъ, то получится окончательно* 20,6. *Сколько мнѣ лѣтъ?*

Обозначая цифру десятковъ черезъ x, согласно съ условіемъ, получимъ:

$$x^{x+1}+1{,}4(x+1)^x=20{,}6,$$

или, помноживъ обѣ части на 5,

$$5x^{x+1}+7(x+1)^x=103. \quad (1)$$

Если $x \geqslant 3$, то $5x^{x+1}+7(x+1)^x > 5.3^4=405>103$. Поэтому x, какъ число цѣлое, равно 1 или 2. Изъ этихъ двухъ значеній лишь $x=2$ удовлетворяетъ равенству (1). Поэтому искомое число лѣтъ равно 23.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *Е. Доремп* (Брацлавъ).

№ 548 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$a=y+x(1+z)^2,$$

$$b=y(1+z)^2+xz^2,$$

$$c=x+yz^2.$$

Опредѣляя y изъ перваго уравненія и подставляя найденное значеніе во второе и третье изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$y=a-x(1+z)^2, \quad (1)$$

$$b=a(1+z)^2-x[(1+z)^4-z^2], \quad c=az^2+x[1-(1+z)^2z^2],$$

или

$$b=a(1+z)^2-x(1+z+z^2)(1+3z+z^2), \quad (2)$$

$$c=az^2+x(1+z+z^2)(1-z-z^2). \quad (3)$$

Изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$x=\frac{c-az^2}{(1+z+z^2)(1-z-z^2)}. \quad (4)$$

Подставивъ это значеніе x въ уравненіе (2), находимъ:

$$b=a(1+z)^2-\frac{(c-az^2)(1+z+z^2)(1+3z+z^2)}{(1+z+z^2)(1-z-z^2)}; \quad (5)$$

или, послѣ сокращенія дробнаго члена на $1+z+z^2$, освобожденія отъ знаменателя и расположенія по степенямъ z,—

$$(a-b+c)z^2-(a+b-3c)z-a+b+c=0, \quad (6)$$

откуда

$$z=\frac{a+b-3c\pm\sqrt{5(a^2+b^2+c^2)-6(ab+ac+bc)}}{2(a-b+c)}. \quad (7)$$

Подставляя найденное значеніе z, находимъ (см. (4)) x, а затѣмъ (см. (1)) y. Опредѣляя x изъ равенства (3), мы полагали, что $1+z+z^2\neq 0$, $1-z-z^2\neq 0$. Поэтому для полноты рѣшенія надо подставить въ данную систему вмѣсто z каждый изъ корней уравненій $1+z+z^2=0$, $1-z-z^2=0$ и изслѣдовать, въ какихъ случаяхъ z можетъ имѣть эти значенія и какія значенія x и y имъ соотвѣтствуютъ. Точно также необходимо изслѣдовать особо случай, когда $a=b=c$, что является необходимымъ и достаточнымъ условіемъ обращенія равенства (6) въ тожество, такъ какъ изъ $a-b+c=0$, $a+b-3c=0$, $-a+b+c=0$ находимъ $a=b=c=0$ и наоборотъ. Замѣтимъ еще, что если $c-az^2$ и $1-z-z^2$ имѣютъ общаго дѣлителя, то дробный членъ равенства (5) надо сократить еще и на этого дѣлителя.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

№ 558 (4 сер.). *Доказать, что при* n *цѣломъ и не меньшемъ нуля число*

$$3^{2n+2}.4+32n-36$$

кратно 64.

Представимъ разсматриваемое выраженіе въ видѣ

$$3^{2n+2}.4+32n-36=4(3^{2n+2}+8n-9) \qquad (1).$$

Пусть n число четное, т. е. $n=2k$, гдѣ k—число цѣлое. Тогда

$$3^{2n+2}+8n-9=3^{4k+2}+16k-9=3^{4k}.3^2-9+16k=$$

$$=9\left[(3^4)^k-1\right]+16k=9(81^k-1)+16k \qquad (2).$$

Разность 81^k-1 дѣлится на $81-1=80$, а потому и на 16; слѣдовательно, при n четномъ число $3^{2n+2}+8n-9$ (см. (2)) кратно 16, а потому все разсматриваемое число кратно (см. (1)) 64. Пусть теперь n нечетно, т. е. $n=2k+1$, гдѣ k—цѣлое. Тогда

$$3^{2n+2}+8n-9=3^{4k+4}+16k+8-9=(3^4)^{k+1}-1+16k=$$

$$=81^{k+1}-1+16k \qquad (3).$$

Разность $81^{k+1}-1$, будучи кратна $81-1=80$, кратна также и 16; слѣдовательно, и при n нечетномъ число $3^{2n+2}+8n-9$ кратно (см. (3)) 16, а потому все разсматриваемое число кратно 64. Итакъ, при всякомъ цѣломъ и не отрицательномъ n разсматриваемое число кратно 64.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Плахово*; *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *А. Брюхановъ* (Иркутскъ); *А. Варенцовъ* ((Ростовъ н/Д); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *Э. Лейникъ* (Рига).

№ 559 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[7]{2137+10x}+\sqrt[7]{178-10x}=5.$$

Полагая $\sqrt[7]{2137+10x}=u$ (1), $\sqrt[7]{178-10x}=v$ (2), приводимъ данное уравненіе къ виду

$$u+v=5 \qquad (3).$$

Возвышая каждое изъ равенствъ (1) и (2) въ седьмую степень и складывая ихъ, получимъ $u^7+v^7=2315$ (4). Раздѣливъ равенство (4) на равенство (3), находимъ: $u^6-u^5v+u^4v^2-u^3v^3+u^2v^4-uv^5+v^6=463$, или

$$u^6+v^6-uv(u^4+v^4)+u^2v^2(u^2+v^2)-u^3v^3=463 \qquad (5).$$

Полагая (см. (3)) $u+v=a=5$ (6), $uv=z$ (7) и возвышая равенство (6) въ квадратъ, имѣемъ (см. (7)): $u^2+v^2+2uv=u^2+v^2+2z=a^2$, откуда

$$u^2+v^2=a^2-2z \qquad (8).$$

Возвышая равенство (8) въ квадратъ, получимъ (см. (7)) $u^4+v^4+2u^2v^2=$ $=u^4+v^4+2z^2=a^4-4a^2z+4z^2$, откуда

$$u^4+v^4=a^4-4a^2z+2z^2 \qquad (9).$$

Возвысивъ въ кубъ равенство (8), находимъ (см. (7), (8))

$$u^6+v^6+3u^2v^2(u^2+v^2)=u^6+v^6+3z^2(a^2-2z)=(a^2-2z)^3, \text{ откуда,}$$

$$u^6+v^6=(a^2-2z)^3-3z^2(a^2-2z)=(a^2-2z)(a^4-4a^2z+z^2). \qquad (10)$$

Такимъ образомъ лѣвую часть равенства (5) можно представить въ видѣ (см. (10), (9), (8), (7))

$$u^6+v^6-uv(u^4+v^4)+u^2v^2(u^2+v^2)-u^3v^3=(a^2-2z)(a^4-4a^2z+z^2)-z(a^4-4a^2z+2z^2)+$$
$$+z^2(a^2-2z)-z^3=-7(z^3-2a^2z^2+a^4z)+a^6,$$

такъ что, замѣчая, что $a=5$ (см. (6), (3)), равенство (5) можно записать въ видѣ

$$-7(z^3-50z^2+625z)+15625-463=0,$$

$$-7(z^3-50z^2+625z)+15162=0,$$

или, дѣля обѣ части на (-7), въ видѣ

$$z^3-50z^2+625z-2166=0 \qquad (11).$$

Разлагая лѣвую часть уравненія (11) на множителей, представимъ его въ видѣ

$$(z-6)(z^2-44z+361)=0,$$

откуда (см. (7)) $z=uv=6$, или $z=uv=22\pm\sqrt{123}$. Поэтому (см. 6)) v равно одному изъ корней одного изъ квадратныхъ уравненій $t^2-5t+6=0$, $t^2-5t+22\pm\sqrt{123}=0$, откуда (см. (2))

$$v=\sqrt[7]{178-10x}=2, \text{ или } v=\sqrt[7]{178-10x}=3,$$

или

$$v=\sqrt[7]{178-10x}=\frac{5\pm\sqrt{-63\pm4\sqrt{123}}}{2},$$

откуда

$$x_1=5, \text{ или } x_2=200{,}9 \text{ или } x_{3,4,5,6}=\left[178-\left(\frac{5\pm\sqrt{-63\pm4\sqrt{123}}}{2}\right)^7\right]:10.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 11-го Ноября 1905 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется