Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIII Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

15 Марта. № 389. 1905 г.

Содержаніе: Приближенное вычисленіе. (Продолженіе). *Проф. В. П. Ермакова.*—Краткія историческія свѣдѣнія изъ исторіи сферической тригонометріи. *В. Шидловскаго.* — Научная хроника: Кристаллическое состояніе тѣлъ и критическая температура. Зеленый лучъ. — Задачи для учащихся, №№ 598—604 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 502, 503, 506. — Объявленія.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ.

Проф. В. П. Ермакова.

*(Продолженіе *).*

4.

Абсолютная погрѣшность суммы и разности, сложеніе и вычитаніе съ данною точностью.

Здѣсь мы встрѣчаемъ новый терминъ: *точность.* Далѣе будетъ встрѣчаться такая фраза: *вычислить результатъ съ точностью до* 0,001. Это значитъ, что ошибка не должна превосходить 0,001; но предѣлъ ошибки мы назвали погрѣшностью. Поэтому въ данной выше фразѣ слово точность можно замѣнить словомъ погрѣшность: *вычислить результатъ съ погрѣшностью* 0,001. Хотя такая замѣна одного термина другимъ возможна, но эти два термина не тождественны; они на самомъ дѣлѣ противоположны: съ возрастаніемъ погрѣшности точность убываетъ. Точность можетъ быть и абсолютною, и относительною.

---

*) См. № 388 „Вѣстника".

Пусть A и B будутъ два точныхъ числа, ихъ приближенныя значенія a и b, ихъ абсолютныя ошибки α и β; имѣемъ:

$$A = a + \alpha,$$

$$B = b + \beta.$$

Складывая и вычитая, получаемъ:

$$A \pm B = a \pm b + (\alpha \pm \beta).$$

Абсолютная ошибка суммы или разности будетъ $\alpha \pm \beta$. Припомнимъ, что каждая ошибка можетъ быть и положительною, и отрицательною и по величинѣ не превосходитъ соотвѣтствующей погрѣшности. Отсюда заключаемъ, что абсолютная погрѣшность суммы или разности двухъ чиселъ равна суммѣ абсолютныхъ погрѣшностей. Это правило легко можетъ быть распространено на нѣскольно чиселъ:

При сложеніи и вычитаніи нѣсколькихъ приближенныхъ чиселъ абсолютная погрѣшность результата равна суммѣ абсолютныхъ погрѣшностей всѣхъ чиселъ.

Отсюда легко вытекаетъ правило, какъ производить сложеніе и вычитаніе приближенныхъ чиселъ, чтобы получить результатъ съ данною абсолютною точностью. Обыкновенно требуется найти результатъ съ абсолютной точностью до $\frac{1}{10^n}$. Для достиженія этой цѣли нужно поступать по слѣдующему правилу:

Если число слагаемыхъ и вычитаемыхъ приближенныхъ чиселъ не болѣе двадцати и требуется результатъ найти съ абсолютною точностью до $\frac{1}{10^n}$, то въ каждомъ числѣ удерживаемъ одною цифрою болѣе, т. е. $n+1$ десятичныхъ цифръ; въ найденномъ результатѣ отбрасываемъ послѣднюю цифру.

Для повѣрки этого правила положимъ, что нужно произвести сложеніе и вычитаніе надъ двадцатью числами и требуется результатъ вычислить съ абсолютною точностью до 0,001. Согласно данному правилу нужно въ кадомъ числѣ удержать четыре десятичныя цифры. Абсолютная погрѣшность такого числа, какъ было показано раньше, можетъ быть сдѣлана равною 0,00005. Примемъ во вниманіе, что абсолютная погрѣшность результата равна суммѣ абсолютныхъ погрѣшностей всѣхъ чиселъ, т. е. равна $0{,}00005 \times 20 = 0{,}001$. Послѣдняя погрѣшность и есть требуемая.

Если же приходится складывать и вычитать болѣе двадцати чиселъ, то для полученія результата съ желаемою абсолютною точностью нужно въ каждомъ числѣ удержать двѣ лишнія десятичныя цифры.

Ариѳметическое дополненіе. Когда приходится складывать и вычитать нѣсколько чиселъ, то для сокращенія дѣйствій прибѣгаютъ къ ариѳметическому дополненію. Ариѳметическое дополненіе берется до 10, 100, 1000,..... Вмѣсто того чтобы вычесть данное число, можно прибавить его ариѳметическое дополненіе и изъ результата вычесть 10, 100, 1000,.....

Чтобы найти ариѳметическое дополненіе, нужно каждую цифру вычесть изъ 9, за исключеніемъ послѣдней цифры, которая вычитается изъ 10.

Для поясненія ариѳметическаго дополненія положимъ, что нужно произвести слѣдующія дѣйствія:

$$8{,}713+18{,}025-23{,}431.$$

Вмѣсто послѣдняго числа возьмемъ его ариѳметическое дополненіе до 100, и результатъ можетъ быть написанъ такъ:

$$\begin{array}{l} 8{,}713 \\ +18{,}025 \\ +76{,}569-100 \\ \hline 103{,}307-100=3{,}307. \end{array}$$

Для поясненія вышеуказаннаго правила, положимъ, что нужно произвести слѣдующія дѣйствія:

$$7{,}12034+0{,}584037+9{,}078451-$$
$$-0{,}031278-0{,}584312-6{,}402445.$$

Положимъ, что требуется найти результатъ съ тремя точными десятичными цифрами. Согласно данному правилу, удержимъ въ каждомъ числѣ четыре цифры послѣ запятой; вмѣсто трехъ вычитаемыхъ чиселъ возьмемъ ихъ ариѳметическія дополненія до 10. Результатъ можетъ быть написанъ такъ:

$$\begin{array}{l} 7{,}1203 \\ 0{,}5840 \\ 9{,}0785 \\ 9{,}9687-10 \\ 9{,}4157-10 \\ 3{,}5976-10 \\ \hline 39{,}7648-30=9{,}7648. \end{array}$$

Теперь нужно отбросить послѣднюю цифру, а такъ какъ эта цифра болѣе 5, то послѣднюю удерживаемую цифру нужно увеличить на единицу. Искомый результатъ будетъ 9,765.

Остается сдѣлать еще одно важное замѣчаніе: *при сложеніи и вычитаніи нѣсколькихъ чиселъ абсолютная точность результата не можетъ превзойти абсолютной точности каждаго числа.* Поэтому, если намъ нужно найти результатъ съ тремя точными десятичными цифрами, а одно изъ чиселъ дано точно съ двумя десятичными цифрами, то искомый результатъ получить невозможно.

5.

Относительная погрѣшность при умноженіи и дѣленіи.

Обозначимъ два точныхъ числа черезъ A и B, ихъ приближенныя значенія черезъ a и b; ихъ относительныя ошибки черезъ α и β. Согласно опредѣленію относительной ошибки, имѣемъ:

$$\begin{aligned} A &= a(1+\alpha), \\ B &= b(1+\beta). \end{aligned} \qquad (1)$$

Перемноживъ эти числа, получимъ:

$$AB = ab(1+\alpha+\beta+\alpha\beta).$$

Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ малыми величинами α и β, то $\alpha\beta$ можно отбросить, и относительную ошибку произведенія можно считать равною $\alpha+\beta$. Припомнимъ, что каждая ошибка можетъ быть и положительною, и отрицательною и не превосходитъ нѣкотораго предѣла, который мы называемъ погрѣшностью. Отсюда мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Относительная погрѣшность произведенія двухъ чиселъ равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей множимаго и множителя.

Раздѣлимъ числа (1):

$$\frac{A}{B} = \frac{a(1+\alpha)}{b(1+\beta)} = \frac{a}{b}\left(1+\alpha-\beta+\frac{\beta^2-\alpha\beta}{1+\beta}\right).$$

Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ малыми величинами α и β, то послѣдній членъ можно отбросить, и относительную ошибку частнаго можно считать равною $\alpha-\beta$. Припомнимъ, что каждая ошибка можетъ быть и положительною, и отрицательною и по величинѣ не превосходитъ нѣкотораго предѣла, который мы называемъ погрѣшностью. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Относительная погрѣшность частнаго равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей дѣлимаго и дѣлителя.

Сказанное правило можно обобщить на тотъ случай, когда приходится перемножать и дѣлить нѣсколько приближенныхъ чиселъ. Общее правило выражается такъ:

При умноженіи и дѣленіи нѣсколькихъ приближенныхъ чиселъ относительная погрѣшность результата равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей всѣхъ приближенныхъ чиселъ.

Примѣчаніе. Въ вычисленія, кромѣ приближенныхъ чиселъ, могутъ входить и точныя числа; такія числа при опредѣленіи погрѣшности результата не принимаются во вниманіе, такъ какъ абсолютная и относительная погрѣшность точнаго числа равна нулю.

6.

Умноженіе и дѣленіе съ данною точностью.

При умноженіи и дѣленіи приближенныхъ чиселъ могутъ быть двѣ задачи, смотря по тому, требуется ли найти результатъ съ данною абсолютною точностью или съ данною относительною точностью. Простѣйшая задача будетъ та, когда результатъ ищется съ данною относительною точностью.

Умножать и дѣлить приближенныя числа можно безъ логариѳмовъ или съ помощью логариѳмовъ. Покажемъ сначала, какъ производятся эти дѣйствія безъ логариѳмовъ.

Положимъ, что нужно произвести умноженіе и дѣленіе надъ n приближенными числами; при этомъ требуется найти результатъ съ данною относительною точностью, т. е. съ данною относительною погрѣшностью, которую мы обозначимъ черезъ β. Нужно позаботиться о томъ, чтобы не производить лишнихъ дѣйствій, что приводится къ опредѣленію числа удерживаемыхъ цифръ въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ. Эта задача допускаетъ простое рѣшеніе.

Предположимъ, что отностельныя погрѣшности данныхъ приближенныхъ чиселъ равны между собою; обозначимъ эту погрѣшность черезъ β'. По доказанному въ § 5, относительная погрѣшность результата равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей данныхъ чиселъ, т. е. равна $n\beta'$. Изъ равенства $\beta = n\beta'$ находимъ $\beta' = \frac{\beta}{n}$.

Такъ опредѣляется относительная погрѣшность каждаго изъ данныхъ чиселъ. По формулѣ (1, § 3) найдемъ показатель точности, въ которомъ отбросимъ знакъ неравенства:

$$N = \frac{0{,}5}{\beta'} = \frac{0{,}5n}{\beta}. \tag{1}$$

Когда извѣстенъ показатель точности, то по правилу, указанному въ § 3, мы легко опредѣлимъ, сколько въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ нужно удержать значащихъ цифръ.

При выполненіи данныхъ дѣйствій мы производимъ указанныя дѣйствія сначала надъ двумя числами, найденный результатъ комбинируемъ съ третьимъ даннымъ числомъ и т. д. Такимъ образомъ получаемъ нѣсколько промежуточныхъ чиселъ. Требуется показать, сколько въ каждомъ изъ этихъ промежуточныхъ чиселъ удержать значащихъ цифръ. Положимъ, что промежуточное число есть результатъ дѣйствій надъ k числами; относительная погрѣшность такого числа равна суммѣ погрѣшностей отдѣльныхъ чиселъ, т. е. равна $k\beta'$; показатель точности этого числа будетъ:

$$\frac{0{,}5}{k\beta'} = \frac{N}{k} = \frac{0{,}5n}{\beta k}. \tag{2}$$

Этотъ показатель точности опредѣляетъ число значащихъ цифръ въ промежуточномъ числѣ.

Когда вычислимъ результатъ, то нужно знать, сколько въ немъ удержать значащихъ цифръ; это опредѣляется показателемъ точности:

$$\frac{N}{n}=\frac{0{,}5}{\beta}.$$

Возьмемъ примѣръ для поясненія:

$$\frac{0{,}13452\times 7{,}376}{2{,}1432\times 0{,}85887} \tag{3}$$

Требуется вычислить результатъ съ относительною точностью до одного цроцента. Въ настоящемъ случаѣ $n=4$, $\beta=0{,}01$. По формулѣ (1) имѣемъ:

$$N=\frac{0{,}5\times 4}{0{,}01}=200.$$

По правилу, указанному въ § 3, удержимъ въ каждомъ числѣ необходимое число значащихъ цифръ. Вмѣсто выраженія (3) получимъ слѣдующее:

$$\frac{0{,}1345\times 7{,}38}{2{,}14\times 0{,}859}. \tag{4}$$

Произведемъ обозначенныя дѣйствія:

$$0{,}1345\times 7{,}38=0{,}993$$

$$2{,}14\times 0{,}859=1{,}84$$

$$0{,}993:1{,}84=0{,}54.$$

Искомый результатъ будетъ 0,54.

Нѣсколько труднѣе рѣшается задача, когда при умноженіи и дѣленіи чиселъ требуется найти результатъ съ данною абсолютною точностью, т. е. съ данною абсолютною погрѣшностью. Въ такомъ случаѣ прежде всего нужно найти грубое приближеніе результата; необходимо знать первую значащую цифру результата. Для этой цѣли удержимъ въ каждомъ данномъ числѣ двѣ значащихъ цифры и произведемъ обозначенныя дѣйствія. Въ каждомъ промежуточномъ числѣ тоже удерживаемъ не болѣе двухъ значащихъ цифръ. Въ результатѣ найдемъ грубое приближеніе, въ которомъ будетъ вѣрна только первая цифра. Если мы теперь заданную абсолютную погрѣшность раздѣлимъ на найденный результатъ, то получимъ относительную погрѣшность результата. По извѣстной относительной погрѣшности результата производимъ дѣйствія, какъ показано выше.

Для поясненія предположимъ, что нужно произвести вычисленіе (3) съ абсолютною погрѣшностью 0,005. Находимъ, какъ сказано выше, грубый приближенный результатъ, который окажется равнымъ 0,5. Послѣ этого находимъ относительную погрѣшность $\frac{0,005}{0,5} = 0,01$. Выше уже было показано, какъ по этой относительной погрѣшности производятся вычисленія.

Къ сказанному нужно прибавить еще слѣдующее замѣчаніе: *при умноженіи и дѣленіи чиселъ относительная точность результата не можетъ превзойти относительной точности каждаго числа.* Такъ, если требуется найти результатъ съ точностью до 0,001, а одно изъ чиселъ дано съ точностью до 0,01, то искомый результатъ невозможенъ.

Данное выше правило гарантируетъ полученіе результата съ желаемою точностью; но при внимательномъ отношеніи къ дѣлу оказывается, что мы произвели лишнія дѣйствія. *Можно дать точное правило*, которое покажетъ, что въ нѣкоторыхъ числахъ еще можетъ быть отброшена послѣдняя цифра. Такъ, въ выраженіи (4), кромѣ 2,14, въ остальныхъ числахъ послѣдняя цифра можетъ быть отброшена; получаемъ болѣе простое выраженіе:

$$\frac{0,134 \times 7,4}{2,14 \times 0,86}.$$

Дальнѣйшее упрощеніе невозможно; если бы мы еще отбросили какую-нибудь цифру, то уже не получили бы результата съ желаемою точностью.

Выпуская все сказанное въ этомъ §, можно было бы непосредственно приступить къ изложенію точнаго правила; но такой способъ изложенія неудобенъ, потому что онъ не былъ бы понятенъ читателю, не привыкшему къ производству приближенныхъ вычисленій. При изложеніи всякаго предмета нужно соблюдать постепенный переходъ отъ болѣе простыхъ разсужденій къ болѣе сложнымъ. Пусть читатель хорошо усвоитъ основныя понятія объ абсолютной и относительной ошибкѣ и погрѣшности, пусть по указаннымъ правиламъ сдѣлаетъ нѣсколько упражненій; только послѣ этого станетъ ему яснымъ точное правило, которое будетъ изложено въ послѣднемъ §.

7.

Возвышеніе въ степень и извлеченіе корней съ данною точностью.

Положимъ, что нужно приближенное число a возвысить въ n-тую степень, a^n. Требуется найти результатъ съ относительною точностью β. Сколько значащихъ цифръ нужно удержать въ числѣ a? Возвышеніе въ степень есть частный случай умноженія, когда всѣ множители равны. Поэтому, если черезъ β' обозначимъ относительную погрѣшность числа a, то $n\beta' = \beta$. Отсюда находимъ $\beta' = \frac{\beta}{n}$.

Далѣе находимъ показатель точности числа a:

$$N=\frac{0,5n}{\beta}.$$

Этотъ показатель точности покажетъ, сколько въ числѣ a нужно удержать значащихъ цифръ.

Перейдемъ теперь къ извлеченію корней, $\sqrt[m]{a}$. Требуется результатъ вычислить съ относительною погрѣшностью β. Извлеченіе корней есть дѣйствіе, обратное возвышенію въ степень, а потому относительная погрѣшность числа a равна $m\beta$; показатель точности будетъ:

$$N=\frac{0,5}{m\beta}.$$

Положимъ, что требуется возвысить въ степень или извлечь корень съ данною абсолютною погрѣшностью. Въ такомъ случаѣ находимъ грубое приближеніе результата съ одною точною цифрою; потомъ вычисляемъ относительную погрѣшность и поступаемъ, какъ сказано выше.

Однако, возвышеніе въ степень и извлеченіе корней довольно затруднительно безъ логариѳмовъ. Умноженіе и дѣленіе также проще совершается при помощи логариѳмовъ. Поэтому перейдемъ къ выясненію, какъ производится приближенное вычисленіе при помощи логариѳмовъ.

8.

Зависимость между относительною ошибкою числа и абсолютной ошибкою логариѳма.

Въ приближенномъ вычисленіи съ помощью логариѳмовъ намъ придется рѣшать такую задачу: по данной относительной погрѣшности числа найти абсолютную погрѣшность его логариѳма. Покажемъ, какъ рѣшается эта задача.

Вычисленія всегда дѣлаются при помощи Бригговыхъ логариѳмовъ, вычисленныхъ по основанію 10. Пусть x есть логариѳмъ числа y.

$$x=\log y. \tag{1}$$

Положимъ, что въ числѣ мы сдѣлали относительную ошибку β; въ логариѳмѣ также появится ошибка; обозначимъ абсолютную ошибку логариѳма черезъ α. Равенство (1) превратится въ слѣдующее:

$$x+\alpha=\log(y+\beta y)=\log y+\log(1+\beta).$$

Вычитая отсюда равенство (1), получаемъ:

$$\alpha=\log(1+\beta). \tag{2}$$

Такъ выражается точная зависимость между относительной ошибкой числа и абсолютною ошибкою его логариѳма. Каждый разъ неудобно примѣнять эту формулу, а потому покажемъ, какъ отсюда находится приближенное выраженіе ошибки α.

Въ дифференціальномъ исчисленіи показывается, что логариѳмъ (2) можетъ быть разложенъ въ рядъ по степенямъ β:

$$log(1+\beta) = M\left(\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} \cdots\right). \qquad (3)$$

Въ этомъ ряду M есть такъ называемый модуль Бригговыхъ логариѳмовъ,

$$M = 0{,}4342....$$

Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ малою величиною β, то въ ряду (3) можно удержать только первый членъ,

$$log(1+\beta) = M\beta.$$

Подставивъ это выраженіе въ равенство (2), получимъ:

$$\alpha = M\beta.$$

Когда мы имѣемъ дѣло съ отношеніемъ двухъ ошибокъ, то намъ достаточно найти грубую приближенную величину этого отношенія; поэтому вмѣсто M можно подставить его приближенное значеніе 0,4; окончательно получимъ:

$$\alpha = 0{,}4\beta. \qquad (4)$$

Отсюда заключаемъ, что абсолютная ошибка логариѳма равна (приблизительно) четыремъ десятымъ относительной ошибки соотвѣтственнаго числа. Отъ ошибокъ перейдемъ къ ихъ предѣламъ, т. е. къ погрѣшностямъ; получимъ слѣдующее правило:

Абсолютная погрѣшность логариѳма равна четыремъ десятымъ относительной погрѣшности соотвѣтственнаго числа.

Данное доказательство не годится для среднихъ школъ. Въ среднихъ школахъ равенство (4) можно повѣрить на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Изъ таблицъ находимъ:

$$log\ 1{,}1 = 0{,}04139,$$
$$log\ 1{,}01 = 0{,}00432,$$
$$log\ 1{,}001 = 0{,}00043,$$
$$log\ 1{,}0001 = 0{,}00004.$$

Изъ подобныхъ примѣровъ мы заключаемъ, что имѣетъ мѣсто приблизительное равенство:

$$log(1+\beta) = 0{,}4\beta.$$

Изъ сравненія съ равенствомъ (2) найдемъ равенство (4).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Краткія историческія свѣдѣнія изъ исторіи сферической тригонометріи.

В. Шидловскаго.

Первый положившій начало прямолинейной и сферической тригонометріи былъ ученый, принадлежавшій къ первой александрійской школѣ, Гиппархъ Родосскій (родившійся на островѣ Родосѣ), жившій между 160 и 125 г.г. до Р. Х. Гиппархъ считается самымъ великимъ изъ астрономовъ древняго міра, онъ первый положилъ начало математической астрономіи. Тригонометрія была необходима Гиппарху для астрономическихъ вычисленій; онъ изложилъ геометрическія основы прямолинейной и сферической тригонометріи въ сочиненіи „О восхожденіи и захожденіи свѣтилъ"; но сочиненіе это до насъ не дошло. Онъ же написалъ сочиненіе о хордахъ въ 12 книгахъ; объ нихъ упоминаетъ Ѳеонъ Александрійскій, но книги эти тоже до насъ не дошли.

Систематическое изложеніе сферической геометріи, составленное Ѳеодосіемъ, современникомъ Цицерона, такъ называемая „Сферика" Ѳеодосія Триполійскаго, жившаго около 50 г. до Р. Х., заключаетъ въ себѣ древнѣйшія извѣстныя намъ изысканія по этому предмету. Сочиненіе „О сферикахъ", въ трехъ книгахъ — состоитъ изъ цѣлаго ряда предложеній, каковы, напр.: всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ; плоскость касается шара только въ одной точкѣ; сѣченіе шара плоскостью, проходящею черезъ центръ, есть большой кругъ шара; разстояніе какой-нибудь точки окружности большаго круга отъ его полюса есть сторона вписаннаго квадрата и др. Большая часть изъ предложеній этого сочиненія находятся въ настоящее время въ сочиненіяхъ по элементарной геометріи. Въ III книгѣ сочиненія „О сферикахъ" находятся предложенія, дотого затруднявшія древнихъ геометровъ, что Паппусъ счелъ необходимымъ написать къ ней комментаріи. Необходимо замѣтить, что древніе астрономы и математики старались рѣшать построеніемъ нѣкоторые вопросы, относящіеся къ астрономіи, а потому поверхность шара, а также свойства сферическихъ фигуръ, составленныхъ дугами большихъ и малыхъ круговъ, еще съ древнѣйшихъ временъ были предметомъ изслѣдованій знаменитыхъ геометровъ. Кромѣ сочиненія „О сферикахъ" Ѳеодосія Триполійскаго, замѣчательно еще сочиненіе „Сферика" Менелая Александрійскаго, геометра и астронома, жившаго около 80 г. по Р. Х. въ царствованіе императора Трояна; сочиненіе это въ трехъ книгахъ. Самое важное изъ всѣхъ предложеній „Сферики" Менелая есть первое въ третьей книгѣ, которое служило основаніемъ всей сферической тригонометріи древнихъ грековъ. Предложеніе это относится къ свойству шести отрѣзковъ на сторонахъ сферическаго треугольника, полученныхъ отъ пересѣченія его сторонъ дугою большого круга. Для доказательства этого предложенія Менелай пользуется, какъ леммой, подобнымъ же предложеніемъ для плоскаго треугольника. Предложеніе это состоитъ въ томъ, что, если пересѣчь стороны треугольника прямой линіей, то произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общей точки и отсѣченныхъ на сторонахъ даннаго треугольника, равно произведенію трехъ остальныхъ отрѣзковъ. Замѣтимъ, что предложеніе это получило громадное значеніе въ новѣйшей геометріи, гдѣ послужило основаніемъ теоріи сѣкущихъ Карно.

Сферика древнихъ была значительно пополнена трудами новѣйшихъ геометровъ: Віеты, Жирара, Лекселя, Эйлера.

Изложеніе началъ прямолинейной и сферической тригонометріи находимъ въ знаменитомъ сочиненіи Клавдія Птоломея, астронома и геометра 2-й Александрійской школы, жившаго во II ст. по Р. Х., именно, въ 1-й книгѣ его сочиненія „Альмагеста“, состоящаго изъ 13 книгъ. Въ основаніе тригонометріи Птоломей положилъ предложеніе, впервые предложенное Менелаемъ относительно свойствъ шести отрѣзковъ на сторонахъ сферическаго треугольника, о чемъ мы уже упоминали выше. Въ сочиненіи Птоломея показано устройство таблицъ хордъ. Это суть первыя тригонометрическія таблицы. Устройство такихъ таблицъ было необходимо, такъ какъ безъ нихъ невозможно произвести ни одного астрономическаго вычисленія, необходимаго въ практической астрономіи. Сочиненіе Птоломея „Альмагестъ“, служило главнымъ источникомъ для изученія тригонометріи арабамъ.

Послѣ предварительныхъ изысканій древнихъ въ сферикѣ, исторія сферической тригонометріи находится въ тѣсной связи съ исторіей тригонометріи прямолинейной.

Насколько подвинулось развитіе сферической тригонометріи въ средніе вѣка и какъ велики были уже знанія древнихъ геометровъ въ этой области математики, всего лучше видно изъ арабской литературы. Послѣ паденія Омайядовъ (75) г. по Р. Х.) наступаетъ время процвѣтанія наукъ и искусствъ. Богдадъ дѣлается центромъ цивилизаціи. Въ промежутокъ времени между IX и XIII столѣтіями создается одна изъ самыхъ обширныхъ литературъ, дѣлаются замѣчательныя открытія; арабы, имѣя въ своихъ рукахъ сочиненія Грековъ, обрабатывали ихъ и прибавляли много новаго къ теоріямъ своихъ предшественниковъ. Арабы усердно занимались и математическими науками, развитіе которыхъ у нихъ шло успѣшно; то же относится и къ сферической тригонометріи. Прямолинейная тригонометрія осталась у арабовъ почти въ томъ видѣ, въ какомъ была во время Менелая. Главнымъ источникомъ для изученія тригонометріи арабамъ служилъ „Альмагестъ“ Птоломея. Для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ арабамъ были извѣстны 5 формулъ, которыми мы пользуемся и въ настоящее время, а именно:

1) $\mathrm{Cos}a = \mathrm{Cos}b \, . \, \mathrm{Cos}c$,

2) $\mathrm{Sin}c = \mathrm{Sin}a \, . \, \mathrm{Sin}C$,

3) $\mathrm{Sin}c = \mathrm{Tang}b \, . \, \mathrm{Cotg}B$,

4) $\mathrm{Cos}C = \mathrm{Cotg}a \, . \, \mathrm{Tang}b$,

5) $\mathrm{Cos}C = \mathrm{Cos}c \, . \, \mathrm{Sin}B$.

Изъ этихъ формулъ первыя четыре извѣстны были древнимъ грекамъ, что видно изъ книгъ Менелая и Птоломея. Для рѣшенія косоугольнаго треугольника разсѣкали его на два прямоугольные. Незнаніе двухъ уравненій:

$$\mathrm{Cos}C = \mathrm{Cos}c \, . \, \mathrm{Sin}B \text{ и } \mathrm{Cos}a = \mathrm{Cotg}B \, . \, \mathrm{Cotg}C,$$

было причиною, что древніе не могли рѣшать нѣкоторыхъ вопросовъ, напримѣръ, по тремъ угламъ опредѣлить остальныя части, и затруднялись при рѣшеніи треугольника по даннымъ тремъ сторонамъ. Изъ арабскихъ математиковъ, способствовавшихъ развитію сферической тригонометріи, укажемъ на Альбатани, родомъ изъ города Батена въ Сиріи, умершаго около 929 г. по Р. Х. Онъ авторъ астрономическаго сочиненія „Liber de motu stellarum“; содержаніе этого сочиненія Альбатани заимствовалъ изъ „Альмагеста“ Птоломея. Въ III главѣ своего сочиненія Альбатани изложилъ тригонометрію, при чемъ тригонометрическія формулы не носятъ уже геометрическаго характера, какъ въ сочиненіи Птоломея, а являются въ видѣ алгебраическихъ выраженій. Альбатани первый ввелъ вмѣсто хордъ синусы; у него же въ 1-й разъ встрѣчается tang въ видѣ отношенія синуса къ косинусу. Тангенсъ онъ называетъ „растянутая тѣнь“.

Изъ тригонометрическихъ выраженій Альбатани извѣстны всѣ формулы, находящіяся въ „Альмагестѣ“ и, кромѣ того, зависимость, существующая между тремя сторонами и однимъ изъ угловъ сферическаго треугольника въ видѣ выраженія:

$$\mathrm{Cos}a = \mathrm{Cos}b \, . \, \mathrm{Cos}c + \mathrm{Sin}b \, . \, \mathrm{Sin}c \, . \, \mathrm{Cos}A.$$

Мы сказали, что Альбатани ввелъ синусы; замѣтимъ, что индусы употребляли хорды, тетевы лука, а также Sinver и косинусы. Птоломей ввелъ полухорды, но ему не пришла мысль замѣнить полухорды синусами.

Альбатани считался настолько великимъ астрономомъ, что былъ прозванъ арабскимъ Птоломеемъ. Арабами были значительно усовершенствованы тригонометрическія таблицы; первыя таблицы ими заимствованы у индусовъ; таблицы хордъ „Альмагеста“ Птоломея усовершенствованы.

Арабскій математикъ Абулъ-Вефа, жившій въ X вѣкѣ, значительно подвинулъ тригонометрію, введя новое начало, именно, онъ ввелъ Tang, какъ самостоятельную тригонометрическую функцію. Введеніе тангенсовъ въ тригонометрическія выраженія весьма упростило вычисленія. Понятіе о тангенсахъ вошло въ тригонометрію весьма туго; такъ напримѣръ, Коперникъ, жившій сто лѣтъ послѣ Регіомонтануса, не зналъ ихъ примѣненія. Абулъ-Вефа ввелъ еще Cotg, Sec и Cosec. Тангенсы и котангенсы онъ называетъ „вертикальныя и горизонтальныя тѣни", а секансъ и косекансъ „діаметръ вертикальной тѣни и діаметръ горизонтальной тѣни". Абулъ-Вефа построилъ тригонометрическія таблицы для Tang и Cotg. Этими функціями онъ воспользовался для упрощенія извѣстныхъ уже до него тригонометрическихъ выраженій, но самостоятельныхъ формулъ для нихъ онъ не далъ.

Къ сожалѣнію, труды Абулъ-Вефы были почти совершенно забыты, и только въ XV столѣтіи, когда Регіомонтанусъ снова нашелъ тангенсы, они были окончательно введены въ тригонометрію. Изъ арабскихъ ученыхъ, занимавшихся тригонометріей, слѣдуетъ упомянуть Аверроэса, написавшаго сочиненіе по сферической тригонометріи. Аверроэсъ родился въ Кордовѣ въ 1126 г. по Р. X.; онъ былъ знаменитый врачъ и философъ, а также занимался астрономіей и изложилъ вкратцѣ Альмагестъ Птоломея. Къ числу математиковъ, способствовавшихъ развитію сферической тригонометріи, нужно отнести Гебера (Jeber), испанскаго астронома XI столѣтія, жившаго въ Севильѣ. Арабы называли его Алишбили, т. е. изъ Севильи. Его не надо смѣшивать съ химикомъ Геберомъ, жившимъ въ VIII вѣкѣ. Математикъ Геберъ написалъ астрономію въ 9 книгахъ. Первая часть этого сочиненія заключаетъ довольно полный трактатъ по тригонометріи. Онъ доказываетъ нѣкоторыя изъ предложеній „Сферикъ" Ѳеодосія. Особеннаго вниманія заслуживаетъ въ тригонометріи Гебера попытка, сдѣланная имъ для замѣны извѣстнаго предложенія правила шести величинъ другимъ, болѣе простымъ, названнымъ правиломъ четырехъ величинъ. Для сферическаго треугольника правило шести величинъ принимаетъ немного иную форму, именно, вмѣсто отрѣзковъ берутся двойныя хорды, стягивающія эти отрѣзки.

Называя отрѣзки сторонъ прямолинейнаго треугольника, пересѣченнаго нѣкоторою прямою, черезъ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, правило шести величинъ можно представить въ видѣ: $a_1.a_2.a_3 = b_1.b_2.b_3$.

При посредствѣ правила четырехъ величинъ Геберъ получаетъ формулу: $\operatorname{Sin} c = \operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} C$, гдѣ a гипотенуза, а c катетъ сферическаго прямоугольнаго треугольника. Основываясь на томъ же правилѣ 4-хъ величинъ, онъ выводитъ формулу: $\operatorname{Cos} a =$ $= \operatorname{Cos} b . \operatorname{Cos} c$.

Наконецъ, Геберъ даетъ формулу $\operatorname{Cos} C = \operatorname{Sin} b . \operatorname{Cos} c$.

Эта формула первый разъ встрѣчается въ сочиненіи Гебера, а потому и носитъ названіе предложенія Гебера. Это предложеніе не встрѣчается ни въ одномъ изъ сочиненій арабскихъ математиковъ, ни въ „Альмагестѣ“ Птоломея. Эти предложенія показываютъ, какія важныя нововведенія сдѣлалъ Геберъ въ сферической тригонометріи. Прямолинейная же тригонометрія оставлена имъ въ томъ же состояніи, въ какомъ она изложена Птоломеемъ. Геберъ избѣгаетъ въ вычисленіяхъ примѣненія Sin и Cos, а, подобно греческимъ астрономамъ, ограничивается употребленіемъ хордъ двойныхъ угловъ. Изъ этого видно, какъ мало была подвинута прямолинейная тригонометрія впередъ во время Гебера. Усовершенствованіемъ прямолинейная тригонометрія обязана извѣстному Регіомонтанусу, германскому математику XV столѣтія. Аверроэсъ, жившій въ XII вѣкѣ, родившійся въ Кордовѣ въ 1120 г., былъ также однимъ изъ арабскихъ математиковъ, написавшихъ сочиненіе по сферической тригонометріи; въ этомъ сочиненіи онъ перечисляетъ девять предложеній, касающихся различныхъ свойствъ сферическихъ треугольниковъ. Со смертью этого ученаго начинается упадокъ всей арабской философіи.

Изъ изложеннаго видно, въ какомъ состояніи находилась сферическая тригонометрія арабовъ. Здѣсь кстати замѣтимъ, что при астрономическихъ вычисленіяхъ индусы пользовались также иногда сферическими треугольниками, но только прямоугольными. Изъ формулъ сферической тригонометріи имъ было извѣстно соотношеніе: $\mathrm{Sin}c = \mathrm{Sin}a . \mathrm{Sin}C$. Въ большей части случаевъ сферическіе треугольники индусы старались замѣнить плоскими, которые они всегда разбивали на прямоугольные. Другихъ выраженій, представляющихъ зависимость между частями сферическаго треугольника, индусы не знали.

Остановимся еще на трудахъ въ области тригонометріи германскаго математика Регіомонтануса, родившагося въ 1436 г. въ Кенигсбергѣ, во Франконіи. Регіомонтанусъ вычислилъ двѣ таблицы синусовъ для угловъ отъ 1′ до 1°. Во введеніи къ 1-ой таблицѣ доказывается, что, если извѣстенъ синусъ дуги, меньшей 90°, то извѣстенъ и синусъ дуги дополнительной. Имъ была вычислена еще 3-я таблица, именно, таблица тангенсовъ; онъ былъ первый изъ математиковъ Запада, который ввелъ тангенсы въ тригонометрію. Самое замѣчательное изъ сочиненій Регіомонтануса—это его трактатъ по тригонометріи.

Съ 20-го предложенія этого трактата начинается собственно тригонометрія, при чемъ прежде всего разсматриваются прямоугольные треугольники. Части треугольника опредѣляются только черезъ синусъ. Всѣ предложенія доказаны предварительно геометрически. Послѣ этого авторъ переходитъ къ равностороннему и разностороннему треугольникамъ. Обстоятельно рѣшена задача о нахожденіи угловъ треугольника по тремъ сторонамъ. Затѣмъ разсмотрѣны остальные основные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ.

Во 2-й книгѣ авторъ доказываетъ пропорціональность сторонъ прямолинейнаго треугольника синусамъ противолежащихъ имъ сторонъ. Затѣмъ слѣдуетъ цѣлый рядъ предложенiй, относящихся къ плоскому треугольнику. Всѣ эти предложенiя Регiомонтанусъ изслѣдуетъ геометрически, напр., предложенiе: „данъ перпендикуляръ, основанiе и отношенiе сторонъ прямолинейнаго треугольника, найти каждую изъ сторонъ?“ и тому подобные вопросы.

Слѣдующая книга трактата заключаетъ сферическую тригонометрiю, въ основанiи которой принята „Сферика“ Менелая. Въ началѣ изложены предложенiя, относящiяся къ шару и къ различнымъ кругамъ на шарѣ, а затѣмъ авторъ переходитъ къ разсмотрѣнiю сферическихъ треугольниковъ вообще.

Книга IV разсматриваетъ прямоугольные и вообще всякiе сферическiе треугольники. Въ этой книгѣ изложены основные предложенiя сферической тригонометрiи.

Книга V-я содержитъ задачи и предложенiя, относящiяся къ сферическимъ треугольникамъ.

Доказано, напр., что дуга большаго круга, дѣлящая пополамъ уголъ при вершинѣ сферическаго треугольника, разсѣкаетъ основанiе на такiя двѣ части, синусы которыхъ относятся между собою, какъ синусы сторонъ, заключающихъ данный уголъ.

Въ этомъ сочиненiи, вообще, тригонометрiя изложена Регiомонтанусомъ такъ, какъ она излагается и въ наше время, т. е. основной характеръ изложенiя остается тотъ же. Весь трактатъ Регiомонтануса по тригонометрiи содержитъ 9 книгъ и заключаетъ въ себѣ подробное изложенiе прямолинейной и сферической тригонометрiи; тутъ собраны почти всѣ извѣстные въ то время синтетическiе прiемы для рѣшенiя треугольниковъ.

Значительное измѣненiе въ этой наукѣ должно было произойти отъ примѣненiя логариѳмовъ, введенныхъ шотландскимъ барономъ Неперомъ въ 1614 г. и приспособленныхъ къ вычисленiю Бриггомъ въ 1624 г.

Затѣмъ Леонардъ Эйлеръ (жившiй съ 1707 г. по 1783 г.) первый изложилъ аналитически сферическую тригонометрiю и показалъ способъ выводить всѣ необходимыя уравненiя сферической тригонометрiи изъ одного главнаго, чѣмъ и привелъ эту науку къ меньшему числу началъ. Дальнѣйшимъ усовершенствованiямъ своимъ сферическая тригонометрiя обязана трудамъ Лагранжа, Деламбра, Лежандра, Каньёли, Бертрана, Дингера, Серре и другихъ.

Въ заключенiе нашего краткаго историческаго обзора, замѣтимъ, что Неперу принадлежитъ мнемоническое правило составленiя формулъ рѣшенiя прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, правило, состоящее въ томъ, что если ABC сферическiй треугольникъ, у котораго уголъ A прямой, а катеты суть b и c, то, поставивъ вмѣсто катетовъ ихъ дополненiя $90^0 - b$ и $90^0 - c$ и не обращая вниманiя на прямой уголъ A, т. е. не считая его раздѣляющимъ, замѣчаемъ, стоятъ ли три части, между которыми желаютъ знать соотношенiя:

1) всѣ три рядомъ или

2) двѣ рядомъ и одна отдѣльно.

Въ первомъ случаѣ, т. е. когда части треуг. смежны, косинусъ средней части равенъ произведенію котангенсовъ крайнихъ частей. Во второмъ случаѣ, косинусъ отдѣльно стоящей части равенъ произведенію синусовъ рядомъ стоящихъ частей.

Замѣтимъ, что мнемоническія правила, о которыхъ сейчасъ было упомянуто, приписываются нѣкоторыми французскому математику Модюи.

Неперъ далъ и формулы, примѣняющіяся при рѣшеніи косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, извѣстныя подъ названіемъ пропорцій или аналогій Непера, а именно:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{A+B}{2}\right)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2}\cdot$$

Эти формулы предложены были Неперомъ въ 1614 г. въ сочиненіи: „Mirifici logarithmorum canonis discriptio“.

Германскій математикъ Гауссъ въ 1809 г. предложилъ еще слѣдующія формулы:

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}};\quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{c}{2}};\quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{c}{2}}.$$

Эти формулы въ Германіи носятъ названіе Гауссовыхъ. Во Франціи онѣ называются Деламбровыми, потому что были изложены Деламбромъ въ 1808 г. Почти въ то же время онѣ были открыты и математикомъ Мольвейде въ 1808 г.

Досторъ предложилъ мнемоническое правило составленія этихъ формулъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Кристаллическое состояніе тѣлъ и критическая температура. Два состоянія тѣлъ, жидкое и твердое, связаны между собою непрерывнымъ рядомъ промежуточныхъ состояній; такую точку зрѣнія отстаивали, между прочимъ, Ostwald и Poynting; теперь же взглядъ этотъ окончательно признанъ неправильнымъ, благодаря работамъ Le Chatelier и Tammann, доказывающимъ, что между аморфными тѣлами и кристаллическими есть рѣзкая разница, не сглаживаемая промежуточными переходами: въ кристаллахъ вещество расположено въ опредѣленномъ порядкѣ, чего нѣтъ въ аморфныхъ тѣлахъ. Правда, существуетъ рядъ незамѣтныхъ переходовъ отъ очень вязкихъ тѣлъ къ такимъ, которыя обладаютъ весьма слабой вязкостью, т. е. между тѣлами твердыми и жидкими въ обыденномъ смыслѣ слова; однако, не подлежитъ сомнѣнію, что есть абсолютная разница между кристалломъ съ его оптическими осями и осями упругости, съ одной стороны, и тѣлами аморфными, имѣющими одинакія свойства по всѣмъ направленіямъ—съ другой. Въ этомъ именно смыслѣ Tammann и установилъ свой принципъ разрывности между состояніемъ твердыхъ тѣлъ и жидкихъ; то коренное различіе, которое онъ указываетъ между этими двумя состояніями, до сихъ поръ еще остается въ полной силѣ.

Если мы имѣемъ дѣло съ химически чистымъ тѣломъ, то переходъ его изъ твердаго состоянія въ настоящемъ смыслѣ этого слова въ состояніе жидкое, то есть превращеніе его изъ кристалла въ аморфное тѣло, совершается при точно опредѣленныхъ условіяхъ давленія и температуры. Что касается того обстоятельства, что при данномъ давленіи для превращенія твердаго тѣла въ жидкое иногда не требуется вполнѣ опредѣленной температуры, а нужно лишь, чтобы послѣдняя не выходила изъ нѣкоторыхъ предѣловъ, то это слѣдуетъ приписать примѣсямъ, которыя заключаетъ въ себѣ тѣло (состояніе нагрѣванія мы здѣсь оставляемъ въ сторонѣ); этимъ же объясняется и то, что для превращенія твердыхъ тѣлъ въ жидкія при заданной тепературѣ достаточно лишь, чтобы давленіе не выходило за предѣлы нѣкотораго интервала, наличность же строго опредѣленнаго давленія не требуется.

Чтобы изучить ближе плавленіе тѣлъ, Tammann разыскалъ кривыя, выражащія зависимость между температурой и давленіемъ при переходѣ тѣлъ изъ одного кристаллическаго состоянія въ другое или при превращеніи ихъ изъ кристаллическихъ тѣлъ въ жидкія; опыты свои онъ произвелъ надъ множествомъ тѣлъ, при чемъ пользовался очень высокими давленіями—до 3000 атмосферъ; такимъ образомъ, онъ обогатилъ новой въ высшей степени важной главой тѣ наши свѣдѣнія о высокихъ давленіяхъ, которыми мы обязаны плодотворнымъ работамъ Amagat; но этотъ выдающійся физикъ въ своихъ изысканіяхъ ограничивался лишь жидкими тѣлами (его работа о сгущеніи хлористаго углерода составляетъ почти единственное исключеніе), тогда какъ Tammann свойствамъ жидкихъ тѣлъ удѣляетъ сравнительно мало вниманія.

Замѣчательный принципъ, изъ котораго исходитъ этотъ изслѣдователь, принимая его a paiori, состоитъ въ слѣдующемъ: переходъ тѣла изъ кристаллическаго состоянія въ жидкое сопровождается увеличеніемъ объема (единственныя до сихъ поръ извѣстныя исключенія составляютъ вода и висмутъ), при чемъ температура плавленія возрастаетъ съ увеличеніемъ давленія; но такъ какъ жидкости отличаются большей сжимаемостью, чѣмъ твердыя тѣла, то степень возрастанія (температуры) уменьшается по мѣрѣ повышенія давленія, и достигаетъ нуля, когда удѣльный объемъ тѣла перестаетъ измѣняться; при дальнѣйшемъ же повышеніи давленія температура плавленія убываетъ; такимъ образомъ, температура плавленія всякаго тѣла имѣетъ свой maximum, котораго она достигаетъ, вообще говоря, при высокомъ давленіи.

Наблюдать эту максимальную температуру г-ну Tammann удалось лишь на одномъ содиненіи—глауберовой соли, которая при обыкновенной температурѣ весьма мало измѣняетъ свой удѣльный объемъ: у всѣхъ прочихъ тѣлъ, которыя были изслѣдованы Tammann'омъ, максимальная температура плавленія находится за предѣлами опыта; однако же, во всѣхъ случахъ форма кривой заставляетъ предполагать, что такая максимальная температура существуетъ, но при очень высокихъ давленіяхъ, въ общемъ, при давленіяхъ такого порядка, какъ десять тысячъ атмосферъ.

Заслуживаетъ вниманія еще одинъ очень любопытный выводъ, вытекающій изъ опытовъ Tammann'a. Опыты Villard и Sarry показали, что углекислота, переходящая при атмосферномъ давленіи изъ твердаго состоянія непосредственно въ газообразное, плавится при температурѣ —56°,7 и давленіи въ 5,1 атмосферъ; съ увеличеніемъ давленія температура плавленія постепенно возрастаетъ и достигаетъ —7°,5 при давленіи въ 2800 атмосферъ; при дальнѣйшемъ же увеличеніи давленія кривая температуръ плавленія образуетъ три вѣтви, изъ чего можно заключить, что при очень высокихъ давленіяхъ углекислота можетъ существовать въ трехъ различныхъ кристаллическихъ состояніяхъ. Нормальная кривая плавленія, то есть та изъ трехъ вѣтвей, которая составляетъ продолженіе кривой, соотвѣтствующей менѣе высокимъ давленіямъ, достигла бы максимальной своей точки при 60^0 и давленіи въ 3000 атмосферъ. Если кривая дѣйствительно имѣетъ такой видъ и ходъ ея не измѣняется, вслѣдствіе какихъ-либо еще неизвѣстныхъ намъ явленій, то, начиная съ давленія приблизительно въ 6000 атмосферъ и выше, температура плавленія углекислоты оказываетси болѣе высокой, чѣмъ ея критическая температура.

Такимъ образомъ, при этихъ условіяхъ мы получимъ тѣло, *нормальное состояніе котораго есть твердое, тогда какъ въ жидкомъ состояніи оно уже существовать не можетъ.*

Это заключеніе, вытекающее изъ вышеуказанныхъ опытовъ, не было провѣрено Tammann'омъ, такъ какъ соотвѣтствующій опытъ представляетъ слишкомъ большую опасность. Зато Tammann достигъ полнаго успѣха при изслѣдованіи другого тѣла—хлористаго фосфонія; *критическая температура этого тѣла равна* 50^0, *и, тѣмъ не менѣе оно еще при* 99^0 *можетъ оставаться въ твердомъ состояніи*, если довести давленіе до 2790 атмосферъ.

Это—фактъ, который до сихъ поръ былъ совершенно неизвѣстенъ; онъ опровергаетъ привычный намъ взглядъ, согласно которому представляется очевиднымъ, что при такихъ условіяхъ, которыя несовмѣстимы съ жидкимъ состояніемъ тѣла, оно тѣмъ болѣе не можетъ существовать въ твердомъ состояніи.

Этотъ неожиданный выводъ, которымъ мы обязаны работамъ Tammann'a, имѣетъ огромное значеніе для нашихъ знаній о природѣ вещества, Но и сверхъ этого онъ имѣетъ еще непосредственное приложеніе къ наукѣ о небесныхъ тѣлахъ: среди этихъ послѣднихъ, несомнѣнно, часто встрѣчаются такія тѣла, температура которыхъ, превышая критическую, не допускаетъ того, чтобы они были въ жидкомъ состояніи, тогда какъ условія кристаллизаціи всѣ на лицо.

Тѣмъ не менѣе, если мы не желаемъ допустить какихъ-либо новыхъ неожиданныхъ измѣненій въ ходѣ явленій, то, принимая существованіе максимальной точки въ кривой плавленія, мы должны заключить, что разница между критической температурой и максимальной температурой плавленія не можетъ быть очень значительной. Разница эта можетъ быть велика лишь въ томъ случаѣ, когда переходъ изъ кристаллическаго состоянія въ жидкое сопровождается сильнымъ увеличеніемъ объема, при чемъ сжимаемость тѣла въ обоихъ этихъ состояніяхъ почти одинаковая. Существуютъ ли такія тѣла,—это покажутъ намъ будущія изслѣдованія; но и независимо отъ приложеній работъ г. Tammann къ космическимъ явленіямъ, выводъ, вытекающій изъ этихъ изслѣдованій, является самымъ неожиданнымъ и важнымъ открытіемъ, подобныхъ которому въ физикѣ вещества давно уже не было.

Rév. Gen.

Зеленый лучъ. Въ Нидерландскомъ „Архивѣ точныхъ наукъ" помѣщена статья W. H. Julius'a, посвященная любопытному явленію, которое извѣстно подъ названіемъ „зеленый лучъ". Сперва авторъ воспроизводитъ вкратцѣ описаніе зеленаго луча по наблюденіямъ гг. Piot-Bey, De-Maubange, Sohnke и Ekama: согласно ихъ сообщеніямъ, явленіе это заключается въ томъ, что въ очень ясные дни въ моментъ заката и восхода верхняго края солнца можно видѣть столбъ свѣта или пламя зеленоватосиняго цвѣта. Затѣмъ авторъ описываетъ свои личныя наблюденія: во время путешествія въ Индію ему приходилось наблюдать зеленый лучъ въ Сициліи, у Суэца, въ Красномъ морѣ и въ Индійскомъ океанѣ: при закатѣ солнца желтооранжевый сегментъ постепенно принималъ зеленый оттѣнокъ, при чемъ край солнца былъ рѣзко очерченъ и не отливалъ цвѣтами радуги. Зеленое сіяніе распространялось также и вокругъ сегмента. Сіяніе это было особенно замѣтно по краямъ сегмента, и при сліяніи этихъ послѣднихъ въ моментъ исчезновенія солнца ореолъ принималъ форму небольшого пламени. Продолжительность явленія весьма измѣнчива; по наблюденіямъ автора, явленіе продолжается не меньше двухъ секундъ. По мнѣнію Sohnke, Schülke, Ekama и другихъ, явленіе зеленаго луча есть результатъ дисперсіи, обусловленной преломленіемъ свѣта. Небольшое вычисленіе показываетъ, что ширина синезеленой каймы вокругъ солнца надъ открытымъ горизонтомъ равна $10''$, а на высотѣ 10^0 надъ горизонтомъ ширина каймы не превышаетъ $1'',6$; такимъ образомъ, на тропикахъ при закатѣ солнца въ открытомъ мѣстѣ явленіе должно продолжаться не болѣе $\frac{2}{3}$ секунды и менѣе $^1/_{10}$ секунды при закатѣ солнца за горою. Въ виду того, что эти заключенія не совпадаютъ съ наблюденіями автора, онъ предлагаетъ другую теорію. По мнѣнію автора, причина явленія—это аномальная дисперсія, обусловленная свободными іонами, которыми, согласно указаніямъ Ebert'a и Lenard'a, особенно изобилуютъ верхніе слои атмосферы. Отсюда становится понятной рѣдкость явленія, зависимость его отъ метеорологическихъ условій, а также и то обстоятельство, что продолжительность явленія медленно убываетъ при поднятіи надъ горизонтомъ. Нужно, однако, замѣтить, что, согласно новѣйшимъ измѣреніямъ, выполненнымъ гг. Lüdeling и Gerdien помощью воздушнаго шара, на большихъ высотахъ количество іоновъ, повидимому, не увеличивается. Но и помимо того, число іоновъ въ одномъ кубическомъ сантиметрѣ настолько меньше числа молекулъ, содержащихся въ немъ, что даже при тысячекратномъ увеличеніи іонизаціи нельзя ожидать результатовъ, которые соотвѣтствовали бы предположеніямъ автора: среднее число іоновъ одного и того же знака въ одномъ кубическомъ сантиметрѣ не превышаетъ 1.10^3, тогда какъ среднее число молекулъ въ немъ равно 1.10^{19}.

(Physikalische Zeitschrift).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 598 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4-2x^3-8x^2-24x+16=0.$$

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 599 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{yz-x^2}{xyz}=ax,$$

$$\frac{zx-y^2}{xyz}=by,$$

$$\frac{xy-z^2}{xyz}=cz.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 600 (4 сер.). Найти цѣлыя и неотрицательныя значенія x, при которыхъ число

$$7^{3x}-4\,.\,3^{2x}+3\,.\,2^x$$

кратно 11.

Н. Готлибъ (Митава).

№ 601 (4 сер.). Разложить въ непрерывную дробь выраженіе

$$\sqrt{25b^2+14b+2},$$

гдѣ b — цѣлое положительное число.

Н. С. (Одесса).

№ 602 (4 сер.). Твердая плоская фигура перемѣщается въ плоскости такъ, что двѣ прямыя фигуры проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки. Доказать, что всякая прямая фигуры проходитъ черезъ неподвижную точку или остается касательной къ неподвижному кругу.

(Заимств.).

№ 603 (4 сер.). Доказать, что числовая величина выраженія

$$\cos^2(\alpha-\varphi)+\cos^2(\beta-\varphi)-2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)$$

не зависитъ отъ φ.

(Заимств.).

№ 604 (4 сер.). Въ калориметръ, масса котораго, сведенная на воду, выражается числомъ 300 граммовъ, вливаютъ одинъ килограммъ воды и приводятъ приборъ къ температурѣ 10°. Потомъ бросаютъ туда кусокъ льда вѣсомъ въ 200 граммовъ при температурѣ —5°. Опредѣлить окончательную температуру системы. Теплоемкость и теплота плавленія льда равны соотвѣтственно 0,5 и 80.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

№ 502 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по двумъ его сторонамъ* a *и* b *зная, что медіаны* m_a *и* m_b *этого треугольника взаимно перпендикулярны.*

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть $AM=m_a$ и $BN=m_b$ суть медіаны искомаго треугольника, при чемъ $AM \perp BN$. Назовемъ черезъ G точку встрѣчи медіанъ AM и BN, а черезъ M' и N'—соотвѣтственно средины отрѣзковъ AG и BG. Тогда, по извѣстному свойству медіанъ, $AM'=M'G=GM$ и $BN'=N'G=GN$, и, по свойству наклонныхъ, имѣющихъ равныя проекціи,

$$AN'=AN=\frac{b}{2},\quad BM'=BM=\frac{a}{2}\quad (1),$$

такъ что задача сводится къ построенію прямоугольнаго треугольника AGB по медіанамъ $BM'=\frac{a}{2}$ и $AN'=\frac{b}{2}$, проведеннымъ къ его катетамъ. Точку встрѣчи этихъ медіанъ назовемъ черезъ G'; она лежитъ, какъ извѣстно, въ разстояніи (см. (1))

$$G'N'=\frac{1}{3}AN'=\frac{1}{6}b\quad (2)$$

отъ точки N' и въ разстояніи (см. (1))

$$G'B=\frac{2}{3}BM'=\frac{1}{3}a\quad (3)$$

отъ точки B. Продолжимъ прямую AN', отложимъ на ея продолженіи отрѣзокъ $N'K$, равный AN', и проведемъ прямую KB. Изъ равенства треугольниковъ AGN' и $N'KB$ слѣдуетъ, что уголъ $N'BK$ прямой. Изъ всего сказаннаго вытекаетъ построеніе: отложивъ прямую $AK=b$ (см. (1)), дѣлимъ ее въ точкѣ N' пополамъ; затѣмъ описываемъ на отрѣзкѣ $N'K$, какъ на діаметрѣ, полуокружность; строимъ на отрѣзкѣ $N'A$ часть (см. (2)) $G'N'=\frac{1}{6}b=\frac{1}{3}AN'$ и затѣмъ изъ точки G' дѣлаемъ на построенной выше полуокружности засѣчку радіусомъ (см. (3)) $\frac{1}{3}a$ въ точкѣ B. Опустивъ изъ точки A перпендикуляръ AG на прямую BN', откладываемъ на продолженіяхъ прямыхъ AG и BG соотвѣтственно части $NG=\frac{1}{2}BG$ и $MG=\frac{1}{2}AG$. Продолживъ прямыя AN и BM до ихъ пересѣченія въ точкѣ C, получимъ искомый треугольникъ ABC.

Задача еще легче рѣшается приложеніемъ алгебры къ геометріи. Называя черезъ c третью сторону треугольника, мы имѣемъ по извѣстнымъ формуламъ:

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\ \text{(I)},\quad m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}\ \text{(II)}.$$

Слѣдовательно

$$\overline{GM}^2=\left(\frac{m_a}{3}\right)^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{36}\ \text{(III)},\quad \overline{GN}^2=\left(\frac{m_b}{3}\right)^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}\ \text{(IV)}.$$

Складывая равенства (III) и (IV) и замѣчая, что, согласно съ условіемъ задачи,

$$\overline{GM}^2+\overline{GN}^2=\overline{NM}^2=\frac{c^2}{4}$$

получимъ (см. (III, IV):

$$\frac{4c^2-(a^2+b^2)}{36}=\frac{c^2}{4},$$

откуда

$$c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}} \quad (\mathrm{V}).$$

Построивъ c по формулѣ (V), строимъ затѣмъ треугольникъ ABC по тремъ сторонамъ. Изъ формулы (V) вытекаетъ, что для возможности задачи необходимо и достаточно соблюсти условія:

$$a+b>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}>a-b,$$

или

$$(a+b)^2>\frac{a^2+b^2}{5}>(a-b)^2,$$

откуда

$$4a^2+10ab+4b^2>0 \text{ и } 4a^2-10ab+4b^2<0.$$

Первое изъ этихъ условій соблюдается при всякихъ длинахъ a и b, а изъ второго, по разложеніи лѣвой части на множителей, имѣемъ:

$$4b^2\left(\frac{a}{b}-2\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{2}\right)<0,$$

а потому для выполненія его необходимо и достаточно условіе

$$2>\frac{a}{b}>\frac{1}{2},$$

т. е. задача возможна тогда и только тогда, если отношеніе двухъ данныхъ сторонъ треугольника заключается между числами 2 и $\frac{1}{2}$.

В. Гейманъ (Θеодосія); *И. Соколенко* (Рутченково); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

№ 503 (4 сер.). *Освободить выраженіе*

$$\frac{\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$$

отъ радикаловъ.

Такъ какъ число $17^2-288=1$ есть точный квадратъ, то по обычной формулѣ выраженіе $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ приводится къ виду $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, гдѣ x и y суть числа раціональныя, а именно:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{\frac{17+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{17-\sqrt{1}}{2}}=3+\sqrt{8} \quad (1).$$

Такъ какъ $3^2-8=1$ тоже есть точный квадратъ, то (см. (1))

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{1}}{2}}=1+\sqrt{2} \quad (2).$$

Теперь будемъ искать раціональныя числа x и y такъ, чтобы выполнялось условіе:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y},$$

откуда

$$7+5\sqrt{2}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y},$$

такъ что

$$x^3+3xy=7\ (3),\ 5\sqrt{2}=(3x^2+y)\sqrt{y},$$ или, по возвышеніи въ квадратъ

$$50=y(3x^2+y)^2\quad(4).$$

Подставивъ y изъ равенства (3) въ равенство (4), имѣемъ:

$$50=\frac{7-x^3}{3x}\cdot\frac{(8x^3+7)^2}{9x^2},$$

откуда

$$64(x^3)^3-336(x^3)^2+615x^3-343=0\quad(5).$$

Равенство (5) удовлетворяется при $x^3=1$, а потому и при $x=1$; подставляя это значеніе x въ равенство (3), найдемъ $y=2$, т. е.

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\quad(6).$$

Убѣдившись повѣркой въ правильности формулы (6), имѣемъ (см. (2) (6)):

$$\frac{\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1.$$

В. Гейманъ (Θеодосія); *Д. Колянковскій* (Брацлавъ); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *В. Парѳеновъ* (Спб.); *Н. Доброгаевъ* (Спб.).

№ 506 (4 сер.). *Доказать, что если* a *есть цѣлое число, взаимно простое съ* 35, *то произведеніе*

$$(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

дѣлится на 35.

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Число a, будучи взаимно простымъ съ 35, не дѣлится ни на 5 ни на 7. Такъ какъ a не кратно 5, то число $a^4-1=a^{5-1}-1$ дѣлится, по теоремѣ Фермата, на 5, а потому и все разсматриваемое число кратно 5. Представляя разсматриваемое число въ видѣ

$$(a^2+1)[(a^2-1)(a^4+a^2+1+14a^2)]=14a^2(a^2+1)+(a^2-1)(a^4+a^2+1)=$$

$$=14a^2(a^2+1)+(a^6-1)$$

и замѣчая, что $14a^2(a^2+1)$ кратно 7 и что число $a^6-1=a^{7-1}-1$, гдѣ a не кратно 7, также, по теоремѣ Фермата, кратно 7, мы видимъ, что все разсматриваемое число тоже кратно 7. Дѣлясь на 5 и на 7, разсматриваемое число дѣлится на $5.7=35$.

В. Гейманъ (Θодосія).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 13-го Апрѣля 1905 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66

Обложка
ищется

Обложка
ищется