

Обложка
щется



Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

30 Апрѣля


№. 320.


1902 г.

Содержаніе: Опредѣленіе наименьшей толщины жидкой пластинки, какъ способъ опредѣленія діаметра молекулъ. *Ф. Бьллярцева.* — Нѣкоторыя замѣчательныя свойства вписаннаго четырехугольника. *Дм. Евфремова.* — Практическія работы по физикѣ въ средней школѣ. *А. Вольфензона.* — Научная хроника: Двухнедѣльные дополненія къ журналу „Die Fortschritte der Physik“. 74-й съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей. — Задачи для учащихся, №№ 184—189 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 76, 83, 102, 114, 116, 127, 132.. — Поправки. — Объявленія.

Опредѣленіе наименьшей толщины жидкой пластинки, какъ способъ опредѣленія діаметра молекулъ.

Ф. Бьллярцева въ Казани.

Въ 1861 году Plateau опубликовать свою работу ¹⁾ объ опредѣленія толщины жидкой пленки, соответствующей двойному радіусу сферы молекулярнаго дѣйствія. Съ тѣхъ поръ многіе ученые Запада посвящали свои силы этому вопросу. Такъ, за Plateau, давшимъ для толщины пленки мыльнаго пузыря, соответствующей упомянутому двойному радіусу, величину — 1175 μ , пользуясь только нѣсколько измѣненнымъ методомъ, слѣдовали Reinold ²⁾, Rücker ²⁾ и Drude ³⁾.

Въ то время какъ Reinold и Rücker, измѣряя толщину пленки, образованной изъ мыльнаго раствора, содержащаго нѣкоторое количество селитры, нашли одинъ электрическимъ, а дру-

¹⁾ Mem. de l'Acad. de Brux. XXXIII, стр. 44.

²⁾ Сообщение о работахъ этихъ ученыхъ см. Wied. Ann., 44, стр. 748.

³⁾ Wied. Ann., 43, стр. 158.

гой оптическимъ способомъ для предѣльной толщины число—12 μ ., для пленки же только изъ одного мыльнаго раствора—22,1 μ ., —Drude опредѣлилъ оптическимъ способомъ толщину пленки изъ мыльнаго раствора, равную 17 μ ..

Уже рядъ чиселъ: 117,5 μ ., 22,1 μ ., 17 μ ., 12 μ ., самъ за себя говоритъ о прогрессивномъ движеніи въ сторону очень малыхъ величинъ, соотвѣствующихъ наименьшей толщинѣ жидкихъ пленокъ; но если мы примемъ во вниманіе и теоретическую трудность и неточности практическаго характера ⁴⁾, сопряженныя съ употребленнымъ указанными учеными методомъ опредѣленія толщины жидкихъ пленокъ, то для насъ станетъ вполне понятнымъ желаніе другихъ работниковъ въ этой области замѣнить экспериментальную часть труда вышеприведенныхъ авторовъ болѣе твердыми, менѣе сомнительными методами.

Такимъ новымъ методомъ явился методъ, данный Sohncke ⁵⁾.

Сущность этого метода заключается въ опредѣленіи толщины жидкой пластинки, образованной при распространеніи одной жидкости на поверхности другой.

Съ вопросомъ о расширеніи (расплываніи) жидкости на жидкихъ же поверхностяхъ мы встречаемся у Quincke ⁶⁾, Marangoni ⁷⁾ и Lüdtkе ⁸⁾.

Но первый, кто занялся изслѣдованіемъ предѣльной толщины, которая можетъ получиться при расплываніи одной жидкости по другой, былъ Sohncke.

Въ тотъ моментъ, когда очень маленькая капля масла приводится въ соприкосновеніе съ чистой поверхностью воды, она быстро, въ нѣкоторую долю секунды, расплывается въ видѣ сплошной круглой пластинки. Діаметръ такой пластинки обыкновенно достигаетъ значительной величины, равной нѣсколькимъ сантиметрамъ.

Достигши нѣкоторой предѣльной величины діаметра, пластинка распадается на большое число маленькихъ капель или пластинокъ, находящихся нѣкоторое время въ центробѣжномъ движеніи.

Изъ одинаковаго на всѣхъ мѣстахъ масляной пластинки цвѣта, наблюдаемаго передъ ея распаденіемъ, слѣдуетъ, что пластинка имѣетъ всюду одинаковую толщину; это послѣднее, впрочемъ, слѣдуетъ еще и изъ того, что распаденіе пластинки на капли происходитъ одновременно на всѣхъ ея мѣстахъ.

Чтобы опредѣлить толщину маслянаго слоя въ моментъ разрыва, Sohncke опредѣлялъ количество спущеннаго масла

⁴⁾ См., наприм., статью Drude въ Wied. Ann., 43, с. 158.

⁵⁾ Wied. Ann. № 40, с. 345.

⁶⁾ Pogg. Ann., 139, стр. 74.

⁷⁾ " " 143, стр. 377.

⁸⁾ " " 137, стр. 362.

чрезъ двойное взвѣшиваніе тонкой платиновой проволоки съ масломъ до соприкосновенія проволоки съ водою и послѣ: разность (p) результатовъ этихъ взвѣшиваній представляла собою количество спущеннаго на поверхность воды масла.

Тогда, если r — радіусъ круга масляной пластинки въ моментъ разрыва, m — удѣльный вѣсъ масла, толщина (d) маслянаго слоя будетъ

$$d = \frac{p}{\pi r^2 m}.$$

Такимъ образомъ Sohnce нашелъ въ среднемъ

для оливковаго масла $d = 111,5 \mu$.

„ рѣпного масла (Rüböl) $d = 93,6 \mu$.

Однако, эти результаты Sohnce сдѣлались сомнительными, благодаря наблюденіямъ лорда Rayleigh'a ⁹⁾, Röntgen'a ¹⁰⁾ и Oberbeck'a ¹¹⁾, согласно которымъ слой масла, непрерывно покрывающій поверхность воды, можетъ быть значительно меньшей толщины.

Сущность наблюденій Rayleigh'a заключалась въ опредѣленіи толщины слоя масла, останавливающаго наблюдаемое обыкновенно движеніе камфоры на поверхности чистой воды. При этомъ Rayleigh нашелъ, что толщина маслянаго слоя, совершенно прекращающаго движеніе камфоры, равна 2μ .

Röntgen для своихъ изслѣдованій воспользовался другимъ явленіемъ. Если взять воронку съ вложенной въ нее пропитанной эфиромъ ватой и поднести устье воронки къ поверхности чистой воды, то вслѣдствіе падающихъ на воду паровъ эфира подъ устьемъ воронки на водѣ образуется небольшое углубленіе, отъ котораго распространяются концентрическія волны.

Это явленіе и послужило Röntgen'у средствомъ для опредѣленія толщины маслянаго слоя. Такъ, для толщины слоя кастянаго масла онъ нашелъ величину — $1,8 \mu$.

Опытъ Oberbeck'a того же характера, что и Röntgen'a, съ единственнымъ по существу отличіемъ, что Oberbeck пользовался для изслѣдованія толщины маслянаго слоя струей воздуха, а не парами эфира.

При этомъ Oberbeck опредѣлилъ толщину маслянаго слоя равную $2-0,3 \mu$. Sohnce находитъ числа Rayleigh'a и Röntgen'a не соответствующими дѣйствительности. Изъ частнаго разговора его съ Fischer'омъ ¹²⁾ видно, что онъ (Sohnce) убѣжденъ, что разрывъ масляной пластинки возможенъ только тогда, когда она

⁹⁾ Proceedings of Royal Society, Bd. XLVII.

¹⁰⁾ Wied. Ann., 41, стр. 321.

¹¹⁾ „ „ 49, стр. 366.

¹²⁾ Wied. Ann., 68, стр. 417.

переходить черезъ толщину въ 100 μ (круглымъ числомъ) и что никакая однородная масляная пластинка толщины меньше 100 μ на водѣ невозможна. Что касается чиселъ Rayleigh'a и Röntgen'a, то эти числа выражаютъ собою толщину не сплошной масляной пластинки, но слоя раствора масла съ водою.

Къ концу своихъ изслѣдованій Oberbeck пришелъ къ тому же убѣжденію, т. е., что въ своихъ опытахъ онъ имѣлъ дѣло со слоемъ маслянаго раствора въ водѣ, а не съ масляной пластинкой.

Приведя вышеуказанное мнѣніе Sohneke, Fischer замѣчаетъ, что всѣ явленія, наблюдаемые авторами незначительныхъ толщинъ масляныхъ пластинокъ, можно объяснить себѣ, если допустить, что поверхность воды подъ вліяніемъ масла подверглась измѣненіямъ вслѣдствіе диффузіи или химическихъ процессовъ.

Основаніемъ для такихъ соображеній Fischer приводитъ то обстоятельство, что образовавшіеся при разрывѣ капли масла вновь уже не расплывались.

Явленія, описанныя Sohneke, конечно, того же порядка.

При соприкосновеніи масла съ водою, говоритъ далѣе Fischer, часть масла вмѣстѣ съ водою, вслѣдствіе указанныхъ выше взаимодѣйствій, образуетъ невидимый впереди бѣгущій жировой слой. Образованіе такого слоя нисколько не удивительно, если принять во вниманіе, что при вступленіи масла въ воду, вслѣдствіе уменьшенія поверхностнаго натяженія воды, послѣдняя начинаетъ стягиваться и увлекаетъ за собою сначала сильно притягиваемый къ водѣ слой масла, который и образуетъ упомянутый предшествующій слой, и уже вслѣдъ за этимъ движется остальная часть масла, образуя видимую часть пластинки Sohneke.

Наблюденія Rayleigh'a, Röntgen'a и Oberbeck'a подчеркиваютъ справедливость анализа Fischer'a. Слѣдствіемъ же этого анализа явилось заключеніе о непригодности водной поверхности для опредѣленій наименьшихъ толщинъ жидкихъ пластинокъ. Fischer'у, какъ онъ самъ признается, скоро удалось напасть на мысль о возможности устранить частные недостатки метода Sohneke: онъ замѣнилъ водную поверхность ртутной, и его опыты на этой поверхности дали блестящіе результаты. Ртутная поверхность, вслѣдствіе своего сравнительно большого поверхностнаго напряженія, давала возможность получить пластинки изъ всевозможныхъ жидкостей, въ томъ числѣ и изъ мыльнаго раствора, пластинки изъ котораго не могли быть получены на водѣ.

Главнымъ же преимуществомъ ртутной поверхности было то, что, если она и смѣшивается съ другими жидкостями, то въ очень незначительной степени, благодаря чему является увѣренность, что наблюдаются дѣйствительныя пластинки жидкости. Вслѣдствіе полного отраженія чистой поверхности ртути, помутнѣніе поверхности ея обнаруживается даже и при очень тонкой пластинкѣ, и, такимъ образомъ, можно легко удостовѣриться въ непрерывности пластинки, производя легкое дыханіе.

На ртути, какъ на болѣ тяжелой жидкости, уже а priori можно было рассчитывать на болѣ продолжительный процессъ расплыванія, чѣмъ на сравнительно легкой водѣ, а въ такомъ случаѣ было достижимо болѣ точное измѣреніе поперечника пластинки, чему также способствовало еще и отраженіе поверхности ртути. Наиболѣе удавшіеся опыты Fischer сгруппироваль въ таблицы. Изъ этихъ таблицъ видно, что возможная толщина для пластинки

глицериноводнаго раствора равна . . .	5,4 μ
рѣнного масла	4,6 μ
оливковаго масла	2,3 μ
разбавленной сѣрной кислоты . . .	0,2 μ .

Получивъ такіе замѣчательные результаты, Fischer полагаетъ, и намъ кажется—не безъ основанія, что для указанныхъ веществъ пластинка можетъ быть даже еще тоньше.

Такъ, пластинка

рѣнного масла, вѣроятно, меньше чѣмъ	3 μ
глицериноводнаго раствора	2 μ
разведенной сѣрной кислоты	1 μ .

То обстоятельство, что у Fischer'a не наблюдалось пластинокъ Sohneke (въ смыслѣ толщины), Fischer объясняетъ тѣмъ, что на ртути процессъ расплыванія идетъ спокойнѣе, чѣмъ на водѣ; частицы пластинки поэтому, при расплываніи на ртути, не приходятъ въ большой безпорядокъ, какъ при стремительномъ расширеніи на водѣ, вслѣдствіе чего пластинка не бываетъ неравнобѣрно массивна, а потому нѣтъ условій для преждевременнаго ея разрыва.

Заканчивая свою статью, Fischer напоминаетъ, что и на ртути, какъ и на водѣ, также слѣдуетъ принять во вниманіе впереди бѣгущій слой. „Однако констатировать этотъ слой, — говорить Fischer, — я не могъ: или этотъ слой былъ настолько тонокъ, что я не могъ его видѣть, или онъ къ концу опыта покрывался болѣе толстымъ жировымъ слоемъ“.

Итакъ, и ртутная поверхность не избавила новаго экспериментатора отъ сомнѣній относительно полученныхъ результатовъ, хотя и очень сильно приблизила его къ представленію о дѣйствительной толщинѣ жидкихъ пластинокъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Нѣкоторые замѣчательныя свойства вписаннаго четырехугольника.

Преподавателя школы колористовъ въ Ивановѣ-Вознесенскѣ

Дм. Ефремова.

1) Обозначимъ черезъ $ABCD$ чет-къ, вписанный въ кругъ, центръ котораго находится въ O , и положимъ, что G_a, G_b, G_c, G_d суть барицентры (т. е., центры тяжести) тр-овъ BCD, ACD, ABD и ABC (фиг. 1).

Теорема. Чет-къ $G_a G_b G_c G_d$ гомотетиченъ съ чет-мъ $ABCD$ въ отношеніи $1:3$.

Такъ какъ барицентры G_a и G_b находятся на медианахъ BM и AM тр-въ BCD и ACD , при чемъ

$$\frac{MG_a}{MB} = \frac{MG_b}{MA} = \frac{1}{3},$$

то

$$G_a G_b \parallel AB \text{ и } \frac{G_a G_b}{AB} = \frac{1}{3},$$

и по аналогіи

$$G_b G_c \parallel BC \text{ и } \frac{G_b G_c}{BC} = \frac{1}{3} \text{ и т. д.,}$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема Франеля *). Если H_a, H_b, H_c, H_d суть ортоцентры тр-въ BCD, ACD, ABD и ABC , то чет-ки $H_a H_b H_c H_d$ и $ABCD$ гомотетичны и равны. (Franel).

Извѣстно, что ортоцентръ H всякаго тр-ка, его барицентръ G и центръ описаннаго круга O находятся на одной прямой (прямая Эйлера), приче́мъ

$$\frac{OH}{OG} = 3;$$

поэтому

$$\frac{OH_a}{OG_a} = \frac{OH_b}{OG_b} = 3;$$

слѣдовательно,

$$H_a H_b \parallel G_a G_b \parallel AB \text{ и } H_a H_b = 3G_a G_b = AB,$$

*) L'Intermédiaire. 1894 p. 151.

и по аналогіи

$$H_b H_c \parallel BC \text{ и } H_b H_c = BC \text{ и т. д.,}$$

что и требовалось доказать.

3. **Слѣдствія.** Чет-ки $G_a G_b G_c G_d$ и $H_a H_b H_c H_d$ гомотетичны относительно центра O въ отношеніи 1:3.

Чет-ки $AVH_a H_b$, $BCH_b H_c$, $CDH_c H_d$, $DAH_d H_a$ суть параллелограммы.

Прямые AH_a , BH_b , CH_c , DH_d пересекаются въ одной точкѣ S и дѣлятся въ этой точкѣ пополамъ.

Общая середина S прямыхъ AH_a , BH_b , CH_c , DH_d есть центръ гомотетіи чет-въ $ABCD$ и $H_a H_b H_c H_d$.

4. Проекціи какой-нибудь точки окружности на стороны вписаннаго тр-ка находятся, какъ извѣстно, на *прямой Симсона* этого тр-ка относительно взятой точки.

Прямые Симсона тр-въ BCD , ACD , ABD и ABC относительно точекъ A , B , C , D будемъ называть *прямыми Симсона вписаннаго чет-ка $ABCD$* относительно его вершинъ; условимся обозначать ихъ чрезъ (A) , (B) , (C) , (D) *).

Теорема. *Прямые Симсона вписаннаго чет-ка $ABCD$ пересекаются въ общей точкѣ S прямыхъ AH_a , BH_b , CH_c , DH_d .*

Дѣйствительно, такъ-какъ прямая, соединяющая ортоцентръ тр-ка съ какою-либо точкою описанной окружности, дѣлится пополамъ прямою Симсона, соотвѣтствующею этой точкѣ, то прямая Симсона (A) чет-ка $ABCD$ проходитъ чрезъ середину S прямой AH_a ; то-же справедливо и для прямыхъ (B) , (C) , (D) .

5. Общую точку S прямыхъ Симсона вписаннаго чет-ка будемъ называть *точкою Симсона* (или *Валласа*) этого чет-ка.

Изъ предыдущаго видно, что точка Симсона S вписаннаго чет-ка $ABCD$ есть центръ гомотетіи этого чет-ка и чет-ка $H_a H_b H_c H_d$; поэтому эти чет-ки имѣютъ общую точку Симсона.

6. **Лемма.** Уголъ, составленный двумя прямыми Симсона вписаннаго чет-ка, равенъ углу между радіусами описаннаго круга, проведенными въ соотвѣтственныя вершины чет-ка.

Докажемъ, напр., что

$$\angle(A)(B) = \angle AOB.$$

*) Эти прямые называются также *прямыми Валласа* (Wallace).

Обозначивъ чрезъ

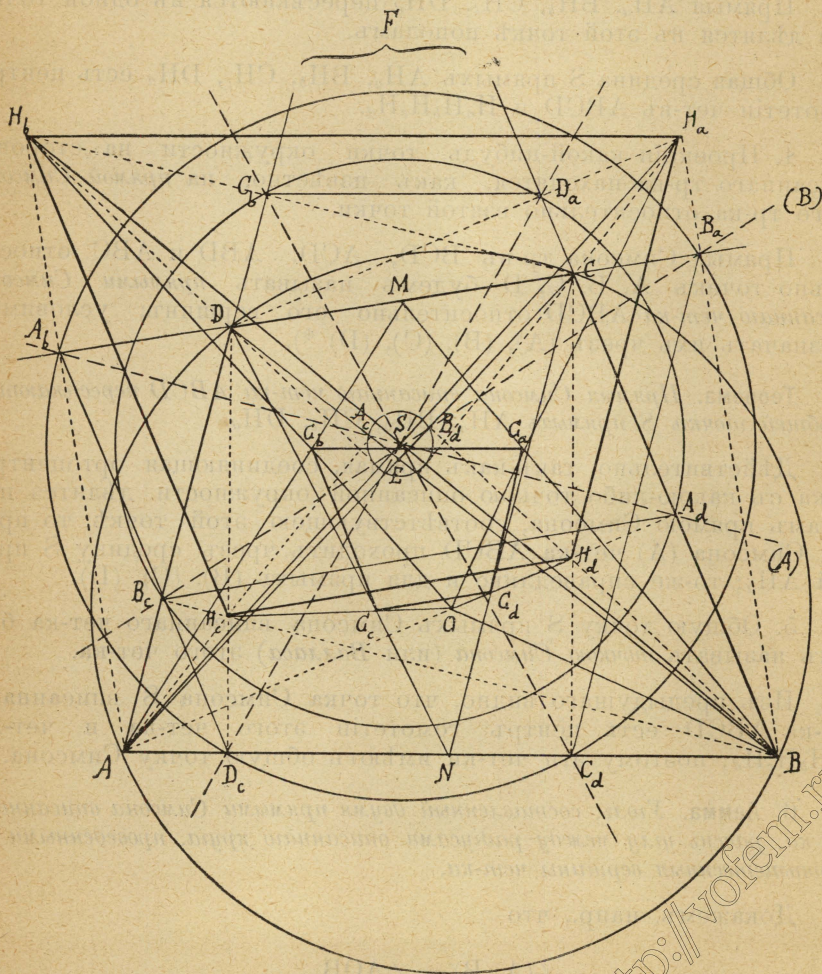
A_b, A_c, A_d проекции A на CD, BD, BC ,

B_a, B_c, B_d „ B на CD, AD, AC ,

C_a, C_b, C_d „ C на BD, AD, AB ,

D_a, D_b, D_c „ D на BC, AC, AB ,

и замѣтивъ, что чет-ки AA_bDA_c и BB_aCB_d вписываются въ



Фиг. 1.

окружности, находимъ, что

$$\angle DA_cA_b = \angle DAA_b \text{ и } \angle CB_dB_a = \angle CBB_a.$$

Обозначивъ затѣмъ чрезъ Е и F точки пересѣченія діагоналей AC и BD и сторонъ AD и BC и проведя чрезъ Е параллели къ прямымъ (A) и (B), получимъ:

$$\begin{aligned}\angle(A)(B) &= \angle A_d S B_c = \angle AEB + \angle A B_d B_c + \angle B A_c A_d = \\ &= \angle AEB + \angle C B_d B_a + \angle D A_c A_b = \\ &= \angle AEB + \angle C B B_a + \angle D A A_b ;\end{aligned}$$

но, проведя чрезъ F параллель къ AA_b и BB_a, увидимъ, что

$$\angle C B B_a + \angle D A A_b = \angle AFB;$$

слѣдовательно,

$$\angle(A)(B) = \angle A_d S B_c = \angle AEB + \angle AFB.$$

Далѣе, изъ тр-въ ADE и BFD находимъ, что

$$\angle AEB = \angle ADB + \angle DAC,$$

$$\angle AFB = \angle ADB - \angle FBD = \angle ADB - \angle DAC;$$

отсюда

$$\angle AEB + \angle AFB = 2 \cdot \angle ADB = \angle AOB;$$

слѣдовательно,

$$\angle(A)(B) = \angle A_d S B_c = \angle AOB,$$

что и требовалось доказать.

7. Теорема. *Отрѣзки прямыхъ Симсона вписаннаго чет-ка, ограниченные его сторонами, равны.*

Такъ какъ во всякомъ тр-кѣ отношеніе какой-либо стороны его къ sin'у противоположащаго угла равно діаметру описаннаго круга, то, замѣтивъ, что AD есть діаметръ круга, описаннаго около чет-ка AA_bDD_c, получимъ:

$$\frac{A_b A_c}{\sin \angle A_b D A_c} = AD = \frac{D A_c}{\cos \angle A D A_c};$$

но

$$\angle A_b D A_c = \angle A_b D A + \angle ADB = \angle B + \angle ADB;$$

поэтому

$$A_b A_c = D A_c \cdot \frac{\sin(\angle B + \angle ADB)}{\cos \angle ADB} = D A_c (\sin B + \cos B \cdot \operatorname{tg} \angle ADB);$$

аналогичнымъ способомъ изъ чет-ка AA_cAD_b найдемъ, что

$$A_c A_d = A_c B (\sin B - \cos B \cdot \operatorname{tg} \angle ABD);$$

сложивъ эти равенства и замѣтивъ, что

$$D A_c \cdot \operatorname{tg} \angle ADB = A A_c = A_c B \cdot \operatorname{tg} \angle ABD,$$

получимъ:

$$A_b A_d = (D A_c + A_c B) \cdot \sin B = B D \cdot \sin B;$$

а такъ какъ

$$B D = 2 R \sin A,$$

то

$$A_b A_d = 2 R \cdot \sin A \cdot \sin B = 2 R \cdot \sin A \cdot \sin D$$

Такимъ-же образомъ найдемъ, что

$$B_c B_a = 2 R \cdot \sin B \cdot \sin C = 2 R \cdot \sin B \cdot \sin A, \text{ и т. д.}$$

слѣдовательно,

$$A_b A_d = B_c B_a = C_d C_b = D_a D_c;$$

что и требовалось доказать.

8. Теорема. Вершины чет-въ $A_b B_a C_d D_c$, $A_d B_c C_b D_a$, $A_c B_d C_a D_b$ находятся на концентрическихъ окружностяхъ, общий центръ которыхъ совпадаетъ съ точкою Симсона S чет-ка $ABCD$ *).

Разсматривая чет-ку $AA_b DD_c$, замѣчаемъ, что

$$\angle D A D_c = \angle D A_b D_c = 180^\circ - C;$$

слѣдовательно, отрѣзки $A_b D_c$ и $A_d D_a$ параллельны; убѣдившись подобнымъ же образомъ въ параллельности отрѣзковъ $D_c C_d$ и $D_a C_b$, $C_d B_a$ и $C_b B_c$, на основаніи послѣднихъ равенствъ предыдущей теоремы заключаемъ, что чет-ки $A_b D_c A_d D_a$, $D_c C_d D_a C_b$, $C_d B_a C_b B_c$ суть равнобочныя трапеціи; слѣдовательно,

$$S A_b = S D_c = S C_d = S B_a,$$

$$S A_d = S D_a = S C_b = S B_c,$$

и, по аналогіи,

$$S A_c = S D_c = S C_a = S B_d;$$

что и требовалось доказать.

9. Слѣдствія. Такъ-какъ (6)

$$\angle A_b S B_a = \angle A_d S B = \angle A_c S B_a = \angle A O B \text{ и т. п.,}$$

то чет-ки $A_b B_a C_d D_c$, $A_d B_c C_d D_a$, $A_c B_d C_a D_b$ подобны чет-ку $ABCD$ и гомотетичны между собою относительно точки S .

Обозначивъ радіусы круговъ, описанныхъ около этихъ чет-овъ, соотвѣтственно чрезъ R_1 , R_2 , R_3 и замѣтивъ, что

$$A_b B_a \text{ есть проекція } AB \text{ на } CD,$$

$$A_d D_a \text{ „ „ } AD \text{ на } BC,$$

$$\text{и } A_c C_a \text{ „ „ } AC \text{ на } BD,$$

*) L'Intermédiaire. 1901, p. 135.

находимъ, что

$$\frac{R_1}{R} = \frac{A_b B_a}{AB} = \cos \angle (AB, CD),$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{A_d D_a}{AD} = \cos \angle (AD, BC),$$

$$\frac{R_3}{R} = \frac{A_c C_a}{AC} = \cos \angle (AC, BD).$$

Практическія работы по физикѣ въ средней школѣ.

Докладъ былъ сдѣланъ въ Варшавскомъ кружкѣ преподавателей физики и математики 20-го ноября 1901 г.

А. Вольфензонъ въ Варшавѣ.

Польза практическихъ работъ по физикѣ въ средней школѣ была признана ранѣе всего въ Англіи и въ Сѣверной Америкѣ. Еще въ серединѣ прошлаго столѣтія ученики англійскихъ коллегій привлекались къ самостоятельнымъ упражненіямъ въ практической физикѣ и химіи, такъ какъ въ подобныхъ работахъ англійскіе педагоги справедливо усматривали противовѣсъ одно-стороннему грамматико-математическому направленію школы, необходимый для разносторонняго развитія ума.

Тѣмъ не менѣе, еще въ 1887 году Бальфуръ Стюартъ ¹⁾ указываетъ на неудовлетворительную постановку работъ по физикѣ въ большинствѣ школъ, въ особенности, по сравненію съ работами въ богато обставленныхъ химическихъ лабораторіяхъ; онъ объясняетъ эту отсталость недостаткомъ специалистовъ-преподавателей, отсутствіемъ выработанныхъ методовъ и сравнительною трудностью построения подходящихъ приборовъ.

Первыя указанія на практическія работы по физикѣ въ Германіи мы находимъ въ прусскихъ учебныхъ планахъ за 1882 годъ, гдѣ подобныя работы признаются желательными, подъ надлежащимъ руководствомъ и съ сохраненіемъ факультативнаго характера. Но, надо полагать, преподаватели прусскихъ школъ не имѣли возможности немедленно идти навстрѣчу желаніямъ министерства. Такъ, въ 1889 году д-ръ К. Ноакъ ²⁾, много поработавшій къ данному вопросу и хорошо въ немъ осведомлен-

¹⁾ „Praktische Physik für Schulen und jüngere Studierende“ von B. Stewart und Haldane Gee, deutsch von K. Noak.

²⁾ Kare Noak. „Leitfaden für Physikalische Schülerübungen“.

ный, выпуская въ свѣтъ переводъ „Практической физики для школъ и начинающих“ В. Стюарта и Г. Гея, выражаетъ сомнѣнiе, найдется ли для этой книги въ Германiи соответствующий кругъ читателей.

Много способствовали успѣху дѣла труды редакцiи „Zeitschrift für d. Physik. und Chemisch. Unterricht“. Проф. Швальбе въ докладѣ своемъ на съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ Бременѣ 1890 г. „Ueber die Möglichkeit der Einrichtung eines physikalisch - praktischen Unterrichts in höheren Schulen“ ³⁾ и д-ръ Поске въ статьѣ: „Ueber die Anleitung der Schüler zu Physikalischen Versuchen“ ⁴⁾ явились убѣжденными сторонниками практическаго обученiя физикѣ. Какъ тотъ, такъ и другой указываютъ на отсталость Германiи въ этомъ дѣлѣ и призываютъ преподавателей дружными усилiями наверстать потерянное время. Въ указанной статьѣ д-ръ Поске даетъ первый перечень работъ, исполненныхъ учениками подъ его руководствомъ. Въ „Zeitschrift“ открываются отдѣлы: „Mitteilungen über Physikalische Schülerübungen“. Подобные же отдѣлы открываются и въ „Zeitschrift zur Vörderung des physik. Unterrichts“ и др.

Одновременно съ этимъ фирмы физическихъ приборовъ стали изготовлять особыя недорогiя коллекцiи приборовъ, специально приспособленныхъ для ученическихъ работъ. Такъ, напримѣръ, фирма Messer-Mertig въ Дрезденѣ выпустила 5 коллекцiй по различнымъ отдѣламъ физики по цѣнѣ 20—25 марокъ за коллекцiю; Leppin-Masche въ Берлинѣ и Stöhrer-Sohn въ Лейпцигѣ—коллекцiи приборовъ по электричеству и магнитизму по В. Стюарту въ двухъ цѣнахъ, коллекцiи приборовъ по Вейнгольду etc. Также и М. Н. П. не оставило безъ поддержки инициативу отдѣльных лицъ. Въ Пруссiи часы практическихъ занятiй нынѣ оплачиваются наравнѣ съ уроками (Zeitschr. 1899 г., 2; Bohn-Berein). Саксонское М. Н. П. отпускаетъ особыя суммы для приобретенiя физическими кабинетами приборовъ, специально предназначенныхъ для ученическихъ работъ (Zeitschr. 1899., 2 Rect. Rühlmann, Döbeln, Sachsen).

Благодаря указаннымъ причинамъ, а также и общимъ условiямъ, благоприятствующимъ въ послѣднее время всякому культурному начинанiю въ Германiи, росту науки, технической дѣятельности, избытку ученыхъ силъ, благодаря также педагогическимъ Verein'амъ и учительскимъ естественно-научнымъ каникулярнымъ курсамъ, выставкамъ физическихъ приборовъ etc., въ настоящее время рѣдкое средне-учебное заведенiе въ Германiи не практикуетъ ученическихъ работъ по физикѣ въ той или иной формѣ. Нѣкоторыя школы, какъ видно изъ отчетовъ преподавателей, находятъ даже возможнымъ привлекать учениковъ къ вы-

³⁾ Zeitschr. IV, 4.

⁴⁾ Zeitschr. V, 2.

полненію работъ, выходящихъ повидимому изъ курса средней школы. Выписываю нѣсколько заголовковъ изъ цитированнаго выше отчета реальной гимназіи въ Дебельнѣ—ректора Рюльмана: 1) „Опредѣленіе длины волны при помощи Роуландовой рѣшеткой“. 2) „Измѣреніе сопротивленій, помощью крутильнаго гальванометра Сименса въ отвѣтвленіи тока“. 3) „Измѣреніе сопротивленія жидкостей по способу Кольрауша при помощи телефона“. 4) „Опредѣленіе содержанія сахара при помощи поляризаціонныхъ стробометровъ Вильда“ etc.

Очевидно, что подобныя работы требуютъ значительной доли участія руководителя. Чтобы дать понятіе о формальной сторонѣ постановки работъ въ нѣмецкихъ школахъ, дѣлаю еще нѣсколько выписокъ изъ отчетовъ.

А) Берлинъ. Sophien Real-Gymnas. Работы ведутся съ 1896 года съ желающими по 3 часа каждыя 3 недѣли; занимаются 27 человѣкъ изъ классовъ ОI, UI, OII, (три стар. класса), каждый занимается отдѣльно, не болѣе 9-ти одновременно.

В) Halle, Ober-Real-Schule. Съ 1894 года работаютъ желающіе изъ OII въ послѣобѣденные часы, по двое; общее число работающихъ 12—16.

С) Lennep-Real-Schule. Занимаются не регулярно ученики OII группами по два ученика, 1—2 часа.

У насъ до настоящаго времени можно отмѣтить лишь единичныя попытки ввести практическія занятія по физикѣ въ среднюю школу.

Приступая въ ⁹⁰/₉₁ учебн. году къ практическимъ занятіямъ съ учениками 7-го и 8-го классовъ Лодзинской гимназіи, съ разрѣшенія Педагогическаго Совѣта Гимназіи, я поставилъ себѣ цѣлью выяснитъ путемъ опыта: 1) можно ли рассчитывать, при полной необязательности работъ, на добровольное въ нихъ участіе учениковъ и 2) какого рода работы, наиболѣе возбуждая любознательность учениковъ, поддерживаютъ въ нихъ неослабляющій интересъ къ дѣлу. Съ этою цѣлью намѣчены были слѣдующія работы, главнымъ образомъ, измѣрительныя. Работы эти были въ разное время исполнены учениками, работавшими группами отъ 2-хъ до 4-хъ человѣкъ и результаты значительнаго большинства ихъ, съ подробнымъ описаніемъ хода опытовъ, записаны самими учениками въ особую книгу.

1) Упражненія въ точномъ взвѣшиваніи. Взвѣшиваніе по способу Борзе.

2) Определеніе плотностей твердыхъ и жидкихъ тѣлъ помощью пикнометра, гидростатическаго взвѣшиванія и ареометра съ постояннымъ объемомъ.

3) Определеніе плотностей жидкостей по способу сообщающихся сосудовъ помощью катетометра.

4) Определение среднего сечения проволоки по ее длине, вѣсу и плотности.

5) Опредѣленіе температуръ кипѣнія и плавленія различныхъ тѣлъ помощью химическаго термометра.

6) Определение теплоемкостей различных тѣлъ по способу смѣшенія.

7) Опредѣленіе теплоты таянія льда.

8) " " парообращованія.

9) Определение коэффициентов линейнаго расширения латуни и желѣза (по Вейнгольду).

10) Опредѣленіе коэффиціента расширенія ртути по способу Дюлонга и Пти—помощью катетометра.

11) Опредѣленіе влажности воздуха помощью гигрометра Реньо.

12) Опыты, касающіеся отраженія, поглощенія и преломленія лучистой теплоты (по Вейнгольду).

13) Наблюдения показаний при равномерном нагревании и охлаждении трех термометровъ съ неизмѣннымъ, посеребреннымъ и закопченнымъ резервуарами (по пр.-доц. Брауну) съ вычерчиваніемъ кривыхъ.

14) Измѣреніе силы свѣта различныхъ источниковъ помощью фотометр. Румфорда и Бунзена. (Измѣненіе силы свѣта лампочки накаливанія съ измѣненіемъ силы тока, отъ краснаго до бѣлаго каленія).

15) Измѣреніе фокуснаго разстоянія и увеличенія изображеній выпуклаго зеркала помощью оптической скамьи.

17) Тѣ же измѣренія для двойко-выпуклаго стекла. Измѣреніе фокусныхъ разстояній стеклъ въ зависимости отъ кривизны, также отъ измѣненія относительнаго показателя преломленія по Вейнгольду (стекло помѣщается въ наполненную водой съ параллельными стѣнками).

17) Повѣрка законѣвъ отраженія и преломленія свѣта по-
мощью гоніометра Вейнгольда.

18) Измѣреніе угловъ призмы и опредѣленіе коэффициентовъ преломленія флинтгласса, кронгласса и CS_2 помощью измѣренія угловъ наименьшаго отклоненія

19) Опредѣленіе коэффиціента приведенія тангенсъ-гальванометра помощью вольтметра Бунзена.

20) Опредѣленіе внутр. сопротивленія и электродвижущихъ силъ элемента Бунзена и аккумулятора помощью тангенсъ-гальванометра и амометра Якоби (способъ Ома). То же измѣреніе для термобатареи Гюльхера.

21) Измѣреніе сопротивленій по способу подстановки помощью амометра Якоби.

22) Повѣрка результатовъ формулы Ома.

23) Объясненіе устройства электродвигателей различного типа по незнакомымъ моделямъ.

24) Устройство динамо-машины по моделямъ. Посѣщеніе центральной станціи электрическаго трамвая.

Работы велись главнымъ образомъ, по воскреснымъ и праздничнымъ днямъ, отъ 11 до 2-хъ. За нѣсколько дней до опыта тема разрабатывалась съ учениками въ свободное время; чаще же имъ предоставлялось подготовляться самимъ, для чего изъ библиотeki при физическомъ кабинетѣ на руки ученикамъ выдавались пособія, а именно, Weinhold „Physikalische Demonstrationen“. — Его же „Vorschule der Experimentalphysik“. — Falck-Lehmann. „Physikalisch. Technik“ Wiedemann und Ebert — „Physikalisches Prakticum“. Кольраушъ — „Рук. къ производству физ. опытовъ. B. Stewart und H. Gee.—„Praktische Physik“. Кольбе — „Чтеніе объ электричествѣ“. Трусевичъ — Физич. классъ“ въ „Физич. Обзор.“ *). Также „Zeitschrift“ — Poske.

Конечно, ученикамъ, владѣющимъ нѣмецкимъ языкомъ, а такихъ въ Лодзи достаточно, приходилось помогать товарищамъ при переводѣ. Въ работѣ принимали постоянное участіе отъ 20 до 25 учениковъ VII и VIII классовъ. Среди нихъ нетрудно было выдѣлить: 1) одаренныхъ отъ природы способностями къ физико-математическимъ наукамъ;—такіе ученики и дома чуть ли не съ малыхъ лѣтъ занимаются химическими опытами, а въ послѣднее время электричествомъ: это лучшіе работники, такъ какъ, работая, они удовлетворяютъ природной склонности; будущіе студенты физико-математическаго факультета, они естественно становятся руководителями группы; 2) лучшихъ учениковъ класса, равно занимающихся всѣми предметами, сознательно и серьезно относящихся къ наукѣ; 3) кандидатовъ на поступленіе въ спеціальныя заведенія, отчасти желающихъ путемъ обращенія съ физическими приборами лучше усвоить курсъ физики, и, наконецъ, 4) слѣдующихъ теченію, увлекаемыхъ хорошимъ примѣромъ, но не работающихъ сознательно главнымъ образомъ потому, что подготовляться къ опытамъ трудно и не достаетъ характера. Именно среди послѣднихъ учениковъ стало замѣчаться, вслѣдъ за увлеченіемъ первыхъ дней, пониженіе интереса къ работамъ, въ особенности, при производствѣ сложныхъ измѣреній или неудававшихся сразу, т. е., именно тѣхъ работъ, которыя наиболѣе привлекали учениковъ первыхъ группъ, (меньшинство, къ сожалѣнію), возбуждая ихъ самостоятельность. Такъ, напр., опредѣляя

*) Вышло отдѣльнымъ изданіемъ: „Классные опыты по физикѣ“.

теплоту парообразования съ самодѣльнымъ калориметромъ, нѣсколько человѣкъ произвели до десятка измѣреній, пока не нашли и не устранили причины неудачи.

Съ дальнѣйшимъ ходомъ работъ становилось все болѣе яснымъ, что слѣдуетъ, при выборѣ работъ, сообразоваться съ индивидуальностью принимающихъ въ нихъ участіе учениковъ, а потому со второй половины года планъ работъ былъ существенно измѣненъ: измѣрительныя работы были оставлены для учениковъ, особенно ими интересующихся, при чемъ, въ виду пріобрѣтенныхъ ими навыка и умѣнья обращаться съ газомъ и батареей аккумуляторовъ, имъ разрѣшалось работать въ кабинетѣ и однимъ. Для всѣхъ же желающихъ по праздничнымъ днямъ устраивались по особому плану работы, состоящія, главнымъ образомъ, въ „Постореніи и развитіи классныхъ опытовъ“ *). Опыты эти по силамъ среднему ученику, поэтому всѣ принимавшіе въ нихъ участіе стали работать равнѣе, одинаково сознательно. Въ виду же разнообразія и относительной свободы въ выборѣ матеріала, каждый могъ вносить въ работу и извѣстную долю самостоятельности.

Заканчивая свой докладъ, я долженъ сказать, что, если бы практическими занятіями по физикѣ достигалось лишь лучшее усвоеніе нѣкоторыми изъ учащихся отдѣльныхъ вопросовъ курса, то, пожалуй, учитель не былъ бы вознагражденъ за свой большой трудъ. Но не единственнымъ учителемъ и не единою наукой жива школа: дать вѣру въ науку молодымъ людямъ, полнымъ желанія учиться, помочь имъ осуществить свое призваніе, научить работать и, развивъ въ нихъ самостоятельность, отвлечь отъ безплоднаго усвоенія чужихъ мыслей,—вотъ важныя задачи современной школы, и въ выполненіи ихъ видная роль принадлежитъ совместной внѣклассной работѣ учащаго и учащихся.

Ноябрь. 1901.

Конспектъ примѣрной работы изъ „Повторенія и развитія классныхъ опытовъ“.

Тема: Основныя явленія электричества. 2 рода электричества. Электризація треніемъ и проводимостью.

Приборы: Бифиллярный подвѣсъ (двойное стремя) по Вейнгольду. Палочки изъ флинтгласа, рогового каучука, сургуча, сѣры (на стеклѣ), смолы, фарфора, дерева, свитки бумаги. Амальгамированная кожа, шелкъ, мѣхъ, фланель, шерсть.

I-ый опытъ. Наэлектризованная палочка притягиваетъ всякую ненаэлектризованную, подвѣшенную къ стремени. Притяженіе

*) Считаю долгомъ выразить благодарность высокоуважаемому П. А. Зилу, указавшему мнѣ на педагогическое значеніе подобныхъ работъ.

обоюдное: наэлектризованная и подвѣшенная палочка сильно притягивается ладонью руки. Параллельные опыты: легкая, длинная, до 2-хъ арш., линейка, уравновѣшенная на спинкѣ стула, сильно раскачивается подѣ дѣйствіемъ наэлектризованной палочки. Наэлектризованная палочка притягиваетъ оба конца магнитной стрѣлки.

II. Натертая амальгамированной кожей стеклянная палочка отталкиваетъ тѣмъ же способомъ наэлектризованную стеклянную же палочку, подвѣшенную къ стремени. Тотъ же опытъ съ палочками изъ рогового каучука. Стеклянная наэлектризованная амальгамированной кожей палочка притягивается каучуковой, натертой мѣхомъ. Рядъ испытаній даетъ отталкиваніе стеклянной палочки фарфоровой и палочкой изъ рогового каучука, натертыми амальгамой, притяженіе ея сургучной, сѣрной, матоваго стекла и изъ сухой бумаги, потертыми мѣхомъ. Заключение: треніемъ возбуждаются 2 рода электричества и только 2. Два тѣла, наэлектризованные однородно, отталкиваются, разнородно притягиваются. Положительное и отрицательное электричество.

III. Всякое тѣло можетъ быть наэлектризовано и $+$ и $-$ въ зависимости отъ натирателя. Вышеприведенный опытъ съ каучукомъ; стекло электризуется часто отрицательно при натираніи шерстью, сургучъ при натираніи пробкой положительно.

IV. Какъ въ этомъ, такъ и при остальныхъ опытахъ представляется ученикамъ продолжать испытанія съ любыми, ими заготовленными, матеріалами.

IV. Электризація проводимостью. Испытаніе и распредѣленіе различныхъ тѣлъ по ихъ относительной проводимости.

Металлическій шаръ на уединяющей ножкѣ (напр., одинъ изъ шариковъ коллекціи Кольбе — съ вырѣзомъ) соединяется съ электроскопомъ, поставленнымъ на разстояніи 2—3 м, натянутой металлической проволокой. Листочки электроскопа расходятся при прикосновеніи къ шару наэлектризованной палочкой, спадаются при прикосновеніи къ шару пальца. Тотъ же опытъ съ замѣною проволоки шелковой нитью. Электроскопъ не показываетъ признаковъ электризаціи. Тотъ же опытъ послѣ смачиванія шелковой нити — листочки электроскопа вновь расходятся и опадаютъ. Испытаніе большого числа тѣлъ. Выводъ: нѣтъ существеннаго различія между проводниками и непроводниками, тѣла различаются лишь степенью проводимости; и дурные проводники медленно проводятъ. Учащіеся составляютъ таблицу различнаго рода тѣлъ какъ твердыхъ, такъ и жидкихъ: хорошихъ проводниковъ, полу-проводниковъ и дурныхъ. Воздухъ: сухой и влажный. Опытъ.

V. Испытаніе проводимости стекла. На раздвинутыхъ стержняхъ разрядника Генлея укрѣпляется стеклянная палочка длиной 10—15 см. 1-ый стержень соединяется металлически съ далеко стоящимъ электроскопомъ, 2-ой электризуется прикосновеніемъ

натертой палочки. Электроскопъ не показываетъ признаковъ электризации, но, при сильномъ нагрѣваніи стекла въ не коптящемъ пламени горѣлки Бунзена, оно начинаетъ проводить, и заряденіе передается электроскопу. Тотъ же результатъ при смачиваніи стекла.

NB. Случайное прикосновеніе пламени горѣлки къ стержню, соединенному съ заряженнымъ электроскопомъ, мгновенно разряжаетъ его. Наблюденіе ведетъ работающаго къ повѣрочнымъ опытамъ и къ самостоятельному объясненію явленія разряжающаго дѣйствія пламени.

VI. Въ разнородныя тѣла могутъ быть наэлектризованы трениемъ. Для доказательства необходимости изоляціи металловъ непроводящими ручками или подставками.

VII. При треніи возбуждаются оба рода электричества. По *G. и S. Wiedemann*—флинтгласовая палочка, длиной 2—3 ддм. съ укрѣпленными на концахъ ея легкими деревянными кружками, покрытыми одинъ амальгам. кожей, другой мѣхомъ. Другая такая же палочка съ кружкомъ изъ стекла и рогового каучука. Двойное Вейнгольдово стремя. Стекло натирается кожей, каучукъ мѣхомъ. Палочки подвѣшиваются поочередно въ стремяна, причемъ замѣчается, что какъ стекло и каучукъ, такъ и мѣхъ и кожа наэлектризованы, такъ какъ притягиваются ладонью руки. Еще сильнѣе притяженіе между стекломъ и кожей, равно какъ между мѣхомъ и каучукомъ. Между стекломъ и мѣхомъ, каучукомъ и кожей, наоборотъ, замѣчается отталкиваніе.

VIII. При натираніи оба разнородныхъ электричества возбуждаются въ равномъ количествѣ. На цилиндрическую сургучную палочку надѣвается замшевая гильза (палецъ отъ перчатки) на шелковой нити. Палочка натирается вращеніемъ, затѣмъ вынимается изъ гильзы и, помощью бузиновыхъ маятниковъ, обнаруживается, что оба тѣла наэлектризованы и притомъ противоположно, такъ какъ свободно подвѣшенная на шелковой нити гильза притягивается сургучной палочкой. Чувствительный же электроскопъ, къ которому приближается вновь натертая палочка съ неснятой гильзы, не показываетъ признаковъ электризації. Оба электричества возбуждаются въ равномъ количествѣ. (Повѣрка опыта въ свое время помощью цилиндра Фарадея съ электрометромъ Кольбе).

II.

Конспектъ примѣрной работы изъ „Повторенія и развитія классныхъ опытовъ“.

Тема: Опыты съ разряднымъ токомъ Лейденской батареи.

Приборы: Машина Теппера—Гольца, батарея изъ 6-ти Лейденскихъ банокъ, мѣрная банка Лане, разрядникъ Генлея, разряд-

никъ Рисса,—образуютъ цѣпь, весьма удобную для разрядовъ *). Опыты производятся въ слѣдующей послѣдовательности:

I. Пробиваніе картона и стекла.

II. Разбрасываніе жидкости.

III. Расширеніе воздуха.

IV. Зажиганіе пороха при разрядѣ, замедленномъ введеніемъ въ цѣпь трубки, наполненной водой.

V. Плавленіе металловъ (послѣ многихъ неудачъ, ученики остановились на полоскахъ тончайшаго алюминіева листочка и волоконцахъ отслужившихъ электрическихъ лампочекъ).

VI. Фосфоресценція мыла и препаратовъ стронція.

VII. Намагничиваніе стальной иглы.

Для выясненія причины неудачи первыхъ опытовъ плавленія металловъ, немногими учениками были произведены надлежащіе измѣренія и вычислена приблизительно кинетическая и тепловая энергія разряда батареи изъ 6 средней величины банокъ—разрядное разстояніе 10 mm.

$$\text{Емкость} = \frac{9459}{9.10''} \text{ фарадъ.}$$

Запасъ энергіи 5,35 джоулей = 0,5456 килограмметровъ = 0,00128 калорій.

Для удаи опытовъ, нужно, слѣдовательно, взять проволоку настолько тонкую, чтобы сантиметръ ея вѣсилъ не болѣе 1—2 миллиграммовъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Ежедвухнедѣльные дополненія къ журналу „Die Fortschritte der Physik“.—Съ этого года подъ редакціей K. Scheel'я и R. Assmann'a началъ издаваться новый библиографическій журналъ „Das halbmönatliche Litteraturverzeichnis“, задача котораго состоитъ въ томъ, чтобы давать, по возможности скоро, списки всѣхъ вышедшихъ въ послѣдніе дни физическихъ работъ и изданій; этимъ значительно дополняется то, что давалъ существовавшій до сихъ поръ журналъ „Die Fortschritte Physik“.

74-й съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей. Ближайшій (74-ый) съѣздъ германскихъ естествоиспытателей и врачей соберется въ Карлсбадѣ 21—27 сентября н. с. 1902 года.

*) Weinhold—„Physikalische demonstration“, стр. 650.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 184 (4 сер.). Определить точку такъ, чтобы сумма ея разстояній отъ четырехъ данныхъ точекъ на плоскости была бы наименьшая.

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 185 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^6 + x^2 z^2 + x^2 z = 0,$$

$$y^6 + y^2 z^2 + y^2 z = 0,$$

$$x + y + z = 0.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 186 (4 сер.). Доказать, что выражение

$$5(6x^2 - x - 4)^m + 3(4x^3 + 3x - 6)^n,$$

гдѣ m и n суть цѣлыя положительныя числа, не можетъ быть квадратомъ цѣлаго многочлена съ цѣлыми коэффициентами.

Н. С. (Одесса);

№ 187 (4 сер.). Четверть круга AOB вращается вокругъ радіуса OB . На какомъ разстояніи OP отъ центра O надо провести прямую PD , параллельную прямой OA , чтобы кольцо, описанное отрезкомъ CD , отсекаемымъ между хордой AB и окружностью, имѣло данную площадь πm . Найти maximum этой площади при измѣненіи разстоянія OP отъ O до $OB=a$?

(Bacc. lettres-math., Alger, novembre 1900).

№ 188 (4 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи n число

$$n^2(n^2 - 4)(n^2 - 16)$$

дѣлится на 11520.

Заимств. изъ *Casops.*

№ 189 (4 сер.). Сила тока постоянной батареи равна 10 амперамъ, если внѣшнее сопротивленіе равно 10 омамъ; она равна 8 амперамъ, при внѣшнемъ сопротивленіи въ 10 омовъ, и 9 амперамъ, при внѣшнемъ сопротивленіи въ x омовъ. Определить сопротивленіе батареи R и внѣшнее сопротивленіе x ?

Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

№ 76 (4 сер.). Построить треугольник ABC по сторонамъ b и c , зная, что уголъ A этого треугольника вдвое больше угла B .

I. Предполагая задачу рѣшенной, отложимъ на продолженіи стороны BA часть $AD=AC=b$ и соединимъ точки D и C прямой. Затѣмъ проведемъ медиану CE треугольника BDC . Тогда $\angle ADC=\angle ACD$; $\angle ADC+\angle ACD=\angle BAC$, или $2\angle ADC=\angle BAC$, откуда $\angle ADC=\frac{\angle BAC}{2}=\angle B$. Поэтому $BC=CD$, и слѣдовательно, $CE \perp BD$. Отсюда вытекаетъ построение; на произвольной прямой откладываемъ $BA=c$, $AD=b$ (причемъ AD — продолженіе BA), возставляемъ изъ E , середины BD , перпендикуляръ къ BD и изъ точки A дѣлаемъ засѣчку C радиусомъ $AD=b$ на этомъ перпендикулярѣ. Треугольникъ ABC есть искомый.

II. Предполагая задачу рѣшенной, проводимъ биссекторъ AF треугольника ABC . Тогда $\frac{BF}{FC}=\frac{c}{b}$, $BF+FC=a$, откуда $FC=\frac{ab}{b+c}$. Но $\angle AFC=\angle BAF+\angle B=2\angle B=\angle A$. Поэтому треугольники FAC и ABC подобны, откуда слѣдуетъ пропорція: $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{FC}$ или $\frac{a}{b}=\frac{b(b+c)}{ab}$, откуда $a^2=b(b+c)$. Слѣдовательно сторону a искомага треугольника можно построить, какъ среднюю пропорціональную между отрезками b и $b+c$; зная a , строимъ треугольникъ ABC по тремъ сторонамъ.

М. Пучковскій (Умань); А. Берковичъ (Кіевъ); Избинскій (Кіевъ); Х. У. (Москва); М. Поповъ (Асхабадъ); А. Сорокинъ (Москва); М. Семеновскій (Перновъ); Г. Огановъ (Эривань); В. Чеботаревъ (Новочеркасскъ); Б. Д. (К.); Д. Коварскій (Двинскъ); В. Гудковъ (Свеаборгъ); Б. Заславскій (Полтава).

№ 83 (4 сер.). Пересечь данный треугольникъ ABC ступеней, встрѣчающей стороны AB и BC соответственно въ точкахъ D и E такъ, чтобы отрезки BD , DE и EC были пропорціональны даннымъ отрезкамъ m , n и p .

Предположимъ, что задача рѣшена. Отложимъ на сторонѣ AB отрезокъ $BD'=m$ и черезъ точку D' проведемъ прямую, параллельную DE до встрѣчи въ точкѣ E' со стороною BC . Соединимъ точки C и D прямой, отложимъ отрезокъ $CE''=p$ и черезъ точку E'' проведемъ прямую, параллельную, DE до встрѣчи въ точкѣ D'' съ прямой DC . Тогда

$$\frac{D'E'}{BD'}=\frac{DE}{BD}=\frac{n}{m}, \quad \frac{D'E''}{CE''}=\frac{DE}{CE}=\frac{n}{p},$$

откуда, — замѣчая, что $BD'=m$, $CE''=p$, — находимъ:

$$D'E'=D'E''=n.$$

Отсюда вытекаетъ построение. Отложивъ на сторонѣ AB отрезокъ $BD'=m$, дѣлаемъ изъ точки B' радиусомъ, равнымъ отрезку n , засѣчку E' на сторонѣ BC ; откладываемъ на сторонѣ CB отрезокъ $CE''=p$ и строимъ отрезокъ $E''D''$, равный и параллельный отрезку $D'E'=n$; затѣмъ, продолживъ прямую CD'' до встрѣчи въ точкѣ D со стороною BC , проводимъ черезъ

точку D параллельно $D'E'$ до встрѣчи въ точкѣ E со стороной BC . Отрѣзокъ DE есть искомый. Для того, чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы окружность, описанная радиусомъ n изъ точки D' , встрѣчала прямую BC . Задача вообще допускаетъ 4 рѣшенія, смотря по тому, какую изъ засѣчекъ E' мы приѣмемъ во вниманіе или же въ какомъ изъ двухъ возможныхъ направлений мы отложимъ отрѣзки CE'' и $E''D''$; но можетъ случиться такъ, что нѣкоторые изъ этихъ рѣшеній (и даже всѣ) не удовлетворяютъ условію, чтобы точки D и E лежали на сторонахъ AB и BC (а не на ихъ продолженіи).

М. Поповъ (Асхабадъ); *Б. Мерцаловъ* (Москва); *В. Толстовъ* (Тамбовъ); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *Б. Заславскій* (Полтава).

№ 102 (4 сер.). Построить треугольникъ по основанію его a , данному по положенію и величинѣ, и прилежащему къ основанію углу B , зная, что прямая, соединяющая середины основанія и высоты, проходитъ черезъ данную точку M .

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть BC — данное по положенію и величинѣ основаніе искомага треугольника ABC , E — середина основанія BC , $\angle ABC = \alpha$ — данный уголъ, AD — высота треугольника, F — середина высоты. Точка F лежитъ на геометрическомъ мѣстѣ срединъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ прямой AB на прямую BC . Это геометрическое мѣсто есть, какъ извѣстно, прямая, соединяющая середину одного изъ этихъ перпендикуляровъ съ точкой B . Отсюда вытекаетъ построеніе. Строимъ при точкѣ B прямой BC уголъ XBC , равный α ; изъ произвольной точки A' прямой BX опускаемъ перпендикуляръ $A'D'$ на прямую BC и соединяемъ прямой его середину F' съ точкой B ; соединивъ прямой точки E и M , опускаемъ изъ точки пересѣченія F прямыхъ BF' и EM (прямая эти должны пересѣкаться, если только задача возможна) перпендикуляръ на прямую BC и продолжаемъ этотъ перпендикуляръ до встрѣчи въ точкѣ A съ прямой BX . Треугольникъ ABC есть искомый.

Г. Огановъ (Эривань); *Д. Г.* (Москва); *В. Чеботаревъ* (Капачъ н/Д.); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *М. Семеновскій* (Перновъ); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 114 (4 сер.). Найти целое число, удовлетворяющее неравенству

$$x^4 + 2x^3 - (2A - 1)x^2 - 2Ax + A(A - 1) < 0,$$

гдѣ A — данное положительное число.

Всегда ли возможна задача, и сколько рѣшеній допускаетъ она въ случаѣ возможности?

Пользуясь тождествомъ

$$x^4 + 2x^3 - (2A - 1)x^2 - 2Ax + A(A - 1) = x^3 + 2x^3 - Ax^2 - (A - 1)x^2 - 2Ax + A(A - 1),$$

группируя во второй части члены по два: 1-й и 3-й, 2-й и 5-й и 4-й и 6-й и выводя въ этихъ группахъ за скобки соответственно x^2 , $2x$ и $-(A - 1)$, приводимъ наше выраженіе къ виду:

$$x^2(x^2 - A) + 2x(x^2 - A) - (A - 1)(x^2 - A) = (x^2 - A)(x^2 + 2x + 1 - A),$$

или

$$(x^2 - A) [(x + 1)^2 - A].$$

Задача сводится къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній неравенства

$$(x^2 - A) [(x + 1)^2 - A] < 0 \quad (1).$$

Если $A > 0$, то задача сводится къ нахожденію такого значенія x , при которомъ разности $x^2 - A$ и $(x+1)^2 - A$ противны по знаку.

Полагая x положительнымъ, найдемъ, что первая разность меньше второй, и потому остается допустить, что

$$x^2 - A < 0, \quad (x+1)^2 - A > 0,$$

или, что

$$(x+1)^2 > A > x^2.$$

Предполагая x положительнымъ, найдемъ, что x есть арифметическій корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ положительномъ числѣ A , т. е., *приближенный* цѣлый арифметическій корень квадратный изъ положительнаго числа. Такой корень всегда можно найти если A не есть квадратъ цѣлаго числа; если же A точный квадратъ цѣлаго числа, задача невозможна. Обозначимъ арифметическое значеніе приближеннаго корня изъ A черезъ α въ томъ случаѣ, когда A не есть точный квадратъ цѣлаго числа. Тогда, кромѣ рѣшенія $x = \alpha$, существуетъ еще лишь одно рѣшеніе неравенства (1), именно $x = -(\alpha + 1)$.

Н. Готлибъ (Митава); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Б. Д. (К.)*; *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 116 (4 сер.). Доказать, что

$$(a+b+c)^3 \leq 9(a^3+b^3+c^3),$$

гдѣ a, b и c — некоторыя положительныя числа.

Положимъ

$$a+b+c=3x,$$

$$a=x+\alpha, \quad b=x+\beta, \quad c=x+\gamma,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma=0. \quad (1)$$

Тогда (см. (1))

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 3x^3 + 3(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x + \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = \\ &= 3x^3 + \alpha^2(3x+\alpha) + \beta^2(3x+\beta) + \gamma^2(3x+\gamma) = \\ &= 3x^3 + x^2(2x+\alpha) + \beta^2(2x+\beta) + \gamma^2(2x+c). \end{aligned}$$

Числа a, b, c и x положительны, а числа $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ не отрицательны, и $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=0$ лишь тогда, когда $a=b=c$. Следовательно

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3x^3 = 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3,$$

или

$$\frac{(a+b+c)^3}{9} \leq a^3+b^3+c^3, \quad \text{откуда} \quad (a+b+c)^3 \leq 9(a^3+b^3+c^3),$$

гдѣ знакъ равенства относится лишь къ тому случаю, когда $a=b=c$.

Г. Огановъ (Эривань); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 127 (4 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ, зная длины отрезковъ AD и DB , на которые катетъ AB раздѣляется биссектрисой CD .

Такъ какъ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB},$$

то точка C лежитъ на геометрическомъ мѣстѣ точекъ, разстоянія которыхъ

отъ точекъ A и B находятся въ отношеніи $\frac{AD}{DB}$. Отсюда вытекаетъ построение. На катетѣ AB откладываемъ данный отрѣзокъ AD и дѣлимъ катетъ AB въ точкѣ D' въ отношеніи $\frac{AD}{DB}$ ви́шнимъ образомъ. Затѣмъ на DD' , какъ на діаметръ, строимъ окружность, которая и представитъ собой вышеуказанное геометрическое мѣсто и въ точкѣ B возставляемъ перпендикуляръ къ AB до встрѣчи въ точкѣ C съ окружностью. Треугольникъ ABC есть искомый.

Семеновскій (Перновъ); М. Пучковскій (Умань); Б. Д. (К.); М. Поповъ (Асхабадъ).

№ 132 (4 сер.). По данной гипотенузѣ построить прямоугольный треугольникъ, зная, что уголъ между однимъ изъ катетовъ и высотой, проведенной изъ вершины прямого угла, вдвое меньше угла между тѣмъ же катетомъ и медианой, проведенной также изъ вершины прямого угла.

Пусть BC — данная гипотенуза искомага прямоугольнаго треугольника ABC , AD — его высота, AE — его медиана. По условію задачи, $\angle BAD = \frac{1}{3} \angle BAE$. Но по свойству прямоугольнаго треугольника $BE = AE$, и потому $\angle BAE = \angle B$. Слѣдовательно, $\angle BAD = \frac{1}{3} \angle B$. Но изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ:

$$\angle B + \angle BAD = d, \text{ или } \angle B + \frac{1}{3} \angle B = d,$$

откуда $\angle B = \frac{3}{4} d$. Поэтому $\angle C = d - \angle B = \frac{1}{4} d$. Опишемъ на BC , какъ на діаметръ, окружность, которая пройдетъ, какъ извѣстно, и черезъ точку A . Уголъ BEA , какъ центральный, вдвое болѣе угла C ; слѣдовательно, $\angle BEA = \frac{d}{2} = 45^\circ$; т. е., BA есть сторона правильнаго восьмиугольника, вписаннаго въ окружность, построенную на BC , какъ на діаметръ. Отсюда вытекаетъ построение: описавъ на BC , какъ на діаметръ, полуокружность, дѣлимъ ее на четыре равныя части. Пусть A — ближайшая къ B точка дѣленія. Треугольникъ ABC есть искомый.

М. Пучковскій (Умань); Г. Огановъ (Эривань); Л. Гальперинъ (Бердичевъ); М. Поповъ (Асхабадъ); Б. Д. (К.); М. Семеновскій (Перновъ).

ПОПРАВКИ.

1) Въ № 316 въ статьѣ г. Смирнова сказано, что мастерская физическихъ приборовъ подъ фирмой „Max Kohl“ находится въ Австро-Венгріи; въ дѣйствительности она находится въ г. Хемницѣ въ Саксоніи.

2) Въ № 308 въ темѣ для сотрудниковъ указанъ срокъ темы 15/VI 1901 г. вмѣсто 15/VI 1902 г. Врядъ ли эта опечатка могла кого-либо ввести въ заблужденіе, потому что № 308 вышелъ 15/XI 1901 г.

Редакторы: В. А. Циммерманъ и В. Ф. Каганъ.

Издатель В. А. Гернеть.

Дозволено цензурою, Одесса 26-го Апрѣля 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
щется

Обложка
щется