№ 383.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXII-го Семестра № 11-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1904

XXXII Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Декабря № 383. 1904 г.

Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Приватъ-доцента В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Ни одно изъ основныхъ положеній Евклида не вызвало, однако, такой массы комментаріевъ, споровъ, разсужденій, какъ постулатъ о параллельныхъ линіяхъ (V постулатъ или XI аксіома). Причиной этого служитъ, конечно, то обстоятельство, что постулатъ этотъ сложнѣе остальныхъ постулатовъ и аксіомъ. М.Канторъ замѣчаетъ даже, что это „вовсе не основное положеніе (kein Grundsatz), это есть обращеніе XXVIII предложенія“ [1]). Такое замѣчаніе нельзя, конечно, не признать неосторожнымъ: почему предложеніе, представляющее собой обращеніе одной изъ теоремъ, не можетъ быть положено въ основаніе для дальнѣйшаго развитія системы, не можетъ служить основнымъ положеніемъ? Но что это положеніе несравненно сложнѣе другихъ, что для его пониманія требуется уже цѣлый комплексъ знаній, что онъ рѣзко отличается отъ остальныхъ постулатовъ Евклида,—это несомнѣнно. Полагаютъ, что постулатъ этотъ введенъ въ „Начала“ Ѳеономъ Александрійскимъ [2]).

[1]) *M. Cantor.* „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ Bd. I стр. 238. Leipzig. 1880.

[2]) См. M. Cantor, loc. cit. Полагаютъ даже, что всѣ списки Евклида, которыми мы въ настоящее время располагаемъ, ведутъ свое начало отъ изданія Ѳеона. Мы уже упоминали о немъ выше.

*) См. № 381 „Вѣстника“.

28 первыхъ предложеній Евклида отъ V-го постулата не зависятъ; его внезапное появленіе въ XXIX-мъ предложеніи всегда представлялось чрезвычайно страннымъ, и отсюда возникло стремленіе его доказать. Постулатъ о параллельныхъ занялъ видное мѣсто среди немногихъ проблемъ, которыя по своей трудности передавались изъ столѣтія въ столѣтіе, отъ поколѣнія къ поколѣнію.

Было предложено множество доказательствъ этого предложенія. Профессоръ А. Кестнеръ [1]) во второй половинѣ XVIII вѣка собралъ уже цѣлую библіотеку сочиненій, относящихся къ этому вопросу. Нужно, однако, сказать, что большинство этихъ сочиненій имѣетъ ничтожную цѣну. „Я привыкъ къ тому“, писалъ Гауссъ Тауринусу [2]): „что большинство лицъ, дѣлающихъ новыя попытки къ построенію теоріи параллельныхъ линій, не имѣютъ и слѣда геометрическаго дарованія“. Но, съ другой стороны, какъ видно изъ исторіи этого вопроса, трудно указать выдающагося математика, начиная съ Птоломея и кончая Лежандромъ, который не прилагалъ бы усилій къ тому, чтобы, по выраженію Лобачевскаго, „задѣлать брешь въ теоріи параллельныхъ линій“.

Ученикъ Кестнера, Клюгель, написалъ въ 1763 г. диссертацію [3]), содержащую первый историческій обзоръ и критическій анализъ этого вопроса. Ту же цѣль преслѣдуетъ сочиненіе академика В. Буняковскаго „Параллельныя линіи“, появившееся въ 1853 году [4]).

Буняковскій дѣлитъ различныя доказательства XI постулата на четыре категоріи. Къ первой категоріи онъ относитъ тѣ сочиненія, которыя имѣютъ въ виду рядомъ непосредственныхъ построеній доказать постулатъ или эквивалентное ему предложеніе; ко второй категоріи принадлежатъ доказательства, основанныя на теоріи безконечно малыхъ; слѣдующая группа опирается на такъ называемый принципъ однородности; наконецъ, имѣются доказательства, основанныя на представленіяхъ, заимствованныхъ изъ механики.

Какъ извѣстно, всѣ попытки доказать постулатъ не привели къ цѣли: одни авторы запутываются въ собственныхъ построеніяхъ, другіе явно или неявно дѣлаютъ допущеніе, эквивалентное постулату Евклида.

Обратимъ прежде всего вниманіе на тѣ предложенія, которыя

---

[1]) Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800), профессоръ въ Геттингенѣ, принадлежалъ къ числу наиболѣе серьезныхъ знатоковъ этого вопроса. Въ 1757 г. онъ выпустилъ сочиненіе „Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie“, получившее широкое распространеніе.

[2]) См. ниже.

[3]) Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abr. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel. Göttingen. 1763.

[4]) Подробный перечень важнѣйшихъ сочиненій, сюда относящихся, можно найти въ сочиненіи: *P. Stäckel* u. *F. Engel* „Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss“. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie. Leipzig 1895.

явно эквивалентны постулату Евклида. Всѣмъ извѣстно, что теорія параллельныхъ линій можетъ быть основана на болѣе частномъ допущеніи, что перпендикуляръ и наклонная къ сѣкущей, съ которой они расположены въ одной плоскости, встрѣчаются по достаточномъ продолженіи въ сторону остраго угла. Если принять, что черезъ данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то предыдущее предложеніе явится слѣдствіемъ этого послѣдняго. Проклъ старается, однако, доказать это предложеніе, основываясь на слѣдующихъ соображеніяхъ: прямая, расположенная въ плоскости двухъ параллельныхъ линій и пересѣкающая одну изъ параллельныхъ линій, образуетъ съ ней уголъ, разстояніе между сторонами котораго, *конечно, можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ;* а такъ какъ разстояніе между параллельными *остается конечнымъ*, то сѣкущая неизбѣжно перейдетъ на другую сторону параллели и, слѣдовательно, пересѣчетъ ее предварительно. Какъ одно, такъ и другое утвержденіе, на которыя опирается доказательство, голословны. Но первое изъ нихъ не зависитъ отъ постулата и можетъ быть доказано; утвержденіе же, что разстояніе между двумя прямыми, расположенными въ одной плоскости и не имѣющими общихъ точекъ остается конечнымъ, представляетъ собой предложеніе, эквивалентное постулату. Нассиръ Эддинъ основываетъ свое доказательство на допущеніи, что, если одна изъ параллельныхъ линій перпендикулярна къ сѣкущей, а другая къ ней наклонена, то она со стороны остраго угла приближается къ первой, а со стороны тупого—удаляется отъ нея. Довольно сложными, хотя и безупречно правильными, разсужденіями геометръ выводитъ отсюда постулатъ Евклида. Но какое мы имѣемъ основаніе утверждать, что прямая не можетъ сначала приближаться къ другой прямой, пока разстояніе не достигнетъ минимума, а затѣмъ удаляться отъ нея, какъ парабола относительно своей директриссы. Принципъ, на которомъ основывается доказательство Клавія, мало отличается отъ предыдущаго [1]). Изъ другихъ допущеній, эквивалентныхъ постулату Евклида, укажемъ покамѣстъ слѣдующія: черезъ каждую точку, взятую внутри угла, всегда можно провести прямую, пересѣкающую какъ одну, такъ и другую его сторону; сумма угловъ въ треугольникѣ равна $2d$; черезъ каждыя три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность. Мы не имѣемъ возможности установить, кто впервые указалъ эквивалентность каждаго изъ этихъ предложеній постулату Евклида.

Доказательства, основанныя по теоріи безконечно малыхъ, относятся къ той эпохѣ, когда формировавшійся анализъ безконечно малыхъ еще далеко не былъ обоснованъ, когда еще не были выяснены условія, при которыхъ можно пользоваться без-

[1]) *Christoph Clavius* (собственно Schlüssel) „Euclidis elementorum libri XV“. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati. Это сочиненіе появилось въ 1574 г. и до 1738 г. выдержало 22 изданія. Кестнеръ называетъ его „Пандектами элементарной геометріи“.

конечно малыми. На безконечно малыя и безконечно большія установился полумистическій взглядъ, который позволялъ трактовать ихъ то какъ обыкновенныя величины, то какъ величины особенныя, допускающія такія равенства, которыя неприложимы къ величинамъ конечнымъ. Естественно, что этими допущеніями, къ которымъ геометръ привыкъ, легко можно было замаскировать допущеніе геометрическое, достаточное для доказательства постулата. Самое замѣчательное изъ этихъ доказательствъ принадлежитъ Бертрану изъ Женевы [1]).

Доказательства, основанныя на принципѣ однородности, сводятся къ слѣдующему. Если допустить, что перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же сѣкущей въ одной съ ней плоскости не всегда пересѣкаются, то придемъ къ слѣдующему выводу. Если изъ всѣхъ точекъ, расположенныхъ на одной сторонѣ остраго угла, возставимъ къ ней перпендикуляры, то одни изъ нихъ (выходящіе изъ точекъ, достаточно близкихъ къ вершинѣ) будутъ встрѣчать другую сторону угла, другіе ея не будутъ встрѣчать; обѣ группы будутъ раздѣлены опредѣленнымъ перпендикуляромъ, первымъ не встрѣчающимъ второй стороны. Разстояніе этого перваго не встрѣчающаго перпендикуляра отъ вершины зависитъ отъ величины угла. Такимъ образомъ, при сдѣланномъ предположеніи, каждый острый уголъ опредѣляетъ нѣкоторый отрѣзокъ — разстояніе перваго не встрѣчающаго перпендикуляра. Такая зависимость между двумя разнородными величинами (угломъ и отрѣзкомъ) представлялась нѣкоторымъ геометрамъ въ такой мѣрѣ абсурдной, что, пришедши къ ней, они считали возможнымъ признать постулатъ доказаннымъ. Но логическій абсурдъ, къ которому должно привести доказательство отъ противнаго, можетъ заключаться исключительно въ прямомъ противорѣчіи вывода съ однимъ изъ основныхъ положеній или двухъ выводовъ между собой; только обнаруживъ, что сдѣланное допущеніе приводитъ къ нарушенію закона противорѣчія, мы имѣемъ право его отвергнуть, какъ логически недопустимый. Замѣтимъ, что всѣ доказательства, основанныя на принципѣ однородности, принадлежатъ къ поздней эпохѣ (конецъ XVIII и начало XIX столѣтія).

Наконецъ, всѣ доказательства, основанныя на представленіяхъ, заимствованныхъ изъ механики, въ основѣ своей содержатъ одно и тоже допущеніе; оно заключается въ возможности поступательнаго движенія неизмѣняемой системы, т. е. такого движенія, при которомъ всѣ точки проходятъ равные пути. Это чисто геометрическое допущеніе равносильно постулату Евклида.

Къ этимъ четыремъ категоріямъ доказательствъ слѣдуетъ присоединить еще пятую, которую Буняковскій не выдѣляетъ.

---

[1]) *L. Bertrand.* „Dévelopрement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques". Genf. 1778.

Изложеніе и разборъ доказательства Бертрана можно найти въ сочиненіи: *В. Каганъ* „Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго". Одесса. 1900. Стр. 17 и 18.

Именно, имѣется цѣлый рядъ авторовъ, которые полагаютъ возможнымъ найти исходъ въ томъ, чтобы измѣнить опредѣленіе параллельныхъ линій. Опредѣляются, напримѣръ, параллельныя линіи, какъ такія, которыя во всѣхъ точкахъ отстоятъ одна отъ другой на одно и то же разстояніе. Если принять, что точки плоскости, отстоящія отъ нѣкоторой прямой по одну сторону ея на данное разстояніе, расположены на прямой, то этимъ допущеніемъ замѣняется постулатъ. Если же этого не принять, то опредѣленіе теряетъ смыслъ. Другія опредѣляли параллельныя прямыя, какъ перпендикулярныя къ третьей; но и оно безъ добавочнаго предположенія не даетъ ничего для обоснованія теоріи параллельныхъ линій.

Почти всѣ попытки доказать постулатъ Евклида представляютъ собой доказательства отъ противнаго. Исходя изъ посылки, противорѣчащей тѣмъ представленіямъ, которыя обычно связываются съ геометрическими терминами, мы, конечно, скоро приходимъ къ еще болѣе поразительному противорѣчію съ этими представленіями. Удовлетворяясь этимъ противорѣчіемъ представленій, вмѣсто логическаго противорѣчія, необходимаго для рѣшенія вопроса, авторы признаютъ постулатъ доказаннымъ. Но въ то время, какъ люди мало вдумчивые останавливаются въ этомъ анализѣ противнаго допущенія на первыхъ же шагахъ, болѣе глубокіе мыслители ведутъ его гораздо дальше.

Изъ числа послѣднихъ на первомъ мѣстѣ нужно назвать профессора Оксфордскаго университета Валлиса [1]). Въ началѣ XVII столѣтія при Оксфордскомъ университетѣ была учреждена „каѳедра Евклида", сохранившаяся до сего времени. Валлисъ былъ однимъ изъ первыхъ, занимавшихъ эту каѳедру. 11-го іюля 1663 г. онъ прочелъ первую лекцію, посвященную доказательству Евклидова постулата. Лекція эта позднѣе была имъ опубликована и помѣщена въ собраніи его сочиненій [2]). Валлисъ доказываетъ, что, если отказаться отъ Евклидова постулата, то не всякому треугольнику будетъ соотвѣтствовать подобный треугольникъ при заданномъ отношеніи соотвѣтствующихъ сторонъ. Принимая поэтому, что „каждой фигурѣ соотвѣтствуетъ подобная фигура любого размѣра", Валлисъ считаетъ постулатъ доказаннымъ. Что это допущеніе нужно сдѣлать, Валлисъ категорически оговариваетъ. Какимъ образомъ онъ могъ при этихъ условіяхъ считать постулатъ доказаннымъ,—сказать трудно. Но онъ усмотрѣлъ, что отказавшись отъ евклидова постулата, нужно отказаться отъ теоріи подобія фигуръ.

Гораздо дальше Валлиса ушелъ Саккери [3]). Этотъ глубокомысленный монахъ написалъ въ самомъ концѣ своей жизни за

---

[1]) John. Wallis (1616–1703 г.г.) пользуется извѣстностью, благодаря своимъ трудамъ по алгебрѣ и исчисленію безконечно малыхъ.

[2]) Переводъ этой лекціи помѣщенъ въ „Собраніи первоисточниковъ по неевклидовой геометріи" Штекеля и Энгеля. См. примѣч. [4]) на стр. 242.

[3]) G. Saccheri родился въ 1667 г. Въ 1685 г. онъ вступилъ въ орденъ іезуитовъ, а затѣмъ преподавалъ грамматику въ іезуитской коллегіи въ Ми-

мѣчательное сочиненіе подъ заглавіемъ „Euclides ab omni noevo vindicatus; sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia“ („Евклидъ, очищенный отъ всѣхъ пятенъ; опытъ установленія самыхъ первыхъ началъ всей геометріи“). Задача этого сочиненія, какъ указываетъ самое заглавіе, состоитъ въ томъ, чтобы исправить всѣ недостатки „Началъ“ Евклида и прежде всего, конечно, обосновать теорію параллельныхъ линій. Теорія эта, дѣйствительно, получила въ его сочиненіи совершенно новое освѣщеніе. Вотъ какъ поставленъ вопросъ у Саккери [1]).

Изъ крайнихъ точекъ A и B отрѣзка AB возставимъ къ нему перпендикуляры AA' и BB', расположенные въ одной плоскости по одну сторону прямой AB. На этихъ перпендикулярахъ отложимъ равные отрѣзки AA' и BB'. Такимъ образомъ составится четыреугольникъ $AA'B'B$ съ двумя прямыми углами при нижнемъ основаніи AB. Соединяя середины C и C' основаній AB и $A'B'$ и поворачивая фигуру вокругъ прямой CC', мы докажемъ, что послѣдняя перпендикулярна къ обоимъ основаніямъ, а углы A' и B' при основаніи $A'B'$ равны между собой. Относительно этихъ угловъ можетъ быть сдѣлано три предположенія: либо эти углы тупые, либо они прямые, либо острые. Саккери показываетъ прежде всего, что, принимая то или другое предположеніе относительно одного четырехугольника этого типа, мы тѣмъ самымъ принимаемъ его относительно всѣхъ четырехугольниковъ того же типа. Иными словами, если какой-либо одинъ изъ этихъ четырехугольниковъ имѣетъ при верхнемъ основаніи тупые углы, то и всѣ четырехугольники этого типа имѣютъ при верхнемъ основаніи тупые углы; если одинъ изъ нихъ имѣетъ прямые или острые углы, то и всѣ они имѣютъ соотвѣтственно прямые или острые углы. Саккери называетъ три различныя допущенія, которыя здѣсь могутъ быть сдѣланы, „гипотезой тупого угла“, „гипотезой прямого угла“ и „гипотезой остраго угла“. Саккери доказываетъ далѣе, что при гипотезѣ тупого угла сумма угловъ всякаго треугольника больше двухъ прямыхъ, при гипотезѣ прямого угла она равна двумъ прямымъ, при гипотезѣ остраго угла она меньше двухъ прямыхъ. Далѣе доказывается, что гипотеза прямого угла эквивалентна постулату Евклида; чтобы доказать постулатъ, нужно, слѣдовательно, опровергнуть двѣ другія гипотезы. Но, если принять гипотезу тупого угла, то прямыя $A'B'$ и AB сближаются по обѣ стороны прямой CC' и сближаются настолько быстро, что по обѣ стороны должно произойти пересѣченіе (Саккери это доказываетъ вполнѣ строго); а такъ какъ двѣ прямыя не могутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ, то гипотеза тупого угла падаетъ. Остается

ланѣ. Здѣсь онъ познакомился съ братьями Чева (Ceva) и, повидимому, подъ ихъ вліяніемъ заинтересовался математикой. Перейдя затѣмъ въ Туринъ, а потомъ въ Павію, онъ, кромѣ прежнихъ занятій въ іезуитской коллегіи, преподавалъ математику въ университетѣ. Саккери написалъ нѣсколько сочиненій по теологіи, логикѣ и математикѣ. Онъ умеръ въ 1733 г.

[1]) Относящуюся сюда часть книги Саккери можно найти въ нѣмецкомъ переводѣ въ „Собраніи первоисточниковъ“ Штекеля и Энгеля.

опровергнуть гипотезу остраго угла. Этой гипотезѣ Саккери посвящаетъ обширное изслѣдованіе, занимающее около 80 страницъ. Саккери показываетъ, что при гипотезѣ остраго угла двѣ не пересѣкающіяся прямыя, расположенныя въ одной плоскости, либо имѣютъ общій перпендикуляръ, отъ котораго они расходятся, безконечно удаляясь другъ отъ друга въ обѣ стороны, либо безконечно удаляются другъ отъ друга въ одну сторону и неопредѣленно сближаются въ другую сторону. Чтобы это обнаружить, нуженъ рядъ подготовительныхъ разсужденій, которыя Саккери проводитъ съ безупречной строгостью. Онъ показываетъ при этомъ, что перпендикуляръ къ сторонѣ остраго угла (при гипотезѣ остраго угла) сначала пересѣкаетъ вторую сторону, а потомъ, по мѣрѣ удаленія отъ вершины, перестаетъ ее пересѣкать; что при этомъ существуетъ предѣльный—первый не пересѣкающій перпендикуляръ и т. д. Словомъ, это цѣлая геометрическая система, соотвѣтствующая „гипотезѣ остраго угла". Но эта тонкая нить безупречныхъ разсужденій внезапно прерывается теоремой XXXIII, въ которой Саккери заявляетъ „Гипотеза остраго угла совершенно ложна, ибо противорѣчитъ природѣ прямой линіи". Въ чемъ же сказывается это противорѣчіе? Разсматривая неопредѣленно сближающіяся прямыя, какъ пересѣкающіяся въ безконечно удаленной точкѣ, Саккери приходитъ къ заключенію, что изъ этой безконечно удаленной точки къ обѣимъ прямымъ можно было бы провести общій перпендикуляръ, что „противно природѣ прямой линіи". Человѣкъ, чрезвычайно тонко разбирающій доказательства Прокла, Нассиръ Эддина и Клавія, искусно вылавливающій глубоко сокрытую логическую ошибку, запутывается самъ въ элементарныхъ разсужденіяхъ, потому что онъ не имѣетъ твердыхъ основаній для сужденія о томъ, въ какой мѣрѣ можно пользоваться безконечно удаленными точками. При всей категоричности, съ которой формулирована упомянутая выше XXXIII теорема, Саккери, очевидно, чувствуетъ слабость этихъ разсужденій, ибо онъ заканчиваетъ слѣдующимъ примѣчаніемъ:

„На этомъ я могъ бы спокойно остановиться, но я не хочу отказаться отъ попытки доказать, что эта упорная гипотеза остраго угла, которую я вырвалъ уже съ корнемъ, противорѣчитъ самой себѣ. Этому посвящены слѣдующія теоремы настоящей книги".

Возвращаясь, такимъ образомъ, вновь къ гипотезѣ остраго угла, Саккери показываетъ, что геометрическое мѣсто точекъ въ плоскости, удаленныхъ на данное разстояніе отъ данныхъ прямой, представляетъ собой кривую линію („кривая равныхъ разстояній", какъ она была названа Лобачевскимъ). За этимъ слѣдуетъ подробный анализъ этой кривой, совершенно правильный до тѣхъ поръ, пока онъ не приступаетъ къ опредѣленію ея длины при помощи метода безконечно малыхъ. Здѣсь онъ вновь впадаетъ въ ошибку, которая заставляетъ его отвергнуть гипотезу остраго угла. И здѣсь онъ кончаетъ примѣчаніемъ, указывающимъ, что эти разсужденія его, въ сущности, не удовлетворяли.

„Не могу не указать здѣсь,“ говоритъ онъ: „разницы между приведенными опроверженіями обѣихъ гипотезъ. При гипотезѣ тупого угла дѣло ясно, какъ свѣтъ Божій.... Между тѣмъ, опровергнуть гипотезу остраго угла мнѣ не удается иначе, какъ доказавъ, что эта длина равна длинѣ ея прямолинейнаго базиса“.

Аналогичную постановку вопроса мы находимъ въ сочиненіи математика и философа Генриха Ламберта [1]) „Theorie der Parallellinien“, относящемся къ 1766 г.; но опубликовано оно было лишь послѣ его смерти въ 1788 г.

Ламбертъ разсматриваетъ четырехугольникъ, имѣющій три прямыхъ угла. Относительно четвертаго угла могутъ быть опять три гипотезы: либо это уголъ тупой, либо прямой, либо острый. Ламбертъ разсматриваетъ каждую гипотезу отдѣльно и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ онъ уходитъ значительно дальше Саккери.

Во-первыхъ, Ламбертъ указываетъ, что гипотеза тупого угла оправдывается на сферѣ, если присвоить окружностямъ большого круга роль прямыхъ линій: такъ какъ окружности эти имѣютъ по двѣ общія точки, то предложеніе, при помощи котораго эта гипотеза отвергается на плоскости, здѣсь не находитъ себѣ примѣненія.

Во-вторыхъ, онъ ведетъ гипотезу остраго угла еще дальше, нежели Саккери; онъ знаетъ, напримѣръ, что при этой гипотезѣ площадь треугольника должна быть пропорціональна разности между $2d$ и суммой его угловъ. Стройность умозаключеній, къ которымъ ведетъ гипотеза остраго угла, и, въ особенности, упомянутый сейчасъ фактъ наводятъ его даже на слѣдующее размышленіе:

„Я склоненъ даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сферѣ. Должна же быть причина, вслѣдствіе которой она на плоскости далеко не поддается опроверженію, какъ это легко можетъ быть сдѣлано со второй гипотезой“.

Геніальнымъ людямъ дано провидѣть истину. Слова Ламберта оправдались ровно черезъ сто лѣтъ.

Въ третьихъ, наиболѣе важная заслуга Ламберта заключается въ томъ, что онъ не впалъ въ заблужденіе и не призналъ достаточнымъ ни одного доказательства, опровергающаго гипотезу остраго угла.

„Доказательства Евклидова постулата,“ говоритъ онъ: „могутъ быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, ничтожная мелочь. Но, при тщательномъ анализѣ оказывается, что въ этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержитъ либо доказываемое предложеніе, либо равносильный ему постулатъ“.

Въ другомъ мѣстѣ, углубляясь въ гипотезу остраго угла, Ламбертъ восклицаетъ:

[1]) Johann Heinrich Lambert жилъ отъ 1728 до 1777 г. Онъ написалъ рядъ выдающихся сочиненій по физикѣ, логикѣ и теоріи познанія. Названное въ текстѣ сочиненіе также помѣщено въ „Собраніи первоисточниковъ“ Штеккеля и Энгеля.

„Въ этомъ есть нѣчто восхитительное, что вызываетъ даже желаніе, чтобы третья гипотеза была справедлива!

И все же я желалъ бы, несмотря на это преимущество [1]), чтобы это было не такъ, потому что это было бы сопряжено съ цѣлымъ рядомъ другихъ неудобствъ. Тригонометрическія таблицы стали бы безконечно пространными; подобіе и пропоціональность фигуръ не существовала бы вовсе; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, какъ въ абсолютной своей величинѣ; и астрономіи пришлось бы плохо"....

Указывая рядъ абсурдовъ, съ точки зрѣнія нашихъ представленій, къ которымъ приводитъ гипотеза остраго угла, Ламбертъ замѣчаетъ, что все это не даетъ логическаго доказательства, что все это, какъ онъ выражается, „argumenta ab amore ac invidia ducta", аргументы, которымъ не можетъ быть мѣста въ геометріи. Какъ и профессоръ Кестнеръ, много занимавшійся теоріей параллельныхъ линій, быть можетъ лучшій знатокъ этого вопроса въ XVIII вѣкѣ, какъ и его ученикъ Клюгель, о которомъ мы уже упоминали выше, Ламбертъ приходитъ къ твердому выводу, что всѣ попытки доказать V постулатъ Евклида не привели ни къ чему.

(Продолженіе слѣдуетъ).

„N лучи".

Докладъ въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 19 ноября 1904 года.

*(Продолженіе *).*

16. Чтобы съ большею легкостью прослѣдить исторію этихъ отношеній, въ таблицѣ III перечислены въ хронологическомъ порядкѣ, по мѣсяцамъ, авторы, опубликовавшіе работы и замѣтки или высказавшіе печатно свои мнѣнія по вопросу объ N лучахъ. При этомъ я раздѣлилъ всѣхъ этихъ авторовъ на три группы— для того, чтобы указать мѣстный, такъ сказать, характеръ этихъ открытій: на изслѣдователей, работавшихъ въ Nancy, работавшихъ или пробовавшихъ обнаружить N лучи въ остальной Франціи и, наконецъ, дѣлавшихъ такія же попытки внѣ Франціи. Цифры, сопровождающія фамилію автора, указываютъ число работъ, опубликованныхъ имъ въ данномъ мѣсяцѣ. Курсивомъ напечатаны фамиліи лицъ, получившихъ отрицательные результаты при попыткахъ повторить эти опыты, которые Blondlot описывалъ, какъ крайне простые и легкіе.

---

[1]) Существованіе абсолютной мѣры длины.

*) См. № 382 „Вѣстника".

Таблица III.

	Nancy	Остальная Франція	Внѣ Франціи
1903			
Мартъ	Blondlot, 1.		
Апрѣль			
Май	Blondlot, 2.		
Іюнь	Blondlot, 1.	(Sagnac, 1).	
Іюль	Blondlot, 1.		
Августъ			
Сентябрь			{ *Kaufmann*, *Donath*, *Rubens*, *Drude*,
Октябрь			*Classen* }
Ноябрь	Blondlot, 3.		*Lummer*, *1.*
Декабрь	Blondlot, 1; Charpentier, 2.		*Zahn*, *1.*
1904			
Январь	Blondlot, 1; Meyer, 1; Lambert, 1.	Macé de Lépinay, 1.	*Swinton*, *Stanton*, *Pierce*, *1;* (Brown, 1).
Февраль	Blondlot, 3; Charpentier, 4; Meyer, 2; Bichat, 2; Gutton, 4; Guéritot	Ballet, 1; Bagard, 1; Jégou, 1; Richet, 1; Delherm.	*Burke*, *1.*
Мартъ	Blondlot, 1; Charpentier, 5; Lambert, 1.	Macé de Lépinay, 1; Bagard, 1.	*Hemptinne*, *1;* *Swinton*, *1;* (Rudge, 1); *Schenck*, *1.*
Апрѣль	Charpentier, 1; Meyer, 1; Gutton, 1.	Colson, 1; (D'Arsonval).	*M'Kendrick*, *Kolquhoun*, *1.*
Май	Charpentier, 4; Meyer, 2; Bichat, 2; Lambert, 1.	Broca, 3; Becquerel, 4; Zimmern, 1.	*Salvioni*, *1.*
Іюнь	Blondlot, 4; Charpentier, 2; Meyer, 1; Bichat, 2; Gutton, 1; Le Roux, 1.	Colson, 1; Becquerel, 3; Rothé 1.	*Salvioni*, *1;* *Mercanton*, *Radzikowski*, *1;* *Burke*, *1;* { *Lummer*, *Rubens*, *Rudge*, *Burke* }.
Іюль	Blondlot, 2; Charpentier, 1; Meyer, 1; Bichat, 1; Le Roux, 1.	Becquerel, 3.	*Pacini*, *1;* { *Lummer*, *Rubens*, *Weiss* }.
Августъ			
Сентябрь	{ Lambert.	*Henri*, *Pieron.*	{ *Querton*, *Herzen* и др. }; *Dufour*, *1;* *Wood*, *1.*
Октябрь			Hackett, 1.
Ноябрь	{ Blondlot, Lambert.	*Violle*, *Brillouin*, *Perrin*, *Janet*, Gariel, *Debierne*, *Sagnac*, *Cailletet*, *Curie*, *Berget*, *Gouy*, *Monoyer*, *Meslin*, *Brisson*, *Camichel*, *Turpain*, *Poincaré*, D'Arsonval, *Weiss*, *Doumer*, *Imbert*, *Moreau*, *Izarn*, H. Becquerel, A. Colson, Bichat, Gutton, Meyer, Rothé, *R. Colson*, *G. le Bon.*	*Weiss.*

17. Когда Blondlot обнародовалъ свои открытія относительно N лучей, то многіе физики, соблазняясь, вѣроятно, крайнею простотою его опытовъ, стали пробовать обнаружить описанныя имъ явленія, но не получали при этомъ никакихъ измѣненій въ яркости искорки, пламени и т. д. Громадное большинство, потративъ на это нѣсколько минутъ, часовъ или дней, смотря по характеру, рѣшило, что либо въ ихъ распоряженіи былъ слабый источникъ N лучей, либо въ опытахъ Blondlot были какія-либо подробности, не указанныя въ его краткихъ сообщеніяхъ, но имѣющія существенное значеніе для обнаруженія N лучей. Объясняя свои отрицательные результаты случайностью, никто не позволялъ себѣ усомниться въ реальности явленій, описанныхъ Blondlot.

Роль того ребенка, который—въ сказкѣ Андерсена о новомъ платьѣ короля—первый воскликнулъ: „да царь—голый", сыгралъ нѣмецкій физикъ, извѣстный по своимъ работамъ въ области электроновъ, Kaufmann. Дѣло было такъ. Въ сентябрѣ 1903 года, на 75-омъ съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей въ Касселѣ Rubens читалъ докладъ о своихъ изслѣдованіяхъ надъ крайними ультракрасными лучами,—изслѣдованіяхъ, въ результатѣ которыхъ онъ по отражательной способности для нихъ различныхъ металловъ могъ такимъ оптическимъ путемъ опредѣлить значеніе ома и получилъ 105·3 вмѣсто 106·3 для длины соотвѣтствующаго ртутнаго столба. Въ этомъ докладѣ Rubens упомянулъ, что прозрачность многихъ металловъ для лучей Blondlot стоитъ въ противорѣчіи съ его опытами, если разсматривать N лучи, какъ лучи еще большей длины волны. При обсужденіи этого доклада Kaufmann упомянулъ, что онъ, повторяя опыты Blondlot, но не имѣя въ распоряженіи достаточно регулярно работающаго прерывателя индукціонной катушки, вѣроятно, по этой причинѣ не получилъ результатовъ, указанныхъ Blondlot,—и обратился съ вопросомъ къ присутствовавшимъ, не повторялъ ли кто-нибудь еще эти опыты. И въ отвѣтъ на это Donath, Rubens, Drude и Classen заявили, что они тоже ничего не могли получить. Замѣтимъ, что, если Donath и Classen принадлежатъ къ dii minores, то Rubens и Drude представляютъ собою однихъ изъ самыхъ видныхъ представителей физики въ Германіи и являются весьма искусными экспериментаторами. Rubens сказалъ, между прочимъ, что онъ написалъ Blondlot, прося его указать подробности его опытовъ, и что тотъ очень любезно отвѣтилъ—но и эти указанія не помогли. Не помогъ и рядъ послѣдующихъ разъясненій Blondlot,—и, несмотря на многократные опыты, Rubens, работавшій сначала одинъ, а затѣмъ вмѣстѣ съ Lummer'омъ,—до настоящаго времени получаетъ лишь отрицательные результаты и является однимъ изъ наиболѣе яркихъ выразителей отрицательнаго отношенія къ N лучамъ.

Создалась даже легенда о ближайшихъ поводахъ къ такому отрицательному отношенію. По этой версіи въ одно прекрасное утро къ Rubens'у, — профессору Берлинскаго университета —, является адъютантъ императора Вильгельма и заявляетъ ему, что императоръ, узнавъ объ N лучахъ, желалъ бы видѣть опыты съ этими лучами и проситъ профессора Rubens'а приготовить ихъ къ слѣдующему дню. Rubens, не занимавшійся до тѣхъ поръ этими лучами, взялъ сейчасъ Comptes Rendus Парижской Академіи Наукъ, перечелъ работы Blondlot и, увидя, что опыты крайне просты, сталъ спокойно ихъ готовить. Онъ потратилъ на эти опыты весь день, весь вечеръ, всю ночь,—и не получилъ ничего. Отсюда и проистекаетъ,—если вѣрить этому анекдоту,—враждебное отношеніе Rubens'а къ N лучамъ.

18. Мѣсяца черезъ два послѣ съѣзда въ Касселѣ, въ ноябрьскомъ засѣданіи нѣмецкаго физическаго общества сдѣлалъ сообщеніе Lummer „къ выясненію послѣднихъ опытовъ R. Blondlot надъ N лучами", и высказалъ въ немъ мысль, что многія изъ явленій, описываемыхъ Blondlot, могутъ быть объяснены физіологическими особенностями зрѣнія въ темнотѣ и зрѣнія на свѣту. По теоріи Kries'а, при зрѣніи на свѣту мы оріентируемъ глазъ такъ, чтобы изображеніе разсматриваемаго предмета попало на желтое пятно сѣтчатки; оно усѣяно почти исключительно колбочками, которыя являются чувствительными лишь къ довольно сильнымъ свѣтовымъ впечатлѣніямъ, но за то даютъ ощущенія цвѣтовыя. При зрѣніи же въ темнотѣ, мы видимъ слабо освѣщенные предметы только въ томъ случаѣ, если ихъ изображенія попадаютъ на периферическія части сѣтчатки, усѣянныя преимущественно палочками, которые чувствительны къ меньшимъ интенсивностямъ свѣта, но за то не различаютъ цвѣтовъ. Поэтому, напр., астрономы рекомендуютъ для того, чтобы увидѣть, напр., слабую звѣзду, не смотрѣть на нее, а смотрѣть куда-нибудь рядомъ. Lummer приложилъ эту теорію нѣсколько лѣтъ назадъ къ явленіямъ „сѣраго каленія" и „краснаго каленія" и обнаружилъ, что, если, напр., нагрѣть проволоку до 400°, то видятъ ее лишь периферическія части сѣтчатки и видятъ свѣтящеюся сѣроватымъ цвѣтомъ, но, такъ какъ мы, получая свѣтовое впечатлѣніе, сейчасъ же стремимся оріентировать глазъ такъ, чтобы изображеніе попадало на желтое пятно, то изображеніе проволоки сходитъ съ палочекъ периферическихъ частей и попадаетъ на колбочки желтаго пятна, на которыя оно не можетъ дѣйствовать ввиду своей малой интенсивности: вслѣдствіе этого проволока, накаленная такъ слабо, кажется намъ вродѣ блуждающаго огонька, перебѣгающаго изъ одного мѣста въ другое. Если же повысить температуру градусовъ до 500, то интенсивность свѣта становится достаточной и для колбочекъ: проволочка теряетъ свою подвижность, потому что мы начинаемъ смотрѣть на нее желтымъ пятномъ, и пріобрѣтаетъ красноватый оттѣнокъ.

По отношенію къ наблюденіямъ Blondlot, Lummer обращаетъ вниманіе на то, что Blondlot, большею частью, говоритъ не объ увеличеніи яркости при паденіи N лучей, а объ *уменьшеніи* яркости *при загражденіи* ихъ свинцомъ или рукою. Такъ какъ Blondlot совѣтуетъ смотрѣть разсѣянно, то, по мнѣнію Lummer'а, Blondlot, пока нѣтъ заграждающаго экрана, смотритъ болѣе периферическими частями сѣчтаки; помѣстивъ же экранъ, Blondlot непроизвольно напрягаетъ вниманіе, чтобы уловить измѣненія яркости и начинаетъ смотрѣть на тотъ же слабо свѣтящійся предметъ желтымъ пятномъ, т. е. колбочками, которыя, будучи менѣе чувствительными, чѣмъ палочки, и вызываютъ въ мозгу впечатлѣніе уменьшенія яркости предмета при загражденіи паденія на него N лучей.

Считаемъ нелишнимъ обратить вниманіе на сходство впечатлѣнія, получающагося отъ слабо накаленной проволоки, съ тѣмъ, какое даетъ нить, смоченная коллодіемъ съ сѣрнистымъ кальціемъ, когда она „проводитъ“ N лучи....

Вскорѣ послѣ этого появляется въ Physikalische Zeitschrift статья Zahn'а, который изслѣдовалъ, не вліяютъ ли N лучи на сопротивленіе селена, и получилъ отрицательные результаты. Попробовавъ затѣмъ изслѣдовать глазомъ и фотографически измѣненія яркости искорки, которую онъ съ особою тщательностью дѣлалъ возможно постоянною, онъ также не получилъ ничего.

Ни Lummer, ни Zahn, однако, не выражаютъ еще явныхъ сомнѣній въ существованіи N лучей и т. д.

19. Въ то же, приблизительно, время къ самому „изобрѣтателю“—по выраженію Cailletet—N лучей, къ Blondlot, присоединяется рядъ другихъ лицъ,—и починъ въ этомъ отношеніи кладетъ профессоръ медицинской физики въ Nancy, Charpentier, открывающій излученіе N лучей организмомъ. Съ его легкой руки начинаетъ сыпаться рядъ открытій въ этой области,—нѣтъ почти ни одного номера Comptes Rendus парижской академіи, за первое полугодіе 1904 года, въ которомъ не было бы хоть одного сообщенія объ N лучахъ. Громадное большинство этихъ открытій—до мая, по крайней мѣрѣ,—исходитъ систематически отъ профессоровъ и другихъ преподавателей университета въ Nancy: работы остальныхъ французскихъ физиковъ и физіологовъ носятъ характеръ, если можно такъ выразиться, эпизодическій — изъ нихъ заслуживаютъ наибольшаго вниманія упомянутыя уже въ § 6 работы Macé de Lépinay и Bagard'а.

Въ маѣ выступаютъ, однако, съ рядомъ работъ по N лучамъ два юныхъ *парижскихъ* физика,—Broca и, особенно, Jean Becquerel, представитель четвертаго поколѣнія знаменитой физической семьи Becquerel'ей, — сынъ Henri Becquerel'я, раздѣляющаго съ супругами Curie славу открытія сильно радіоактивныхъ веществъ. Becquerel доходитъ до того, что—по выраженію Cailletet—„гипнотизируетъ... или хлороформируетъ пятифранковую монету“.

Въ іюнѣ Blondlot, на время прекратившій опубликованіе какихъ-либо замѣтокъ, выступаетъ съ нѣсколькими сообщеніями, въ которыхъ утверждаетъ, что каждое тѣло испускаетъ изъ себя по нормалямъ къ своей поверхности потокъ матеріальныхъ частицъ, подчиняющихся дѣйствію тяжести. Такъ, если установить горизонтально, напр., двухфранковую монету, то это „истеченіе вѣсомаго вещества“ направляется, какъ вертикально вверхъ, такъ и, особенно, горизонтально внизъ и можетъ быть обнаружено успѣніемъ яркости фосфоресцирующаго экрана даже на разстояніи нѣсколькихъ метровъ, если только экранъ помѣщать строго на вертикальной линіи, проходящей чрезъ монету. Этотъ потокъ легко перемѣщается, если дуть на него; отъ предметовъ, плоскость которыхъ наклонна, его траекторія имѣетъ видъ струи, вытекающей сбоку сосуда, и т. д. Сподвижники Blondlot успѣли уже открыть существованіе такихъ истеченій съ человѣческаго тѣла,—напр., съ выпрямленнаго пальца, изъ глаза,—обнаружить вліяніе на эти истеченія электрическаго и магнитнаго поля, что дало J. Becquerel'ю поводъ отожествить ихъ съ α и β лучами радіоактивныхъ веществъ....

Съ 25 іюля въ Comptes Rendus Парижской академіи наукъ, присудившей тѣмъ временемъ Blondlot премію въ 50000 франковъ, ни одного сообщенія объ N лучахъ и объ „émission de matière pesante" болѣе не появилось. Отмѣчая это обстоятельство, считаю нужнымъ указать, что оно можетъ быть объяснено лѣтнимъ вакаціоннымъ временемъ, во время котораго тетрадки Comptes Rendus чрезвычайно худѣютъ.

20. Съ января 1904 года въ остальной физической литературѣ отъ времени до времени появляются замѣтки и сообщенія объ попыткахъ—съ отрицательными, почти во всѣхъ случаяхъ, результатами—того или другого автора обнаружить существованіе N лучей. Большая часть этихъ замѣтокъ появилась въ видѣ писемъ въ редакцію англійскаго журнала Nature—очень распространенный въ научномъ мірѣ способъ обмѣна мнѣній,—отчасти въ Bulletin de l'Académie de Belgique (Hemptinne), въ Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (Salvioni), въ Archives des sciences physiques et naturelles (Mercanton & Radzikowski и Dufour), въ Transactions of the Royal Society of Dublin (Hackett). Почти всѣ эти статьи заключаютъ въ себѣ либо указанія на полную неудачу при повтореніи опытовъ Blondlot, либо критику этихъ опытовъ,—и только нѣкоторыя содержатъ описаніе опытовъ, относительно удачныхъ и давшихъ *какіе-нибудь* результаты. Таково письмо Brown'а, замѣтившаго увеличеніе яркости фосфоресцирующаго экрана при приближеніи его къ тѣлу и при приближеніи къ нему бутыли съ теплою водою; таково письмо Burke, обнаружившаго *уменьшеніе* яркости фосфоресцирующаго экрана при надавливаніи на него пальцемъ; такова первая работа Salvioni, такова работа Hackett'а.

Salvioni, не обнаруживъ вліянія N лучей на чувствительность кохэреровъ, не найдя у нихъ никакихъ фотоэлектрическихъ дѣйствій, сталъ пробовать, напр., опредѣлять, какая часть поля, освѣщеннаго N лучами, загорожена свинцовымъ экраномъ, положеніе котораго ему заранѣе извѣстно не было,—и получалъ самые неутѣшительные результаты; тогда онъ сталъ повторять опыты Blondlot въ той же постановкѣ, какую тотъ указываетъ, и сталъ искать положенія наибольшей яркости фосфоресцирующаго экрана на оси кварцевой чечевицы, освѣщаемой N лучами. При этихъ послѣднихъ опытахъ положенія максимумовъ оказались болѣе постоянными, чѣмъ можно было бы ожидать, если бы были случайностью, и соотвѣтствовали показателямъ преломленія 3·13, 2·80, 2·33, 2·24, 2·06, 1·89 и 1·57,—довольно похожимъ на показатели, приведенные въ таблицѣ II .Однако, повторяя тѣ же опыты через три мѣсяца, Salvioni, хотя попрежнему получалъ довольно отчетливыя положенія максимумовъ, но все же менѣе отчетливыя, чѣмъ раньше,—и при томъ эти максимумы обнаруживались, какъ съ чечевицею, такъ и безъ чечевицы, какъ при паденіи N лучей отъ горѣлки Ауэра, такъ и при незажженной горѣлкѣ, какъ безъ всякаго заграждающаго экрана, такъ и при экранахъ изъ веществъ, очень различающихся по поглощенію N лучей. Приписавъ ввиду этого наблюдавшіяся измѣненія яркости причинамъ психологическимъ, а не физическимъ, Salvioni обнаружилъ различія въ аккомодаціонной способности глаза при наблюденіи ярко и слабо освѣщенныхъ поверхностей и большое вліяніе измѣненій аккомодаціи на яркость фосфоресцирующихъ экрановъ, а также замѣтилъ вліяніе на эту яркость степени напряженности вниманія наблюдателя.

Наконецъ, Hackett изучалъ измѣненія чувствительности сѣтчатки по способу, который онъ считаетъ исключающимъ всякія субъективныя вліянія,—и получилъ усиленіе яркости экрана на 10% при примѣненіи закаленнаго стекла и на 3% — при примѣненіи незвучащаго камертона.

21. До послѣдняго времени сравнительно малая доля неудачныхъ попытокъ обнаружить N лучи попала въ печать. Многіе физики, испытавъ неудачу, не сочли нужнымъ повѣдать объ этомъ urbi et orbi, какъ это видно, напр., изъ того, что послѣ своего сообщенія Lummer получилъ рядъ частныхъ писемъ отъ нѣмецкихъ физиковъ о такихъ попыткахъ. У французовъ же,—физиковъ и физіологовъ, не обнаружившихъ этихъ явленій, представителей прессы и просто любителей науки,—началось своего рода паломничество въ Nancy,—къ Blondlot или къ Charpentier,—чтобы посмотрѣть на ихъ опыты, Cailletet довольно картинно изображаетъ эти демонстраціи: „Je m'étais mis en garde contre l'autosuggestion. Jl y avait, en effet, dans l'assistance beaucoup de personnes, des dames notamment, qui voyaient très nettement, et qui témoignaient leur plaisir par des exclamations admiratives. Pour moi, je me suis abstrait de ces émotions extérieures, j'ai bouché mes oreilles et j'ai regardé de tous mes yeux: je n'ai absolument rien vu".

Въ положеніи Cailletet оказался не одинъ научный дѣятель, и не лучше обстояло дѣло, когда эти опыты показывались спеціально для даннаго лица, въ особо благопріятныхъ условіяхъ. Удручающее впечатлѣніе отъ такого посѣщенія лабораторіи Blondlot вынесъ, напр., извѣстный американскій физикъ Wood,—и удручающее впечатлѣніе получается при чтеніи его описанія этого визита (Nature, № 1822). Не видя самъ никакихъ измѣненій яркости, явныхъ для самихъ демонстраторовъ, Wood попросилъ ихъ самихъ наблюдать экранъ и говорить ему, когда загражденъ путь N лучами и когда путь этотъ свободенъ,—и ни одного разу не получилъ правильнаго отвѣта. Не удовлетворила Wood'а и постановка опыта съ фотографированіемъ искорки, въ которомъ онъ нашелъ недостаточно гарантированнымъ равенство времени экспозиціи съ N лучами и безъ нихъ. Въ опытѣ съ разложеніемъ пучка N лучей въ спектръ алюминіевою призмою Wood'а поразило то обстоятельство, что, при ширинѣ щели въ 2—3 мм., перемѣщеніе экрана (тонкая фосфоресцирующая линія) на кусокъ, меньшій десятой миллиметра, вызывало переходъ яркости отъ максимума къ минимуму,—для Blondlot, но не для Wood'а, не замѣчавшаго никакихъ измѣненій,—но ему сказали, что это—одно изъ поразительныхъ и необъяснимыхъ свойствъ N лучей. Опытъ производился въ темнотѣ и Wood незамѣтно для Blondlot убралъ совсѣмъ призму,—и Blondlot продолжалъ указывать положенія максимумовъ на тѣхъ же мѣстахъ.... Точно также не отражалась на мнѣніяхъ Blondlot и его ассистента замѣна Wood'омъ напильника кускомъ дерева тѣхъ же размѣровъ—замѣна, „остававшаяся, конечно, неизвѣстною для наблюдателя“.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Къ замѣткѣ А. Герича „О формѣ резонанса йотованныхъ гласныхъ звуковъ“.

Въ № 380 „Вѣстника Опытной Физики“ помѣщена интересная замѣтка г. А. Герича „О формѣ резонанса йотованныхъ гласныхъ звуковъ“. Такъ какъ провѣрка заключеній автора не требуетъ никакихъ приборовъ, то, вѣроятно, многіе изъ читателей „Вѣстника“ захотятъ сами продѣлать предлагаемый въ замѣткѣ анализъ звуковъ, и вотъ, именно, въ тѣхъ видахъ, чтобы избавить особенно юныхъ экспериментаторовъ отъ излишнихъ затрудненій, мнѣ бы хотѣлось указать на нѣкоторыя недоразумѣнія, вкравшіяся, какъ мнѣ кажется, въ эту замѣтку. Причина ихъ, конечно, лежитъ въ томъ слишкомъ деликатномъ приборѣ, съ которымъ въ данномъ случаѣ приходится экспериментировать.

Прежде всего, анализъ такъ называемыхъ йотованныхъ звуковъ приводитъ автора къ заключенію, что первая составная часть этихъ двухфазныхъ звуковъ есть гласный же звукъ „*и*“, а не полугласный „*й*“, „какъ это склонны принимать филологи“. Конечно, такая ошибка, поддерживаемая филологами въ теченіе вѣковъ, была бы непростительной, но филологи не въ такой ужъ мѣрѣ виноваты. Дѣло въ томъ, что одинъ и тотъ же, повидимому, звукъ произносится различно въ зависимости отъ разныхъ обстоятельствъ (принадлежность къ тому или другому языку, положеніе относительно другихъ звуковъ слова, индивидуальныя свойства говорящаго и пр.), и это особенно свойственно такъ называемымъ йотованнымъ гласнымъ. Что касается йотованныхъ гласныхъ русскаго языка, то онѣ, являясь дѣйствительно двухфазными, произносятся или такъ, что первымъ составляющимъ является полугласный „й“ (обыкновенно, когда они не сливаются съ согласными, особенно, послѣ согласнаго съ „ъ“), или такъ, что первымъ составляющимъ служитъ гласный звукъ „и“ (только такъ они звучатъ въ соединеніи съ согласными). Въ противоположность этому смягченные гласные другихъ языковъ, напр., нѣмецкое „ӱ“, являются звуками однофазными, при чемъ легко замѣтить, что при произнесеніи, напр., звука „ӱ“ воздушная полость рта принимаетъ форму, резонирующую одновременно и звуку „у“, и звуку „и“: измѣнивъ положеніе губъ, характерное для произненія звука „у“, но не мѣняя положенія языка, мы ясно услышимъ звукъ „и“, а не мѣняя положенія губъ и измѣнивъ только положеніе языка, получимъ звукъ „у“.

Такимъ образомъ, если правъ авторъ въ своемъ анализѣ, то не менѣе правы и филологи, такъ какъ йотованные гласные русскаго языка, когда они произносятся не въ сліяніи съ согласными, большей частью звучатъ именно какъ „йотованные“.

Гораздо болѣе спорнымъ представляется наблюденіе автора относительно полугласнаго „й“. Здѣсь, несомнѣнно, произошло какое-то недоразумѣніе. Прежде всего, звукъ „й“ недаромъ названъ филологами „полугласнымъ“: онъ существенно отличается отъ гласныхъ тѣмъ, что это не длительный звукъ, какъ всѣ гласные, и его произнесеніе обусловливается не опредѣленной сохраняющейся формой резонанса, а быстрымъ измѣненіемъ этой формы (помощью приближенія языка къ передней части неба и обратнаго втягиванія его) подобно тому, какъ резонируются большинство согласныхъ (*б*, *в*, *д* и др.), послѣ чего форма резонанса можетъ не соотвѣтствовать никакому опредѣленному гласному или, согласно нашему желанію, въ зависимости отъ формы отверстія, образованнаго губами (которое не вліяетъ на произнесеніе согласнаго или полугласнаго), дать тотъ или другой опредѣленный гласный. Такимъ образомъ, о двухъ фазахъ резонанса при произнесеніи звука „й“ не можетъ быть никакой рѣчи; если же мы захотимъ его анализировать, сохраняя фазу резонанса въ тотъ или другой моментъ его произнесенія, то каждый разъ будемъ получать особый звукъ, не соотвѣтствующій ни одному гласному членораздѣльной рѣчи, и только начальная фаза даетъ звукъ, близкій къ „и“.

Тотъ же анализъ, который даетъ авторъ для звука „й“, справедливъ для гласнаго, несвойственнаго русскому языку, но имѣющаго мѣсто въ языкѣ малорусскомъ (который авторъ называетъ „нарѣчіемъ“ *), который наз. *острымъ* „и“ и изображается въ принятомъ въ украинской литературѣ алфавитѣ знакомъ „ї“ (напр., въ словѣ: їхать, їсти и т. п.). Этотъ гласный дѣйствительно, представляетъ собою чистый двухфазный звукъ, при чемъ

*) Пора бы уже оставить эту терминологію и повѣрить большинству филологовъ, не преслѣдующихъ политики, что малорусскій языкъ есть такой же самостоятельный изъ славянскихъ языковъ, какъ великорусскій, польскій и др. д.

первой фазой резонанса служитъ перемѣнная форма резонанса звука „*й*", а второй—постоянная форма резонанса гласнаго „*ы*".

Это же, между прочимъ, заставляетъ заключить, что малорусскій языкъ отличается отъ великорусскаго не только большей древностью (хотя это можно принять только относительно литературнаго языка), но и присутствіемъ въ немъ особаго, согласно мнѣнію автора, новѣйшаго двуфазнаго гласнаго.

Вообще, нужно сказать, филологическія заключенія автора иногда очень рискованы, а подчасъ вызываютъ и недоумѣніе. Такъ, напр., чрезвычайно странно звучитъ посторонняя содержанію статьи фраза: „надо признать малорусское нарѣчіе болѣе древнимъ, чѣмъ великорусское, ставшее нашимъ литературнымъ языкомъ". Если „нашимъ" относится къ великороссамъ, то странно подчеркивать, что великорусскій языкъ сталъ литературнымъ языкомъ великороссовъ; если же „нашимъ" относится одновременно и къ малороссамъ, и къ малороссамъ, то это совершенно невѣрно, такъ какъ оба народа имѣютъ свои литературные языки съ характерной для каждаго исторіей.

Вопросъ о физическомъ анализѣ звуковъ именно русскаго языка, незатронутый, кажется, еще никѣмъ, кромѣ г. Герича, настолько самъ по себѣ интересенъ и столько можетъ объяснить такъ наз. законы языка, что я, съ своей стороны, позволю предложить читателямъ „Вѣстника" два вопроса, которые могутъ быть разрѣшены изслѣдованіемъ соотвѣтствующихъ формъ резонанса:

1. Объяснить извѣстное правило, что йотованные гласные и „*ѣ*" могутъ сочетаться только съ извѣстными согласными.

2. Сравнить форму резонанса мягкаго окончанія согласнаго (*ть*, *дь*, *сь* и др.) съ формой резонанса „*й*" и, согласно съ этимъ, объяснить указанное выше различное произношеніе двухфазнаго гласнаго въ зависимости отъ того, сливается ли онъ съ согласнымъ или произносится послѣ согласнаго съ „*ъ*".

И. Б.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Опредѣленіе площади треугольника по даннымъ его медіанамъ: μ_a, μ_b, μ_c, гдѣ a, b и c означаютъ стороны треугольника.

Какъ извѣстно, медіаны треугольника выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ его стороны:

$$\mu_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$\mu_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad (A)$$

$$\mu_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Рѣшая *) эти ур-ія относительно сторонъ треугольника a, b, c, находимъ слѣдующія для нихъ выраженія черезъ медіаны:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu^2_b + 2\mu^2_c - \mu^2_a},$$

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu^2_a + 2\mu^2_c - \mu^2_b}, \quad \text{(B)}$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu^2_a + 2\mu^2_b - \mu^2_c}.$$

Для опредѣленія искомой площади примѣнимъ слѣдующую формулу:

$$\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(C)},$$

гдѣ p означаетъ полупериметръ треугольника, a, b, c—его стороны. Обозначивъ подкоренныя количества въ формулахъ (B) соотвѣтственно черезъ α, β, γ, получаемъ:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}, \quad b = \frac{2}{3}\sqrt{\beta}, \quad c = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma},$$

откуда

$$p = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{3},$$

$$p - a = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}}{3},$$

$$p - b = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\beta}}{3}, \quad \text{(D)}$$

$$p - c = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{3}.$$

Изъ формулъ (D) находимъ:

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{3^4} =$$

$$= -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma}{3^4} =$$

---

*) Изъ ур-ій (A) находимъ: $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4\mu^2_a$ (1),

$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4\mu^2_b$ (2),

$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4\mu^2_c$ (3).

Вычитая изъ ур-ія (1) ур-іе (2) и складывая ур-іе (2) съ ур-іемъ (3), помноженнымъ на 2, получаемъ слѣдующую систему ур-ій:

$3b^2 - 3a^2 = 4\mu^2_a - 4\mu^2_b$ (4),

$3b^2 + 6a^2 = 4\mu^2_b + 8\mu^2_c$ (5), откуда $a = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu^2_b + 2\mu^2_c - \mu^2_a}$.

Аналогичнымъ образомъ получаются выраженія для b и c.

$$=-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma+4\beta\gamma-4\beta\gamma}{3^4}=$$

$$=-\frac{(\alpha-\beta-\gamma)^2-4\beta\gamma}{3^4}=\frac{4\beta\gamma-(\alpha-\beta-\gamma)^2}{3^4}. \quad \text{(E)}$$

Принимая во вниманіе выраженія для α, β, γ изъ формулъ (B), получаемъ:

$$\alpha-\beta-\gamma=2\mu_b^2+2\mu_c^2-\mu_a^2-2\mu_a^2-2\mu_c^2+\mu_b^2-2\mu_a^2-2\mu_b^2+\mu_c^2=$$

$$=\mu_b^2+\mu_c^2-5\mu_a^2.$$

$$(\alpha-\beta-\gamma)^2=(\mu_b^2+\mu_c^2-5\mu_a^2)^2=\mu_b^4+\mu_c^4+25\mu_a^4+2\mu_b^2\mu_c^2-10\mu_a^2\mu_b^2-10\mu_a^2\mu_c^2 \quad \text{(F)}.$$

$$4\beta\gamma=4(2\mu_a^2+2\mu_c^2-\mu_b^2)(2\mu_a^2+2\mu_b^2-\mu_c^2)=$$

$$=16\mu_a^4+8\mu_a^2\mu_c^2+8\mu_a^2\mu_b^2+20\mu_b^2\mu_c^2-8\mu_b^4-8\mu_c^4. \quad \text{(K)}.$$

Изъ выраженій (F) и (K), находимъ:

$$4\beta\gamma-(\alpha-\beta-\gamma)^2=-9\mu_a^4-9\mu_b^4-9\mu_c^4+18\mu_a^2\mu_b^2+18\mu_a^2\mu_c^2+18\mu_b^2\mu_c^2,$$

откуда, на основаніи (E), $p(p-a)(p-b)(p-c)=$

$$=-\frac{9\mu_a^4+9\mu_b^4+9\mu_c^4-18\mu_a^2\mu_b^2-18\mu_a^2\mu_c^2-18\mu_b^2\mu_c^2}{3^4}=$$

$$=-\frac{\mu_a^4+\mu_b^4+\mu_c^4-2\mu_a^2\mu_b^2-2\mu_a^2\mu_c^2-2\mu_b^2\mu_c^2}{3^2}=$$

$$=-\frac{\mu_a^4+\mu_b^4+\mu_c^4-2\mu_a^2\mu_b^2-2\mu_a^2\mu_c^2-2\mu_b^2\mu_c^2+4\mu_b^2\mu_c^2-4\mu_b^2\mu_c^2}{3^2}=$$

$$=-\frac{(\mu_a^2-\mu_b^2-\mu_c^2)^2-4\mu_b^2\mu_c^2}{3^2}=\frac{4\mu_b^2\mu_c^2-(\mu_a^2-\mu_b^2-\mu_c^2)^2}{3^2}=$$

$$=\frac{(2\mu_b\mu_c+\mu_a^2-\mu_b^2-\mu_c^2)(2\mu_b\mu_c-\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2)}{3^2}=$$

$$=-\frac{(\mu_b^2+\mu_c^2-2\mu_b\mu_c-\mu_a^2)(\mu_b^2+\mu_c^2+2\mu_b\mu_c-\mu_a^2)}{3^2}=$$

$$=-\frac{[(\mu_b-\mu_c)^2-\mu_a^2][(\mu_b+\mu_c)^2-\mu_a^2]}{3^2}=$$

$$=-\frac{(\mu_b-\mu_c+\mu_a)(\mu_b-\mu_c-\mu_a)(\mu_b+\mu_c+\mu_a)(\mu_b+\mu_c-\mu_a)}{3^2}=$$

$$=\frac{(\mu_a+\mu_b+\mu_c)(\mu_b+\mu_c-\mu_a)(\mu_a+\mu_c-\mu_b)(\mu_a+\mu_b-\mu_c)}{3^2}. \quad \text{(L)}$$

Обозначивъ сумму медіанъ треугольника черезъ 2σ, т. е. полагая $\mu_a+\mu_b+\mu_c=2\sigma$, получаемъ, на основаніи выраженія (L):

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{2\sigma(2\sigma-2\mu_a)(2\sigma-2\mu_b)(2\sigma-2\mu_c)}{3^2}=$$

$$=\frac{2^4\cdot\sigma(\sigma-\mu_a)(\sigma-\mu_b)(\sigma-\mu_c)}{3^2} \quad \text{(M)}.$$

Подставляя выраженіе (М) въ вышеприведенную формулу (С) для вычисленія площади треугольника, находимъ:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2^4}{3^2} \cdot \sigma(\sigma-\mu_a)(\sigma-\mu_b)(\sigma-\mu_c)}$$

или

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma.(\sigma-\mu_a)(\sigma-\mu_b)(\sigma-\mu_c)}.$$

Я. Эдельштейнъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 562 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(y+z-x)^{-1}+(y-z)^{-1}=a^{-1},$$

$$(z+x-y)^{-1}+(z-x)^{-1}=\left(\frac{a-b}{2}\right)^{-1},$$

$$(x+y-z)^{-1}+(x-y)^{-1}=b^{-1}.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 563 (4 сер.). Два треугольника AOB и $A'OB'$, имѣющіе общую вершину O, лежатъ въ одной плоскости α. Одинъ изъ этихъ треугольниковъ вращается вокругъ точки O, оставаясь въ плоскости α. Дано, что прямыя AA' и BB' остаются параллельны при выше указанномъ вращеніи, на какой бы уголъ ни повернулся одинъ изъ треугольниковъ. Доказать, что треугольники AOB и $A'OB'$ равны.

И. Габеръ (Одесса).

№ 564 (4 сер.). Основаніе BC треугольника ABC раздѣлено въ точкахъ D и E на три равныя части. Доказать, что полученные при вершинѣ A углы удовлетворяютъ слѣдующимъ соотношеніямъ:

$$\sin BAE \sin CAD = 4\sin BAD \sin CAE,$$

$$(\cot BAD + \cot DAE)(\cot CAE + \cot EAD) = \operatorname{cosec}^2 DAE.$$

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 565 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[7]{78097+2x} + \sqrt[7]{100+2x} = 3.$$

Н. Пѣтуховъ (Екатеринбургъ).

№ 566 (4 сер.). Существуетъ ли цѣлое значеніе x, при которомъ выраженіе

$$11x+3$$

равно числу, имѣющему нечетное число положительныхъ дѣлителей?

Н. С. (Одесса).

№ 567 (4 сер.). Два стержня, латунный и мѣдный, имѣютъ при 0° одинаковую длину, равную 4 метрамъ. Ихъ нагрѣваютъ до одинаковой температуры, при которой разность длинъ этихъ стержней становится равна 0,004 метра. Опредѣлить температуру, до которой были нагрѣты стержни и сотвѣтственное удлиненіе каждаго стержня, зная, что коэффиціенты линейнаго асоширенія латуни и мѣди равны соотвѣтственно 0,000018782 и 0,000017182.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 433 (4 сер.) *Рѣшить систему уравненій*

$$y(ay-2x)=4(a-2),$$

$$(4-xy)^2+4(x-y)^2=\frac{b(4-y^2)^3}{2(4-x^2)}.$$

Представимъ первое изъ предложенныхъ уравненій въ видѣ:

$$a(y^2-4)-2(xy-4)=0 \quad (1).$$

Введемъ обозначенія:

$$y^2-4=t \ (2), \quad xy-4=u \ (3).$$

Изъ уравненій (2) и (3) находимъ:

$$y^2=t+4 \ (4), \quad xy=u+4, \quad x^2y^2=(u+4)^2,$$

$$x^2=\frac{(u+4)^2}{t+4} \quad (5).$$

Поэтому (см. (3), (4), (5)):

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=\frac{(u+4)^2}{t+4}+t+4-2(u+4),$$

или

$$(x-y)^2=\frac{u^2-2ut+t^2}{t+4}=\frac{(u-t)^2}{t+4} \quad (6).$$

Кромѣ того (см. (2), (5)):

$$\frac{b(4-y^2)^3}{2(4-x^2)}=\frac{-bt^3}{2\left(4-\frac{(u+4)^2}{t+4}\right)}=-\frac{bt^3(t+4)}{2(4t-u^2-8u)} \quad (7).$$

На основаніи равенствъ (2), (3), (6), (7), предложенныя уравненія можно записать въ видѣ:

$$at-2u=0 \quad (A),$$

$$u^2+\frac{4(u-t)^2}{t+4}=-\frac{bt^3(t+4)}{2(4t-u^2-8u)} \quad (B).$$

Изъ уравненія (A) имѣемъ:

$$u=\frac{at}{2} \quad (8).$$

Подставляя значеніе u (см. (8)) въ уравненіе (B), получимъ

$$\frac{a^2t^2}{4}+\frac{(a-2)^2t^2}{t+4}=\frac{-bt^3(t+4)}{2\left(4t-\frac{a^2t^2}{4}-4at\right)}=\frac{-2bt^2(t+4)}{16-16a-a^2t},$$

или

$$\frac{a^2t^2}{4}+\frac{(a-2)^2t^2}{t+4}+\frac{2bt^2(t+4)}{16-16a-a^2t}=0,$$

$$t^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{(a-2)^2}{t+4}+\frac{2b(t+4)}{16-16a+a^2t}\right)=0 \quad (9),$$

такъ что либо $t=0$ (10), либо

$$\frac{a^2}{4}+\frac{(a-2)^2}{t+4}+\frac{2b(t+4)}{16-16a+a^2t}=0,$$

$$a^2(t+4)(16-16a+a^2t)+4(a-2)^2(16-16a+a^2t)+8b(t+4)^2=0 \quad (11).$$

Если $t=0$ (см. (10)), то (см. (8), (4), (5)) $u=0$, $x^2=4$, $y^2=4$, откуда $x=\pm 2$,

$y = \pm 2$. Но эти рѣшенія не удовлетворяютъ предложенной системѣ, обращая вторую часть второго изъ данныхъ уравненій въ неопредѣленное выраженіе. Для того, чтобы найти рѣшенія данной системы, находимъ значеніе t изъ квадратнаго уравненія (11). Пусть α_1 и α_2—эти значенія t. Тогда (см. (4))

$$y = \pm\sqrt{\alpha_1 + 4} \quad \text{или} \quad y = \pm\sqrt{\alpha_2 + 4} \quad (12).$$

Затѣмъ (см. (3), (8):

$$x = \frac{u+4}{y} = \frac{\frac{at}{2}+4}{y} = \frac{at+8}{2y} = \frac{a\alpha_1 + 8}{\pm 2\sqrt{\alpha_1 + 4}} \quad (13),$$

$$\text{или } x = \frac{a\alpha_2 + 8}{\pm 2\sqrt{\alpha_2 + 4}} \quad (14).$$

Формулы (12), (13), (14) даютъ рѣшенія предложенной системы.

№ 487 (4 сер.). *По радіусу* R *круга и по сторонѣ* a_{3n} *вписаннаго въ него правильнаго многоугольника о* 3n *сторонахъ вычислить сторону* a_{2n} *правильнаго вписаннаго многоугольника о* 2n *сторонахъ.*

Обозначимъ центральный уголъ правильнаго многоугольника объ n сторонахъ черезъ 12β; тогда центральные углы, противолежащіе соотвѣтственно сторонамъ правильныхъ многоугольниковъ о $3n$ и $2n$ сторонахъ, равны соотвѣтственно 4β и 6β. Слѣдовательно, называя для удобства a_{2n} черезъ x и a_{3n} черезъ y, имѣемъ:

$$x = a_{2n} = 2R\sin 3\beta \ (1); \quad y = a_{3n} = 2R\sin 2\beta \ (2).$$

Изъ уравненія (2) имѣемъ: $\sin 2\beta = \frac{y}{2R}$, $\cos 2\beta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4R^2}} = \frac{\sqrt{4R^2 - y^2}}{2R}$,

откуда

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{4R^2 - y^2}}{2R}}{2}} = \sqrt{\frac{2R - \sqrt{4R^2 - y^2}}{4R}} \quad (3).$$

Но
$$\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta = \sin\beta(3 - 4\sin^2\beta) \quad (4).$$

Поэтому (см. (1), (3), (4))

$$x = 2R\,.\sqrt{\frac{2R - \sqrt{4R^2 - y^2}}{4R}}\left(3 - 4\,.\frac{2R - \sqrt{4R^2 - y^2}}{4R}\right) =$$

$$= 2R\,.\sqrt{\frac{2R - \sqrt{4R^2 - y^2}}{4R}}\cdot\frac{R + \sqrt{4R^2 - y^2}}{R} =$$

$$= \sqrt{\frac{4R^2(2R - \sqrt{4R^2 - y^2}}{4R}}\cdot\frac{R + \sqrt{4R^2 - y^2}}{R} =$$

$$= \frac{(R + \sqrt{4R^2 - y^2})\sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - y^2}}}{R} \quad (4).$$

Введя въ формулѣ (4) множитель $\frac{R + \sqrt{4R^2 - y^2}}{R}$ подъ знакъ радикала, сдѣлавъ въ подкоренномъ выраженіи приведеніе раціональныхъ и ирраціональныхъ членовъ и воспользовавшись тожествомъ $4R^6+6R^2y^4-9R^4y^2-y^6=$ $=4R^6-y^2(3R^2-y^2)^2$, можно дать формулѣ (4) видъ:

$$x=\sqrt{2R^2-\frac{\sqrt{4R^6-y^2(3R^2-y^2)^2}}{R}} \quad (5),$$

т. е. (см. (4), (5))

$$a_{2n}=\frac{(R+\sqrt{4R^2-a^2_{3n}})\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a^2_{3n}}}}{R},$$

или

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-\frac{\sqrt{4R^6-a^2_{3n}(3R^2-a^2_{3n})^2}}{R}}.$$

А. Чесскій (Москва).

№ 483 (4 сер.). *Доказать, что при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ* m *и* n *число*

$$mn[m^3-n^3-mn(m-n)](m+n)$$

дѣлится на 30.

Разсматриваемое число можно представить въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$mn[m^3-n^3-mn(m-n)](m+n)=mn[(m-n)(m^2+mn+n^2)-mn(m-n)](m+n)=$$

$$=mn(m-n)(m^2+n^2)(m+n)=mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)=mn(m^4-n^4). \quad (1).$$

Если одно изъ чиселъ m или n четно, то и mn, а потому и все разсматриваемое число четно; если же m и n оба нечетныя, то число $m+n$ четное, и опять все число оказывается кратнымъ 2 (см. (1)).

Если одно изъ чиселъ m или n кратно 3, то и mn, а потому и все разсматриваемое число кратно 3. Если же каждое изъ чиселъ m и n не кратно 3, то, по теоремѣ Фермата, $m^2=3k+1$, $n^2=3k'+1$, гдѣ k и k'—числа цѣлыя, такъ что $m^2-n^2=3(k-k')$, т. е. m^2-n^2 кратно 3, а потому и все разсматриваемое число кратно 3 (см. (1).

Если одно изъ чиселъ m или n кратно 5, то и mn, а потому и все разсматриваемое число кратно 5. Если ни m, ни n не кратно 5, то, по теоремѣ Фермата, $m^4=5k+1$, $n^4=5k'+1$, гдѣ k и k'—числа цѣлыя; поэтому $m^4-n^4=$ $=5(k-k')$, такъ что m^4-n^4 кратно 5, а потому и все разсматриваемое число кратно 5.

Дѣлясь на 2, 3 и 5, разсматриваемое число кратно произведенія 2.3.5 = 30.

В. Гейманъ (Ѳеодосія); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *А. Чесскій* (Москва); *Н. Агрономовъ* (Вологда).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 25-го Января 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66

„ФИЗИКЪ-ЛЮБИТЕЛЬ".

Журналъ по опытнымъ и прикладнымъ физическимъ наукамъ, выходящій ежемѣсячно (за исключеніемъ іюня и іюля) выпусками въ **32** страницы съ чертежами и рисунками,

Отдѣлы журнала:

1) Изъ жизни выдающихся экспериментаторовъ.
2) Старое и новое изъ области физическихъ наукъ.
3) Кабинеты и лабораторіи физическихъ наукъ въ средней школѣ.
4) Любительская фотографія и волшебный фонарь.
5) Электричество и другіе виды энергіи въ домашнемъ быту.
6) Физика безъ приборовъ и химія безъ лабораторіи.
7) Открытія, изобрѣтенія, усовершенствованія (велосипедъ, автомобиль, граммофонъ, кинематографъ и пр.).
8) Обзоръ книгъ и журналовъ.
9) Отвѣты подписчикамъ.
10) Объявленія.

Подписная плата.

За годъ (10 номеровъ) . . . . . . **3 руб.**

» $1/_2$ года (5 номеровъ). . . . . . **1 » 50 коп.**

Подписка принимается въ редакціи журнала: **г. Николаевъ,** *(Херс. губ.) Спасская 7.*

Можно выписывать открытымъ письмомъ, наложеннымъ платежемъ на первую книжку журнала, въ размѣрѣ годовой или полугодовой платы съ прибавкою 20 коп.

Редакторы-Издатели:
- Кандидатъ Моск. Универс. **К. А. Чернышевъ.**
- Инженеръ-Технологъ **В. В. Рюминъ.**