Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXXIII Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

30 Апрѣля. № 392. 1905 г.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ

развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Привать-доцента В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Какъ мы сказали выше, со смертью Лобачевскаго и Больэ, ихъ замѣчательныя идеи, мало извѣстныя при ихъ жизни, были вовсе забыты. Въ чемъ же заключается причина того, что идеи эти оказались столь мало доступными? Почему нуженъ былъ геній Гаусса, чтобы оцѣнить ихъ значеніе? Причина коренилась въ томъ воззрѣніи на сущность математики и, въ частности, геометріи, которое не только господствовало, но котораго придерживались, можно сказать, всѣ математики. Воззрѣніе это заключалось въ томъ, что математическіе и, въ частности, геометрическіе образы считались неразрывно связанными съ нѣкоторымъ субстратомъ, свойства котораго они выражаютъ. Правда, идея о томъ, что математика есть наука формальная, очень стара. Но подъ этимъ, въ примѣненіи, напримѣръ, къ геометріи, разумѣли лишь то, что свойства пространства логически выводятся изъ небольшого числа основныхъ его свойствъ; но эти основныя свойства никто не отдѣлялъ отъ того „реальнаго пространства",

*) См. № 391 „Вѣстника".

которому они принадлежатъ. Различные философы, занимавшіеся теоріей познанія, различно смотрѣли на источники нашихъ свѣдѣній о пространствѣ; но въ томъ, что геометрія неразрывно связана съ нѣкоторой объективной сущностью, или субстанціей,— въ этомъ никто не сомнѣвался. Да и могло ли оно быть иначе, когда сама геометрическая дедукція, по существу, была совершенно фиктивна. Конечно, въ математикѣ, въ геометріи выводъ играетъ гораздо болѣе важную роль, нежели въ эмпирическихъ наукахъ; но и здѣсь интуиція сопровождаетъ умозаключеніе на каждомъ шагу. Лишь весьма мало вдумчивые люди могли вѣрить въ то, что „Начала“ Евклида, хотя бы исправленныя и дополненныя комментаторами, дѣйствительно разматываютъ геометрическую систему дедуктивно изъ нѣсколькихъ посылокъ. А разъ интуиція сопровождаетъ выводъ, то какъ можно отвлечь результатъ этого вывода отъ того субстрата, который служилъ матеріаломъ для этой интуиціи? Эта двойственность,—распространенное утвержденіе, что математика есть наука дедуктивная, съ одной стороны, и сознаніе неизбѣжности интуиціи въ математическомъ разсужденіи, съ другой стороны,—служила источникомъ многихъ недоразумѣній; но, что геометрія неразрывно связана съ нѣкоторымъ реальнымъ субстратомъ,—въ этомъ были убѣждены всѣ.

Совершенно ясно, что ученіе Лобачевскаго и Больэ находилось въ прямомъ противорѣчіи съ этимъ воззрѣніемъ. Въ геометрію, неразрывно связанную съ опредѣленными пространственными представленіями, былъ введенъ принципъ, который приводилъ къ результатамъ, прямо противорѣчащимъ этимъ представленіямъ; и это несмотря на то, что новая геометрія въ своихъ разсужденіяхъ тоже непрестанно апелировала къ прежнимъ интуитивнымъ представленіямъ (напримѣръ, когда рѣчь шла о внутреннихъ и внѣшнихъ точкахъ, объ одной и другой сторонѣ линіи, поверхности, площади и т. д.). Какъ уяснить себѣ это противорѣчіе результатовъ съ реальнымъ субстратомъ, къ которому мы постоянно аппелируемъ, когда ищемъ этотъ результатъ? Какъ примирить это противорѣчіе съ удивительнымъ согласіемъ отдѣльныхъ результатовъ? Это вопросъ, надъ которымъ Лобачевскій размышлялъ всю свою жизнь и на который онъ не умѣлъ дать удовлетворительнаго отвѣта; это причина, вслѣдствіе которой его ученіе было встрѣчено съ такимъ недовѣріемъ.

Гиперболическая геометрія была не первымъ математическимъ ученіемъ, которое было встрѣчено съ крайнимъ недовѣріемъ. Съ такимъ же недовѣріемъ было встрѣчено и ученіе о мнимыхъ величинахъ и при томъ по той же причинѣ,—по отсутствію реальнаго субстрата, съ которымъ считали неразрывно связанными математическіе символы.

Для того чтобы побѣдить это недовѣріе, необходимо было выяснить истинное значеніе математическихъ теорій и, въ частности, геометріи. Нужно было выяснить, что математическія теоріи представляютъ собой, дѣйствительно, строго формальныя дисциплины, продуктъ свободнаго творчества человѣческаго духа, руководимаго лишь соображеніями цѣлесообразности, а не необходимости; нужно было обнаружить, что математическія теоріи можно дѣйствительно строить, не аппелируя къ реальнымъ представленіямъ, съ которыми мы привыкли ихъ связывать; нужно было показать, что такихъ теорій можно строить множество, что многія изъ нихъ могутъ a posteriori найти себѣ приложенія на томъ или иномъ реальномъ субстратѣ.

Это углубленіе въ область вопросовъ, стоящихъ на рубежѣ между математикой и философіей, начинаетъ осуществляться около середины истекшаго столѣтія. Быстрое развитіе высшаго анализа въ концѣ XVIII и въ началѣ XIX столѣтія совершилось, какъ извѣстно, съ такой стремительностью, что строгому обоснованію новыхъ теорій не было мѣста. Нужно было выяснить границы, въ предѣлахъ которыхъ эти теоріи дѣйствительно справедливы, а для этого необходимо было обратиться къ основамъ науки, къ началамъ ариѳметики и геометріи.

Первымъ, кто въ эту эпоху внесъ и дѣйствительно провелъ новыя начала въ ученіе объ основаніяхъ математики, былъ Германъ Грассманъ, судьба котораго во многихъ отношеніяхъ напоминаетъ судьбу Лобачевскаго. Мы не хотимъ, конечно, сказать, что Грассманъ первый высказалъ эти идеи. Научныя воззрѣнія развиваются съ такой постепенностью, что найти ихъ первоисточникъ почти невозможно. Но для науки существенно не то, чтобы былъ высказанъ тотъ или иной тезисъ; важно, чтобы идея получила осуществленіе въ научной теоріи, которая представляла бы собой дѣйствительное развитіе этой идеи. И въ этомъ отношеніи, въ дѣлѣ выясненія формальнаго характера математики, работы Грассмана, несомнѣнно, составили эпоху.

Г. Грассманъ родился въ 1809 г. [1]) Его отецъ, учитель въ Штетинѣ, очень интересовался основами науки и, въ частности, математики и даже написалъ по этимъ вопросамъ рядъ работъ. Въ 1827 г. Германъ поступилъ въ Берлинскій университетъ, гдѣ изучалъ, главнымъ образомъ, теологію. Въ 1830 г. онъ возвратился въ Штетинъ и здѣсь съ небольшимъ перерывомъ работалъ всю жизнь въ качествѣ преподавателя въ различныхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Вѣроятно, подъ вліяніемъ отца Г. Грассманъ посвятилъ весь свой досугъ размышленіямъ надъ основами математики, и результатомъ этого явилось обширное и замѣчательное сочиненіе „Ученіе о линейномъ протяженіи“ [2]), выпущенное имъ въ свѣтъ въ 1844 г.

---

[1]) *V. Schlegel.* „Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke“. Leipzig. 1878.

[2]) „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläuter von *Herman Grassmann*“. Leipzig. 1844.

„Всѣ науки въ высшемъ своемъ подраздѣленіи распадаются на реальныя и формальныя. Первыя отражаютъ въ нашемъ мышленіи бытіе, являющееся нашему сознанію независимо отъ него; истинность этихъ наукъ покоится на соотвѣтствіи между этимъ бытіемъ и нашимъ мышленіемъ. Вторыя имѣютъ своимъ предметомъ то, что предложено самой человѣческой мыслью, и истинность ихъ заключается во взаимномъ согласіи процессовъ нашего мышленія".

Такъ начинаетъ Грассманъ свое изложеніе. Самыя формальныя науки распадаются, по его мнѣнію, только на двѣ дисциплины—на логику и математику. Логика есть наука объ общихъ законахъ мышленія; математика есть наука о различныхъ частныхъ построеніяхъ человѣческой мысли. Руководясь такимъ широкимъ взглядомъ на математику, Грассманъ хочетъ построить ученіе, которое охватывало бы различныя вѣтви математики. Матеріалъ, надъ которымъ онъ оперируетъ, есть „протяженіе" („Ausdehnung"), а точкой отправленія для построенія этого понятія служитъ нѣкоторый перемѣнный объектъ „элементъ". Этотъ элементъ послѣдовательно проходитъ черезъ различныя состоянія, совокупность которыхъ образуетъ „протяженіе или систему первой ступени" („System erster Stufe"). Но такая система можетъ быть, въ свою очередь, разсматриваема какъ элементъ, послѣдовательными измѣненіями котораго образуется „система второй ступени" и т. д.

Такъ, если принять геометрическую точку за первоначальный элементъ, и ея движеніе разсматривать, какъ послѣдовательное измѣненіе состоянія этого элемента, то линія образуетъ систему первой ступени, поверхность—систему второй ступени и т. д. Совокупность звуковъ, отличающихся только высотой, образуетъ систему первой ступени,—звуки, отличающіеся высотой и силой, образуютъ систему второй ступени и т. д.

Два момента во всякой системѣ опредѣляютъ отрѣзокъ этой системы: это совокупность состояній образующаго элемента, черезъ которыя онъ проходитъ отъ перваго момента до второго.

Для этихъ отрѣзковъ Грассманъ устанавливаетъ правила сопряженій („Verknüpfung") или дѣйствій. Такъ, подъ суммой отрѣзковъ AB и BC какой либо системы онъ разумѣетъ отрѣзокъ AC, т. е. совокупность послѣдовательныхъ состояній первоначальнаго элемента при переходѣ отъ состоянія A къ состоянію C. Аналогично этому опредѣляются умноженіе, дѣленіе и др. дѣйствія. Свойства такихъ дѣйствій то совпадаютъ со свойствами ариѳметическихъ дѣйствій, то отличаются отъ нихъ.

Спеціализируя эти общія теоріи, выбирая различнымъ образомъ основной элементъ и законъ его измѣненій, Грассманъ получаетъ и обыкновенную ариѳметику, и теорію векторовъ и эквиваленцій Мёбіуса [1]) и Белавитиса [2]), и теорію кватерніоновъ, развитую позже Гамильтономъ [3]).

[1]) *Möbius*. „Der barycentrische Calcul". Leipzig. 1827.
[2]) *Bellavitis*. „Calcolo delle Equipollenze". Padova. 1835.
[3]) *W. R. Hamilton*. „Lectures on Quaternions". Dublin. 1853.

Таковъ обширный замыселъ Грассмана,—къ сожалѣнію, слишкомъ обширный, чтобы его дѣйствительно можно было выполнить. Постановка вопроса отличается такой общностью, что за нею теряются наиболѣе важные элементы всякаго сочиненія, и математическаго въ особенности,—опредѣленность содержанія и строгость вывода. „При многократныхъ попыткахъ прочесть Ваше сочиненіе uno tenore", писалъ Грассману Мёбіусъ: „я всегда встрѣчалъ непреодолимое затрудненіе со стороны большой философской общности". Лишь тамъ, гдѣ Грассманъ оперируетъ надъ установленными геометрическими образами, его идеи принимаютъ опредѣленную математическую форму. По существу, идея остается та же: устанавливаются понятія о суммѣ, разности, произведеніяхъ (различнаго рода) точекъ, отрѣзковъ и т. п., устанавливаются правила этихъ операцій, и путемъ тождественныхъ преобразованій, основанныхъ на этихъ правилахъ, обнаруживаются новыя свойства геометрическихъ образовъ. Грассманъ имѣлъ возможность произвести этимъ методомъ замѣчательныя изслѣдованія относительно алгебраическихъ кривыхъ. Эти геометрическія приложенія общихъ идей обработаны Грассманомъ въ особомъ сочиненіи „Геометрическій анализъ", относящемся къ 1847 г. [1]).

Вслѣдствіе указанныхъ причинъ, сочиненіе Грассмана оставалось мало извѣстнымъ; съ нимъ познакомились лишь немногіе выдающіеся геометры. Замѣчательно, что Гауссъ писалъ Грассману по поводу его книги почти то же, что и Больэ: „Тенденціи Вашей работы отчасти скрещиваются съ тѣми путями, по которымъ я самъ странствовалъ въ теченіе почти полустолѣтія".

Эта неудача служила для Грассмана источникомъ большихъ страданій. Онъ старался выдѣлить отдѣльныя части своихъ общихъ идей, дать имъ различныя приложенія; этому посвящены отдѣльные мемуары, появившіеся въ различныхъ журналахъ, и даже цѣлыя сочиненія, какъ „Геометрическій анализъ", о которомъ мы уже упоминали выше, и „Учебникъ ариѳметики" [2]), появившійся гораздо позже, въ 1861 г. Въ этомъ послѣднемъ сочиненіи Грассманъ ставитъ себѣ задачей построить ариѳметику на тѣхъ началахъ, на которыхъ зиждется „Ученіе о линейномъ протяженіи", т. е. путемъ строго формальныхъ соглашеній, опредѣляющихъ дѣйствія и ихъ законы. Сочиненіе это было имъ обработано совмѣстно съ братомъ Робертомъ и собственно было уже

---

[1]) „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik". Gekrönte Preisschrift von *H. Grassmann*. Leipzig. 1847.

Основанія идей Грассмана въ геометрической формѣ ясно и доступно изложены въ брошюрахъ *Peano:* „Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann". Turin. 1888. и „Gli elementi di calcolo geometrico". Turin. 1891. Послѣдняя брошюра имѣется въ нѣмецкомъ переводѣ: *G. Peano* „Die Grundzüge des geometrischen Calculs". Autorisirte deutsche Ausgabe von *A. Schepp*, Leipzig. 1891.

[2]) *H. Grassmann*. „Lehrbuch der Arithmetik". Berlin. 1861.

готово въ 1847 году; но возникшее въ Германіи революціонное движеніе надолго отвлекло своей волной обоихъ братьевъ отъ этой работы.

Ариѳметика Грассмана сыграла очень важную роль. Это было первое сочиненіе, въ которомъ теорія раціональныхъ чиселъ была построена строго научно и формально. Особенную цѣну имѣетъ то, что Грассманъ выяснилъ важное значеніе, которое имѣетъ такъ называемая математическая индукція въ теоріи цѣлыхъ чиселъ; это была совершенно новая идея, которая перешла затѣмъ во всѣ сочиненія по теоретической ариѳметикѣ. Эти мысли Грассмана, главнымъ образомъ, въ обработкѣ Шрёдера [1]) получили очень широкую извѣстность и сыграли совершенно исключительную роль въ дѣлѣ выясненія той идеи, что ариѳметика можетъ быть построена совершенно независимо отъ тѣхъ реальныхъ образовъ, съ которыми мы ее обыкновенно связываемъ, что она можетъ быть развита сама изъ себя; что она представляетъ собой построеніе нашего ума, при созданіи котораго опытъ, какъ мы уже сказали выше, имѣетъ лишь руководящее, а не обязательное значеніе; что возможны другія совершенно аналогичныя построенія, находящія себѣ такое же примѣненіе, какъ и обычная ариѳметика, и могущія служить полезнымъ орудіемъ изслѣдованія. Отсюда уже только одинъ шагъ, чтобы перенести тѣ же идеи на геометрію; но нужно было, конечно, немало времени, пока эти идеи были усвоены, и Грассманъ до этого не дожилъ.

Возвратившись къ научнымъ занятіямъ послѣ увлеченія политикой, Грассманъ занялся переработкой „Ученія о линейномъ протяженіи“. Въ результатѣ въ 1862 г. появилось, можно сказать, совершенно новое сочиненіе „Ученіе о протяженіи“ [2]). Общефилософскихъ разсужденій здѣсь уже нѣтъ; это строго формальное изложеніе теоріи комплексныхъ чиселъ, составленныхъ изъ нѣсколькихъ независимыхъ единицъ. Но это сочиненіе сдѣлалось широко извѣстнымъ лишь послѣ того, какъ получило распространеніе Гамильтоново ученіе о кватерніонахъ, цѣликомъ содержащееся въ книгѣ Грассмана.

Не встрѣтивъ сочувствія и признанія со стороны математиковъ, Грассманъ посвятилъ остатокъ жизни филологіи, санскритскому языку. Но мало по малу идеи Грассмана стали завоевывать послѣдователей въ математическомъ мірѣ. Еще при жизни Грассмана стали появляться работы, посвященныя отчасти вы-

---

[1]) *E. Scröder*. „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra“. Leipzig. 1873.

[2]) „Die Ausdehnungslehre“. Vollständig und in strenger Form bearbeitet von *H. Grassmann*, Berlin, 1862.

ясненію его идей, отчасти ихъ развитію и примѣненіямъ, изъ которыхъ позднѣе составилась обширная литература [1]).

Посвятимъ еще нѣсколько словъ воззрѣніямъ Грассмана на основанія геометріи. Этому посвящены §§ 21—23 его „Ученія о линейномъ протяженіи“. „Я утверждаю“, пишетъ онъ здѣсь: „что геометрія все еще лишена научнаго обоснованія и что основа, на которой покоится все зданіе геометріи, страдаетъ изъянами, которые требуютъ коренной переработки“. Изъяны эти онъ усматриваетъ въ недостаткахъ геометрическихъ опредѣленій (особенно, въ опредѣленіи плоскости) и постулатовъ. „Съ одной стороны“, говоритъ Грассманъ: „опускаются посылки, которыя дѣйствительно выражаютъ пространственныя соотношенія и которыя позже, когда онѣ оказываются необходимыми, должны быть неявно допущены; съ другой стороны, устанавливаются основныя положенія, которыя вовсе не выражаютъ основныхъ свойствъ пространства и при глубокомъ размышленіи оказываются излишними“. Соображенія, однако, которыя онъ при этомъ высказываетъ въ смыслѣ возможныхъ здѣсь исправленій, не имѣютъ серьезной цѣны.

Появленіе неевклидовой геометріи не прошло для Грассмана незамѣченнымъ, и въ 1877 году онъ опубликовалъ небольшую замѣтку „Объ отношеніи неевклидовой геометріи къ ученію о протяженіи“ [2]). Грассманъ старается здѣсь показать, что ученіе о пространствѣ во всемъ его разнообразіи представляетъ собой лишь составную часть его ученія о протяженіи. Повторяя это утвержденіе, многіе авторы говорятъ, что Грассманъ построилъ ученіе, содержащее въ себѣ науку о пространствѣ, какъ частный случай. Если это и справедливо, то лишь постолько, посколько рѣчь идетъ о тѣхъ болѣе философскихъ, чѣмъ математическихъ общихъ идеяхъ, съ которыхъ начинается первая книга Грассмана. Но подъ эти идеи можно подвести рѣшительно все, что угодно, ибо, при ихъ общности, онѣ не имѣютъ опредѣленнаго содержанія. Сказать же, что Грассманъ построилъ ученіе, охватывающее, какъ частный случай, ученіе о пространствѣ, хотя бы въ томъ смыслѣ, въ какомъ это дѣйствительно сдѣлали Риманъ, Гельмгольцъ и Ли, рѣшительно нельзя.

Грассманъ посвятилъ всю свою жизнь выясненію формальнаго характера математики; онъ показалъ, что различныя мате-

---

[1]) Полный обзоръ относящейся сюда литературы можно найти въ небольшомъ сочиненіи *V. Schlegel*. „Die Grassmannishe Ausdehnungslehre“. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. Leipzig. 1896. Новѣйшимъ и наиболѣе обстоятельнымъ изложеніемъ идей Грассмана въ ихъ современномъ развитіи служитъ сочиненіе: *A. Whitehead*. „A treatise on universal algebra“. Cambrige. 1898.

[2]) „Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre“. Въ изданіи Энгеля въ 1 части I-го тома стр. 293.

матическія дисциплины могутъ развиваться сами изъ себя, т. е. изъ посылокъ, „предложенныхъ самой человѣческой мыслью“; онъ показалъ, что такія дисциплины могутъ быть построены многообразно и что каждая изъ нихъ можетъ найти себѣ то или иное примѣненіе въ области реальныхъ объектовъ. Словомъ, у Грассмана впервые съ полной опредѣленностью высказана и нашла себѣ примѣненіе къ анализу мысль, такъ красиво выраженная Пуанкарэ [1]) въ слѣдующихъ словахъ:

„Другія гипотезы только кажутся таковыми, и въ дѣйствительности сводятся къ опредѣленіямъ и чистымъ соглашеніямъ.

Гипотезы послѣдняго рода встрѣчаются особенно часто въ математикѣ и въ смежныхъ съ нею дисциплинахъ. Именно отсюда и проистекаетъ строгая точность этихъ наукъ; эти соглашенія представляютъ собой продуктъ свободнаго творчества нашего духа, который въ этой области не знаетъ преградъ. Въ этой области духъ нашъ можетъ настойчиво проявить свою силу, ибо здѣсь онъ повелѣваетъ. Но повелѣнія его обязательны только для *нашей* науки, которая безъ нихъ была бы невозможна, но не для природы. Спросимъ себя, однако, произвольны ли эти повелѣнія или нѣтъ? Конечно, нѣтъ, ибо иначе они были бы безплодны. Опытъ предоставляетъ намъ свободный выборъ посылокъ, но онъ нами руководитъ, помогая намъ избрать наиболѣе удобный путь“.

По мѣрѣ того, какъ эти идеи уяснялись и получали распространеніе, подготовлялась почва для правильнаго пониманія ученія Гаусса, Лобачевскаго и Больэ; а это ученіе, въ свою очередь, способствовало уясненію и распространенію тѣхъ же идей.

Но Грассманъ скончался въ 1877 г. и въ глубокой старости могъ наблюдать лишь первые шаги въ ходѣ усвоенія его идей.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

[1]) *H. Poincaré*. „La Science et l'Hypothèse“. Paris. 1903 г. p.p. 2—3. Имѣется русскій переводъ: *Пуанкаре*. Гипотеза и наука. *Москва*. 1903. Въ высшей степени цѣнныя примѣчанія, относящіяся къ основамъ математики, сдѣланы Линдеманомъ въ нѣмецкомъ изданіи этого сочиненія: *H. Poincaré*. „Wissenschaft und Hypothese“. Autorisirte deutsche Ausgabe mit erläuernden Anmerkungen von und *L. Lindemann*. Leipzig. 1904.

Свѣтовая волна, какъ мѣра длины.

A. Michelson'a.

*(Окончанiе *).*

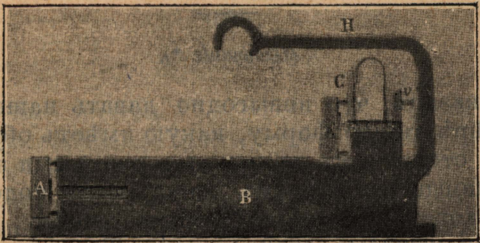
Опытъ показалъ, что невыгодно давать нашей первой промежуточной мѣрѣ такую форму, какую имѣетъ образцовый метръ, то есть форму стержня съ двумя вычерченными на немъ линiями: каждый разъ, когда мы станемъ отсчитывать положенiе линiй помощью микроскопа, мы будемъ вводить ошибку, которая будетъ повторяться при каждомъ отсчитыванiи. Такъ какъ въ данномъ случаѣ наша мѣра равна одной десятой части метра, то въ общей сложности ошибка наша будетъ измѣряться пятью микронами, такъ какъ она въ десять разъ превосходитъ погрѣшность, которую даетъ микроскопъ и которая, какъ мы уже знаемъ, равна половинѣ микрона. Къ счастью, методъ интерференцiи дастъ намъ возможность умножить длину промежуточной мѣры съ значительно меньшей погрѣшностью; послѣдняя выражается приблизительно одной двадцатой долей микрона, а иногда ошибка бываетъ еще меньше. Если мы имѣемъ двѣ плоскiя поверхности, которыя параллельны другъ другу и находятся на нѣкоторомъ разстоянiи другъ отъ друга, то, пользуясь интерферометромъ [1]), мы можемъ опредѣлить помощью интерференцiонныхъ полосъ въ бѣлыхъ лучахъ положенiе обѣихъ поверхностей съ точностью до одной двадцатой части полосы, что равносильно одной сороковой части микрона. Какъ показалъ опытъ, всего удобнѣе пользоваться плоскими стеклянными пластинками, поверхности которыхъ самымъ тщательнымъ образомъ шлифуются и покрываются съ лицевой стороны серебряной амальгамой. Обѣ пластинки прикрѣпляются къ мѣдной подставкѣ; тщательной установкой достигаютъ по возможности полной параллельности обѣихъ пластинокъ, такъ что для измѣренiя безразлично, какой частью плоскости мы пользуемся. Параллельность плоскостей должна быть безукоризненная: наибольшее допустимое еще отклоненiе (отъ математической параллельности) не должно превышать половины одной интерференцiонной полосы, что составляетъ одну четверть длины волны или одну восьмую часть микрона. Такъ какъ размѣръ пластинокъ равенъ приблизительно двумъ сантиметрамъ, то наибольшiй уголъ между плоскостями, какой еще можно допустить, выражается малой дробью приблизительно одной двухстотысячной.

---

[1]) См. статью Майхельсона. „Микроскопъ, телескопъ и интерферометръ". Вѣстникъ № 378.

*) См. № 391 „Вѣстника".

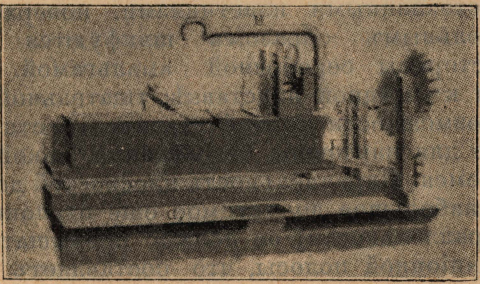
На фигурѣ 3 представлено поперечное сѣченіе прибора, который служитъ намъ только что описанной промежуточной мѣрой. Двѣ стеклянныя пластинки величиною въ два квадратныхъ санти-



Фиг. 3.

метра на передней своей сторонѣ, весьма мало отличающейся отъ геометрической плоскости, покрыты серебряной альмагамой. Съ задней стороны онѣ подпираются тремя маленькими штифтами. Старательной шлифовкой штифтиковъ мы можемъ добиться желательной параллельности пластинокъ; правда, абсолютной параллельности мы не достигнемъ, и весьма нерѣдко ошибка равна одной десятой долѣ микрона, а иногда еще болѣе значительна.

На фигурѣ 4 тотъ же приборъ изображенъ въ перспективѣ. Здѣсь промежуточная мѣра, помощью особаго приспособленія, можетъ передвигаться, что даетъ возможность сравнить нашу мѣру съ метромъ. При производствѣ этого сравненія мы должны установить пластинки параллельно зеркалу, которое служитъ переда-



Фиг. 4.

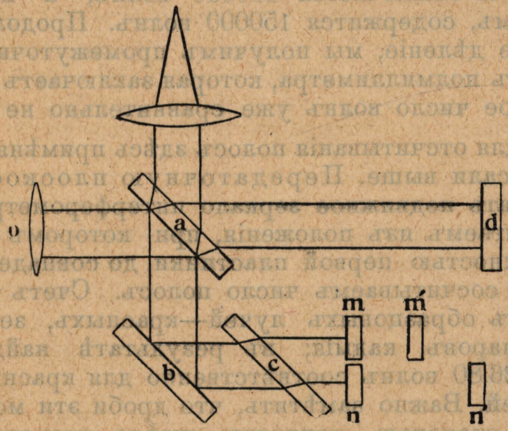
точной плоскостью интерферометра. При этомъ зеркало должно быть параллельно пластинкамъ съ такой же точностью, съ какой поверхности послѣднихъ должны быть параллельны другъ другу. Приборъ устанавливаютъ помощью винтовъ, находящихся съ задней стороны прибора: помощью двухъ такихъ винтовъ, приборъ можно вращать соотвѣтственно вокругъ вертикальной и горизонтальной осей.

Когда мы желаемъ опредѣлить, сколько свѣтовыхъ волнъ содержится въ цѣломъ метрѣ, то мы прежде всего должны узнать, сколько такихъ волнъ вмѣщаетъ въ себѣ описанная нами промежуточная мѣра. Легко понять, что сосчитать тысячъ триста волнъ—весьма трудно. Въ самомъ дѣлѣ, простое вычисленіе показываетъ, что для такого счета понадобится свыше сорока часовъ, если за каждую секунду мы успѣемъ сосчитать двѣ волны. Возможно, что со временемъ мы найдемъ способы для автоматическаго подсчитыванія волнъ; уже даже имѣются нѣкоторыя попытки въ этомъ направленіи, дающія надежду на успѣхъ; пока же приходится серьезно считаться съ возможностью по той или другой причинѣ пропустить полосу при производствѣ отсчета. Поэтому намъ удобнѣе воспользоваться другимъ методомъ, болѣе утомительнымъ, но зато и болѣе надежнымъ. Сущность этого метода состоитъ въ томъ, что промежутокъ, подлежащій измѣренію, мы подраздѣляемъ на болѣе мелкія части, въ которыхъ содержится уже гораздо меньше волнъ. Такъ, напримѣръ, въ десяти сантиметрахъ заключается 300000 волнъ, а на протяженіи, вдвое меньшемъ, содержится 150000 волнъ. Продолжая послѣдовательно такое дѣленіе, мы получимъ промежуточную мѣру приблизительно въ полмиллиметра, которая заключаетъ до 1200 волнъ: сосчитать такое число волнъ уже сравнительно не такъ трудно.

Методъ для отсчитыванія полосъ здѣсь примѣняется такой же, какой мы описали выше. Передаточную плоскость (такъ мы будемъ называть подвижное зеркало интерферометра) мы постепенно передвигаемъ изъ положенія, при которомъ она совпадаетъ съ поверхностью первой пластинки, до совпаденія съ второй пластинкой, и сосчитываемъ число полосъ. Счетъ этотъ выполненъ для трехъ образцовыхъ лучей—красныхъ, зеленыхъ и синихъ лучей паровъ кадмія; въ результатѣ найдено 1,212.37, 1,534.79 и 1,626.80 волнъ соотвѣтственно для красныхъ, зеленыхъ и синихъ лучей. Важно замѣтить, что дроби эти можно измѣрить съ большой степенью точности; цыфра второго десятичнаго разряда справедлива въ предѣлахъ отъ двухъ до трехъ единицъ. Въ правильности всего числа мы можемъ убѣдиться, повторяя отсчетъ, получая тотъ же результатъ. Такимъ образомъ, мы получаемъ число, включающее и дробныя части волнъ, содержащихся въ болѣе короткой мѣрѣ, и притомъ съ большой степенью точности; затѣмъ мы сравниваемъ это число съ числомъ волнъ въ слѣдующей мѣрѣ, которая приблизительно вдвое длиннѣе первой. Сравненіе это безъ непосредственнаго отсчитыванія даетъ намъ число цѣлыхъ волнъ, вдвое большее, чѣмъ въ предыдущей мѣрѣ. Что касается дробныхъ частей волнъ, содержащихся во второй мѣрѣ, то ихъ мы можемъ сосчитать по прежнему способу; и такимъ образомъ число волнъ, которыя вмѣщаются во всей длинѣ второй мѣры, мы можемъ опредѣлить съ той же точностью, съ какой мы это сдѣлали для первой мѣры.

Опишемъ теперь этотъ процессъ нѣсколько подробнѣе. На фиг. 5 при *mm'* представленъ видъ первой болѣе короткой мѣры сверху. Мѣра эта находится на подставкѣ, которую можно передвигать помощью винта. Вторая мѣра *nn'* вдвое длиннѣе первой; она помѣщается возможно ближе къ первой и неподвижно скрѣпляется съ частью рамы. Зеркало *d* служитъ передаточной плоскостью интерферометра. Переднія два зеркала двухъ мѣръ мы приспособляемъ такъ, чтобы вмѣстѣ съ зеркаломъ *d* они дали интерференціонныя полосы въ бѣломъ свѣтѣ; при этомъ центральная полоса нашей системы полосъ окажется черной, а всѣ прочія окрашенными. Такимъ образомъ мы всегда можемъ отличить центральную полосу. Если центральныя полосы находятся въ одномъ и томъ же положеніи относительно обоихъ переднихъ зеркалъ *m* и *n*, тогда поверхности ихъ находятся въ одной и той же плоскости; въ той же плоскости находится и *d*.

Если мы затѣмъ подвинемъ плоскость *d* назадъ на длину, равную короткой мѣрѣ, то она совпадетъ съ плоскостью зеркала *m'*, и въ моментъ совпаденія мы увидимъ интерференціонныя по-



Фиг. 5.

лосы въ бѣломъ свѣтѣ. Такимъ образомъ мы можемъ опредѣлить моментъ, въ который плоскость *d* подвинулась на длину первой мѣры, съ точностью до одной десятой или двадцатой доли полосы.

Слѣдующая операція состоитъ въ томъ, что мы передвигаемъ назадъ первую мѣру на такое же разстояніе. Тогда интерференціонныя полосы въ бѣломъ свѣтѣ вновь появятся на передней сторонѣ зеркала *m*. Затѣмъ мы передвигаемъ плоскость *d*, въ свою очередь, на то же разстояніе, и если вторая мѣра ровно вдвое больше первой, то мы получимъ интерференціонныя плосы на двухъ заднихъ зеркалахъ обѣихъ промежуточныхъ мѣръ. Если же вторая мѣра не вполнѣ точно равна удвоенной первой, то центральная полоса системы не будетъ занимать одного и того же положенія въ обоихъ зеркалахъ: разница въ длинѣ второй мѣры и удвоенной первой выразится нѣкоторымъ числомъ полосъ; напримѣръ, вторая можетъ оказаться менѣе удвоенной первой на двѣ полосы, что составляетъ меньше половины микрона. Такимъ образомъ, мы можемъ съ точностью узнать, равна ли вторая мѣра удвоенной первой или нѣтъ: въ послѣднемъ случаѣ мы можемъ опредѣлить разницу съ точностью до очень малой части длины волны. Умножая на два число волнъ въ первой мѣрѣ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ во столько же разъ увеличиваемъ погрѣшность въ дробномъ остаткѣ. Такимъ образомъ, дробныя части волнъ, которыя нужно прибавить ко второму числу, пока остаются неопредѣленными. Наблюдая полосы, производимыя лучами опредѣленнаго рода, напримѣръ, красными, мы получаемъ на обоихъ зеркалахъ нашей мѣры систему круговыхъполосъ. Если системы какъ въ нижнемъ, такъ и въ верхнемъ зеркалѣ имѣютъ одинъ и тотъ же видъ, тогда искомая дробь сводится къ нулю; тогда для опредѣленія числа волнъ второй мѣры нужно взять цѣлое число, ближайшее къ тому числу, которое мы получили. Если же системы полосъ не одинаковы, то мы располагаемъ простымъ способомъ для опредѣленія дробнаго остатка съ желательной степенью точности. Напримѣръ, если число, найденное для первой мѣры, умножить на два, то число волнъ красныхъ лучей, которыя содержатся въ мѣрѣ № 2, окажется равнымъ 2,424.74. Измѣреніе же показываетъ, что дѣйствительная величина дроби равна не 0,74, но 0,93. Такимъ образомъ, мы можемъ опредѣлить длину всѣхъ нашихъ послѣдовательныхъ мѣръ вплоть до самой послѣдней (т. е. самой большой) съ такой же степенью точности, съ какой мы опредѣляемъ нашу первую мѣру. Мы имѣемъ поэтому возможность точно опредѣлить цѣлое число волнъ, заключающихся въ нашей послѣдней мѣрѣ. Для красныхъ лучей паровъ кадмія описанный методъ даетъ число 310678. Что касается дробныхъ частей волнъ, то ихъ мы опредѣляемъ помощью круговыхъ полосъ, какъ мы раньше описали; дробь эта въ разсматриваемомъ случаѣ оказалась равной 0,48. Этимъ же способомъ найдено число волнъ для зеленыхъ и синихъ лучей: числа эти соотвѣтственно равны 39330793 и 416735,86. Чтобы дать понятіе о степени точности этихъ чиселъ, я привожу въ прилагаемой табличкѣ результаты измѣреній, произведенныхъ въ различное время и различными изслѣдователями.

Измѣренія	Красные лучи	Зеленые лучи	Синіе лучи
I	310678,48	393307,92	416735,86
II	310678,65	393308,10	416736,07
III.	310678,68	393308,09	416736,02

Какъ мы уже сказали, измѣренія эти выполнены различными изслѣдователями и при томъ въ различные моменты, отдѣленные другъ отъ друга цѣлыми мѣсяцами; при этомъ, какъ видимъ, даже дробныя части результатовъ почти совпадаютъ; все это внушаетъ намъ полное довѣріе къ описанному методу.

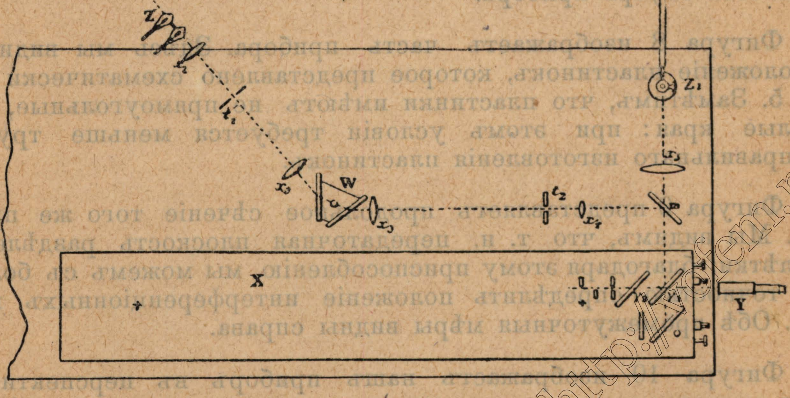
При сравненіи обѣихъ мѣръ другъ съ другомъ намъ не нужно принимать во вниманіе дѣйствіе температуры, если только послѣдняя имѣетъ одну и ту же величину во всѣхъ частяхъ прибора. Дѣйствительно, обѣ промежуточныя мѣры, находясь одна возлѣ другой и будучи сдѣланы изъ одного и того же вещества, испытываютъ одинаковое расширеніе, если только обѣ имѣютъ одну и ту же температуру. Исключеніе составляетъ промежуточная мѣра № 9: при опредѣленіи числа содержащихся въ ней волнъ крайне важно будетъ знать соотвѣтственную температуру и при томъ съ величайшей степенью точности. Съ этой цѣлью въ приборъ кладутъ нѣсколько наилучшихъ термометровъ; послѣдніе вывѣряются самымъ тщательнымъ образомъ; ошибки ихъ заранѣе опредѣляются. Кромѣ того, принимаютъ еще нѣкоторыя другія предосторожности. Такимъ образомъ температура, при которой промежуточная мѣра № 9 содержитъ выше приведенное число волнъ, найдена съ точностью до одной сотой доли градуса.

Послѣдняя операція состоитъ въ сравненіи образцоваго дециметра съ образцовымъ метромъ: задача эта сравнительно простая. Дѣйствительно, по существу намъ придется при этомъ повторить то же самое, что мы дѣлали при сравненіи первой промежуточной мѣры со второй: разница лишь та, что теперь вторая мѣра въ десять разъ больше первой, такъ что тотъ же процессъ придется повторить не два раза, а десять разъ.

Чтобы опредѣлить то положеніе промежуточной мѣры, въ которомъ конецъ ея совпадаетъ съ передаточной плоскостью, мы здѣсь также пользуемся интерференціонными полосами: ошибка, какъ мы уже раньше указали, не превышаетъ одной двадцатой части длины волны; такъ что въ общей сложности сумма такихъ ошибокъ не превыситъ одной половины волны или одной четвертой доли микрона. Такимъ образомъ приборъ, которымъ мы пользовались для нашей задачи, долженъ удовлетворять слѣдующимъ условіямъ. Прежде всего нужно позаботиться, чтобы при перемѣщеніи промежуточной мѣры и такъ называемой передаточной плоскости интерферометра отнюдь не нарушалась параллельность зеркалъ. Для этого необходимо, чтобы рельсы, по которымъ передвигается подставка зеркалъ, были безукоризненно ровные. Цѣлый мѣсяцъ работы понадобился для выполненія этой первой части нашей задачи: рельсы должны быть устроены съ такой точностью, чтобы при перемѣщеніи зеркалъ впередъ и назадъ совершенно не мѣнялось положеніе интерференціонныхъ полосъ. Далѣе мы должны имѣть возможность слѣдить за положеніемъ зеркалъ: послѣднія находятся внутри ящика, который покрываетъ приборъ, предохраняя его отъ измѣненій температуры. Съ этой цѣлью перемѣщенія подставки, къ которой прикрѣплены зеркала, совершаются помощью длиннаго винта, который тщательно калибрируется съ точностью приблизительно до двухъ микроновъ. Въ-третьихъ, въ виду того, что нѣтъ возможности устроить абсолютно ровные рельсы, мы должно изыскать способъ исправлять происходящія вслѣдствіе этого небольшія перемѣщенія. (Для этого предназначается приспособленіе, указанное на фиг. 4). Въ четвертыхъ, намъ нужно устроить неподвижную подставку для болѣе длинной изъ двухъ сравниваемыхъ мѣръ, а для короткой мѣры—подвижную подставку, которая могла бы передвигаться параллельно самой себѣ.

Послѣднюю изъ нашихъ мѣръ, то есть вспомогательный метръ, намъ нужно сравнить непосредственно съ образцовымъ метромъ: поэтому оба метра должны имѣть сходную конструкцію. Иначе говоря, при этомъ послѣднемъ сравненіи мы опять должны прибѣгнуть къ помощи микроскопа. Дѣйствительно, на стержнѣ, который мы имѣемъ въ самомъ интерферометрѣ, нанесены двѣ черточки на разстояніи одного метра, при чемъ разстояніе это отмѣчается съ возможной точностью помощью простого сравненія съ прототипомъ метра. Съ этимъ то метромъ мы сравниваемъ нашу мѣру № 9. Съ этой цѣлью къ мѣрѣ № 9 неподвижно прикрѣпляется ручка, на которой нанесена тонкая мѣтка; помощью особаго приспособленія она располагается въ фокусъ микроскопа. Конечно, сравненіе это не отличается большой степенью точности. Ошибка здѣсь такая же, какую мы дѣлаемъ, когда сравниваемъ два обыкновенныхъ метра. Ошибка эта неизбѣжна.

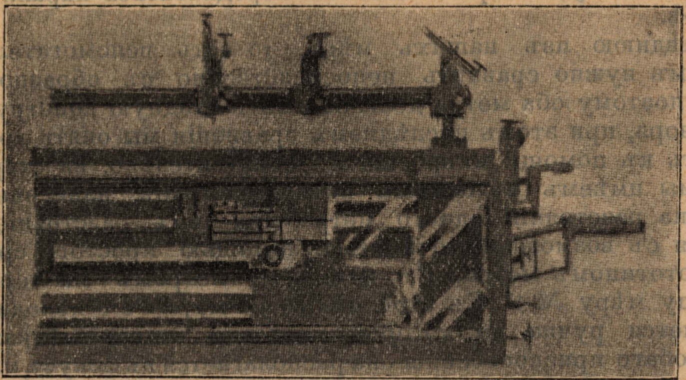
Весь приборъ помѣщается въ ящикѣ, который защищаетъ приборъ отъ измѣненій температуры и сотрясеній окружающаго воздуха; ящикъ устанавливается на массивной стойкѣ, которая по возможности ограждаетъ его отъ всякаго сотрясенія. Наконецъ, нужно еще выполнить изложенныя раньше условія для полученія подходящаго источника свѣта. Теперь мы имѣемъ ясное представленіе о всѣхъ тѣхъ условіяхъ, которыя нужно принять во вниманіе при устройствѣ прибора.



Фиг. 6.

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ условія эти выполнены въ томъ приборѣ, помощью котораго опытъ былъ произведенъ въ дѣйствительности.

На фиг. 6 изображена схема всего прибора. Здѣсь мы безъ труда узнаемъ пустую трубку, которая служитъ источникомъ свѣта, а также систему пластинокъ интерферометра. Эта часть схемы представляетъ ту часть прибора, которая изображена на фиг. 7. Для того, чтобы получить въ приборѣ лучи одного лишь



Фиг. 7.

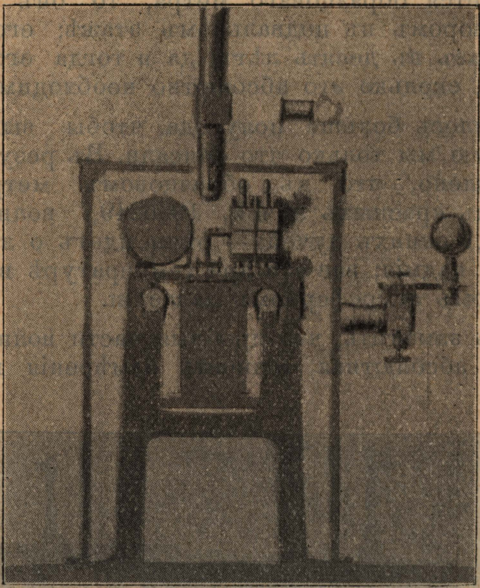
цвѣта, лучи, выходящіе изъ трубки, пропускаемъ черезъ обыкновенный спектроскопъ. Такимъ образомъ лучи изъ трубки Z собираются въ фокусѣ чечевицы x_2 у щели t_1. Проходя черезъ чечевицу x_2, лучи дѣлаются параллельными, и пропускаются затѣмъ черезъ призму W, наполненную сѣрнистымъ углеродомъ. Чечевица x_3 даетъ окрашенныя изображенія щели t_1 въ плоскости щели t_2. Часть ZW спектроскопа можно передвигать такимъ образомъ, чтобы въ щели t_2 получалось либо красное, либо зеленое, либо же синее изображеніе; изъ щели t_2 изображеніе направляется внутрь прибора.

Фигура 8 изображаетъ часть прибора. Здѣсь мы видимъ расположеніе пластинокъ, которое представлено схематически на фиг. 5. Замѣтимъ, что пластинки имѣютъ не прямоугольные, но круглые края: при этомъ условіи требуется меньше труда для правильнаго изготовленія пластинокъ.

Фигура 9 представляетъ продольное сѣченіе того же прибора. Мы видимъ, что т. н. передаточная плоскость раздѣлена на клѣтки; благодаря этому приспособленію, мы можемъ съ большою точностью опредѣлить положеніе интерференціонныхъ полосъ. Обѣ промежуточныя мѣры видны справа.

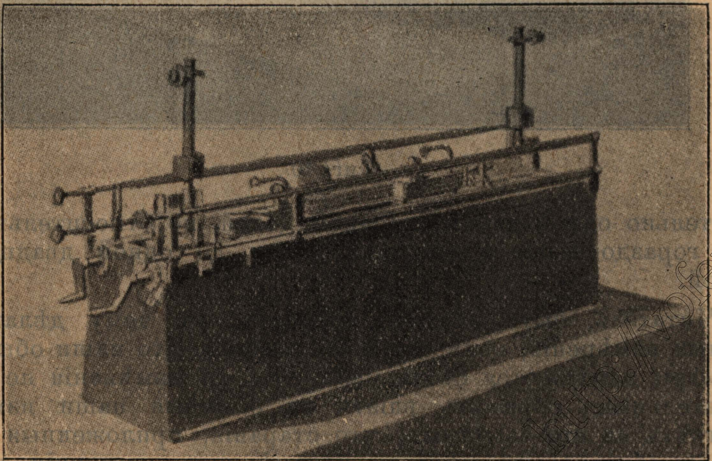
Фигура 10 изображаетъ нашъ приборъ въ перспективѣ. Здѣсь мы видимъ два микроскопа съ ихъ приспособленіями, предназначенными для того, чтобы освѣтить стержень метра помощью отраженнаго свѣта. Слѣва видны ручки для поворачиванія двухъ винтовъ: одинъ служитъ для перемѣщенія промежуточной мѣры; другой—для передвиженія передаточной плоскости.

Обо всемъ вышеизложенномъ я представилъ весною 1892 г. докладъ д-ру Gould'у, который въ то время былъ представите-



Фиг. 8.

лемъ Соединенныхъ Штатовъ въ Международномъ Комитетѣ Вѣсовъ и Мѣръ. Благодаря, главнымъ образомъ, любезности этого ученаго, мнѣ предложили произвести опытъ въ Международномъ



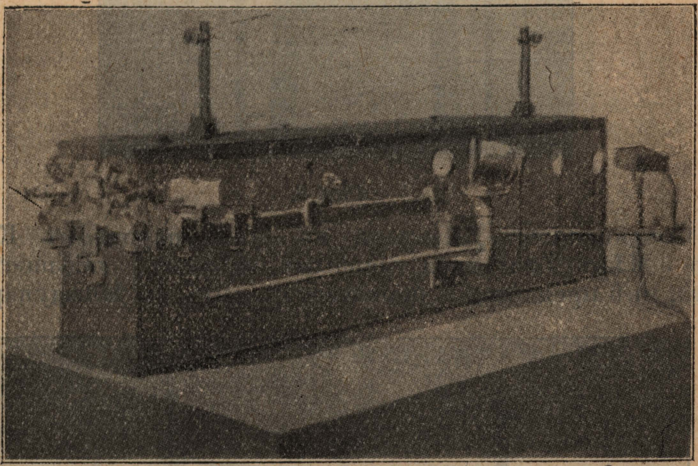
Фиг. 9.

Бюро Вѣсовъ и Мѣръ въ Севрѣ. Для прибора, только что описаннаго, потребовались нѣкоторыя добавочныя части, которыя были изготовлены въ одной изъ лабораторій Бюро.

Что касается образцоваго метра, то онъ хранится подъ двойнымъ затворомъ въ подвальномъ этажѣ; его осматриваютъ лишь одинъ разъ въ десять лѣтъ; да и тогда его держатъ лишь ровно столько, сколько это абсолютно необходимо.

Понадобилось больше полугода, чтобы выполнить всю ту работу, которую мы только что описали. Въ результатѣ изслѣдованія установлено, что въ образцовомъ метрѣ содержится 1553163,5 волнъ красныхъ лучей, 1966249,7 волнъ зеленыхъ лучей и 2083372,1 синихъ лучей; — рѣчь идетъ о лучахъ, испускаемыхъ парами кадмія; все это при температурѣ воздуха въ 15⁰ и при нормальномъ атмосферномъ давленіи.

Слѣдуетъ замѣтить, что дробныя части волнъ имѣютъ здѣсь значеніе: хотя абсолютная точность измѣренія выражается при-



Фиг. 10.

близительно одной двухмилліонной долей, но относительная точность гораздо выше и доходитъ почти до одной двадцатимилліонной.

Читатель, быть можетъ, спроситъ: къ чему дѣлать такія сложныя измѣренія, коль скоро мы знаемъ, что наши обыкновенныя мѣры измѣняются столь мало, что эти измѣненія не могутъ ощутительнымъ образомъ вліять на обычныя наши измѣренія. Въ отвѣтъ на это замѣтимъ, что старанія, приложенныя для сохраненія образцовыхъ мѣръ въ неизмѣнномъ состояніи, гарантируютъ ихъ лишь отъ различныхъ серьезныхъ случаевъ; но несмотря на тщательное обереганіе нашихъ мѣръ, мы все-таки могли бы еще опасаться, что, благодаря постепенной перегруппировкѣ молекулъ, наши мѣры подвержены медленнымъ измѣненіямъ. Теперь же, когда мы располагаемъ неизмѣнной мѣрой, мы можемъ открыть и учесть медленное измѣненіе образцоваго метра, если таковое произойдетъ: стоитъ лишь сравнить образцовый метръ съ нашей неизмѣнной мѣрой, и внести соотвѣтственную поправку. Такимъ образомъ, въ настоящее время мы имѣемъ возможность контролировать обыкновенную мѣру длины помощью свѣтовой волны. Послѣдняя имѣетъ неизмѣнную длину, зависящую отъ неизмѣнныхъ свойствъ атомовъ и всепроникающаго эѳира. Могутъ возразить, что вся солнечная система имѣетъ свое движеніе въ пространствѣ, такъ что свойства эѳира въ различныхъ частяхъ пространства могутъ быть различны. Но если мы даже и признаемъ эти измѣненія, все же они столь незначительны, что результатъ ихъ можетъ сказаться не ранѣе, чѣмъ черезъ двадцать милліоновъ лѣтъ,—а къ этому времени вся задача, вѣроятно, будетъ представлять для насъ меньшій интересъ.

ВЫВОДЫ.

1. Чтобы выразить мѣру длины въ частяхъ какой-нибудь неизмѣнной длины, существующей въ природѣ, предложены были слѣдующіе три способа:

a) Измѣреніе длины секунднаго маятника.

b) Измѣреніе длины земного меридіана.

c) Длина свѣтовой волны.

Первые два способа оказались недостаточно точными. То же самое слѣдуетъ замѣтить и о попыткѣ измѣрить свѣтовую волну помощью диффракціонной рѣшетки.

2. Что касаетъ измѣренія длины свѣтовой волны методомъ интерференціи, то способъ этотъ, идеально простой въ теоріи, требуетъ для своего практическаго осуществленія сложную систему тонкихъ и совершенныхъ приборовъ. Методъ этотъ отличается необычайной точностью: если бы наша основная первоначальная мѣра затерялась или была бы уничтожена, то методомъ интерференціи мы будемъ въ состояніи получить дубликаты, которыхъ невозможно будетъ отличить отъ оригинала.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Приготовленія къ наблюденію предстоящаго (30-го августа 1905 г. нов. ст.) полнаго солнечнаго затменія. Для наблюденія этого затменія американскіе астрономы намѣреваются снарядить экспедиціи въ Лабрадоръ, Испанію и Верхній Египетъ. Въ засѣданіи Французскаго Астрономическаго Общества, состоявшемся 2-го ноября (н. с.) въ Парижѣ подъ предсѣдательствомъ Lippmann'a, рѣшено было образовать комитетъ, чтобы обсудить, какое участіе приметъ Франція въ наблюденіи затменія; наблюдательные пункты намѣчены въ Алжирѣ и Тунисѣ—черезъ эти мѣста проходитъ линія полнаго затменія. О томъ же затменіи говорили и на послѣднемъ засѣданіи Научнаго Аэронавтическаго конгресса, которое состоялось въ С.-Петербургѣ въ зданіи Императорской Академіи Наукъ подъ предсѣдательствомъ Великаго Князя Константина Константиновича.

Кромѣ того, международный комитетъ *шаровъ-зондовъ* постановилъ производить 29, 30 и 31 августа метеорологическія наблюденія на большихъ высотахъ въ различныхъ обсерваторіяхъ, находящихся въ связи съ названнымъ учрежденіемъ: цѣль этихъ наблюденій—выяснить, какія измѣненія вноситъ затменіе на различныхъ высотахъ въ распредѣленіи температуры и господствующихъ вѣтровъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Новый журналъ по вопросамъ радіоактивности и электроники. Новый ежегодникъ „Jahrbuch der Radioactivität und Electronik" издается J. Stark'омъ въ Геттингенѣ, и ежегодно будетъ выходить четырьмя тетрадями. Въ недавно вышедшей 1-ой тетради можно, между прочимъ, найти почти полную библіографію вопроса за 1904 годъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 617 (4 сер.). Въ одной плоскости даны окружность O и уголъ ABC. Провести въ заданномъ направленіи сѣкущую, опредѣляющую въ окружности хорду xy, а въ углѣ отрѣзокъ zu, равные между собой.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 618 (4 сер.). Около правильнаго треугольника ABC описана окружность. Показать, что разстоянія x, y, z всякой точки M этой окружности отъ сторонъ треугольника связаны соотношеніемъ

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

В. Тюнинъ (Симскій заводъ).

№ 619 (4 сер.). При какихъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ x число

$$2^{4x+1}-3.7^x+5^{x+1}.6^x$$

дѣлится на 23?

Д. Коляковскій (Брацлавъ).

№ 620 (4 сер.). Дано, что въ треугольникѣ ABC двѣ изъ его медіанъ перпендикулярны. Доказать, что три его медіаны m_a, m_b, m_c равны соотвѣтственно сторонамъ нѣкотораго прямоугольнаго треугольника.

Н. С. (Одесса).

№ 621 (4 сер.) Опредѣлить A и B такъ, чтобы многочленъ

$$x^6+Ax^5+Bx^4-2x^3+6x^2+1$$

былъ точнымъ квадратомъ другого цѣлаго многочлена.

(Заимств.).

№ 622 (4 сер.). Латунный полый шаръ вѣситъ 500 граммовъ въ воздухѣ и 425 граммовъ въ водѣ; плотность латуни равна 8,4. Вычислить 1°— объемъ латунной оболочки и 2°— объемъ плотносни шара.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 518 (4 сер.). *Доказать, что необходимое и достаточное условіе дѣлимости цѣлаго числа* N *на* 17 *заключается въ томъ, чтобы сумма удвоенной цифры единицъ и утроеннаго числа десятковъ числа* N *дѣлилась на* 17. *Отыскать аналогичныя условія дѣлимости на* 27, 37 *и т. д.* 97.

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Назовемъ черезъ x цифру единицъ, а черезъ y число десятковъ числа N. Тогда имѣемъ:

$$(2x+3y)+17y=20y+2x=2(10y+x)=2N \quad (1).$$

Изъ равенства (1) видно, что число $2N$, а потому и само число N, дѣлится или не дѣлится на 17, смотря по тому, дѣлится или не дѣлится на 17 число $2x+3y$ Можно указать аналогичное необходимое и достаточное условіе дѣлимости числа N на любое число M. Пусть α — нѣкоторое число, взаимно простое съ M. Назовемъ черезъ β число $10\alpha-Mt$, гдѣ t—произвольное цѣлое число. Тогда

$$(\alpha x+\beta y)+Mty=\alpha x+(10\alpha-Mt)y+Mty=\alpha x+10\alpha y=\alpha N \quad (2).$$

Изъ равенства (2) видно, что число αN дѣлится или не дѣлится на M, смотря по тому, дѣлится ли на M число $\alpha x+\beta y$. Если $M=10n-3$, гдѣ n не кратно 3, то можно положить $\alpha=n$, такъ какъ въ этомъ случаѣ M и n числа взаимно простыя (число $10n - M = 3$ дѣлится на общаго наибольшаго дѣлителя δ чиселъ M и n; но n не кратно 3, а потому $\delta = 1$) полагая въ этомъ случаѣ $t = 1$, находимъ:

$$\beta = 10\alpha - (10n - 3) = 10n - (10 - 3) = 3.$$

Поэтому для чиселъ 37, 47, 67, 77, 97, заключающихся въ формулѣ $10n - 3$, число α можно принять соотвѣтственно равнымъ n=4, 5, 7, 8, 10, а β равнымъ 3; такимъ образомъ, напримѣръ, на 67 дѣлятся тѣ и только тѣ числа, у которыхъ сумма семь разъ взятаго числа десятковъ и утроенной цифры единицъ дѣлится на 67. Для чиселъ же 27, 57 и 87, также заключающихся въ формулѣ $10n - 3$, но для которыхъ n равно соотвѣтственно 3, 6, 9—числамъ, не взаимно простымъ соотвѣтственно съ 27, 57 и 87, можно положить α соотвѣтственно равнымъ (-8), (-17) и (-26); тогда число

$$\beta = 10\alpha - Mt,$$

полагая $t = -3$, принимаетъ значеніе

$$10.(-18) + 27.3 = 10.(-17) + 57.3 = 10.(-26) + 87.3 = 1,$$

такъ что для чиселъ 27, 57 и 87 имѣемъ соотвѣтственно $\alpha = -8,\ -17,\ -26$ и $\alpha = 1$. Такъ, напримѣръ, чтобы число дѣлилось на 87 необходимо и достаточно, чтобы разность между числомъ десятковъ и двадцатишестикратной цифрой единицъ дѣлилась на 87.

Н. Готлибъ (Юрьевъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 519 (4 сер.). *Опредѣлить внутренній объемъ полаго мѣднаго шара, если извѣстно, что онъ вѣситъ* 723 *грамма и что толщина его стѣнокъ равна* 3 *миллиметрамъ. Удѣльный вѣсъ мѣди равенъ* 8,8.

Обозначая радіусъ внутренней полости шара въ сантиметрахъ черезъ x, находимъ, что объемъ мѣдной оболочки шара выражается въ кубическихъ сантиметрахъ черезъ

$$\frac{4}{3}\pi\left[(x + 0{,}3)^3 - x^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left(0{,}9x^2 + 0{,}27x + 0{,}027\right) =$$

$$= 4\pi(0{,}3x^2 + 0{,}09x + 0{,}009).$$

Съ другой стороны тотъ же объемъ равенъ частному $\frac{723}{8{,}8}$ отъ дѣленія вѣса мѣдной оболочки на удѣльный вѣсъ мѣди, такъ что

$$4\pi(0{,}3x^2 + 0{,}09x + 0{,}009) = \frac{723}{8{,}8},$$

или

$$0{,}3x^2 + 0{,}09x + 0{,}009 - \frac{723}{8{,}8.4\pi} = 0.$$

По раздѣленіи обѣихъ частей равенства на 0,3, находимъ:

$$x^2 + 0{,}3x + 0{,}03 - \frac{2410}{35{,}2\pi} = 0,$$

$$x^2 + 0{,}3x - 21{,}7635 = 0,$$

откуда

$$x = -0{,}15 + \sqrt{0{,}0225 + 21{,}7635} = -0{,}15 + \sqrt{21{,}786} =$$

$$= -0{,}15 + 4{,}667 = 4{,}517 \text{ сантиметровъ.}$$

Искомый объемъ есть $\frac{4\pi.4{,}517^3}{3} = 386{,}045$ кубич. сантиметровъ.

В. Гейманъ (Ѳеодосія); *Н. Л.* (Софія).

№ 520 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^3 - y^2z = a,$$
$$y^3 - z^2x = b,$$
$$z^3 - x^2y = c.$$

Положимъ $x=0$. Тогда данная система принимаетъ видъ

$$y^2z = -a, \quad y^3 = b, \quad z^3 = c \quad (1).$$

Два послѣднія изъ уравненій (1) даютъ: $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, а первое изъ нихъ, послѣ подстановки найденныхъ значеній x и z, обращается въ условіе:

$$\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 \sqrt[3]{c} = -a \quad (2).$$

Итакъ, если можно выбрать значенія радикаловъ $\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$ такъ, чтобы выполнялось условіе (2), то заданная система удовлетворяется при $x=0$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$.

Разсмотримъ теперь, какъ рѣшается система, если $x \neq 0$. Полагая въ этомъ случаѣ

$$y = ux \ (3), \quad z = vx \ (4),$$

приводимъ заданную систему къ виду

4

$$x^3(1 - u^2v) = a \quad (5),$$
$$x^3(u^3 - v^2) = b \quad (6),$$
$$x^3(v^2 - u) = c \quad (7).$$

Складывая уравненія (5), (6) и (7), помноживъ предварительно уравненія (5) и (6) соотвѣтственно на u и v, получимъ $x^3(au + bv + c) = 0$, или, такъ какъ $x \neq 0$,

$$au + bv + c = 0 \quad (8).$$

Подобнымъ же образомъ, складывая уравненія (5), (6), (7) послѣ умноженія уравненій (5) и (7) на v^2 и u^2, находимъ

$$cu^2 + av^2 + b = 0 \quad (9).$$

Подставивъ значеніе v изъ уравненія (8), а именно $v = -\dfrac{au+c}{b}$ (10), въ равенство (9), получимъ квадратное относительно u уравненіе

$$cu^2 + \frac{a(au+c)^2}{b^2} + b = 0,$$

откуда находимъ два значенія для u; затѣмъ при помощи равенствъ (10), (5), (3), (4) получимъ соотвѣтствующія значенія v, x, y и z.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. С.* (Одесса).

№ 521 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^8 + 4c^6x^2 = c^8.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ предложеннаго уравненія по $2c^4x^4 + x^8$, представимъ его послѣдовательно въ видѣ

$$x^8 + 2c^4x^4 + c^8 = 2(c^8 - 2c^6x^2 + c^4x^4), \quad (x^4 + c^4)^2 = [\sqrt{2}(c^4 - c^2x^2)]^2,$$

$$(x^4 + c^4)^2 - [\sqrt{2}(c^4 - c^2x^2)]^2 = 0,$$

$$[x^4 + c^4 + \sqrt{2}(c^4 - c^2x^2)]\,[x^4 + c^4 - \sqrt{2}(c^4 - c^2x^2)] = 0.$$

Такимъ образомъ, предложенное уравненіе распадается на два биквадратныхъ:

$$x^4+c^4+\sqrt{2}(c^4-c^2x^2)=x^4-c^2\sqrt{2}x^2+c^4(1+\sqrt{2})=0 \quad (1),$$

$$x^4+c^4-\sqrt{2}(c^4-c^2x^2)=x^4+c^2\sqrt{2}x^2+c^4(1-\sqrt{2})=0 \quad (2).$$

Изъ уравненій (1) и (2) находимъ соотвѣтственно по четыре рѣшенія:

$$x=\pm c\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2-4\sqrt{2}}}{2}},\quad x=\pm c\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}},$$

Н. Агрономовъ (Вологда); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

№ 522 (4 сер.). *Построить треугольникъ по периметру σ его ортоцентрическаго треугольника и по отношенію высотъ*

$$h_a : h_b : h_c = \alpha : \beta : \gamma,$$

гдѣ α, β, γ — данные отрѣзки.

Задача легко рѣшается методомъ подобія. Называя стороны искомаго треугольника ABC через a, b, c и замѣчая, что стороны обратно пропорціональны проведеннымъ къ нимъ высотамъ, имѣемъ

$$a : b = h_b : h_c = \beta : \alpha;\quad b : c = \gamma : \beta = \alpha : \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

откуда слѣдуетъ: $a : b : c = \beta : \alpha : \frac{\alpha\beta}{\gamma}$, т. е. стороны искомаго треугольника a, b, c соотвѣтственно пропорціональны отрѣзкамъ β, α и отрѣзку $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, который легко построить. Поэтому искомый треугольникъ ABC подобенъ треугольнику $A'B'C'$, стороны котораго суть β, α, и $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$. Назовемъ черезъ σ' периметръ ортоцентрическаго треугольника, построеннаго въ треугольникѣ $A'B'C'$. Такъ какъ сходственные линейные элементы подобныхъ треугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ, то

$$\frac{\sigma}{\sigma'}=\frac{a}{\gamma}, \text{ откуда } a=\frac{\sigma\gamma}{\sigma'} \quad (1).$$

Итакъ, для построенія искомаго треугольника строимъ раньше треугольникъ $A'B'C'$ по сторонамъ β, α, $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, проводимъ въ немъ высоты, находимъ периметръ σ' ортоцентрическаго треугольника строимъ сторону a по формулѣ (1), а затѣмъ построимъ треугольникъ ABC по сторонѣ a и угламъ $B=B'$, $C=C'$. Для того, чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы изъ отрѣзковъ β, α, $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ можно было построить треугольникъ.

Н. Конюховъ (Никитовка); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 8-го Іюня 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется