№ 367.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXI-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 66.
1904.

XXXI Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
элементарной математики.

15 Апрѣля № 367. 1904 г.

Содержаніе: Радій. Его исторія и будущность. М. Кюри. *Перев. И. Левинъ.* — Гигантскія и миніатюрныя солнца. *J. E. Gore.* — Задачи на maxima и minima, какъ практическій матеріалъ къ теоріи неравенствъ. *А. Вольфенсона.* — Два ариѳметическихъ курьеза. *Н. Кузьминскаго.* — Опыты и приборы: Изъ „Zeitschrift für den Physicalischen und Chemischen Unterricht 1903“. *Прив.-доц. В. Лермантова.* — Научная хроника: Телеграфонъ Паульсена. Объ іонизаціи пламени. Электролизъ газовъ. — Математическія мелочи: О суммѣ квадратовъ и кубовъ *n* первыхъ натуральныхъ чиселъ. *В. Ковалевскаго.* — Задачи для учащихся №№ 466—471 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 384, 385, 386, 387, 391, 408. — Объявленія.

РАДІЙ.

Его исторія и будущность. М. Кюри въ Парижѣ. (M. Curie). *)

Въ 1896-мъ году Беккерель (Becquerel) открылъ, что уранъ и его соединенія испускаютъ лучи, которые дѣйствуютъ на фотографическую пластинку аналогично Рентгеновскимъ лучамъ (Roentgen) и дѣлаютъ воздухъ проводникомъ электричества. Они проникаютъ сквозь черную бумагу и тонкія металлическія пластинки, но не отражаются и не преломляются.

Такіе же лучи испускаютъ соединенія торія.

Г-жа Кюри и я назвали вещества, способныя испускать такіе лучи, радіоактивными; мы изслѣдовали эти вещества. Мы выдѣлили изъ урановой руды полоній—радіоактивное вещество, аналогичное висмуту по своимъ радіоактивнымъ свойствамъ, и радій—тѣло, родственное барію; а затѣмъ Дебьернъ (Debierne) открылъ актиній. Полоній, радій и актиній испускаютъ лучи, активность которыхъ въ милліонъ разъ сильнѣе, чѣмъ у

*) Предлагаемая статья представляетъ собою изложеніе доклада, читаннаго г-мъ Кюри въ Парижской Сорбоннѣ.

урана и торія. Радій—новый элементъ, полученный нами въ видѣ чистой соли. Нѣтъ абсолютно ни одной среды, черезъ которую не проникали бы лучи радія. Во многихъ тѣлахъ они вызываютъ фосфоресценцію. Фосфоресцирующія вещества постепенно подвергаются вліянію лучей радія; они дѣлаются затѣмъ менѣе чувствительными и подъ дѣйствіемъ радія менѣе свѣтящимися. Соли радія—самосвѣтящи. Нужно допустить, что Беккерелевскіе лучи, испускаемые этими солями, дѣлаютъ ихъ фосфоресцирующими. Хлористый и бромистый радій даютъ свѣтъ бо́льшей интенсивности который становится иногда настолько сильнымъ, что онъ можетъ быть виденъ при дневномъ свѣтѣ. Исходящій изъ солей радія свѣтъ напоминаетъ собою свѣченіе „свѣтляка". Сила свѣта солей радія съ теченіемъ времени слабѣетъ, но никогда совсѣмъ не исчезаетъ; въ то же время соли, вначалѣ безцвѣтныя, потомъ окрашиваются въ сѣрый, а затѣмъ въ желтый и фіолетовый цвѣта. Лучи радія дѣлаютъ воздухъ проводникомъ электричества. Приблизивъ нѣсколько дециграммовъ какой-нибудь соли радія къ заряженному электроскопу, мы его тотчасъ разряжаемъ. Если даже электроскопъ отдѣленъ отъ солей радія толстымъ слоемъ какого-нибудь вещества, то разряженіе происходитъ, но медленнѣе. Очень сильно поглощаютъ лучи свинецъ и платина; аллюминій пропускаетъ лучи больше всѣхъ металловъ; органическія тѣла поглощаютъ Беккерелевскіе лучи сравнительно меньше. Лучи радія превращаютъ жидкіе діэлектрики, какъ напримѣръ, сѣрнистый углеродъ, бензинъ, жидкій, воздухъ, въ электрическіе проводники.

Лучи радія не преломляются и не отражаются. Они собственно представляютъ собой смѣсь, состоящую изъ троякого рода лучей, обозначенныхъ Рутерфордомъ (Rutherford) α—, β—, γ—лучи. Ихъ легко отличить другъ отъ друга по расположенію въ полѣ сильнаго магнита: α—лучи отклоняются отъ своего прямого пути точно такъ, какъ это происходитъ въ трубкѣ съ разрѣженными газами, β—лучи отклоняются подобно катоднымъ лучамъ, а γ—лучи не подвергаются вліянію магнита, какъ и Рентгеновскіе.

Соли радія обладаютъ далѣе замѣчательнымъ свойствомъ, открытымъ мною и Лабордомъ (Laborde), именно они постоянно развиваютъ теплоту. Это развитіе теплоты достаточно сильно и можетъ быть показано простымъ опытомъ: берутъ стклянку, содержащую семь дециграммовъ чистаго бромистаго радія, и ставятъ ее въ не пропускающій тепловые лучи сосудъ, отверстіе котораго закрыто хлопчатой бумагой. Въ непосредственномъ сосѣдствѣ со стклянкой находится шарикъ ртутнаго термометра, показывающаго окружающую температуру. Въ другой такой же сосудъ ставится такая же стклянка съ веществомъ, не обладающимъ активностью, напр., хлористымъ баріемъ. Термометръ въ первомъ сосудѣ показываетъ температуру на 3 градуса выше, чѣмъ во второмъ. Посредствомъ ледяного калориметра Бунзена можно измѣрить развиваемую радіемъ теплоту: Граммъ радія развиваетъ ежечасно около 80 граммкалорій,—количество теплоты, достаточное, чтобы нагрѣть 80 граммовъ воды на 1 градусъ, или же растопить 1 граммъ льда. Самъ радій при этомъ своего состоянія не измѣняетъ. Такое постоянное развитіе теплоты не наблюдается ни при одной химической реакціи. Лучи радія производятъ, дальше, различныя интересныя физіологическія дѣйствія. Радій, заключенный въ темной картонной коробкѣ или металлической банкѣ, дѣйствуетъ на глазъ и вызываетъ свѣтовое ощущеніе, если коробку держать передъ закрытымъ глазомъ или противъ виска. Причина этого ощущенія коренится въ самомъ глазѣ, ткани котораго, подъ вліяніемъ лучей радія, начинаютъ фосфоресцировать.

Лучи радія дѣйствуютъ также на кожу (эпидерму); если держать стклянку съ радіемъ на кожѣ, то не ощущаешь ничего особеннаго; но спустя 15—20 дней кожа дѣлается красной, и на томъ мѣстѣ, гдѣ была стклянка, образуется кора; при достаточно долгомъ дѣйствіи радія образуется рана, требующая для излѣченія многихъ мѣсяцевъ. Дѣйствіе лучей радія на кожу аналогично Рентгеновскимъ лучамъ. Въ настоящее время пытаются пользоваться ими при лѣченіи рака и туберкулеза кожи (Lupus). Лучи радія дѣйствуютъ, далѣе, на нервные центры, вызывая параличъ и даже смерть. Въ особенности, они сильно дѣйствуютъ на живую развивающуюся ткань.

Другое замѣчательное явленіе, вызываемое радіемъ, — эманація: какое-нибудь тѣло, находящееся вблизи какой-нибудь соли радія, пріобрѣтаетъ свойства его лучей, дѣлается радіоактивнымъ. Эта наведенная радіоактивность сохраняется еще нѣкоторое время даже послѣ удаленія радія отъ даннаго тѣла, но она мало-по-малу ослабѣваетъ и, наконецъ, исчезаетъ. Для объясненія этого страннаго явленія Рутерфордъ, особенно хорошо изучившій его, принимаетъ, что радій постоянно развиваетъ газообразное радіоактивное вещество, которое, распространяясь въ пространствѣ, вызываетъ явленія индуктивной радіоактивности. Это предполагаемое вещество онъ называетъ эманаціей радія.

Электрическая проводимость, которую воздухъ пріобрѣтаетъ подъ вліяніемъ лучей, исходящихъ отъ радіоактивныхъ веществъ, точно опредѣлена Г-жей Кюри числовыми измѣреніями.

Суммируя всѣ наши свѣдѣнія о радіоактивныхъ тѣлахъ, можно заключить слѣдующее: изученіе тѣлъ, содержащихъ уранъ и торій, показало, что радіоактивность есть постоянное свойство каждаго атома этихъ двухъ элементовъ.

Радіоактивность соединенія пропорціональна количеству содержащагося въ немъ радіоактивнаго металла. Нѣкоторыя же урановыя руды, а также урановая смоляная руда, халколитъ, и др. имѣютъ, однако, бóльшую радіоактивность, чѣмъ металлическій уранъ. Мы задали себѣ вопросъ, не содержатъ ли эти руды въ малыхъ количествахъ еще неизвѣстныя сильно радіоактивныя вещества, и мы пытались открыть эти предполагаемыя вещества путемъ химическаго анализа. Успѣхъ вознаградилъ наши старанія и подтвердилъ наши предположенія. Одна тонна урановой смоляной руды содержитъ лишь одинъ дециграммъ радія, вслѣдствіе чего добываніе солей радія становится очень труднымъ и дорогимъ. Тонна минерала доставляетъ нѣсколько килограммовъ бромистаго барія, изъ котораго бромистый радій добывается дальнѣйшимъ рядомъ химическихъ процессовъ.

Недавно скончавшійся Демарсэ (Demarçay) первый примѣнилъ спектральный анализъ для изученія радія. Спектральная реакція радія также чувствительна, какъ и барія; спектроскопъ обнаруживаетъ присутствіе радія въ соли барія, содержащей лишь всего $\frac{1}{10000}$ радія. Радіоактивность даетъ реакцію еще въ 10,000 разъ чувствительнѣе. Помощью обыкновеннаго, хорошо изолированнаго электрометра можно убѣдиться въ присутствіи $\frac{1}{100,000,000}$ радія въ неактивномъ веществѣ. Хотя радій по своимъ свойствамъ напоминаетъ собою барій, но нельзя найти и слѣда его въ обыкновенной рудѣ барія; какъ спутникъ барія, онъ находится только въ рудѣ урана; этотъ фактъ имѣетъ, вѣроятно, важное теоретическое значеніе.

Радій даетъ намъ примѣръ тѣла, постоянно развивающаго энергію и въ значительномъ количествѣ; но въ такомъ случаѣ это явленіе противорѣчитъ основному принципу энергіи; для устраненія противорѣчія были предложены различныя гипотезы, изъ которыхъ мы упомянемъ только двѣ, какъ особенно достойныхъ вниманія.

По первой, радій—элементъ, находящійся въ періодѣ развитія; но тогда нужно считать этотъ процессъ развитія крайне медленнымъ, такъ что даже послѣ многихъ лѣтъ нельзя замѣтить никакой перемѣны въ состояніи радія.

По второй гипотезѣ, существуютъ въ пространствѣ еще неизвѣстныя, не познаваемыя нашими чувствами лучеиспусканія. Радій обладаетъ способностью поглощать энергію этихъ предполагаемыхъ лучей и превращать ихъ въ радіоактивную энергію. Впрочемъ, эти двѣ гипотезы не исключаютъ другъ друга.

Наконецъ, въ послѣднее время открытъ Рамсаемъ (Ramsay) и Соди (Soddy) новый важный фактъ; эти изслѣдователи нашли, что изъ эманаціи, т. е. изъ матеріи, развиваемой вокругъ себя радіемъ, образуется газъ гелій. Мы стоимъ, такимъ образомъ, въ первый разъ лицомъ къ лицу съ фактомъ образованія элемента. Возможно, что радій не есть постоянный элементъ и что гелій представляетъ собой одну изъ его составныхъ частей.

Перевелъ И. Левинъ.

Гигантскія и миніатюрныя солнца.

J. E. Gore.

(Переводъ съ англійскаго).

Одно время считалась вѣроятной гипотеза, что въ общемъ звѣзды приблизительно равны по величинѣ и дѣйствительной яркости и что различія въ ихъ блескѣ обусловлены главнымъ образомъ ихъ относительными разстояніями отъ земли. При этой, повидимому легко допустимой, гипотезѣ, принимая отношеніе яркости звѣздъ двухъ послѣдовательныхъ величинъ равнымъ 2.512, мы имѣли бы, что типическая звѣзда первой величины по яркости равна 100 звѣздамъ шестой величины. А такъ какъ яркость измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то, значитъ, звѣзда шестой величины—какъ разъ такія звѣзды видны еще ясно нормальному зрѣнію въ ясную и безлунную ночь—должна быть въ десять разъ дальше звѣзды первой величины. На томъ же основаніи звѣзда одиннадцатой величины дожна была бы быть въ десять разъ дальше звѣзды шестой величины и, слѣдовательно, во 100 разъ дальше звѣзды первой величины. Звѣзды одиннадцатой величины находятся приблизительно на предѣлѣ видимости для 3-дюймовой зрительной трубы. Звѣзды шестнадцатой величины, слабѣйшія, какія еще можно видѣть въ 25-дюймовый рефракторъ, по указанной гипотезѣ должны быть въ 1000 разъ дальше звѣздъ первой величины.

Хотя эта гипотеза и кажется довольно вѣроятной на первый взглядъ, на самомъ дѣлѣ никогда не имѣлось ясныхъ указаній на то, что звѣзды равны по величинѣ и яркости, новѣйшія же изслѣдованія доказали, что онѣ значительно отличаются между собою и по абсолютной величинѣ, и по яркости самой поверхности. Измѣренія разстояній показали во-очію, что нѣкоторыя слабыя звѣзды значительно ближе къ намъ, чѣмъ иныя яркія, какъ Арктуръ, Вега, Капелла, Ригель и Канопусъ. Эти блестящія свѣтила должны быть поэтому несравненно больше слабыхъ звѣздъ съ бо́льшими параллаксами. Съ другой стороны, у насъ имѣются основанія думать, что многія звѣзды гораздо меньше нашего солнца. Свѣдѣнія о нѣкоторыхъ изъ этихъ солнцъ—великановъ и солнцъ—карликовъ, какъ можно назвать ихъ, могутъ заинтересовать и неспеціалиста.

Разсмотримъ сначала нѣкоторыя изъ гигантскихъ солнцъ. Хорошо извѣстную красноватую звѣзду Альдебаранъ (α Тельца) въ Гіадахъ можно считать типической звѣздой первой величины. Небольшой параллаксъ въ 0.107″ былъ недавно найденъ у нея на обсерваторіи Йэльскаго Колледжа (Yale, С. А. С. Ш.). Ея разстояніе отъ земли, такимъ образомъ, въ семь разъ больше разстоянія α Центавра (параллаксъ которой равенъ 0.75″). А такъ какъ Альдебаранъ даетъ такой же самый спектръ (K5M по классификаціи Пикеринга), какъ и болѣе слабая составляющая α Центавра (величины 1.75), то эти двѣ звѣзды, можно думать, имѣютъ приблизительно одинаковую яркость самой поверхности. Изъ указанныхъ чиселъ мы находимъ, что Альдебаранъ приблизительно въ 92 раза ярче спутника α Центавра, а массу имѣетъ въ 882 раза (приблизительно) бо́льшую. Но составляющія α Центавра обѣ имѣютъ одинаковую массу, равняясь каждая массѣ нашего солнца. Отсюда масса Альдебарана, вѣроятно, въ 882 раза больше массы солнца!

Величина красной южной звѣзды Антареса (α Скорпіона) согласно послѣднимъ измѣреніямъ на Гарвардской Обсерваторіи)Harvard College, C. A. C. III.) равна 1.22, а параллаксъ ея по Гиллю (Sir David Gill) около 0.021″. Такимъ образомъ она въ 1.159 разъ слабѣе Альдебарана. Но Антаресъ въ шесть разъ дальше Альдебарана. Значитъ, на самомъ дѣлѣ Антаресъ долженъ быть въ $5^2:1.159$ или въ 21.5 разъ ярче Альдебарана. Поэтому поверхность Антареса должна быть въ 21.5×92 или 1978 разъ больше поверхности спутника α Центавра, а масса его приблизительно въ 88000 разъ больше массы солнца—во-истину свѣтило—великанъ.

Бетельгейцъ (α Оріона) даетъ спектръ, похожій на спектръ Антареса, но, такъ какъ она ярче и дальше Антареса, то, вѣроятно, она еще больше.

Ригель (β Оріона). Принимая параллаксъ въ 0.01″, найденный Гиллемъ, и сравнивая его съ *болѣе яркой* составляющей α Центавра, почти одинаковой съ ней по видимой (или звѣздной) величинѣ, мы будемъ имѣть, такъ какъ параллаксъ α Центавра равенъ 0.75″, что яркость Ригеля въ $75^2 = 5625$ разъ больше яркости солнца (которое, вѣроятно, одинаково съ α_2 Центавра). Но спектръ Ригеля указываетъ на то, что онъ долженъ имѣть болѣе высокую температуру и быть ярче. Эти два тѣла, слѣдовательно, не вполнѣ сравнимы и мы должны принять въ разсчетъ разницу въ яркости самой поверхности ихъ. Если мы допустимъ, что поглощеніемъ въ газовыхъ оболочкахъ свѣтъ солнца сводится къ одной четвертой его дѣйствительной величины (а это, вѣроятно, довольно широкая скидка), то мы получимъ, что поверхность Ригеля должна быть въ $\frac{5625}{4}$ или 1406 разъ больше поверхности солнца. Отсюда объемъ Ригеля долженъ равняться 52000 объемовъ солнца. Впрочемъ, Ригель, вслѣдствіе своей болѣе высокой температуры, имѣетъ, вѣроятно, меньшую плотность. Сравнивая его съ Альголемъ, который даетъ такой же спектръ и котораго плотность и масса извѣстны намъ, мы придемъ къ поразительному результату, что масса Ригеля приблизительно въ 20000 разъ больше массы солнца! Параллаксъ Ригеля, разумѣется, нѣсколько сомнителенъ, но Гилль увѣренъ, что онъ *не превосходитъ* указанной величины.

У β Центавра Гилль нашелъ параллаксъ въ 0.046″. На соотвѣтственномъ разстояніи солнце сіяло бы звѣздой приблизительно 6.75-ой величины, а такъ какъ фотометрическая величина этой звѣзды равна 0.86, то мы находимъ разницу въ 5.89 величинъ, что даетъ для β Центавра яркость въ 227 разъ больше яркости солнца. Отсюда ея объемъ равенъ 3420 объемамъ солнца, и, если принять ея плотность въ четверть плотности солнца, то масса β Центавра будетъ равна 855 массамъ солнца!

α Креста (Южнаго) почти точно такой же яркости, какъ и Альдебаранъ, но вдвое дальше отъ насъ, такъ какъ для нея Гилль нашелъ параллаксъ всего въ 0.05″. Ея спектръ (типа Оріоновыхъ звѣздъ) указываетъ, однако, что это тѣло имѣетъ болѣе высокую температуру и ярче, чѣмъ Альдебаранъ. Принимая въ разсчетъ его большее разстояніе, мы можемъ, пожалуй, заключить, что по объему оно сравнимо съ Альдебараномъ и потому является солнцемъ крупныхъ размѣровъ. Звѣзда β Креста, звѣздная величина которой равна 1.50, но не имѣющая измѣримаго параллакса, также должна быть солнцемъ—великаномъ. Спектръ у нея тотъ же, что и у α Креста.

Арктуръ и Поллуксъ даютъ одинаковый спектръ (К по Пикерингу). Фотометрическая величина Арктура равна 0.24, Поллукса 1.20. Параллаксъ Арктура по измѣреніямъ Йэльской обсерваторіи составляетъ 0.026″, Поллукса 0.056″. Изъ этихъ данныхъ вытекаетъ, что Арктуръ въ $11\frac{1}{2}$ разъ ярче Поллукса. Помѣщенное на разстояніи Арктура наше солнце сіяло бы звѣздою приблизительно восьмой величины или на 7.7 величинъ слабѣе, чѣмъ представляется намъ Арктуръ. Отсюда слѣдуетъ, что Арктуръ приблизительно въ 1200 разъ ярче солнца. Онъ долженъ быть поэтому солнцемъ громадныхъ размѣровъ—вѣроятно, однимъ изъ огромнѣйшихъ тѣлъ вселенной. Указанное выше вычисленіе для Поллукса даетъ яркость въ 100 разъ больше солнечной.

Яркія звѣзды Канопусъ и Проціонъ даютъ очень сходные спектры, но параллаксъ Канопуса не превосходитъ 0.01″, тогда какъ у Проціона онъ около 0.32″. Къ тому же Канопусъ ярче, такъ какъ его фотометрическая величина равна —0.86, Проціона же +0.48,—разница въ пользу Канопуса въ 1.34 величины. Изъ этихъ данныхъ мы находимъ, что Канопусъ въ 3500 разъ ярче Проціона, а, значитъ, объемъ его въ 207000 разъ больше объема Проціона! Если ихъ плотности одинаковы, то таково же будетъ и отношеніе массъ, а такъ какъ масса Проціона, вычисленная по движенію его спутника, приблизительно въ пять разъ больше солнечной, то масса Канопуса должна превышать милліонъ солнечныхъ массъ! Вѣроятно, онъ является огромнѣйшимъ солнцемъ, о которомъ намъ извѣстно что-нибудь. Наблюденія Гилля показываютъ, что параллаксъ Канопуса *не превосходитъ* сотой доли секунды, какъ указано выше. Если его параллаксъ меньше, то, конечно, объемъ будетъ еще больше.

Наблюденія „спектроскопически-двойныхъ“ звѣздъ даютъ намъ возможность опредѣлить ихъ массы, хотя ихъ разстоянія могутъ остаться неизвѣстными. Такъ какъ дѣйствительная скорость ихъ движенія по орбитѣ при помощи спектроскопа измѣряется въ километрахъ въ секунду, то разстояніе отъ земли не нужно для опредѣленія массы. Однимъ изъ самыхъ замѣчательныхъ между этими интересными объектами является перемѣнная звѣзда южнаго неба извѣстная подъ именемъ ν Кормы. Она принадлежитъ къ типу Альголя и въ то же время является и спектроскопически-двойной. Плоскость орбиты необходимо должна, значитъ, проходить черезъ землю (или почти такъ) и массу этой системы легко вычислить. Спектроскопическія наблюденія даютъ чудовищную относительную скорость въ 690 км. въ секунду! Это даетъ массу, равную приблизительно 70 массамъ солнца. Измѣненія свѣта этой звѣзды по Робертсу (A. W. Roberts) указываетъ, что составляющія этой системы обращаются другъ около друга въ непосредственномъ соприкосновеніи и что ихъ средняя плотность не можетъ быть больше $^1/_{50}$ плотности солнца или 0.028 плотности воды. При такой малой плотности и огромной массѣ составляющія этой системы должны, очевидно, быть громаднѣйшими массами газа, — вѣроятно, въ нѣсколько милліоновъ километровъ поперечникомъ. Періодъ обращенія около 34 час. 54 мин., —поразительно короткій періодъ для пары солнцъ!

(Продолженіе слѣдуетъ).

Задачи на maxima и minima, какъ практическій матеріалъ къ теоріи неравенствъ.

А. Вольфенсонъ въ Варшавѣ.

Важное ученіе о неравенствахъ исчерпывается въ общепринятыхъ руководствахъ и задачникахъ Алгебры съ недостаточною полнотой. Приходится наблюдать, что учащіеся относятся съ чисто формальнымъ интересомъ къ доказательству того или другого предложеннаго имъ неравенства, такъ какъ въ доказательствѣ они по существу не заинтересованы. Ниже приведено нѣсколько примѣрныхъ геометрическихъ задачъ на наибольшія и наименьшія величины, рѣшеніе которыхъ приводитъ къ необходимости доказательства нѣкоторыхъ важнѣйшихъ неравенствъ или служитъ для выясненія метода.

I. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра квадратъ имѣетъ наибольшую площадь.*

$$x+y=a;\quad \text{при } x=y,\quad x=y=\frac{a}{2}.$$

Доказать, что

$$\frac{a^2}{4}>\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right).$$

II. *Изъ всѣхъ равновеликихъ прямоугольниковъ квадратъ имѣетъ наименьшій периметръ.*

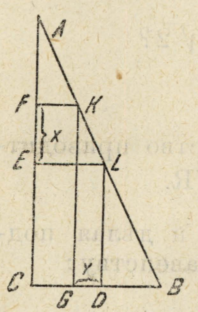
$$xy=a;\quad \text{при } x=y,\quad x=y=\sqrt{a}.$$

Доказать, что

$$z\sqrt{a}+\frac{\sqrt{a}}{z}>2\sqrt{a},\ \text{т. е.}$$

$z+\frac{1}{z}>2$ при всякомъ положительномъ значеніи z, кромѣ $z=1$.

III. *Доказать, что прямоугольникъ, образуемый перпендикулярами изъ средины гипотенузы на катеты, имѣетъ наибольшую площадь?*



$$EC=\frac{b}{2};\ CD=\frac{a}{2}\qquad CF=\frac{b}{2}+x;\ CG=\frac{a}{2}-y.$$

Доказать:

$$\text{(I)}\ \frac{ab}{4}>\left(\frac{b}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)?$$

Изъ подобія $\triangle$-овъ KBG и ABC:

$$\frac{KG}{GB}=\frac{AC}{BC},\ \text{т. е.}\ \frac{\frac{b}{2}+x}{\frac{a}{2}+y}=\frac{b}{a}$$

отсюда:

$$\frac{b}{2}+x=\frac{\left(\frac{a}{2}+y\right)b}{a};$$

подставляя въ (I), получимъ:

$$\frac{ab}{4} > \frac{\left(\frac{a}{2}+y\right) b \left(\frac{a}{2}-y\right)}{a},$$

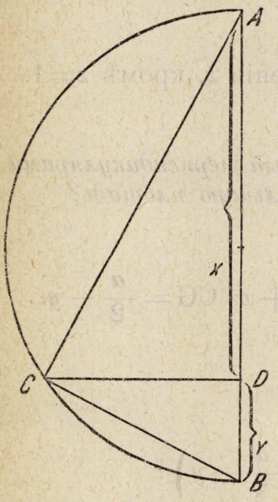
т. е.

$$\frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4} - y^2.$$

Такъ же докажемъ:

$$\frac{ab}{4} > \left(\frac{b}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}+y\right).$$

IV. *Доказать, что изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ полуокружность радіуса R, наибольшій периметръ имѣетъ равнобедренный $\triangle$-къ?*



Опустивъ изъ вершины прямого угла перпендикуляръ CD на гипотенузу, выразимъ катеты черезъ отрѣзки гипотенузы $AB = x$ и $BD = y$:

$$AC = \sqrt{2Rx};\quad BC = \sqrt{2Ry}.$$

Доказать:

$$\sqrt{2Rx} + \sqrt{2Ry} < 2R\sqrt{2}\,?$$

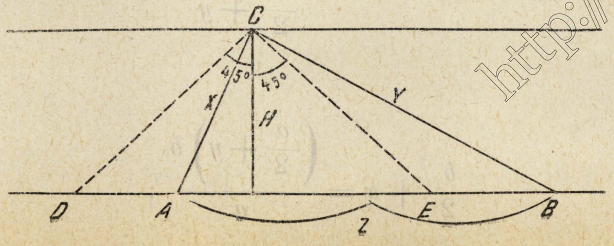
гдѣ $$x + y = 2R.$$

По сокращеніи, неравенство приводится къ виду: $\sqrt{x} + \sqrt{y} < 2\sqrt{R}$.

Возвышая въ квадратъ и дѣлая подстановку, приходимъ къ неравенству:

$\sqrt{xy} < \dfrac{x+y}{2}$, вѣрному для всѣхъ положительныхъ значеній $x \neq y$.

V. *Доказать, что изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ данной высоты, опущенной на гипотенузу, наименьшій периметръ имѣетъ равнобедренный $\triangle$-къ?*



Доказать, что DE $= 2h$

$$x + y + z > 2h(\sqrt{2} + 1)?$$ DC $=$ EC $= h\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \text{гдѣ } xy &= zh \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

$$x + y > 2h(\sqrt{2} + 1) - z$$

$$x^2 + y^2 + 2xy > 4h^2(3 + 2\sqrt{2}) - 4hz(\sqrt{2} + 1) + z^2$$

$$z^2 + 2zh > 4h^2(3 + 2\sqrt{2}) - 4hz(\sqrt{2} + 1) + z^2$$

$$z > 2h(3 + 2\sqrt{2}) - 2z(\sqrt{2} + 1)$$

$$z(3 + 2\sqrt{2}) > 2h(3 + 2\sqrt{2})$$

$z > 2h$, т. е. діаметръ круга $>$ хорды.

ДВА АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ КУРЬЕЗА.

Н. Кузьминскій.

Примемъ за основаніе системы счисленія какое-нибудь число n и условимся обозначать число $k_1n^l + k_2n^{l-1} + k_3n^{l-2} + \ldots + k_rn^{l-r+1}$, гдѣ каждое изъ чиселъ k_1, $k_2, \ldots$ меньше n, черезъ $(k_1k_2k_3\ldots k_r)_{n^l}$. Такимъ образомъ, значекъ указываетъ наивысшую степень основанія въ этомъ числѣ.

Возьмемъ количество $(123\ldots m\overline{m+1})^{*)}_{n^m} \cdot (n-1) + (m+2)$ и пре-

*) Черта сверху замѣняетъ скобки; напримѣръ, $\overline{a+b} \cdot \overline{c+d}$ означаетъ $(a+b)(c+d)$.

образуемъ его. Имѣемъ:

$$(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}\cdot(n-1)+(m+2)=(n^m+2n^{m-1}+3n^{m-2}+\ldots.+$$

$$+mn+\overline{m+1})(n-1)+(m+2)=$$

$$=n^{m+1}+2n^m+3n^{m-1}+4n^{m-2}+\ldots.+mn^2+(m+1)n-n^m-$$

$$-2n^{m-1}-3n^{m-2}-\ldots.$$

$$-mn-(m+1)+(m+2)=n^{m+1}+n^m+n^{m-1}+\ldots.+n+1=$$

$$=(111\ldots.1)_{n^{m+1}}.$$

Итакъ,

$$(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}\cdot(n-1)+(m+2)=(111\ldots.1)_{n^{m+1}}\;\ldots\ldots\;(1).$$

Очевидно, что надо брать $m\geqslant 0$ и, кромѣ того, $m+1\leqslant n-1$, слѣдовательно, $m\leqslant n-2$.

Переходя къ десятичной системѣ счисленія, т. е. взявъ $n=10$, и полагая m послѣдовательно равнымъ 0; 1; 2; ....; 8, получимъ извѣстный результатъ.

$1.9+2=11$ . . . . ($m=0$).

$12.9+3=111$ . . . . ($m=1$).

$123.9+4=1111$ . . . . ($m=2$).

$1234.9+5=11111$ . . . . ($m=3$).

$12345.9+6=111111$ . . . . ($m=4$).

$123456.9+7=1111111$ . . . . ($m=5$).

$1234567.9+8=11111111$ . . . . ($m=6$).

$12345678.9+9=111111111$ . . . . . . ($m=7$).

$123456789.9+10=1111111111$ . . . . ($m=8$).

Теперь разсмотримъ количество

$(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}\cdot(n-2)+(m+1)$. Имѣемъ:

$$(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}\cdot(n-2)+(m+1)=(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}\cdot(n-1)+(m+2)-$$

$$-(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}-1=(111\ldots.1)_{n^{m+1}}-(123\ldots.m\overline{m+1})_{n^m}-1=n^{m+1}+n^m+$$

$$+n^{m-1}+n^{m-2}+\ldots.+n^2+n+1-n^m-2n^{m-1}-3n^{m-2}-\ldots.-mn-m-1-1=$$

$$=(n-1)n^m+(n-2)n^{m-1}+(n-3)n^{m-2}+\ldots.+(n-m)\,n+(n-m-1)=$$

$$=(\overline{n-1}\;\overline{n-2}\;\overline{n-3}\ldots.\overline{n-m}\;\overline{n-m-1})_{n^m}.$$

Въ этомъ случаѣ мы подчеркивали одинаково тѣ члены, которые также соединяли въ одинъ.

Итакъ,

$$(123\ldots.m\overline{m+1})_{nm}\cdot(n-2)+(m+1)=(\overline{n-1}\,\overline{n-2}\ldots.\overline{n-m}\,\overline{n-m-1})_{nm}\;\ldots\quad(2).$$

Полагая, какъ и въ первомъ случаѣ, $n=10$ и m послѣдовательно равнымъ 0; 1; 2;....; 8, получимъ также извѣстный уже результатъ:

$1.8+1=9$ . . . . , . ($m=0$).
$12.8+2=98$ . . . . ($m=1$).
$123.8+3=987$ . . . . ($m=2$).
$1234.8+4=9876$ . . . . ($m=3$).
$12345.8+5=98765$ . . . . ($m=4$).
$123456.8+6=987654$ . . . . ($m=5$).
$1234567.8+7=9876543$ . . . . (ш$=6$).
$12345678.8+8=98765432$ . . . . . . ($m=7$).
$123456789.8+9=987654321$ . . . . . ($m=8$).

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Изъ „Zeitschrift für den Physicalischen und Chemischen Unterricht“. 1903.

Ф. Рёло (F. Reuleaux). *Простой и сложный блокъ* (стр. 1).

Въ первомъ нумерѣ журнала „Zeitschrift für den Physicalishcen und Chemischen Unterricht“, за 1903 г. въ статьѣ „Простой и сложный блокъ“ основатель современной кинематики машинъ, F. Reuleaux изрекаетъ свое „quos ego!“ авторамъ обычнаго изложенія механической части элементарной физики. Классическія „простыя машины“ онъ называетъ „прадѣдушкинымъ скарбомъ“, который даромъ не нуженъ въ наше время и ведетъ лишь къ затемненію понятій. „Закона рычага“ по Рёло не существуетъ вовсе, рѣчь можетъ идти развѣ только о „теоремѣ рычага“. Но и это вовсе не нужно: условія равновѣсія рычага представляютъ просто случай равновѣсія двухъ силъ, приложенныхъ къ твердому, неизмѣняемому тѣлу, рѣшаемый по правилу параллелограмма силъ. Понятіе о статическомъ моментѣ вводится лишь какъ удобная форма для выраженія результата.

Блокъ представляетъ средство измѣнять направленіе движенія при посредствѣ гибкой, нерастяжимой нити, самостоятельнаго кинематическаго óргана, совершенно отличнаго отъ рычага; колесо блока нужно лишь для уменьшенія тренія и въ кинематическомъ отношеніи оно вполнѣ замѣнимо дуговымъ каналомъ, чрезъ который проходитъ нить. Поэтому всѣ ухищренія, придумываемыя для того, чтобы свести условія равновѣсія блока (безъ тренія) къ условіямъ равновѣсія рычага, ведутъ только къ запутыванію понятій.

Со своей стороны, Рёло считаетъ наиболѣе цѣлесообразнымъ и въ элементарномъ изложеніи придерживаться понятій о „кинемапарахъ" и „кинематическихъ цѣпяхъ" съ принудительнымъ движеніемъ; эти понятія онъ ввелъ еще въ 1875 г. въ своей „Теоретической кинематикѣ".

Е. Гримзель (E. Grimsehl). *Объ электроскопѣ и опытахъ съ нимъ* (стр. 5—18).

Авторъ немного измѣнилъ устройство электроскопа съ аллюминіевымъ листочкомъ петербургскаго преподавателя г. Колбе, и описываетъ рядъ лекціонныхъ опытовъ съ этимъ приборомъ. У Колбе заряженный листочекъ отталкивается отъ неподвижнаго вертикальнаго стержня; Гримзель располагаетъ по другую сторону листочка латунную переставную полоску, соединяемую съ землею. Этимъ увеличивается чувствительность и, по словамъ автора, отклоненія становятся почти точно пропорціональными разностямъ потенціаловъ. Изъ числа описанныхъ въ статьѣ опытовъ, удобно производимыхъ съ такимъ электрометромъ, можно отмѣтить наблюденіе Омовскаго паденія потенціала въ проводникѣ: источникомъ электричества авторъ беретъ 100 вольтовый токъ станціи для электрическаго освѣщенія, а проводникомъ большого сопротивленія ему служитъ черта, проведенная графитовымъ карандашомъ на полосѣ матоваго стекла, снабженной сбоку дѣленіями.

Г. Кеферштейнъ (H. Keferstein). *Моментъ инерціи относительно оси параллельной, проходящей чрезъ центръ тяжести* (стр. 77—79).

Эта теорема и, вообще, ученіе о моментахъ инерціи необходимо вводить въ элементарное изложеніе механическаго отдѣла физики, если желаютъ, чтобы оно оставляло въ сознаніи учениковъ ясное представленіе о законахъ движенія тѣлъ. Авторъ замѣчаетъ, что физическое значеніе этой теоремы сводится къ сложенію вращеній около параллельныхъ осей: чтобы повернуть тѣло около данной оси на заданный уголъ, достаточно повернуть его центръ тяжести на этотъ уголъ, не измѣняя его разстоянія отъ оси вращенія и не вращая всего тѣла, а затѣмъ повернуть это тѣло на тотъ же уголъ относительно оси, параллельной первой и проходящей чрезъ центръ тяжести; сообразно этому слагаются и моменты инерціи при такихъ вращеніяхъ. Эту очень интересную и простую основную мысль онъ „уясняетъ" довольно запутаннымъ опытомъ, построеніемъ и вычисленіемъ.

Е. Гримзель (E. Grimsehl). *Опредѣленіе теплового эквивалента электрической энергіи при помощи лампочки накаливанія.*

Авторъ просто помѣщаетъ лампочку накаливанія въ водяной калориметръ, но при употребленіи обыкновенной лампочки ему не удавалось устранить короткое замыканіе проволокъ водою, и пришлось устроить особую лампочку съ длиннымъ горломъ. Вмѣсто 0,24 калорій на каждую Уаттъ — секунду получалось лишь 0,21, когда вода въ калориметрѣ была чистая и пропускала свѣтовую энергію; когда же вода была подкрашена непрозиномъ, получилось 0,239 калорій.—Вѣроятно, тотъ же результатъ можно получить съ обыкновенной лампочкой накаливанія, взявъ вмѣсто воды непроводящую жидкость извѣстной теплоемкости.

Е. Гримзель. Статьи и опыты по элементарной механикѣ: системы блоковъ (стр. 65), *паденіе тѣлъ* (стр. 90), *понятіе о силѣ, массѣ и энергіи* (стр. 135), *приборы для показанія напряженій въ твердыхъ тѣлахъ и экспериментальнаго вывода теоремы моментовъ* (стр. 260).

Статьи эти (и еще нѣкоторыя, менѣе подробныя) имѣютъ весьма важную цѣль: уяснить ученикамъ посредствомъ опытовъ основныя понятія механики. Къ сожалѣнію, почти всѣ эти опыты не достигаютъ цѣли, такъ какъ они представляютъ лишь „experimenta crucis", т. е. „перекрёстные опыты", часто весьма остроумные, но связанные съ повторяемыми положеніями слишкомъ сложной для ученическаго ума цѣпью разсужденій. Это тотъ же случай, что съ атвудовой машиной: ученики „атвудовой машины не понимаютъ", а законы паденія тѣлъ для нихъ за этой машиной и не видны. Для ума начинающаго ученика доказательство должно быть прямое и несложное, не „многоэтажное": иначе у него не хватитъ вниманія прослѣдить и усвоить его до конца, хотя каждое послѣдовательное умозаключеніе для него вновь доступно. Помножить число на 3 сумѣетъ всякій порядочный ученикъ, но предложите помножить на отношеніе объема шара радіуса, равнаго тремъ, къ окружности круга радіуса, въ два раза большаго, чѣмъ этотъ шаръ, и такой задачей затруднятся очень многіе. Вообще, учителю чрезвычайно трудно стать на точку зрѣнія своихъ учениковъ, узнать, что они считаютъ понятнымъ и доказательнымъ; въ большинствѣ случаевъ онъ судитъ по себѣ и не удовлетворяетъ учениковъ, находящихся еще на другой степени развитія.

Такъ, Гримзель предлагаетъ для „вывода численной связи между силою, массою и движеніемъ" слѣдующій опытъ: надъ столомъ прикрѣплена горизонтальная трубочка съ порохомъ, закрытая справа и слѣва снарядами разнаго вѣса. Когда порохъ зажженъ чрезъ заправку на срединѣ трубки, оба снаряда вылетаютъ, и падаютъ на столъ на разстояніяхъ, обратно пропорціональныхъ своимъ массамъ. Удачнѣе его опыты надъ паденіемъ тѣлъ: онъ ведетъ учениковъ на лѣстницу школы и повторяетъ съ ними нѣкоторые изъ опытовъ Галилея на Пизанской башнѣ. Въ первой и послѣдней статьѣ онъ выражаетъ на словахъ покорность указаніямъ Рёло, но продолжаетъ въ прежнемъ духѣ.

В. Лермантовъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Телеграфонъ Паульсена. Однимъ изъ лучшихъ рѣшеній проблемы запечатлѣвать человѣческую рѣчь и впослѣдствіи воспроизводить ее безъ шума—является телеграфонъ Паульсена. *) Этотъ приборъ состоитъ, какъ извѣстно, изъ тонкой стальной проволоки, навернутой на барабанъ; при вращеніи послѣдняго проволока проходитъ между полюсами электромагнита, къ которому присоединенъ микрофонъ. Вслѣдствіе колебаній силы тока въ микрофонной цѣпи, происходитъ измѣненіе магнитнаго поля, создаваемаго электромагнитомъ, и на проволокѣ, проходящей между полюсами этого электромагнита, запечатлѣваются всѣ эти измѣненія. Если теперь эту проволоку вращать между полюсами электромагнита, къ которому присоединенъ телефонъ, то измѣненія магнитнаго поля, происходящія при этомъ, вызовутъ колебанія силы тока въ телефонной цѣпи и вибрированіе мембраны телефона.

Недавно на съѣздѣ техниковъ въ Копенгагенѣ изобрѣтатель представилъ нѣсколько новыхъ типовъ своего телеграфона, въ которыхъ онъ старается повысить коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Вообще говоря, сила тока, получающаяся въ телефонной цѣпи, значительно слабѣе той, которая потребна для запечатлѣнія на проволокѣ измѣненій магнитнаго поля. Здѣсь, слѣдовательно, происходитъ потеря энергіи. Эта потеря происходитъ при записываніи рѣчи, вслѣдствіе размагничиванія проволоки, а при воспроизведеніи рѣчи, вслѣдствіе неполной утилизаціи магнитнаго потока.

Чѣмъ скорѣй проходитъ стальная проволока между полюсами электромагнита, тѣмъ больше будетъ амплитуда записываемыхъ звуковыхъ волнъ, и тѣмъ меньше, слѣдовательно, будетъ размагничиваніе. При электромагнитѣ съ однимъ полюсомъ отдача прибора возрастаетъ со скоростью прохожденія проволоки. Нѣсколько менѣе выгодно употребленіе двухполюсныхъ электромагнитовъ въ томъ случаѣ, когда проволока проходитъ перпендикулярно силовымъ линіямъ электромагнита.

При воспроизведеніи рѣчи, какъ было уже сказано, также получаются потери отъ неполнаго использованія магнитнаго потока. Чтобы получить какъ можно больше дѣйствія, Паульсенъ располагаетъ конецъ сердечника электромагнита почти внутри обмотки. Сердечникъ этотъ состоитъ изъ тонкой желѣзной проволоки въ 1 мм. діаметромъ и въ 11 мм. длиной. Для того, чтобы получить возможно лучшее записываніе рѣчи, стальная проволока должна обладать сколько-нибудь значительнымъ остаточнымъ магнитизмомъ. Для этого поляризуютъ электромагнитъ

*) См. „Вѣстникъ“ № 290 стр. 41.

во время самого записыванія такимъ образомъ, чтобы уничтожить вліяніе остаточнаго магнетизма отъ прежнихъ намагничиваній. При этомъ получается такая чувствительность, что при помощи телеграфона можно воспроизвести даже дыханіе. Эта поляризація электромагнита можетъ быть произведена при помощи одного гальваническаго элемента, включеннаго въ цѣпь записывающаго прибора.

Такъ какъ запись въ телеграфонѣ состоитъ только въ измѣненіи намагничиванія, то ясно, что она незамѣтна для глаза; тѣ же ничтожныя механическія измѣненія, которыя при этомъ происходятъ, можно свободно оставить безъ вниманія.

При воспроизведеніи рѣчи не слышно никакого посторонняго шума, звуки получаются какъ въ обыкновенномъ телефонѣ. Записанная рѣчь можетъ быть воспроизведена 10000 разъ безъ малѣйшаго измѣненія или ослабленія. Съ другой стороны—и это является главнымъ удобствомъ телеграфона — записанная рѣчь можетъ быть быстро уничтожена сравнительно сильнымъ, но постояннымъ намагничиваніемъ стальной проволоки. Очевидно, что при магнитномъ насыщеніи проволоки уничтожается разница въ намагничиваніи, и легко можно достичь того, чтобы не происходило никакихъ колебаній телефонной мембраны при пропусканіи проволоки между полюсами электромагнита.

Если на одной и той же проволокѣ записано нѣсколько разговоровъ безъ предварительнаго уничтоженія предыдущихъ, то ихъ возможно слушать одновременно, но при этомъ происходитъ постоянно звуковая интерференція. Но, какъ сообщаетъ Педерсенъ, сотрудникъ Паульсена, возможно на одной и той же проволокѣ записать два различныхъ разговора, которые можно воспроизвести отдѣльно. Въ самомъ дѣлѣ, если рѣчь записана такимъ образомъ, что проволока проходитъ между разноименными полюсами электромагнита, то эту рѣчь невозможно воспроизвести, если пропускать проволоку между полюсами того же электромагнита, когда соединенія въ немъ измѣнены такимъ образомъ, что вмѣсто двухъ разноименныхъ полюсовъ получаются два одноименныхъ. Теперь понятно, какимъ образомъ можно записать и воспроизвести два разговора независимо другъ отъ друга.

Особое примѣненіе телеграфона носитъ названіе „Телефонной Газеты“. Она представляетъ изъ себя приборъ, передающій одинъ и тотъ же разговоръ или музыку нѣсколькимъ слушателямъ, и состоитъ изъ безконечной стальной ленты, навернутой на двухъ барабанахъ. При вращеніи барабановъ лента проходитъ передъ записывающимъ электромагнитомъ, затѣмъ передъ цѣлымъ рядомъ воспроизводящихъ электромагнитовъ, соединенныхъ каждый съ отдѣльной телефонной цѣпью. Запись послѣ этого уничтожается при помощи электромагнита.

Объ іонизаціи пламени. Присутствіе соляныхъ паровъ въ пламени бунзеновской горѣлки увеличиваетъ, какъ извѣстно, его электропроводимость. Явленіе это, представляющее особый интересъ въ виду того, что оно принадлежитъ къ группѣ явленій, въ которыхъ свѣтовыя и электрическія дѣйствія находятся въ близкой между собой связи, уже послужило предметомъ довольно многочисленныхъ изслѣдованій. По мнѣнію однихъ авторовъ (Вильсонъ Томсонъ и др.), повышеніе электропроводимости пламени имѣетъ мѣсто исключительно у поверхности введенныхъ въ пламя электродовъ, гдѣ совершается іонизація частицъ соли, быстро чередующаяся съ обратнымъ возсоединеніемъ іоновъ. Наоборотъ, Арреніусъ, Ленаръ и др. полагаютъ, что іонизація распространяется на всю массу пламени. Этотъ спорный вопросъ можетъ считаться рѣшеннымъ новѣйшей работой Тѣфтса (F. Tufts, „Physikalische Zeitschrift" 1904, № 3). Его опыты вполнѣ подтвердили мнѣніе Арреніуса, т. е. что іонизація распространяется на всю массу пламени, при чемъ степень іонизаціи оказывается даже гораздо сильнѣй, чѣмъ то предполагалъ Арреніусъ; насыщеніе пламени растворомъ хлористаго калія (74,5 гр. въ 300 куб. см.) увеличиваетъ его электропроводимость въ 20 разъ, растворомъ поваренной соли въ 7 разъ и т. д. Кромѣ того, электропроводимость въ пламени въ широкихъ предѣлахъ подчиняется закону Ома.

Электролизъ газовъ. Вопросъ о томъ, подвергаются ли газы при прохожденіи чрезъ нихъ постояннаго электрическаго тока настоящему электролизу, т. е. распадаются ли ихъ частицы на разноименные іоны, разряжающіеся у того и другого электрода, считается еще спорнымъ. Перро первый получилъ электролизъ при пропусканіи постояннаго тока чрезъ водяной паръ, т. е. выдѣленіе водорода у отрицательнаго полюса, кислорода у положительнаго. Томсонъ доказалъ спектроскопически накопленіе хлора у положительнаго полюса при пропусканіи тока чрезъ хлористоводородный газъ. Однако, противъ этихъ опытовъ были сдѣланы различныя возраженія, напримѣръ, то, что усиленіе электролиза у поверхности анода можетъ быть вызвано не его дѣйствительнымъ накопленіемъ, а повышеніемъ температуры и т. д. Въ виду этого, Ch. Tegnu вновь занялся изслѣдованіемъ прохожденія постояннаго тока чрезъ газы. Выводъ, къ которому онъ приходитъ, заключается въ томъ, что для нѣкоторыхъ газовъ электролизъ слѣдуетъ признать, если и не вполнѣ доказаннымъ, то очень вѣроятнымъ, для другихъ вопросъ остается нерѣшеннымъ.

(„Электричество").

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

О суммѣ квадратовъ и кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ.

В. Ковалевскаго.

Въ октябрьской и ноябрьской книжкѣ прошлаго года „Bulletin de Sciences Mathématiques" помѣщены выводы суммы квадратовъ и кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ, не прибѣгая соотвѣтственно къ третьимъ и четвертымъ степенямъ двучленовъ.

1) Написавъ ариѳметическую прогрессію

$$1+3+5+\ldots+(2p-1),$$

имѣемъ сумму ея

$$S=\frac{2p-1+1}{2}\cdot p=p^2.$$

Отсюда, черезъ подстановку въ формулу вмѣсто p — n, $(n-1)$, ... 3, 2, 1, имѣемъ:

$$n^2=1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)$$

$$(n-1)^2=1+3+5+\ldots+(2n-3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^2=1+3$$

$$1^2=1.$$

Складывая n полученныхъ тождествъ, имѣемъ

$$S_2=1.n+3(n-1)+5(n-2)+\ldots+(2n-3).2+(2n-1).1\ldots(1),$$

гдѣ

$$S_2=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+2^2+1^2$$

$$2S_2=2.n^2+2.(n-1)^2+\ldots+2.2^2+2.1^2\ldots\ldots\ldots(2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаемъ

$$3S_2=n(2n+1)+(n-1)(2n+1)+\ldots+2(2n+1)+1.(2n+1)=$$

$$=(2n+1)[1+2+\ldots+n]=(2n+1)\frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

2) Имѣемъ

$$n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1).n}{2}$$

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1).n}{2}.$$

Перемножая эти два тождества, имѣемъ:

$$n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1).n}{2}\right]^2,$$

откуда, замѣной n черезъ $(n-1)$, $(n-2)$, ... 3, 2, 1, имѣемъ

$$(n-1)^3 = \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2.$$

. . . .

$$3^3 = \left[\frac{3.4}{2}\right]^2 - \left[\frac{2.3}{2}\right]^2$$

$$2^3 = \left[\frac{2.3}{2}\right]^2 - \left[\frac{1.2}{2}\right]^2$$

$$1^3 = \left[\frac{1.2}{2}\right]^3 - \left[\frac{0.1}{2}\right]^2.$$

Складывая n полученныхъ тождествъ, имѣемъ:

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 466 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^3+a^3}{(x+a)^3} + \frac{x^3+b^3}{(x+b)^3} + \frac{x^3+c^3}{(x+c)^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{x-b}{x+a} \cdot \frac{x-c}{x+c} = \frac{3}{2}.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 467 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$ax(dx+ey+fz) = p,$$

$$by(dx+ey+fz) = q,$$

$$cz(dx+ey+fz) = r.$$

А. Колегаевъ (Короча).

№ 468 (4 сер.). Доказать, что при всякомъ нечетномъ значеніи x число

$$x^3 + 3x^2 - x - 3$$

дѣлится на 48.

(Заимств.).

№ 469 (4сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$5x^3 + 14x^2y + 5x^2 - 26xy + 2xy^2 + 5y^2 - y^3 = 0.$$

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 470 (4 сер.). Черезъ точки A и B, лежащія въ плоскости круга O, проведена окружность O', встрѣчающая окружность круга O. Общая хорда (или касательная, проходящая черезъ точку касанія окружностей) круговъ O и O' продолжена до встрѣчи съ прямой AB въ точкѣ K. Вычислить отрѣзокъ AK, если даны: радіусъ R круга O, отрѣзокъ $OA=d$ и проекція p линіи центровъ OO' на прямую AB. Изслѣдовать задачу. Вывести, какъ слѣдствіе, извѣстную теорему: общая хорда даннаго круга O и перемѣннаго круга O', проходящаго черезъ двѣ постоянныя точки A и B, проходитъ черезъ постоянную точку. Чѣмъ замѣнить общую хорду окружностей O и O', съ сохраненіемъ всѣхъ полученныхъ результатовъ, если окружности O и O' не пересѣкаются?

Н. С. (Одесса).

№ 471 (4 сер.). Нагнетательный воздушный насосъ употребленъ для накачиванія 23 граммовъ сухого нормальнаго воздуха въ пріемникъ, въ которомъ было 5,6 литра сухого воздуха при 0^0 и при давленіи 830 миллиметровъ.

Зная, что насосъ не имѣетъ вредныхъ пространствъ и что объемъ цилиндра этого насоса равенъ 560 кубическимъ сантиметрамъ, опредѣлить: 1) число качаній поршня, 2) окончательное давленіе въ резервуарѣ. Удѣльный вѣсъ нормальнаго воздуха равенъ 0,0013.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 384 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{(5-x)^5+(x-2)^5}{(5-x)^2+(x-2)^5} = 3(5-x)(x-2).$$

Полагая $u=5-x$, $v=x-2$ (1), приводимъ данное уравненіе къ виду

$$\frac{u^5+v^5}{u^2+v^2} = 3uv,$$

или (слѣдуетъ замѣтить, что $u^2+v^2 \neq 0$)

$$u^5+v^5=3uv(u^2+v^2), \text{ или } (u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=3uv(u^2+v^2) \quad (2).$$

Но изъ равенствъ (1) слѣдуетъ:

$$u+v=3 \quad (3), \quad u^2+v^2+2uv=9, \quad u^2+v^2=9-2uv \quad (4).$$

Подставивъ въ равенство (2) вмѣсто $u+v$ изъ равенства (3) 3 и дѣля обѣ части на 3, находимъ послѣдовательно:

$$u^4+u^2v^2+v^4-uv(u^2+v^2)=uv(u^2+v^2), \quad u^4+2u^2v^2+v^4-u^2v^2-2uv(u^2+v^2)=0,$$

$$(u^2+v^2)^2-u^2v^2-2uv(u^2+v^2)=0, \text{ или (см. (4)) } (9-2uv)^2-u^2v^2-2uv(9-2uv)=0 \quad (5).$$

Послѣ раскрытія скобокъ и приведенія равенство (5) пріиметъ видъ:

$$7\,(uv)^2 - 54uv + 81 = 0,$$

откуда $uv = \frac{27 \pm 9\sqrt{2}}{7}$ (6). Изъ равенствъ (3) и (6) вытекаетъ, что u и v суть корни одного изъ двухъ квадратныхъ уравненій

$$t^2 - 3t + \frac{27 + 9\sqrt{2}}{7} = 0, \quad t^2 - 3t + \frac{27 - 9\sqrt{2}}{7} = 0 \quad (7).$$

Пусть t_1, t_2, t_3, t_4 суть корни уравненій (7); согласно съ равенствами (1), находимъ для x четыре рѣшенія: $x_1 = t_1 + 2$, $x_2 = t_2 + 2$, $x_3 = t_3 + 2$, $x_4 = t_4 + 2$.

А. Колегаевъ (Короча); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *Х. Рѣзницкій* (Казань); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *П. Готлибъ* (Митава); *Я. Дубновъ* (Вильна); *Н. Сагателовъ* (Шуша).

№ 385 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} = 8.$$

Возвышая въ кубъ обѣ части предложеннаго уравненія, находимъ:

$$76 + \sqrt{x} + 76 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{(76 + \sqrt{x})^2 (76 - \sqrt{x})} + \sqrt[3]{(76 + \sqrt{x})(76 - \sqrt{x})^2} = 512,$$

$$\text{или } 152 + 3\sqrt[3]{(76 + \sqrt{x})(76 - \sqrt{x})}\left(\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}}\right) = 512,$$

$$3\sqrt[3]{76^2 - x}\left(\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}}\right) = 360 \quad (1).$$

Подставляя въ равенство (1), согласно съ даннымъ уравненіемъ, 8 вмѣсто $\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}}$, получимъ:

$$24\sqrt[3]{76^2 - x} = 360, \quad \sqrt[3]{76^2 - x} = 15, \; 76^2 - x = 15^3, \; x = 76^2 - 15^3 = 5776 - 3375 = 2401.$$

Подставивъ вмѣсто x его значеніе, убѣждаемся, что оно удовлетворяетъ предложенному уравненію.

В. Винокуровъ (Калязинъ); *А. Колегаевъ* (Короча); *Степановъ* (Александровскъ); *А. Яковкинъ* (Екатеринбургъ); *Я. Слуцкій* (Кременчугъ); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *Х. Рѣзницкій* (Казань); *В. Ковальскій* (Спб.); *М. Подрядовъ* (Троицкъ); *Я. Тамаркинъ* (Спб.); *С. Андреевъ*; *И. Коровинъ* (Екатеринбургъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Х. Мнацакановъ* (Тифлисъ).

№ 386 (4 сер.). *Показать, что*

$$a^3 + b^3 \geqslant \frac{(a+b)^3}{4},$$

если

$$a + b \geqslant 0,$$

гдѣ a *и* b—*вещественныя числа.*

При вещественныхъ a и b имѣемъ: $3(a-b)^2 \geqslant 0$, или $3a^2 - 6ab + b^2 \geqslant 0$ (1). Прибавляя къ обѣимъ частямъ неравенства (1) по $(a+b)^2$ и дѣлая въ лѣвой части раскрытіе скобокъ и приведеніе, находимъ:

$$4a^2 - 4ab + 4b^2 \geqslant (a+b)^2, \quad a^2 - ab + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \quad (2),$$

Помножая обѣ части неравенства (2) на $a+b$, что можно сдѣлать, такъ какъ $a+b \geqslant 0$, получимъ:

$$(a^2 - ab + b^2)(a+b) \geqslant \frac{(a+b)^3}{4}, \text{ или } a^3 + b^3 \geqslant \frac{(a+b)^3}{4}.$$

В. Винокуровъ (Калязинъ); *А. Колегаевъ* (Короча); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Я. Дубновъ* (Вильна); *В. Верронtz* (Москва); *В. Ковальскій* (Спб.); *Я. Тамаркинъ* (Спб.); *Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Н. Сагателовъ* (Шуша); *Х. Мнацакановъ* (Тифлисъ).

№ 387 (4 сер.). *Нѣкоторый предметъ, высотою въ 2 метра, расположенъ въ 6 метрахъ отъ собирательной чечевицы, главное фокусное разстояніе которой равно 30 сантиметрамъ. Опредѣлить:* 1) *разстояніе* x *изображенія предмета отъ чечевицы и* 2) *величину* y *этого изображенія.*

Согласно съ формулой $\frac{1}{d} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F}$ (1), гдѣ d—разстояніе предмета отъ чечевицы, F—главное фокусное разстояніе, x—разстояніе предмета отъ чечевицы, выражая d и x въ сантиметрахъ, получимъ $\frac{1}{600} + \frac{1}{x} = \frac{1}{30}$, откуда $x = \frac{600}{19}$ сант. $= 31{,}58$ (съ избыткомъ, съ точностью до 0,05) сантиметра. Выражая y и высоту предмета въ сантиметрахъ имѣемъ по извѣстной формулѣ: $\frac{y}{200} = \frac{x}{d}$, или, вставивъ x изъ равенства (1), $\frac{y}{200} = \frac{F}{d-F} = \frac{30}{600-30} = \frac{30}{570} = \frac{1}{19}$, откуда $y = \frac{200}{19} = 10{,}53$ (съ избыткомъ, съ точностью до 0,05) сантиметра.

В. Винокуровъ (Калязинъ); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig).

№ 391 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$2^{\frac{x-y}{y}} - 1{,}5y = 1.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ $2^{\frac{x-y}{y}} = 1 + 1{,}5y$ и затѣмъ помноживъ обѣ части на 2, получимъ:

$$2^{\frac{x}{y}} = 2 + 3y \qquad (1).$$

Такъ какъ y, по условію, число цѣлое, то $2+3y$ есть число цѣлое, откуда слѣдуетъ (см. (1), что $\frac{x}{y}$ есть *положительное* число. Но легко видѣть, что $\frac{x}{y}$ есть также число *цѣлое;* дѣйствительно, цѣлое число $2+3y$, имѣя раціональный логариѳмъ $\frac{x}{y}$ при основаніи 2, можетъ имѣть лишь видъ 2^z, гдѣ z число цѣлое, такъ что $\frac{x}{y} = z$, гдѣ z цѣлое положительное число, откуда

$$x = yz \quad (2).$$

Подставляя въ уравненіе (1) z вмѣсто $\frac{x}{y}$ и опредѣляя y, находимъ:

$$y = \frac{2^z - 2}{3} \qquad (3).$$

Если z есть число нечетное, то $2^z - 2$ дѣлится на 3; дѣйствительно, пусть $z=2k+1$ (k—число цѣлое, не меньше нуля); тогда $2^z - 2 = 2^{2k+1} - 2 = 2[(2^2)^k - 1^k]$; такъ какъ $(2^2)^k - 1^k$ дѣлится на $2^2 - 1 = 3$, то и $2^{2k+1} - 2$ кратно 3. Если же z число четное, т. е. вида $2k$, то $2^z - 2 = 2^{2k} - 2 = [(2^2)^k - 1] - 1$; по предыдущему $(2^2)^k - 1$ дѣлится на 3, а (-1) не дѣлится на 3; слѣдовательно, при $z=2k$ число $2^z - 2$ не кратно 3. Итакъ, для того, чтобы y было цѣлымъ, необходимо и достаточно (см. (3)), чтобы z было нечетнымъ. Поэтому, $z=2k+1$, откуда (см. (3), (2)):

$$y = \frac{2^{2k+1} - 2}{3} = \frac{2(2^k - 1)}{3},$$

$$x = \frac{2(2k+1)(2^k - 1)}{3},$$

гдѣ k—цѣлое положительное число ($k=0$ годится лишь при условіи считать $2^{\frac{0}{0}} = 1$).

Л. Ямпольскій (Одесса); *А. Колегаевъ* (Короча); *Я. Тамаркинъ* (Спб.); *В. Винокуровъ* (Калязинъ).

№ 408 (4 сер.). *Въ треугольникѣ* ABC *медіана* AM *продолжена въ направленіи* MA *до нѣкоторой точки* D. *Показазать, что котангенсы угловъ* DAB, AMB *и* MAC *составляютъ ариѳметическую прогрессію.*

Называя углы DAB, AMB, MAC соотвѣтственно черезъ x, y, z, медіану AM черезъ m, сторону BC черезъ a и углы треугольника черезъ A, B, C, получимъ:

$$\cot y - \cot x = \frac{\sin(x-y)}{\sin y \sin x} = \frac{\sin B}{\sin y \sin x} \quad (1),$$

$$\cot z - \cot y = \frac{\sin(y-z)}{\sin z \sin y} = \frac{\sin C}{\sin z \sin y} \quad (2).$$

Пользуясь треугольниками AMB и AMC, находимъ:

$$\frac{\sin B}{\sin x} = m : \frac{a}{2} = \frac{\sin C}{\sin z} \quad (3).$$

Раздѣливъ на $\sin y$ обѣ части равенства (см. (3)) $\frac{\sin B}{\sin x} = \frac{\sin C}{\sin z}$, убѣждаемся, что $\frac{\sin B}{\sin y \sin x} = \frac{\sin C}{\sin z \sin y}$, откуда слѣдуетъ (см. (2), (1)), что

$$\cot z - \cot y = \cot y - \cot x.$$

В. Винокуровъ (Калязинъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Х. Мнацакановъ* (Тифлисъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 22-го Апрѣля 1904 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.