Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXVII Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

15 Января № 313. 1902 г.

XI съѣздъ

Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Секція чистой математики и механики.

Трудны отвлеченныя математическія науки и невелико число лицъ, посвящающихъ себя ихъ изученію. Секція чистой математики на съѣздахъ принадлежитъ всегда къ числу менѣе людныхъ. При всемъ томъ, какъ мы имѣли уже случай упомянуть въ замѣткѣ, помѣщенной въ предыдущемъ номерѣ, наша секція на сей разъ превзошла ожиданія Распорядительнаго Комитета. Отведенная ей аудиторія почти всегда была полна, — а иногда членамъ секціи приходилось даже стоять за недостаткомъ мѣста. Обѣ каѳедры — чистой математики и механики — всѣхъ университетовъ были представлены на съѣздѣ старшими своими представителями; только профессоровъ *чистой* математики Московскаго и Новороссійскаго Университета не было; были только доценты. Завѣдывали секціей профессора Ю. В. Сохоцкій и Д. К. Бобылевъ, постоянными секретарями были приватъ-доценты Д. Ф. Селивановъ и И. В. Мещерскій.

Секція имѣла семь засѣданій и кромѣ того два засѣданія съ преподавателями математики въ Педагогическомъ Музеѣ. Засѣданія секціи начались 21-го декабря. Послѣ краткой рѣчи профессора А. В. Васильева, посвященной памяти сошедшихъ въ теченіе послѣднихъ трехъ лѣтъ (т. е послѣ X-го съѣзда) въ могилу профессоровъ М. Ѳ. Ковальскаго (Харьк. Ун.), П. М. Покровскаго (Кіевск. Ун.) и П. С. Назимова (Казан. Ун.), секція приступила къ занятіямъ.

Не легко прореферировать на страницахъ „Вѣстника“ дѣятельность математической секціи. Большинство докладовъ относятся къ спеціальнымъ отдѣламъ высшей математики и механики и выходятъ далеко за предѣлы программы нашего журнала. Мы вынуждены поэтому ограничиться обзоромъ тѣхъ докладовъ, которые имѣютъ болѣе или менѣе общій интересъ или которые, по крайней мѣрѣ, поддаются изложенію въ элементарной формѣ.

Къ числу такихъ докладовъ принадлежитъ сообщеніе профессора Г. Ѳ. Вороного, которое было сдѣлано на первомъ засѣданіи секціи. Сообщеніе это, озаглавленное „Расширеніе понятія о предѣлѣ суммы безконечнаго ряда“, относится къ возрождающейся въ послѣднее время теоріи расходящихся рядовъ“. Мы говоримъ „возрождающейся“, потому что еще въ прошломъ вѣкѣ и даже въ началѣ текущаго вѣка математики пользовались расходящимися рядами, строили на нихъ различныя доказательства, дѣлали выводы, которые часто оказывались правильными,—часто ложными. Нужна была цѣлая полемическяя литература, чтобы заставить математиковъ отказаться трактовать расходящіеся ряды точно такъ-же, какъ сходящіеся — и на долгое время они исчезаютъ изъ текущей математической литературы. Въ послѣдніе годы, однако, теорія расходящихся рядовъ вновь оживаетъ, или вѣрнѣе, только возникаетъ, какъ строго развитая математическая теорія.

Если мы говоримъ, что рядъ

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots\ u_n\ \ldots\ldots$$

сходится, то это значитъ, что сумма

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

стремится къ опредѣленному конечному предѣлу, когда число n неопредѣленно возрастаетъ. Если ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n \ldots\ldots \qquad (2)$$

сходятся и даютъ суммы u и v, то сходятся ряды

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots\ldots + (u_n \pm v_n) \ldots\ldots$$

и даютъ сумму равную $u \pm v$.

Если сверхъ того сходится рядъ

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots\ldots \qquad (3)$$

то его сумма равна произведенію $u.v$ *).

Положимъ теперь, что для ряда (1) выраженіе s_n не имѣетъ опредѣленнаго предѣла, когда n неопредѣленно возрастаетъ. Тогда обычное установившееся понятіе о суммѣ ряда для него не существуетъ. Возникаетъ вопросъ: нельзя ли все-же установить и для такого ряда понятіе о суммѣ такъ, чтобы сохранить тѣ свойства суммы, которыя формулированы выше въ примѣненіи къ сходящимся рядамъ. Еще иначе, нельзя ли построить болѣе общее понятіе о суммѣ ряда, которое совпадало бы съ обычнымъ для рядовъ сходящихся, и вмѣстѣ съ тѣмъ было бы примѣнимо къ расходящимся рядамъ и сохраняло бы основныя свойства суммы сходящагося ряда.

Еще Cesàro указалъ, что такое обобщеніе можетъ быть сдѣлано. Именно, если рядъ (1) сходится и имѣетъ сумму u, то можно показать, что

$$u = \lim \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n}{n} \quad n = \infty$$

т. е. u есть предѣлъ, къ которому стремится среднее ариѳметическое изъ суммъ s_1, s_2, s_3, ... s_n, когда n неопредѣленно возрастаетъ. Но выраженіе

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n}{n} \tag{4}$$

можетъ имѣть опредѣленный предѣлъ и въ томъ случаѣ, когда рядъ (1) расходится. Итакъ, если мы будемъ разумѣть подъ суммой ряда предѣлъ выраженія (4), то эта сумма для сходящихся рядовъ будетъ совпадать съ суммой ряда, какъ мы ее понимаемъ обыкновенно. Но оно можетъ имѣть примѣненіе и къ такимъ рядамъ, которые расходятся въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова. Можно также показать, что для суммы ряда въ этомъ новомъ смыслѣ слова остаются справедливыми основныя теоремы о сложеніи и умноженіи рядовъ.

Однако, это расширеніе понятія о суммѣ расходящагося ряда не идетъ далеко, потому что расходящіеся ряды, для которыхъ выраженіе имѣетъ все-же опредѣленный предѣлъ, сравнительно рѣдки. Чтобы пойти въ этомъ направленіи дальше, Cesàro предлагаетъ принять за сумму рядовъ предѣлъ отношенія

$$\frac{a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \ldots\ldots + a_n s_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}, \tag{5}$$

гдѣ $a_1, a_2 \ldots a_n$ представляютъ собой надлежащимъ образомъ выбранныя положительныя числа; это тоже въ извѣстномъ смыслѣ есть среднее

*) Если ряды (1) и (2) сходятся *абсолютно*, то рядъ (3) необходимо также сходится.

между количествами $s_1, s_2 \ldots . s_n$, — но имъ приписаны вѣса $a_1, a_2 \ldots . a_n$. Въ этомъ порядкѣ идей, написана и работа Borel'я, премированная Парижской Академіей Наукъ.

Неудобство этого пріема заключается въ томъ, что если выраженіе (5) и имѣетъ опредѣленный предѣлъ, то онъ можетъ имѣть различныя значенія, если мы различнымъ образомъ установимъ вѣса $a_1, a_2 \ldots . a_n$. Понятіе о суммѣ ряда становится вслѣдствіе этого неопредѣленнымъ.

Профессоръ Г. Ѳ. Вороной предлагаетъ новое опредѣленіе суммы ряда, способное служить къ расширенію этого понятія. Онъ ставитъ вопросъ слѣдующимъ образомъ.

Ариѳметически расходящимся рядомъ называется рядъ, члены котораго удовлетворяютъ условію: существуетъ такой показатель λ, что $\frac{s}{n^\lambda}$ остается конечнымъ при безпредѣльномъ возрастаніи числа n.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ расходящійся рядъ

$$u_0, u_1, u_2 \ldots \ldots u_n \ldots . \tag{6}$$

Составимъ произвольный ариѳметически расходящійся рядъ, состоящій изъ положительныхъ членовъ

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_n \ldots .$$

За сумму ряда (6) г. Вороной предлагаетъ принять предѣлъ выраженія

$$\frac{u_0\varphi_n + u_1\varphi_{n-1} + u_2\varphi_{n-2} + \ldots . u_n\varphi_0}{\varphi_n}$$

если такой предѣлъ существуетъ. Онъ обнаруживаетъ, что предѣлъ этотъ, буде онъ существуетъ, совершенно не зависитъ отъ выбора количествъ φ, лишь бы они составляли ариѳметически расходящійся рядъ. Г. Вороной обнаруживаетъ также, что при этомъ новомъ опредѣленіи суммы ряда остаются въ силѣ теоремы о сложеніи и умноженіи рядовъ. Докладчикъ показалъ примѣры сходящихся рядовъ, къ которымъ примѣняется его теорія и высказалъ убѣжденіе, что расширеніе понятія о суммѣ ряда можетъ оказаться существенно полезнымъ, какъ для теоріи функцій, такъ и въ приложеніяхъ математики.

Принципіальное значеніе имѣлъ также и другой докладъ, сдѣланный проф. Воронымъ и относившійся къ теоріи вѣроятностей. Г. Вороной указалъ на извѣстный дефектъ въ опредѣленіи понятія о вѣроятности, когда разсматриваемое явленіе слагается изъ безчисленнаго множества элементовъ. Вѣроятность вычисляется въ этомъ случаѣ способомъ предѣловъ и теоретически нѣтъ никакихъ основаній утверждать, что вѣроятность, вычисленная различными способами даетъ одно и то-же значеніе. Въ этомъ отношеніи весьма любопытно подходить къ одной и той же задачѣ съ различныхъ сторонъ и провѣрять согласіе результатовъ.

Въ теоріи вѣроятностей пользуется извѣстностью такъ называемая задача Чебышева, которая заключается въ слѣдующемъ. Какъ велика вѣроятность, что написанная наудачу раціональная дробь несократима. Общеизвѣстное рѣшеніе, предложенное П. Л. Чебышевымъ, даетъ для этой вѣроятности значеніе $\frac{6}{\pi^2}$. Профессоръ Вороной изложилъ другое рѣшеніе этой задачи, совершенно отличное отъ рѣшенія Чебышева, но дающее, однако, тотъ-же результатъ.

Интересное сообщеніе по теоріи вѣроятностей было сдѣлано также г-номъ П. С. Флоровымъ, именно имъ было изложено элементарное доказательство теоремы Якова Бернулли. Благодаря любезному предложенію автора мы будемъ имѣть возможность напечатать это сообщеніе цѣликомъ.

Къ числу интересныхъ сообщеній, доступныхъ нашему изложенію, принадлежатъ два доклада г-на И. И. Бѣлянкина, содержавшія любопытныя обобщенія теоремъ Гильдена. Сущность этихъ теоремъ изложена въ статьѣ г-на Веребрюсова, помѣщенной въ № 303 „Вѣстника“ *). Такъ II теорема Гильдена заключается въ томъ, что объемъ тѣла, описаннаго площадью плоской кривой при ея вращеніи вокругъ оси, лежащей въ ея плоскости, но не пересѣкающей этой кривой, равняется произведенію изъ площади, ограниченной этой кривой, на длину окружности, пройденной ея центромъ тяжести. Г-нъ Бѣлянкинъ показалъ, что эта теорема допускаетъ значительное обобщеніе. Въ наиболѣе общемъ видѣ онъ формулируетъ ее слѣдующимъ образомъ: если данный объемъ V можно представить выдавленнымъ въ пространствѣ нѣкоторой постоянной по размѣрамъ и (непрерывно) перемѣнной по формѣ плоской площади P, двигавшейся такъ, что ея плоскость всегда оставалась нормальной къ нѣкоторой кривой двоякой кривизны (L) въ перемѣнной точкѣ A послѣдней, при чемъ центръ тяжести g однородной площади P двигался такъ, что проекція вектора Ag на главную нормаль кривой (L) въ точкѣ A, находилась въ постоянномъ отношеніи m къ радіусу Q первой кривизны кривой (L) въ точкѣ A, то объемъ V равняется $(1-m)$ разъ взятому произведенію изъ величины площади P и изъ длины S пути, пройденнаго точкой A по кривой (L).

Въ частности, если точка A совпадаетъ съ центромъ тяжести площади, то $m=0$. Теорема формулируется въ этомъ случаѣ такимъ образомъ: объемъ V равняется произведенію изъ площади P на длину кривой L.

Въ засѣданіи 28-го декабря приватъ-доцентъ В. Ф. Каганъ сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: „Система посылокъ, опредѣляющихъ евклидову геометрію“.

Докладчикъ сообщилъ, что онъ нашелъ систему посылокъ,

*) А. Веребрюсовъ; „Элементарное доказательство теоремъ Гильдена“.

независимость которыхъ онъ имѣетъ возможность аналитически доказать, достаточныхъ для формальнаго построенія системы евклидовой геометріи. Этихъ посылокъ семь, и заключаются онѣ въ слѣдующемъ:

1) Между любыми двумя точками, на любомъ разстояніи отъ одной изъ нихъ имѣется промежуточная точка.

2) Если двѣ точки расположены прямолинейно относительно двухъ другихъ, то любыя три изъ этихъ четырехъ точекъ расположены прямолинейно.

3) Вращеніемъ вокругъ двухъ точекъ A и B можно любую точку C привести въ совмѣщеніе съ любой точкой C', если только $AC=AC'$ и $BC=BC'$.

4) Въ пространствѣ существуетъ плоскость.

5) Если плоскость остается въ пространствѣ неподвижной, то никакое перемѣщеніе точекъ пространства уже невозможно.

6) Если мы имѣемъ на треугольникѣ ABC периферическую точку D, не совпадающую съ вершиной, и не периферическую точку E, въ этой плоскости лежащую, то чрезъ точки D и E проходитъ прямая, которая пересѣкаетъ треугольникъ еще въ одной периферической точкѣ (Аксіома Pasch'а).

7) Постулатъ Евклида.

Всѣ эти утвержденія получаютъ опредѣленное содержаніе лишь въ томъ случаѣ, если надлежащимъ образомъ установлено значеніе входящихъ въ нихъ терминовъ. Это было сдѣлано во время доклада и будетъ обстоятельно изложено въ спеціальномъ сочиненіи.

Новымъ явленіемъ для съѣзда было появленіе дамъ на каѳедрѣ математической секціи. Большой успѣхъ имѣло сообщеніе г-жи Н. Н. Гернетъ „О новыхъ основаніяхъ варіаціоннаго исчисленія“. Докладчица изложила новый методъ Hilbert'а для рѣшенія основной задачи варіаціоннаго исчисленія и сдѣланное ею распространеніе идеи Hilbert'а на случай двухъ неизвѣстныхъ функцій. Намъ трудно судить, въ какой мѣрѣ важны здѣсь собственныя изслѣдованія г-жи Гернетъ, но слушателямъ было ясно, что она, будучи еще молодымъ начинающимъ математикомъ, сумѣла разобраться во всѣхъ деталяхъ этой трудной задачи. Это несомнѣнно говоритъ въ пользу присущаго ей математическаго дарованія и мы отъ души желаемъ ей успѣха.

Сообщеніе дѣлала также г-жа Е. Ѳ. Литвинова, изложившая свое рѣшеніе задачи „О превращеніи одной Римановой поверхности въ кругъ“.

Активное участіе дамъ въ трудахъ секціи послужило поводомъ возбудить ходатайство о допущеніи женщинъ въ Университеты. Къ сожалѣнію, это ходатайство не прошло въ Распорядительномъ Комитетѣ.

Заканчивая обзоръ занятій секцій, посвященныхъ чисто научнымъ вопросамъ, мы считаемъ нужнымъ повторить, что мы останавливались только на тѣхъ докладахъ, которые по своему содержанію могутъ быть изложены на страницахъ нашего журнала.

Занятія секціи лишній разъ показали, что въ установившемся порядкѣ занятій на съѣздахъ есть много нецѣлесообразнаго. Вслѣдствіе крайне ограниченнаго времени, удѣляемаго каждому докладчику, онъ бываетъ вынужденъ излагать свои мысли крайне сжато, и трудный математическій матеріалъ становится мало доступнымъ. За рѣдкимъ докладомъ можно услѣдить во всѣхъ деталяхъ, а потому оживленныхъ преній было сравнительно мало. Еще на X-омъ съѣздѣ въ Кіевѣ былъ поставленъ вопросъ о томъ, что въ секціи были бы въ высшей степени полезны и интересны обзоры, посвященные изложенію новыхъ работъ и изслѣдованій по новѣйшимъ вопросамъ текущей литературы. Въ секціи физики такіе обзоры дѣйствительно были и оказались чрезвычайно полезными аудиторіи. Надо надѣяться, что Распорядительный Комитетъ будущаго Одесскаго Съѣзда возьметъ на себя иниціативу и постарается привить обычай подготовленія такихъ обзоровъ и для секціи чистой математики.

Мы обратимся теперь къ тѣмъ занятіямъ секціи, которыя были посвящены педагогическимъ вопросамъ.

Пр. Доц. В. Каганъ.

Педагогическая замѣтка по поводу „формулы центростремительной силы".

Проф. Н. Шиллера въ Кіевѣ.

Настоящая замѣтка вызвана „Выводомъ формулы центростремительной силы", помѣщеннымъ въ № 307 „*Вѣстника Опытной Физики*". Почтенный авторъ „Вывода" весьма справедливо порицаетъ тотъ способъ разсужденія о центростремительной силѣ, который онъ называетъ обычнымъ въ средней школѣ, хотя мотивы упомянутаго порицанія, приводимые авторомъ, имѣютъ, по моему разумѣнію, второстепенное значеніе, и существуютъ болѣе вѣскія основанія разсматривать цитируемый обычный способъ вывода, какъ одно изъ орудій для притупленія и извращенія мыслительныхъ способностей ученика. Въ замѣну порицаемаго вывода уважаемый авторъ приводитъ иной, свой собственный, въ которомъ предполагаются устраненными недостатки „обычнаго" вывода. Тѣмъ не менѣе во мнѣ остаются весьма сильныя сомнѣнія относительно педагогической цѣлесообразности и этого новаго вывода. Выясненіе упомянутыхъ сомнѣній составляетъ цѣль настоящей замѣтки.

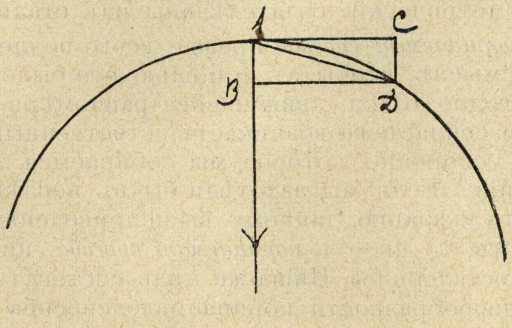
Прежде всего я позволю себѣ обратить вниманіе читателя на весьма часто практикуемое злоупотребленіе аргументомъ: „ученикъ не пойметъ" того или другого хода разсужденій. На основаніи такого утвержденія весьма часто необходимая цѣпь умозаключеній или совершенно исключается изъ объясненія чего либо такому „непонимающему ученику", или замѣняется на сей конецъ придуманной аргументацiей, въ которой болѣе или менѣе искусно затушевываются тѣ положенія, которыхъ „ученикъ не можетъ понять". Какъ на примѣры достаточно указать на объясненіе измѣненія вѣса тѣла на различныхъ широтахъ земной поверхности при помощи „развивающейся отъ земного вращенія центробѣжной силы", на „доказательство" принципа Паскаля при помощи спринцовки, на объясненіе дѣйствія конденсатора при помощи „связаннаго электричества", на общераспространенный предразсудокъ, будто описаніе явленій интерференціи и поляризаціи невозможно, безъ введенія гипотезы о „колебаніяхъ частицъ эѳира", и тому подобное.

Если приглядѣться внимательнѣе къ большинству доказательствъ, „трудныхъ для пониманія учениковъ", то почти всегда окажется, что подобныя доказательства мало убѣдительны не для однихъ только учениковъ и что въ нихъ нарушается тотъ свойственный человѣческому уму порядокъ обсужденія вещей, на основаніи коего обсуждаемыя вещи считаются нами понятыми. Для поясненія вышесказаннаго приведемъ нѣсколько примѣровъ весьма обычнаго неправильнаго построенія разсужденій о физическихъ явленіяхъ.

Нить, одинъ конецъ коей закрѣпленъ неподвижно, а другой конецъ привязанъ къ камню, натягивается, когда на камень подѣйствуетъ сила въ направленіи нити. Съ другой стороны, та же нить натягивается, когда камень, прикрѣпленный къ одному ея концу приведенъ во вращательное движеніе около другого ея конца. Слѣдовательно, умозаключается часто, въ этомъ послѣднемъ случаѣ на камень дѣйствуетъ центробѣжная сила. Такое разсужденіе было-бы понятно, если-бы нельзя было себѣ представить, что нить будетъ также натянута и тогда, когда сила, дѣйствующая въ ея направленіи, будетъ приложена не къ камню, но непосредственно только къ концу нити, скрѣпленному съ камнемъ. Слѣдовательно, для случая вращающагося камня нужно еще рѣшить вопросъ о томъ, дѣйствуетъ-ли центробѣжная сила на камень или на нить. Вопросъ рѣшается при помощи новаго положенія, что утвержденіе о дѣйствіи на данное тѣло силы можетъ только тогда имѣть мѣсто, когда указано другое тѣло, подверженное дѣйствію равной и прямопротивоположной силы (третій законъ Ньютона).

Представимъ себѣ такое явленіе. Монета положена на листъ бумаги; сообщивъ рукою листу значительную скорость, можно выдвинуть листъ изъ подъ монеты, не сдвинувши послѣдней съ мѣста. Описаніе такого факта весьма нерѣдко сопровождается объясненіемъ для „ученика“ въ томъ смыслѣ, что скорость, сообщенная листу бумаги, „не успѣетъ сообщиться“ монетѣ и листъ уйдетъ-де изъ подъ бумаги прежде чѣмъ монета успѣетъ тронуться съ мѣста. При этомъ вниманіе подвергаемаго подобному объясненію „ученика“ отвлекается, при помощи фигуры умолчанія отъ такого легко наблюдаемаго факта: лежащій подъ монетою листъ бумаги можно сдѣлать настолько длиннымъ, что извлеченіе его изъ подъ монеты, хотя и съ очень большою скоростью, будетъ длиться какъ угодно долгое время, при чемъ монета все таки не послѣдуетъ за листомъ, не смотря на то, что времени для „передачи скорости“ было-бы достаточно. То же явленіе можно воспроизвести съ помощью быстро вращающагося горизонтальнаго диска на гладкую, хорошо смазанную поверхность коего положено твердое тѣло тоже своею гладкою и хорошо смазанною поверхностью; сколько времени ни вращался-бы дискъ, скорость его никогда не передастся лежащему на немъ тѣлу.

Обратимся теперь къ двумъ интересующимъ насъ способамъ „вывода формулы центростремительной силы“. Одинъ изъ этихъ способовъ будемъ называть *порицаемымъ*, другой—*новымъ*, и будемъ ссылаться на повторенные здѣсь чертежи соотвѣтственной статьи № 307 „*Вѣстника Опытной Физики*“. Авторъ новаго способа ставитъ въ укоръ порицаемому способу то обстоятельство, что „ученикамъ представляется абсурдомъ“, какимъ образомъ скорость по катету AC прямоугольнаго треугольника ACD (фиг. 1) можетъ быть принята равною скорости по гипотенузѣ AD. Если въ порицаемомъ способѣ существенно необходимо сдѣлать такое положеніе въ началѣ вывода, до перехода къ предѣльнымъ значеніямъ разсматриваемыхъ



Фиг. 1.

величинъ, что дѣлается въ концѣ вывода, то это положеніе не только представляется абсурдомъ, но и будетъ имъ въ дѣйствительности. При изложеніи порицаемаго способа авторъ новаго способа ставитъ положеніе о равенствѣ катета и гипотенузы въ началѣ разсужденія, что дѣйствительно кладетъ отпечатокъ абсурда на дальнѣйшій способъ доказательства. Но этотъ-же авторъ прибаляетъ, что врядь-ли возможно „выяснить ученикамъ“ возможность такого положенія въ предѣлѣ, т. е. когда уголъ между катетомъ и гипотенузою становится безконечно малымъ. Но если это такъ, то тогда врядь-ли возможно „выяснить ученикамъ“ и то обстоятельство, что при α безконечно маломъ $\lim. \cos\alpha = 1$ и $\lim. \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, каковыя положенія принимаются за доказанныя при изложеніи *новаго способа*, долженствующаго быть свободнымъ отъ недостатковъ *порицаемаго*.

Постараемся очистить порицаемый способъ отъ тѣхъ коментаріевъ, которые дѣлались къ нему составителями малограмотныхъ учебниковъ съ цѣлью, повидимому, сдѣлать его якобы „понятнымъ для учениковъ“.

Въ пересказѣ *порицаемаго способа* авторомъ *новаго способа* и въ самомъ изложеніи *новаго способа* выводятся собственно выраженія для центростремительнаго ускоренія, между тѣмъ какъ оба способа наименованы выводами „формулы центростремительной силы“, при чемъ движущаяся точка постоянно называется матеріальною частицею. Поэтому оба вывода съ первыхъ-же словъ вводятъ учениковъ въ недоумѣніе, ибо дѣйствительно трудно понять и невозможно „объяснить ученикамъ“, почему для представленія себѣ круговаго движенія и его ускоренія необходимо вообразить себѣ матеріальную частицу. Изъ такого способа „выводить формулы“ ученикъ, конечно, вправѣ заключить, что, если по кругу движется не „матеріальная частица“, а положимъ, нѣкоторое свѣтлое пятно, то при этомъ движеніи ускоренія не будетъ. Если приводить весьма обычное оправданіе, что упоминаніе о „матеріальной частицѣ“ дѣлается для „наглядности“, то почему-же тогда и при изложеніи стереометріи не полагать для наглядности, что геометрическія тѣла сдѣланы изъ стали.

Итакъ, *порицаемый способъ* прежде всего подлежитъ исправленію въ томъ смыслѣ, чтобы съ помощью его было найдено ускореніе какой угодно точки, движущейся равномѣрно по кругу. При этомъ, конечно, сейчасъ-же возникаетъ естественный вопросъ, что-же это такое ускореніе, которое мы собираемся искать въ круговомъ движеніи? Если мы захотѣли-бы въ послѣдующемъ изложеніи слѣдовать указанію, данному вышеприведеннымъ естественнымъ вопросомъ, то ни отъ *порицаемаго способа*, ни отъ *новаго способа* ничего не осталось-бы. Наша-же цѣль состоитъ въ томъ, чтобы указать, что несообразности порицаемаго способа должно искать не въ томъ, на что указано авторомъ новаго способа, и что съ нѣкоторыми поправками изложенія первый способъ явится не хуже второго.

Если мы согласимся съ тѣмъ положеніемъ, что объясненіе ускоренія при помощи „матеріальной частицы“ равносильно злоупотребленію довѣріемъ ученика, то должны прійти къ заключенію, что при упомянутомъ объясненіи также неумѣстна и ссылка на дѣйствіе силы, ибо сила, согласно съ опредѣленіемъ этого понятія, дѣйствуетъ только на матерію.

Такимъ образомъ передъ нами является дилемма. Или принять за данное задачи круговое равномѣрное движеніе нѣкоторой точки (матеріальной или нѣтъ—безразлично) и разыскивать для этого случая то, что принято называть ускореніемъ,—или принять за данное то обстоятельство, что нѣкоторое искомое движеніе въ теченіе каждаго элемента времени слагается изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ движеній, изъ коихъ одно есть равномѣрное съ данною скоростію, а другое—равномѣрно ускоренное съ искомымъ ускореніемъ, причемъ также доказать, что описанное движеніе есть круговое равномѣрное. Первый способъ разсужденія наиболѣе соотвѣтствуетъ систематическому ходу изложенія основныхъ положеній механики, но въ то же время совершенно устраняетъ и *порицаемый* способъ и *новый*, въ которыхъ понятіе объ ускореніи является какъ-бы приложимымъ только къ прямолинейному равномѣрно ускоренному движенію. Поэтому, желая все таки оставаться на почвѣ *порицамаго способа*, будемъ вести разсужденіе по второй изъ двухъ вышенамѣченныхъ схемъ.

Авторъ *новаго* способа, излагая *порицаемый* способъ ставитъ утвержденіе, что точка A (фиг. 1), „принужденная двигаться" по двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, притомъ—по одному равномѣрно, а по другому—равномѣрно ускоренно, пойдетъ по діагонали параллелограмма, построеннаго на длинахъ, одновременно проходимыхъ по обоимъ упомянутымъ направленіямъ путей. Такое утвержденіе, конечно, абсалютно невѣрно, и потому не можетъ быть „понято учениками". Если точкѣ приписаны два взаимно перпендикулярныя перемѣщенія AB и AC, то результатомъ обоихъ перемѣщеній будетъ перемѣщеніе движущейся точки въ положеніе D, на концѣ діагонали параллелограмма, построеннаго на AB и AC. Но самое перемѣщеніе произойдетъ только тогда по діагонали, когда оба слагающіяся движенія по AB и по AC будутъ равномѣрными. Если движеніе по AC будетъ равномѣрное, а по AB—равномѣрно ускоренное, то перемѣщеніе изъ A въ D произойдетъ по пораболѣ, проходящей черезъ точки начала и конца перемѣщенія и имѣющей свою ось по линіи AB. Поэтому разсужденіе, оставаясь на почвѣ *порицаемаго* способа, но сохраняя логическую послѣдовательность, должно было бы начинаться такъ.

Пусть AB и AC будутъ два взаимно перпендикулярныя перемѣщенія нѣкоторой точки A, произшедшія въ теченіи нѣкотораго промежутка времени t. Тогда положеніе движущейся точки въ концѣ времени t опредѣлится конечной точкой D діагонали параллелограмма, построеннаго на AB и AC (фиг. 1). Пусть $AC = vt$, и пусть въ предѣлѣ, при безконечно маломъ t, $AB = \frac{1}{2}gt^2$. Проведемъ черезъ точки A и D кругъ, касательный къ AC въ точкѣ A. Пусть радіусъ этого круга будетъ r. Найдемъ соотношеніе между величинами v, g и r, въ томъ предположеніи что t безконечно мало. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= AB\,(2r - AB), \\ v^2t^2 &= AB\,.\,2r - (AB)^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

и при безконечно маломъ t:

$$\begin{aligned} v^2t^2 &= \frac{1}{2}\, gt^2\,.\,2r - \frac{1}{4}\, g^4t^4, \\ v^2 &= gr - \frac{1}{4}\, g^4t^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

а такъ какъ t дѣлается по условію меньше всякой заданной величины, то

$$v^2 = gr \text{ или } g = \frac{v^2}{r}. \qquad (3)$$

Съ другой стороны мы имѣемъ:

$$AD^2 = 2r\,.\,AB = 2r\,.\,\frac{1}{2}\, gt^2 = v^2t^2,$$

т. е. въ предѣлѣ (5)

$$AD = vt.$$

Разбивая такимъ образомъ окружность радіуса r на безконечно большое число безконечно малыхъ такихъ-же отрѣзковъ, какъ часть круга AD, мы увидимъ, что движущаяся точка можетъ быть перемѣщена отъ начальной точки любаго изъ упомянутыхъ отрѣзковъ къ его конечной точкѣ при помощи двухъ взаимно перпендикулярныхъ слагающихся движеній, совершающихся одновременно въ теченіе элемента времени t. Одно изъ этихъ движеній направлено по касательной къ кругу радіуса r въ начальной точкѣ разсматриваемаго отрѣзка, и совершается равномѣрно съ нѣкоторою скоростью v; другое движеніе, будучи перпендикулярно къ первому, направлено по радіусу r, къ центру круга, и совершается равномѣрно ускоренно съ ускореніемъ $g = \frac{v^2}{r}$. Самый же путь движущейся точки между двумя безконечно близкими концами каждаго разсматриваемаго отрѣзка круга AD будетъ совершаться по безконечно малому-же отрѣзку параболы, отличающемуся безконечно мало какъ отъ хорды AD, такъ и отъ соотвѣтствующей дуги круга.

Къ тому-же результату можно прійти путемъ синтеза безконечно большого числа перемѣщеній, подобныхъ описанному перемѣщенію AD. Именно, пусть во второй безконечно малый промежутокъ времени t движеніе снова слагается изъ перемѣщенія равнаго AD и перпендикулярнаго къ нему перемѣщенія $\frac{1}{2}gt^2$. Назовемъ результирующее перемѣщеніе черезъ x_2, и будемъ имѣть

$$x_2^2 = (\mathrm{AD})^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2; \tag{6}$$

но такъ какъ изъ ранѣе построеннаго треугольника ACD (фиг. 1) имѣемъ

$$(\mathrm{AD})^2 = (\mathrm{AC})^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2 = (vt)^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2,$$

то

$$x_2^2 = (vt)^2 + 2\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2, \tag{7}$$

и такимъ образомъ для нѣкотораго n—наго перемѣщенія x_n:

$$x_n^2 = (vt)^2 + n\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2. \tag{8}$$

Пусть T будетъ конечный промежутокъ времени, за который совершились всѣ n вышеописанныхъ перемѣщеній, и пусть v_n будетъ средняя скорость перемѣщенія x_n, такъ что $x_n = v_n t$. Тогда $\mathrm{T} = nt$, и равенство (8) обращается въ

$$\left.\begin{aligned} (v_n t)^2 &= (vt)^2 + \frac{1}{4}\mathrm{T}g^2t^3, \\ v_n^2 &= v^2 + \frac{1}{4}\mathrm{T}g^2 t = v^2, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

откуда слѣдуетъ, что

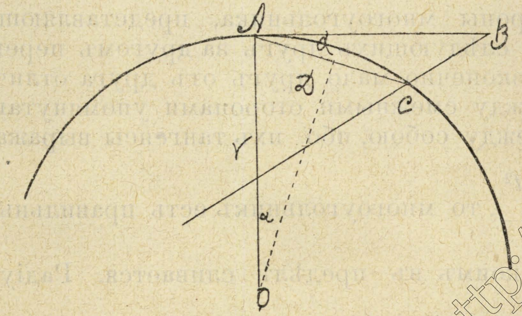
$$x_n = vt = \mathrm{AD}, \tag{10}$$

т. е., что стороны многоугольника, представляющія безконечно большой рядъ слѣдующихъ другъ за другомъ перемѣщеній, остаются лишь безконечно мало другъ отъ друга отличными. А такъ какъ углы между смежными сторонами упомянутаго многоугольника равны между собою, ибо ихъ тангенсы выражаются отношеніями вида $\dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{x_n}$, то многоугольникъ есть правильный, вписанный въ кругъ, съ коимъ въ предѣлѣ сливается. Радіусъ круга очевидно есть r.

Однако и вышеизложенная исправленная форма *порицаемаго способа* едва ли въ состояніи придать этому послѣднему педагогическую пригодность. Дѣло въ томъ, что самая постановка вопроса, разрѣшаемаго этимъ способомъ, и значеніи той „формулы“, для вывода коей онъ якобы долженъ предназначаться, стоятъ съ самаго начала разсужденій внѣ всякой связи съ основными понятіями о движеніи и его измѣненіи. Между тѣмъ только изъ этихъ понятій объясняется необходимость разысканія ускоренія не въ качествѣ удвоеннаго коэффиціента при квадратѣ времени въ выраженіи проходимой равномѣрно ускоренно длины пути, а въ качествѣ величины характеризующей законъ измѣненія движенія какого угодно рода. Поэтому какъ посильно исправленный выше *порицаемый способъ*, такъ и имѣющій замѣнить оный *новый способъ* являются какими-то artifices algèbriques, вставленными ex abrupto въ программу преподаванія для вывода „формулъ", но не представляются частными изслѣдованіями ранѣе установленныхъ общихъ понятій о движеніи и его измѣненіи.

Переходя теперь къ разбору *новаго способа*, мы должны поставить и ему въ упрекъ такую форму редакціи начальныхъ положеній вывода, въ коей безъ непосредственной необходимости введены понятія о матеріальной частицѣ, о силѣ и объ инерціи. Какъ для того, чтобы составить себѣ понятія о кругѣ, нѣтъ необходимости представлять, что этотъ послѣдній вырѣзанъ изъ картона или изъ жести, такъ точно и понятіе о движеніи не опредѣляется тѣмъ, что движется матеріальная частица. Понятіе-же о силѣ складывается изъ понятія объ измѣненіи движенія, характеризуемомъ ускореніемъ, и необходимо—изъ понятія о массѣ. Коль скоро составлено понятіе о силѣ, то изъ него вытекаетъ понятіе объ инерціи. Поэтому едва-ли возможно рекомендовать, въ педагогическомъ или какомъ иномъ отношеніи, способъ уясненія понятія объ ускореніи при помощи понятія о матеріальной частицѣ и о силѣ.

Такимъ образомъ, если устранить изъ *новаго способа* вредящее его смыслу разсужденіе о матеріальной частицѣ, о силѣ и объ инерціи, то подлежащій изслѣдованію вопросъ принимаетъ такой видъ. Точка перемѣщается изъ положенія A на кругѣ радіуса r въ положеніе C (фиг. 2) на томъ-же кругѣ въ теченіи



Фиг. 2.

того-же промежутка времени t, въ продолженіи котораго она прошла-бы дугу круга AC равномѣрно со скоростію v. Спрашивается, какое ускореніе будетъ у того равномѣрно ускореннаго движенія, которое, слагаясь съ равномѣрнымъ движеніемъ по касательной AB, обладающимъ скоростію v, перемѣститъ движущуюся точку въ C въ продолженіе того же упомянутаго выше промежутка времени t. Такою формулировкою будетъ устранено возможное неправильное предположеніе, которое вытекаетъ изъ несовсѣмъ точной редакціи изложенія *новаго способа*, и которое можетъ состоять въ томъ, что, при одновременномъ движеніи точки равномѣрно по AB (фиг. 2) и равномѣрно ускоренно по BC, эта точка движется по дугѣ круга. Для дальнѣйшаго вычисленія едва ли необходимы длинныя выкладки, приводимыя авторомъ *новаго вывода*. Такъ какъ упомянутыя выкладки все таки предполагаютъ доказаннымъ, что длина безконечно малой хорды равна длинѣ стягиваемой ею дуги круга, то можно прямо прійти къ заключенію, что при безконечно маломъ α (фиг. 2) длина хорды AC, становясь равною соотвѣтствущей дугѣ AC, обращается въ vt; и слѣдовательно треугольникъ ABC обращается въ равнобедренный, съ безконечно малою стороною BC, которую можно принять за дугу круга радіуса $AB = AC = vt$. Слѣдовательно имѣемъ:

$$BC = \frac{1}{2} gt^2 = \alpha \,.\, vt = \frac{1}{2} \frac{vt}{r} \,.\, vt, \qquad (11)$$

причемъ послѣднее равенство вытекаетъ изъ треугольника ADO (фиг. 2). Изъ (11) получаемъ сейчасъ-же искомое соотношеніе

$$g = \frac{v^2}{r}. \qquad (12)$$

Не смотря, однако, на краткость и простоту, сообщаемыя *новому выводу* вышеприведенными редакціонными поправками, педагогическое значеніе этого вывода все таки остается подъ сомнѣніемъ, ибо онъ не примыкаетъ органически къ общимъ понятіямъ объ измѣненіи движенія и къ вопросамъ, связаннымъ этими общими понятіями. Упомянутое сомнѣніе, относящееся равно къ *новому выводу* какъ и къ *порицаемому*, выражается формальною возможностію нижеслѣдующаго недоразумѣнія. Хорда, обращаясь въ предѣлѣ, при безконечно маломъ α, въ дугу, сливается въ тоже время и съ касательною. Слѣдовательно, линіи AB и AC (фиг. 2) или AC и AD (фиг. 1) въ предѣлѣ сливаются. А потому выходитъ, что движеніе по AB (фиг. 2) или по AC (фиг. 1), измѣненіе коего мы разыскиваемъ при предѣльномъ условіи безконечной малости t, остается въ упомянутомъ предѣлѣ неизмѣннымъ. А это дѣйствительно согласно съ основнымъ представленіемъ о всякомъ непрерывно измѣняющемся движеніи, остающемся неизмѣннымъ въ теченіе каждаго безконечно малаго промежутка времени и мѣняющемся отъ одного промежутка времени къ другому.

Такимъ образомъ для представленія объ измѣненіи движенія мы должны разсматривать два движенія на двухъ безконечно близкихъ другъ къ другу сосѣднихъ элементахъ данной траекторіи, происходящія равномѣрно, но съ различными скоростями. Подъ ускореніемъ при этомъ должно подразумѣвать отношеніе геометрическаго приращенія скорости къ тому безконечно малому промежутку времени, который протекаетъ между двумя послѣдовательными измѣненіями скорости. Такъ какъ направленіе скорости на каждомъ элементѣ траекторіи совпадаетъ съ касательною, то линія AB (на рис. 2 той-же статьи въ № 307. В. О. Ф.) можетъ представить скорость v на элементѣ круга, расположенномъ около точки A. Отступимъ отъ точки A по кругу на длину дуги, равную vt, *) соотвѣтствующую углу α между двумя радіусами круга. Касательная, проведенная въ концѣ дуги vt (не обозначенная на рис. 2) представитъ скорость на сосѣднемъ элементѣ круга. Линія, параллельная этой касательной и проведенная черезъ точку A, будетъ хорда AC (обозначенная на рис. 2). Такъ какъ скорости на всѣхъ элементахъ круга по величинѣ одинаковы, то $AC = AB = v$. Наконецъ, длина BC представитъ геометрическое приращеніе скорости за время t; а отношеніе

$$\frac{BC}{t} = g,$$

представитъ, при безконечно маломъ t, ускореніе разсматриваемаго движенія. Такъ какъ изъ равнобедреннаго треугольника ABC имѣемъ въ предѣлѣ:

$$BC = \alpha \,.\, AB = \alpha \,.\, v, \qquad (13)$$

и такъ какъ уголъ α соотвѣтствуетъ половинѣ дуги AC и, слѣдовательно,

$$\alpha = \frac{vt}{r}, \qquad (14)$$

то имѣемъ

$$g = \frac{BC}{t} = \frac{\alpha}{t} \,.\, v = \frac{v^2}{r}. \qquad (15)$$

Кромѣ того очевидно, что направленіе BC въ предѣлѣ становится перпендикулярно къ направленію скорости v, и, будучи отложено отъ точки A, идетъ къ центру круга.

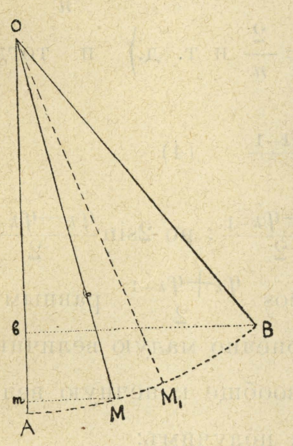
Кіевъ. Ноябрь 1901 г.

*) Положимъ, на рис. 2 это будетъ дуга $\frac{1}{2}$ AC.

Задача о маятникѣ. *)

Вл. Оболенскаго въ Одессѣ.

Простой маятникъ длины l выведенъ изъ положенія равновѣсія на безконечно малый уголъ α и предоставленъ самому себѣ. Найти періодъ колебанія маятника.



Раздѣлимъ дугу BA, равную $l\alpha$ на очень большое число n равныхъ отрѣзковъ и предположимъ, что каждый изъ нихъ проходится маятникомъ съ постоянной скоростью, равною истинной скорости въ конечной точкѣ соотвѣтствующаго отрѣзка. Чѣмъ больше будетъ n, тѣмъ ближе наше предполагаемое движеніе будетъ къ истинному; очевидно, въ предѣлѣ при n равномъ безконечности, оба движенія станутъ тождественными.

Найдемъ время τ_k, въ теченіе котораго будетъ пройденъ k-ый отрѣзокъ дуги MM_1 (за начало счета принимаемъ отрѣзокъ, прилежащій къ точкѣ A) въ нашемъ предполагаемомъ движеніи. Очевидно:

$$\tau_k = \frac{\smile MM_1}{v_k} \qquad (1),$$

гдѣ v_k—истинная скорость въ точкѣ M.

Такъ какъ $\smile MM_1 = \frac{l\alpha}{n}$, а $v_k = \sqrt{2g.bm}$, то

$$\tau_k = \frac{l\dfrac{\alpha}{n}}{\sqrt{2g\,.\,bm}} \qquad (2).$$

Нетрудно показать, что $bm = l(\cos AOM - \cos\alpha) = 2l\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{AOM}{2}\right)$; въ виду того, что углы α и AOM очень малы, мы можемъ замѣнить $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ черезъ $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ и $\sin^2\frac{AOM}{2}$ черезъ $\left(\frac{AOM}{2}\right)^2$; тогда получимъ: $2bm = l(\alpha^2 - AOM^2) = l\left[\alpha^2 - \left(\frac{k-1}{n}\alpha\right)^2\right]$.

*) Сообщено въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. 5-го октября 1901 года.

Подставляя значеніе bm въ (2), получимъ послѣ самыхъ простыхъ преобразованій:

$$\tau_k = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}{\sqrt{1-\frac{(k-1)^2}{n}}}. \qquad (3)$$

Въ виду того, что $\frac{k}{n} \leqq 1$, мы можемъ обозначить $\frac{k}{n}$ черезъ $\sin\varphi_k$ $\left(\text{аналогично } \sin\varphi_1 = \frac{1}{n},\ \sin\varphi_2 = \frac{2}{n} \text{ и т. д.}\right)$ и тогда изъ (3) получимъ:

$$\tau_k = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\sin\varphi_k - \sin\varphi_{k-1}}{\cos\varphi_{k-1}} \qquad (4)$$

$\mathrm{Sin}\varphi_k - \sin\varphi_{k-1} = 2\sin\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{2}\cos\frac{\varphi_k + \varphi_{k-1}}{2}$; но $2\sin\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{2}$ можемъ принять равнымъ $\varphi_k - \varphi_{k-1}$, а $\cos\frac{\varphi_k + \varphi_{k-1}}{2}$ равнымъ $\cos\varphi_k$, такъ какъ φ_{k-1} отличается на безконечно малую величину отъ φ_k, тогда какъ $\cos\frac{\varphi_k + \varphi_{k-1}}{2}$ имѣетъ вообще конечную величину. Такимъ образомъ, послѣ сокращеній получимъ:

$$\tau_k = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

Очевидно, время, необходимое для прохожденія дуги BA, будетъ:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n;$$

слѣдовательно:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\varphi_1 - \varphi_0 + \varphi_2 - \varphi_1 + \ldots + \varphi_n - \varphi_{n-1}\right] = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(\varphi_n - \varphi_0).$$

По предыдущему, $\cos\varphi_n = 1$, а $\cos\varphi_0 = 0$, слѣдовательно, $\varphi_n - \varphi_0 = \frac{\pi}{\prime}$; откуда

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Время же полнаго размаха будетъ:

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

† **Rudolf Koenig.** 2-го октября 1901 года скончался въ Парижѣ извѣстный своими изслѣдованіями по акустикѣ физикъ *Rudolf Koenig*. *Koenig* по своему происхожденію — нѣмецъ, родился въ 1833 году въ Кенигсбергѣ, гдѣ и получилъ образованіе сначала въ гимназіи, а затѣмъ въ университетѣ. Въ 1860 году *Koenig* переселяется въ Парижъ, гдѣ поступаетъ въ мастерскую для изготовленія струнъ; но скоро онъ основываетъ самостоятельную мастерскую, изъ которой впослѣдствіи вышло столько замѣчательныхъ акустическихъ приборовъ. Въ этой мастерской *Koenig* работалъ вплоть до своей смерти.

Работы *Koenig'a* относятся исключительно къ экспериментальной акустикѣ. Мы обязаны ему усовершенствованіемъ и изобрѣтеніемъ многочисленныхъ аппаратовъ, изъ которыхъ упомянемъ самый значительный: манометрическій приборъ для наблюденія интерференціи звука (см. напр. „Курсъ Физики" Хвольсона, томъ II, стр. 63).—Работы *Koenig'a* посвящены анализу звуковъ, изученію тембра звуковъ и гармоніи тоновъ. Послѣдняя его работа, напечатанная въ Wied. Ann., изслѣдуетъ очень высокіе еще слышные и еще болѣе высокіе не доступные уху тоны; при чемъ *Koenig* обнаруживаетъ тоны въ 90000 колебаній въ секунду. Кромѣ того немалый интересъ представляетъ его книга, напечатанная въ 1882 году: „Quelques experiences d'acoustique". (Naturwissenschaftliche Rundschau).

† **H. v. Perger.** 28-го (15-го) декабря 1901 года скончался профессоръ химіи Вѣнскаго Политехникума *Hugo von Perger*, одинъ изъ самыхъ выдающихся представителей прикладной химіи.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Десятичное дѣленіе прямого угла. Во Франціи постепенно вводится десятичное дѣленіе прямого угла. Первый опытъ былъ сдѣланъ въ морскомъ вѣдомствѣ, теперь же и военное вѣдомство вводитъ эту реформу, и издало по этому случаю логариѳмическія таблицы, содержащія новую и старую системы тригонометрическихъ величинъ. Окончательно реформа будетъ введена въ 1905 году.

Задача на премію Брюссельскаго Ученаго Общества. Société Scientifique de Bruxelles опубликовало слѣдующую тему для сочиненій на соисканіе преміи въ 1902 году: „Fair une étude approfondie des travaux de *Simon Stevin* sur la mécanique, en les comparant aux travaux anterieurs *d'Archiméde* et aux travaux presque contemporains de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque". Работы должны быть присланы до 1-го октября (н. с.) 1902 года секретарю Общества по адресу: Bruxelles. 11, rue des Récollets, Louvain.

Премія имени Bressa. Туринская Академія Наукъ открыла съ 1-го января 1899 года конкурсъ, въ которомъ могутъ участвовать всѣ ученые и изобрѣтатели безъ различія національности. Премія, простирающаяся до 9600 франковъ, будетъ выдана за лучшее и полезнѣйшее по мнѣнію Академіи, изобрѣтеніе или сочиненіе въ области естественныхъ наукъ, физики, математики, химіи, физіологіи, паталогіи и т. п. Академія будетъ разсматривать только тѣ работы, которыя опубликованы въ четырехлѣтній промежутокъ времени отъ 1897—1900 г. Послѣдній срокъ подачи работы, которая должна быть непремѣнно напечатана, — 31 декабря 1902 г.

Союзъ Германскихъ Математиковъ. Союзъ Германскихъ Математиковъ состоитъ въ настоящее время изъ 520 членовъ. Съѣзды союза происходятъ вмѣстѣ со съѣздами нѣмецкихъ натуралистовъ и врачей. На послѣднемъ съѣздѣ въ Гамбургѣ рѣшено значительно расширить программу журнала союза — „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“—, который съ настоящаго 1902 года будетъ выходить ежемѣсячными книжками.

РЕЦЕНЗІИ.

Сборникъ статей въ помощь къ самообразованію. *Изданіе кружка преподавателей подъ редакціей А. Реформатскаго.*

Въ этой книгѣ собраны статьи по химіи. Статьи написаны различными авторами,—спеціалистами, вполнѣ компетентными въ вопросахъ этой науки. Статьи написаны большей частью прекрасно, живо и увлекательно.

Въ первой статьѣ М. Коноваловъ излагаетъ предметъ химіи и ея задачи и значеніе.

Во второй статьѣ А. Реформатскій даетъ интересный историческій обзоръ развитія химіи, начиная съ египтянъ.

Въ третьей статьѣ тотъ-же авторъ излагаетъ основные законы химіи.

Затѣмъ идутъ статьи о водѣ (В. Ижевскаго), о воздухѣ (С. Созонова), и о углеродѣ и его соединеніяхъ (А. Биркенгейма), о горѣніи и о горючихъ матеріалахъ (Гинзберга), о химіи земной коры (А. Сперанскаго).

Статьи эти весьма интересны для лицъ, стремящихся къ самообразованію.

Затѣмъ А. Реформатскій въ статьѣ: „Систематика химическихъ элементовъ“ даетъ прекрасное изложеніе періодическаго закона Менделѣева и попытокъ въ этомъ родѣ до Менделѣева.

Очень хороша статья М. Коновалова: „Анализъ и синтезъ въ химіи“. Здѣсь читатель получаетъ сознаніе необходимости расширенія представленій атомистической гипотезы для пониманія многообразія органическихъ веществъ и затѣмъ знакомится съ основаніями теоріи строенія и стереохиміи. Трудно лучше и популярнѣе совладать съ этой темой.

Въ послѣдней статьѣ этой книги „Химическое сродство" А. Байковъ даетъ очеркъ развитія химической механики.

Проф. С. Танатаръ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 142 (4 сер.). Сумма квадратовъ двухъ чиселъ равна 3600, а наименьшее кратное ихъ 144. Найти эти числа.

Н. Готлибъ (Митава).

№ 143 (4 сер.). Найти общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, выражаемыхъ формулой

$$xy(x^{10}+y^{10})(x^{10}-y^{10}),$$

гдѣ x и y принимаютъ всевозможныя цѣлыя значенія.

Н. Готлибъ (Митава).

№ 144 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^5-a=5bxy^2,$$

$$x^2-y^2=b.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 145 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^7-a=7bxy^4,$$

$$x^2-y^2=b.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 146 (4 сер.). Въ полуокружность діаметра $AB=2B$ вписана выпуклая ломаная $ACDB$. По данной хордѣ $CD=a$ вычислить длины хордъ AC и BD, зная, что

$$AC+BD=2a.$$

Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

№ 147 (4 сер.). Цилиндрическій сосудъ плаваетъ вертикально въ жидкости. При 0^0 длина погруженной части равна h. Какова она будетъ при температурѣ t^0, если извѣстно, что коэффиціенты кубическаго расширенія сосуда и жидкости суть соотвѣтственно m и n?

Заимств. изъ *Bacc. lettres-math., Poitiers, mars 1900.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 6 (4 сер.). *Воздухъ, насыщенный водянымъ паромъ, занимаетъ объемъ въ 10 литровъ при температурѣ 11° и давленіи 768 мм. Какой объемъ займетъ этотъ воздухъ при температурѣ 15° и давленіи 75 см., если его вполнѣ высушить? Наибольшая упругость водяного пара при 11° равна 10 мм.*

Согласно съ закономъ Дальтона, упругость разсматриваемаго воздуха, если его вполнѣ высушить и заключить въ объемѣ 10 литровъ при температурѣ 11°, окажется равной 768 мм. — 10 мм. = 758 мм. Пусть объемъ того же воздуха при давленіи 75 см. = 750 мм. и температурѣ 15° равенъ x.

По формулѣ Маріотта-Гэ-Люссака

$$\frac{x.750}{1+15\alpha}=\frac{10.758}{1+11\alpha},$$

гдѣ $\alpha=0{,}004$ есть коэффиціентъ расширенія газа.

Слѣдовательно,

$$x=\frac{10.758.(1+0{,}004.15)}{750.(1+0{,}004.11)}=10{,}26 \text{ литра.}$$

Пакшина (Петрозаводскъ); *Діомидова* (Петрозаводскъ); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ).

№ 8 (4 сер.). *Какой изъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный круговой секторъ, меньшій четверти окружности, и имѣющихъ одну изъ вершинъ въ данной точкѣ M дуги сектора, имѣетъ наименьшій периметръ? Доказать, что периметръ искомаго треугольника не зависитъ отъ положенія точки M на дугѣ даннаго сектора.*

Пусть x и y суть вершины вписаннаго въ секторъ искомаго треугольника, лежащія соотвѣтственно на радіусахъ AO и BO даннаго сектора AOB. Построимъ точки A' и B', симметричныя точкѣ M соотвѣтственно относительно радіусовъ AO и BO. Тогда

$$Mx=A'x,\quad My=yB',$$

а потому

$$Mx+xy+yM=A'x+xy+yB' \qquad (1).$$

Для того, чтобы послѣднее выраженіе было minimum, необходимо и достаточно, чтобы точки A', x, y и B' лежали на одной прямой. Поэтому одна изъ вершинъ искомаго треугольника есть точка M, а двѣ другія вершины совпадаютъ съ точками встрѣчи радіусовъ AO и BO съ прямой $A'B'$. Изъ равенствъ

$$\angle A'OA=\angle AOM,\quad \angle B'OB=\angle BOM$$

выводимъ, что $\angle A'OB'=2\angle AOB$. Но точки A' и B' лежатъ на окружности, часть которой составляетъ дуга AB. Слѣдовательно $A'B'$ есть основаніе равнобедреннаго треугольника, боковая сторона котораго равна радіусу сектора и уголъ котораго вдвое болѣе угла сектора. Поэтому (см. (1)) длина $A'B'=A'x+xy+yB'=Mx+xy+yM$ не зависитъ отъ положенія точки M на дугѣ сектора.

М. Поповъ (Асхабадъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 12 (4 сер.). *1) Построить треугольникъ по тремъ радіусамъ r_a, r_b и r_c внѣвписанныхъ круговъ. Требуется рѣшить задачу методомъ подобія (данныя задачи позволяютъ построить треугольникъ, подобный искомому). 2) Пользуясь методомъ рѣшенія вышеуказанной задачи, рѣшить тригонометрически треугольникъ по даннымъ r_a, r_b, r_c.*

Пусть a, b, c, p, s—стороны, полупериметръ и площадь искомаго треугольника. Построимъ отрѣзки $\frac{k^2}{r_a}=\alpha$, $\frac{k^2}{r_b}=\beta$, $\frac{k^2}{r_c}=\gamma$, гдѣ k—произвольно выбранный отрѣзокъ, и обозначимъ отношеніе $\frac{s}{k^2}$ черезъ m. Изъ формулъ $s=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$ выводимъ:

$$\frac{p-a}{\left(\frac{k^2}{r_a}\right)}=\frac{p-b}{\left(\frac{k^2}{r_b}\right)}=\frac{p-c}{\left(\frac{k^2}{r_c}\right)}=\frac{s}{k^2},$$

или

$$\frac{p-a}{\alpha}=\frac{p-b}{\beta}=\frac{p-c}{\gamma}=m,$$

откуда

$$a=(\beta+\gamma)m,\quad b=(\gamma+\alpha)m,\quad c=(\alpha+\beta)m.$$

Слѣдовательно, построивъ треугольникъ $A'B'C'$ о сторонахъ

$$a'=\beta+\gamma,\quad b'=\gamma+\alpha,\quad c'=\alpha+\beta$$

получимъ треугольникъ, подобный искомому. Пусть $r'_{a'}$—радіусъ внѣвписаннаго со стороны a' круга для треугольника $A'B'C'$. Умноживъ треугольникъ $A'B'C'$ въ отношеніи $\frac{r_a}{r'_{a'}}$, получимъ искомый треугольникъ. Полагая $k=1$, по сторонамъ подобнаго искомому треугольника

$$a_1=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c},\ b_1=\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a},\ c_1=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}$$

вычисляемъ углы A, B, C искомаго треугольника; тогда находимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a}{\sqrt{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r_b}{\sqrt{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r_c}{\sqrt{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}}.$$

Далѣе находимъ p, $p-a$ и затѣмъ a для искомаго треугольника по извѣстнымъ формуламъ

$$r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-a)\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

откуда

$$a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{\sqrt{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}}.$$

Для b и c найдемъ аналогичныя выраженія.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 29 (4 сер.). *Вычислить предѣлъ выраженія*

$$\frac{4}{n^2}\sum_{x=1}^{x=n}(n^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

при $n=\infty$.

Представимъ себѣ окружность радіуса 1 и проведемъ въ ней два взаимно перпендикулярныхъ радіуса OA и OB (O—центръ окружности). Радіусъ OA раздѣлимъ на n равныхъ частей, и обозначимъ точки дѣленія въ ихъ послѣдовательности въ направленіи отъ O къ A черезъ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; изъ этихъ точекъ возставимъ до встрѣчи въ точкахъ $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ съ окружностью перпендикуляры $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}$ къ прямой OA и затѣмъ изъ точекъ $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ опустимъ перпендикуляры B_1C_1, B_2C_2, $\ldots, B_{n-1}C_{n-1}$ соотвѣтственно на прямыя OB, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}$. Тогда получимъ рядъ прямоугольниковъ

$$OA_1B_1C_1,\ A_1A_2B_2C_2,\ A_2A_3B_3C_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1} \quad (1).$$

Площадь одного изъ этихъ прямоугольниковъ равна

$$A_{x-1}A_x . A_xB_x = A_{x-1}A_x . \sqrt{\overline{OB_x}^2 - \overline{OA_x}^2} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{n^2 - x^2}.$$

Сумма же площадей прямоугольниковъ (1) равна

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{x=1}^{x=n-1} (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} . {}^{*)}$$

При $n = \infty$ предѣлъ этой суммы, какъ извѣстно, равенъ площади $\frac{\pi}{4}$ сектора AOB. Поэтому

$$\lim_{n=\infty} \frac{4}{n^2} \sum_{x=1}^{x=n} (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot 4 = \pi.$$

П. Сорокинъ (Полоцкъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Е. Григорьевъ* (Казань).

№ 34 (4 сер.). *Построить треугольникъ по даннымъ разстояніямъ его вершинъ отъ его медіанъ.*

Пусть ABC—искомый треугольникъ, AA', BB' и CC'—его медіаны, G—точка встрѣчи медіанъ. Продолживъ AA' на разстояніе $A'O = A'G$, проводимъ прямыя CO и BO, которыя оказываются соотвѣтственно параллельны прямымъ GB и CG. Пусть Bx, Ou, Gv суть высоты треугольника OGB. Высота Bx извѣстна, какъ разстояніе вершины B отъ медіаны AA', а высоты Ou и Gv вслѣдствіе того, что $OC \| BB'$ и $OB \| CC'$, равны соотвѣтственно разстояніямъ Cy и Bz точекъ C и B отъ медіанъ BB' и CC'. Слѣдовательно треугольникъ OGB можно построить по тремъ высотамъ. Отложимъ затѣмъ $AG = OG$, $CA' = BA'$; гдѣ A'—средина отрѣзка OG. Треугольникъ ABC есть искомый.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

---

*) Послѣдній членъ суммы $\sum_{x=1}^{x=n} (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ равенъ нулю.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 17-го Января 1902 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется