

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

15 Декабря

№ 311.

1901 г.

Содержаніе: Варіаціи земного магнетизма. † *Прив.-Доч. П. Пассальскаго.* (Окончаніе). — Этюды по основаніямъ геометріи. *Прив.-Доч. В. Кагана.* — *Wilhelm Weber.* (Страничка изъ исторіи физики). *П. Э.* — Опыты и приборы: Нѣсколько лекціонныхъ опытовъ по теплотѣ. (Окончаніе). *Вл. Оболенскаго.* — Научная хроника: Дѣйствіе Вескелевскихъ лучей на бактеріи. Поверхностное натяженіе воздуха. Объ акустическомъ притяженіи. Магнитныя съемки въ Индіи. — Разныя извѣстія: Послѣднія избранія. — Рецензіи: Григорьевъ, краткій курсъ химіи. *Проф. С. Танатара.* — Задачи для учащихся, №№ 130—135 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 2, 56, 64, 65, 69. — Объявленія.

Варіаціи земного магнетизма.

† *Приватъ-Доцента П. Пассальскаго въ Одессѣ.*

(Окончаніе *).

Годичныя варіаціи. Если исключить вѣковой ходъ, то оказывается, что измѣненіе среднихъ значеній элементовъ земного магнетизма отъ мѣсяца къ мѣсяцу крайне мало. Годичный ходъ удобно представить въ видѣ отклоненій мѣсячныхъ значеній отъ годичнаго средняго. По *Liznar*'у средній годичный ходъ отклоненія для 17 станцій сѣвернаго полушарія и 5 южнаго представится числами:

	январь	февраль	мартъ	апрѣль	май	юнь
Сѣверное полушаріе	—0.25	—0.54*	—0.27	—0.03	0.19	0.46
Южное	.28	.31	.27	.10	.10	—0.42*
	іюль	августъ	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
Сѣверное полушаріе	0.48	0.47	0.31	—0.07	—0.30	—0.36
Южное	—0.31	—0.41	—0.25	—0.06	.30	.36,

т. е. въ сѣверномъ полушаріи лѣтомъ сѣверный конецъ стрѣлки

*) См. № 308 „Вѣстника“.

находится западнѣе своего средняго положенія, зимой—восточнѣе; въ южномъ происходитъ то-же самое, если только помнить, что лѣто южнаго полушарія совпадаетъ съ нашей зимой.

Дневныя варіаціи. Сравнительно лучше другихъ изучены тѣ движенія, которыя стрѣлка испытываетъ въ теченіи сутокъ, что объясняется большой правильностью этихъ варіацій. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно пронаблюдать положеніе стрѣлки въ теченіи нѣсколькихъ дней, чтобы замѣтить періодичность ея колебанія. Для исключенія случайныхъ неправильностей, вызываемыхъ непериодическими измѣненіями, о которыхъ рѣчь будетъ дальше, поступають слѣдующимъ образомъ. Наблюдаютъ непосредственно или при помощи самопишущихъ приборовъ (магнитографовъ) значеніе элемента въ каждый цѣлый часъ по мѣстному среднему времени и образуютъ среднія значенія для каждого часа за цѣлый мѣсяцъ. Если теперь вычестъ каждое часовое среднее (ихъ 24) изъ общаго средняго за всѣ часы мѣсяца, то получится суточный ходъ въ видѣ отклоненій отъ средняго значенія за мѣсяцъ. Напримѣръ, суточный ходъ склоненія за сентябрь 1896 г. для Одессы выразится слѣдующими числами (знакъ — соотвѣтствуетъ восточнымъ отклоненіямъ, знакъ + западнымъ)

Часы	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,
До полудня												
отклоненія	−1'.0,	−1.2,	−1.0,	−1.3,	−1.4,	−1.8,	−2.7,	−3.6,	−2.8,	−0.5,	+2.2,	+4.4,
Послѣ полудня												
отклоненія	+5'.2,	+4.5,	+2.9,	+1.8,	+1.0,	+0.5,	−0.1,	−0.6,	−1.2,	−0.9,	−1.1,	−1.3.

Если взять среднія изъ подобныхъ чиселъ за цѣлый годъ (т. е. для каждого часа среднее изъ 12-ти значеній), то получится суточный ходъ за годъ.

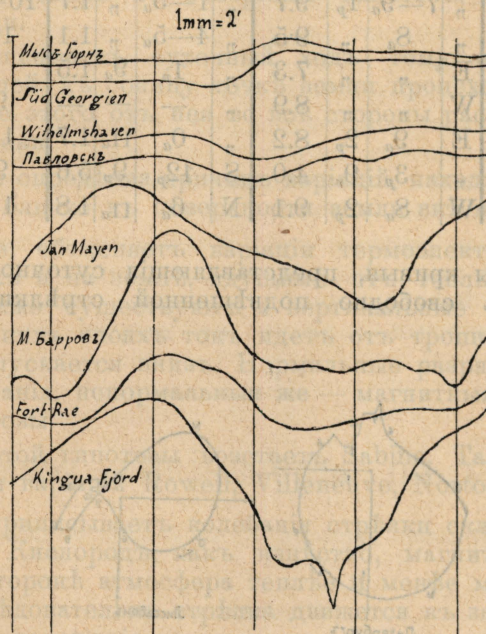
Нужно замѣтить, что суточные варіаціи происходятъ по *мѣстному* времени. Если взять, напримѣръ, два отдаленныхъ пункта, лежащихъ на одной и той же параллели, то одинаковыя положенія будутъ наблюдаться не въ одни и тѣ же моменты, а въ одинаковые часы.

Разсмотримъ подробнѣе суточный ходъ склоненія. Въ годичномъ среднемъ наибольшее восточное отклоненіе сѣвернаго конца стрѣлки падаетъ на 8½ часовъ утра; съ этого момента стрѣлка быстро движется къ западу и достигаетъ крайняго западнаго положенія въ 2 часа дня. Въ этого промежутка движеніе гораздо медленнѣе. Среднія значенія склоненій бывають въ 11 часовъ дня и 7 час. вечера. Быстрѣе всего склоненіе измѣняется между 11 и 12 часами дня (разность склоненій равна 2'). Въ южномъ полушаріи крайнее восточное отклоненіе сѣвернаго конца наблюдается въ 2½ часа дня, крайнее западное въ 9 час. дня, т. е. движеніе обратно и точки поворотовъ здѣсь бывають на полъ часа позже, чѣмъ въ сѣверномъ. Кромѣ этого главнаго колебанія, наблюдаютъ еще и второстепенныя maximum и minimum въ ночные и утренніе часы; эти крайнія особенно ясно выступаютъ въ зимніе мѣсяцы.

Въ пунктахъ вблизи магнитнаго экватора вариации носятъ характеръ то сѣверныхъ, то южныхъ, смотря по времени года. Вообще же лѣтомъ амплитуды склоненія больше, чѣмъ зимой и ходъ его правильнѣе.

При удаленіи отъ магнитнаго экватора къ полюсамъ амплитуды склоненія увеличиваются.

На фиг. 1 представленъ суточный ходъ склоненія для нѣсколькихъ пунктовъ; двѣ первыя кривыя—для южнаго полушарія, слѣдующія двѣ для среднихъ широтъ сѣвернаго полушарія и



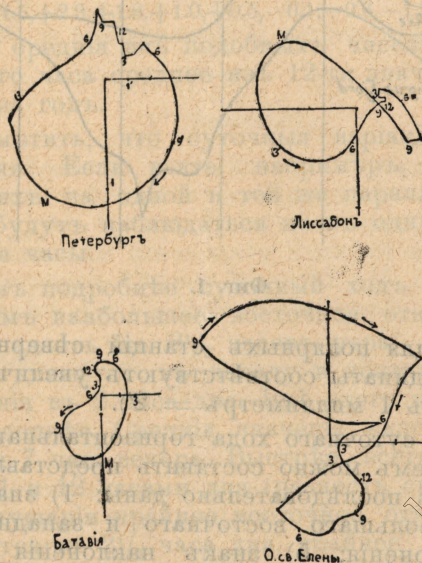
Фиг. 1.

четыре нижнихъ—для полярныхъ станцій сѣвернаго полушарія. Положительныя ординаты соответствуютъ увеличенію западнаго склоненія, (причемъ 1 миллиметръ = 2').

Что касается суточного хода горизонтальнаго напряженія и наклоненія, то о немъ можно составить представленіе по слѣдующей таблицѣ, гдѣ послѣдовательно даны: 1) знакъ склоненія 2) и 3) моменты наибольшаго восточнаго и западнаго отклоненія; 4) амплитуды склоненія; 5) знакъ наклоненія (сѣверное или южное); 6) и 7) моменты наибольшаго и наименьшаго значенія наклоненій; 8) и 9) моменты крайнихъ значеній горизонтальнаго напряженія; 10) амплитуды его въ единицахъ 0.00001 C. G. S. Всѣ данныя относятся къ 1893 году (для Вашингтона 1894 г.).

Пунктъ . . .	Склоненіе.				Наклоненіе.				Горизонтальное напряженіе.		
	Знакъ	T_l	T_w	Ампл.	Знакъ	T_{mn}	T_{mx}	Ампл.	T_{mn}	T_{mx}	Ампл.
Павловскъ . . .	E	8_a^h	2_p^h	9'.6	N	3_a^h	11_a^h	2'.2	11_a^h	$7-9_p^h$	38
Екатеринбургъ	"	"	"	8.8	"	5_a	"	1.8	"	$10-1_p^h$	31
Гринвичъ . . .	W	"	1_p	9.8	—	—	—	—	10_a	7_p	38
Кью	"	"	"	10.1	"	$7-10_p$	10_a	2.2	11_a	$7-9_p$	37
Фальмутъ . . .	"	$8-9_a$	2_p	10.1	—	—	—	—	"	$8-9_p$	41
Сень-Моръ . . .	"	$7-9_a$	1_p	9.7	"	$1-5_a$	"	1.7	$10-11_a$	10_p	31
Верпиньянъ . .	"	8_a	"	9.5	"	$4-5_a$	"	1.1	10_a	"	24
Тифлисъ . . .	E	"	"	7.3	"	1_p	9_a	1.5	"	2_p	19
Санъ-Фернандо	W	"	"	8.9	"	—	—	—	9_a	4_a	12
Иркутскъ . . .	E	9_a	2_p	8.2	"	0_a	11_a	1.7	11_a	$0-1_a$	33
Батавія	"	3_p	9_a	4.0	S	12_p	9_p	5.6	9_p	11_a	63
Вашингтонъ . .	W	8_a	2_p	9.1	N	6_a	11_a	1.8	11_a	5_p	34

Интересны кривые, представляющія суточное движение сѣвернаго конца свободно подвѣшенной стрѣлки (фиг. 2). Если



Фиг. 2.

смотреть изъ середины стрѣлки, то оказывается, что во всемъ сѣверномъ полушаріи для широтъ выше 40° движеніе происходитъ по часовой стрѣлкѣ, южнѣе же — противъ нея. На о. св. Елены кривая сложна и въ одной части движеніе по, въ другой — противъ часовой стрѣлки. Для Одессы мной были вычерчены кривыя для каждаго мѣсяца года. Оказывается, что въ общемъ онѣ имѣютъ видъ лежачей цифры 8, при чемъ въ лѣвой половинѣ движеніе происходитъ по часовой стрѣлкѣ, въ правой противъ нея. Лѣтомъ лѣвая часть очень велика (она соответствуетъ дневнымъ часамъ), правая же имѣетъ видъ небольшого придатка, зимой же увеличивается правая часть и вся кривая получаетъ много зигзаговъ.

Перейдемъ теперь къ обзорѣнню гипотезъ, объясняющихъ дневныя варіаціи.

Aimé приписываетъ суточный ходъ тому обстоятельству, что въ ближайшей къ солнцу точкѣ земли происходитъ нагрѣваніе и вслѣдствіе этого отъ нея во всѣ стороны расходятся термоэлектрическіе токи.

Lamont, не опредѣляя причинъ варіацій, находитъ, что онѣ не могутъ лежать близко къ поверхности земли внѣ или внутри ея.

De la Rive, объясняетъ варіаціи термоэлектрическими токами въ воздухѣ и на землѣ, идущими отъ теплыхъ частей къ холоднымъ; также существуютъ и вертикальные токи въ атмосферѣ. Въ верхнихъ слояхъ токъ идетъ отъ тропиковъ къ полюсамъ и тамъ спускается внизъ. Нормальные разряды вызываютъ суточные колебанія, ненормальные же — магнитныя бури, сѣверныя сиянія и грозы.

Противъ этой гипотезы возстаетъ Sabine. Также въ токахъ ищутъ причины варіацій Rowell, Villeneuve, Norton и др.

Faraday приписываетъ колебанія стрѣлки склоненія магнетизму воздуха. Кислородъ, какъ извѣстно, магнитенъ и утромъ на восточной сторонѣ атмосфера теплѣе и менѣе магнитна, чѣмъ на западѣ, и слѣдовательно стрѣлка движется къ западу и достигаетъ крайняго положенія тогда, когда разность температуръ достигаетъ наибольшаго значенія, т. е. около 9 часовъ утра. Послѣ полудня имѣетъ мѣсто обратное движеніе.

Secchi высказалъ взглядъ, что солнце намагничено и дѣйствуетъ во внѣшнемъ пространствѣ, какъ сильный магнитъ. Каждая точка земной поверхности въ своемъ суточномъ движеніи принимаетъ различныя положенія относительно этого центрального магнита, чѣмъ и вызываются дневныя варіаціи. Но С. Chambers, Stoney, Kelvin и др. показали, что прямого магнитнаго дѣйствія солнце имѣть не можетъ. Stoney, напримѣръ, вычислилъ, что если бы солнце было намагничено такъ же, какъ земля, то дѣйствіе его на стрѣлку склоненія въ самыхъ благоприятныхъ условіяхъ не превосходило бы $\frac{1}{10}$ секунды. Лордъ Kelvin показалъ, что для того, чтобы наблюдаемая на землѣ ва-

ріації могли бытъ вызваны непосредственнымъ дѣйствіемъ солнечнаго магнетизма, необходимо, чтобы сила магнетизма тамъ въ миллионы разъ превышала напряженіе поля между полюсами самаго сильнаго электричества. Впрочемъ Bigelow не останавливается и передъ такимъ допущеніемъ, и въ добавокъ, чтобы объяснить еще другія періоды земнаго магнетизма, полагаетъ, что солнце дѣлится на части, схожія съ ломтями апельсина, причемъ отдѣльные ломти имѣютъ различную полярность неимоверной силы (напряженіе поля на экваторѣ должно доходить до 16×10^8 C.G.S, тогда какъ на землѣ напряженіе не превосходитъ, насколько извѣстно, 1.9 C.G.S).

Quet дѣлаетъ гипотезу относительно электрическихъ токовъ на солнцѣ, вызывающихъ его внѣшнее магнитное поле; послѣднее дѣйствуетъ на землю, но не непосредственно на магнитные приборы, а на магнетизмъ земли индукціей.

B. Steewart приписываетъ разсматриваемыя варіаціи электрическимъ токамъ въ верхнихъ слояхъ атмосферы, которыя сдвигаются вмѣстѣ со своимъ проводникомъ, суточнымъ нагрѣваніемъ и охлажденіемъ воздуха.

Наибольшее развитіе ученію о токахъ въ верхнихъ слояхъ атмосферы или за предѣлами ея дали въ послѣднее время A. Schuster и W. Bezold. Schuster'у удалось доказать, что причины, вызывающія дневныя варіаціи не могутъ находиться внутри земли.

Этюды по основаніямъ геометріи.

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана въ Одессѣ.

(Продолженіе *).

§ 6. Та же идея, которую мы старались выяснитъ въ предыдущихъ параграфахъ въ примѣненіи къ измѣренію длинъ прямолинейныхъ отрезковъ, доминируетъ всюду, гдѣ приходится производить измѣреніе тѣхъ или другихъ геометрическихъ образовъ:

Измѣривъ ту или другую геометрическую величину значитъ отнести къ каждому образу, представляющему собой одно значеніе этой величины, арифметическое число такъ, чтобы конгруэнтнымъ образамъ соответствовали одинаковыя числа, и чтобы образу, состоящему изъ нѣсколькихъ образовъ того же ряда, соответствовало число, равное суммѣ тѣхъ чиселъ, которыя соответствуютъ составляющимъ образамъ.

Обоснованіе теоріи измѣренія той или другой геометрической величины заключается въ доказательствѣ двухъ положеній:

*) См. № 308 „Вѣстника“.

во-первыхъ, нужно доказать, что къ каждому образу представляющему одно изъ значеній этой величины, можно отнести число такъ, чтобы удовлетворить поставленнымъ выше требованіямъ, — и, вторыхъ, что это можно произвести только однимъ способомъ, если выбрано значеніе той величины, къ которой мы относимъ число 1 (т. е. если выбрана единица мѣры).

Доказательство это воспроизводится различно въ различныхъ случаяхъ. Впрочемъ, для дѣлаго ряда величинъ обоснованіе теоріи измѣренія представляетъ собой почти дословное повтореніе тѣхъ разсужденій, которыя изложены выше для обоснованія идеи измѣренія прямолинейныхъ отрѣзковъ. Такъ обосновывается измѣреніе дугъ одной и той же окружности, прямолинейныхъ и двугранныхъ угловъ.

Такъ, напримѣръ, чтобы развить теорію измѣренія прямолинейныхъ угловъ, нужно установить понятіе объ отношеніи двухъ угловъ; это дѣлается почти дословно такъ, какъ было установлено понятіе объ отношеніи двухъ прямолинейныхъ отрѣзковъ. Затѣмъ доказывается, что достаточно отнести къ произвольно выбранному углу w число 1, а ко всякому другому углу число, выражающее его отношеніе къ углу w , — чтобы выполнить поставленные выше требованія, т. е. конгруэнтнымъ угламъ будутъ отвѣчать одинаковыя числа, а число, соответствующее углу, составленному изъ нѣсколькихъ угловъ, равно суммѣ чиселъ, отвѣчающихъ составляющимъ угламъ. Доказывается затѣмъ (такимъ же приѣмомъ, какимъ это выполнено въ § 5), что это единственный способъ сопряженія прямолинейныхъ угловъ и ариметическихъ чиселъ, удовлетворяющій задачѣ измѣренія.

Но, когда мы переходимъ къ измѣренію площадей, вопросъ значительно усложняется, даже если мы ограничимся вопросомъ объ измѣреніи площадей прямолинейныхъ фигуръ.

Дѣло въ томъ, что отложить одну прямолинейную фигуру на другой въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы откладываемъ одинъ отрѣзокъ на другомъ, бываетъ возможно только въ немногихъ исключительныхъ случаяхъ *). Въ большинствѣ же случаевъ уже для рѣшенія одного только вопроса о томъ, можетъ ли данная прямолинейная фигура быть помѣщена внутри другой, ее нужно разрѣзывать на части; возникаетъ стало быть вопросъ, въ какой зависимости находится результатъ этой операціи отъ того, на какія части мы разрѣзываемъ нашу фигуру. Быть можетъ даже, что, разрѣзавъ фигуру A на части однимъ способомъ, мы помѣстимъ ее внутри фигуры B , а разрѣзавъ ее на части другимъ способомъ и расположивъ эти части въ надлежащемъ порядкѣ, мы составимъ фигуру, внутри которой помѣстится фигура B . Коротко говоря, тотъ приѣмъ, посредствомъ котораго мы обосновывали по-

*) Такъ напримѣръ, если бы мы ограничились измѣреніемъ площадей прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, то эту теорію можно было бы развить совершенно аналогично теоріи измѣренія отрѣзковъ.

нтіе объ отношеніи двухъ отрѣзковъ и о длинѣ прямолинейнаго отрѣзка, не примѣнимъ къ вопросу объ измѣреніи площадей прямолинейныхъ фигуръ.

Эта задача сложнѣе, и потому неудивительно, что правильное ея рѣшеніе въ общихъ сочиненіяхъ по элементарной геометріи даже не намѣчено. Въ этихъ сочиненіяхъ излагается обыкновенно только одна сторона дѣла. Мы покажемъ, въ чемъ заключается дефектъ и какъ онъ пополняется.

§ 7. Опредѣленіе. Если намъ удастся отнести къ каждой прямолинейной фигурѣ число такъ, чтобы конгруэнтнымъ фигурамъ соответствовало одно и то-же число и чтобы всякой фигурѣ, состоящей изъ нѣсколькихъ прямолинейныхъ фигуръ, отвѣчало число, равное суммѣ тѣхъ чиселъ, которыя соответствуютъ составляющимъ фигурамъ, то мы будемъ говорить, что мы установили систему измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ; число, отнесенное къ каждой фигурѣ, мы будемъ называть площадью фигуры при этой системѣ измѣренія, а ту фигуру, къ которой отнесено число 1, мы будемъ называть единицей мѣры площади.

Чтобы развить теорію измѣренія площадей, нужно доказать слѣдующія два положенія:

1) Въ Евклидовой геометріи возможно установить систему измѣренія площадей.

2) Эту операцію можно произвести только однимъ способомъ, если произведенъ выборъ той фигуры, къ которой отнесено число 1 (которая принята за единицу мѣры площадей).

Изъ этихъ двухъ положеній элементарная геометрія въ обыкновенномъ изложеніи доказываетъ только второе, а первое вовсе игнорируетъ; между тѣмъ ясно, что второе положеніе только тогда получаетъ смыслъ и опредѣленное содержаніе, когда установлено первое положеніе. Чтобы это утвержденіе не было голословно, мы приведемъ слѣдующій рядъ разсужденій: мы допустимъ справедливость перваго изъ высказанныхъ положеній и докажемъ, что оно влечетъ за собою второе положеніе. Затѣмъ мы сравнимъ наше разсужденіе съ обычнымъ изложеніемъ теоріи площадей элементарной геометріи.

§ 8. Теорема I. Если установлена нѣкоторая система измѣренія площадей, то двѣ фигуры, которыя состоятъ изъ соответственно конгруэнтныхъ фигуръ, имѣютъ одинаковыя площади.

Доказательство. Это вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія предыдущаго параграфа, такъ какъ къ конгруэнтнымъ фигурамъ мы относимъ одинаковыя числа, (т. е. конгруэнтныя фигуры имѣютъ одинаковыя площади) и такъ какъ двѣ фигуры, составленныя изъ нѣсколькихъ фигуръ, имѣютъ площадь, равную суммѣ площадей составляющихъ фигуръ.

Теорема II. Если установлена нѣкоторая система измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ, то фигура, расположенная внутри другой фигуры, имѣетъ меньшую площадь.

Доказательство. Это также вытекает из опредѣленія предыдущаго параграфа, такъ какъ фигура съ объемлющей периферіей состоитъ изъ второй фигуры и еще одной или нѣсколькихъ прямолинейныхъ фигуръ; ея площадь представить, слѣдовательно, собою сумму нѣсколькихъ ариметическихъ чиселъ, отличныхъ отъ нуля; площадь же внутренней фигуры представляетъ собой одно изъ этихъ слагаемыхъ.

Теорема III. Если установлена некоторая система измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ (см. опредѣленіе предыдущаго параграфа); то площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собой, какъ изъ высоты.

Доказательство. Пусть Q и q будутъ два прямоугольника, P и p ихъ площади, т. е. числа, отнесенныя къ нашимъ двумъ прямоугольникамъ при данной системѣ измѣренія площадей. Пусть H и h будутъ высоты этихъ прямоугольниковъ. Высоту одного изъ этихъ прямоугольниковъ, скажемъ вторую, раздѣлимъ на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя основанію прямоугольника. Прямоугольникъ разобьется при этомъ на n конгруэнтныхъ прямоугольниковъ, которыми, согласно опредѣленію предыдущаго параграфа, отвѣчаютъ одинаковыя числа, или, выражаясь иначе, —которыя имѣютъ одинаковыя площади. Каждый изъ этихъ составляющихъ прямоугольниковъ мы будемъ обозначать буквой q' . Площадь прямоугольника q' равна $\frac{p}{n}$, ибо q' должно быть число, которое, будучи повторено слагаемымъ n разъ, даетъ число p . Положимъ теперь, что n -ая часть h' высоты h содержится m_n разъ въ высотѣ H . Если мы отложимъ отрѣзокъ h' на высотѣ H и черезъ точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя основанію, то составимъ m_n прямоугольниковъ, конгруэнтныхъ прямоугольнику q' , а потому имѣющихъ площадь, равную $m_n \cdot \frac{p}{n}$. Прямоугольники эти цѣликомъ расположены внутри прямоугольника Q и либо покрываютъ его цѣликомъ, либо оставляютъ еще нѣкоторый прямоугольникъ. Поэтому въ силу теоремъ I и II

$$P \geq m_n \cdot \frac{p}{n} \dots \dots \dots (6)$$

Если мы отложимъ отрѣзокъ h' по высотѣ H еще одинъ ($m_n + 1$ -ый) разъ, и черезъ конечную точку проведемъ прямую, параллельную основанію прямоугольника Q , то составимъ прямоугольникъ, состоящій изъ $(m_n + 1)$ прямоугольниковъ, конгруэнтныхъ съ q' . Этотъ прямоугольникъ имѣетъ площадь, равную $(m_n + 1) \cdot \frac{p}{n}$, а такъ какъ прямоугольникъ Q помѣщается внутри этого новаго прямоугольника, то въ силу теоремы II

$$P < (m_n + 1) \frac{p}{n} \dots \dots \dots (7)$$

Соединяя соотношенія (6) и (7), получаемъ

$$m_n \cdot \frac{p}{n} \leq P < (m_n + 1) \cdot \frac{p}{n}$$

откуда

$$\frac{m_n}{n} \leq \frac{P}{p} < \frac{m_n + 1}{n}.$$

Итакъ, число $\frac{P}{p}$ заключается между соотвѣствующими членами рядовъ:

$$\frac{m_1}{1}, \frac{m_2}{2}, \frac{m_3}{3} \dots \dots \frac{m_n}{n} \dots \dots$$

$$\frac{m_1 + 1}{1}, \frac{m_2 + 1}{2}, \frac{m_3 + 1}{3} \dots \dots \frac{m_n + 1}{n} \dots \dots$$

Мы уже знаемъ, что эти ряды стремятся къ общему предѣлу, равному отношенію $H:h$. Поэтому

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h}.$$

Теорема IV. Если установлена некоторая система измѣренія площадей, то площади двухъ прямоугольниковъ относятся, какъ произведенія изъ оснований на высоты.

Доказательство обычное.

Теорема. Если установлена некоторая система измѣренія площадей и квадрату, сторона котораго выражается числомъ 1 (сторона котораго принята за единицу мѣры длины) отнесено число μ , то площадь прямоугольника имѣетъ вполне определенное значеніе, равное произведенію изъ числа μ , на высоту и основаніе (т. е. на длину высоты и на длину основанія) прямоугольника.

Доказательство. Изъ пропорціи

$$\frac{P}{\mu} = \frac{B \cdot H}{1 \cdot 1}$$

получаемъ

$$P = \mu \cdot B \cdot H.$$

Если $\mu = 1$, то $P = B \cdot H$ т. е.

Теорема V. Если установлена система измѣренія площадей и площадь квадрата, сторона котораго равна единицѣ длины, принята за единицу, то площадь всякаго прямоугольника имѣетъ определенное значеніе: $B \cdot H$.

Теорема VI. Если установлена некоторая система измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ, то параллелограммъ и прямоугольникъ, имѣющіе равныя основанія и высоты имѣютъ одинаковую площадь.

Доказательство. Обычнымъ приѣмомъ доказываемъ, что эти фигуры могутъ быть составлены изъ конгруэнтныхъ частей, — и тогда высказанное утвержденіе вытекаетъ непосредственно изъ теоремы I.

Теорема VII. Если установлена некоторая система измѣренія площадей, то площадь каждаго параллелограмма имѣетъ определенное значеніе μ . В. Н., — а площадь треугольника имѣетъ определенное значеніе $\frac{1}{2} \mu$. В. Н., гдѣ μ означаетъ то μ , что и выше.

Доказательство обычное.

Теорема VIII. Если установлена некоторая система измѣренія площади, и къ квадрату, сторона котораго представляетъ собой единицу длины, отнесено число μ , то этимъ вполне опредѣляется площадь каждаго многоугольника.

Доказательство. Многоугольникъ можетъ быть составленъ изъ треугольниковъ; такъ какъ, съ одной стороны, площадь многоугольника по самой идеѣ измѣренія площадей (опредѣленіе параграфа 6) должна быть равна суммѣ составляющихъ треугольниковъ; — такъ какъ, съ другой стороны, площадь каждаго треугольника при названныхъ условіяхъ имѣетъ вполне определенное значеніе, то и площадь многоугольника имѣетъ вполне определенное значеніе.

§ 9. Изложеніе предыдущаго параграфа по существу не отличается отъ обычнаго изложенія теоріи площадей въ элементарной геометріи. Мы его привели съ тою цѣлью, чтобы формулировать то допущеніе, которое въ этой теоріи обыкновенно дѣлается, и чтобы показать, что это допущеніе дѣйствительно является базисомъ доказательства.

Дѣйствительно, условія всѣхъ теоремъ предыдущаго параграфа начинаются съ допущенія, что установлена некоторая система измѣренія площадей. Если это имѣетъ мѣсто, то каждой прямолинейной фигурѣ соответствуетъ некоторое определенное число — его площадь при этой системѣ измѣренія, — и всѣ теоремы получаютъ, благодаря этому, определенное содержаніе. Если же этого нѣтъ, то доказываемыя предложенія не имѣютъ содержанія.

Даже болѣе того, всѣ теоремы предыдущаго параграфа предполагаютъ, что установлена некоторая система измѣренія величинъ, удовлетворяющая требованіямъ, сформулированнымъ въ опредѣленіи § 7-го. Но возможно-ли это, возможно-ли отнести къ каждой прямолинейной фигурѣ число такъ, чтобы удовлетворить требованіямъ, содержащимся въ идеѣ измѣренія площадей.

Еще иначе. Если установлена система измѣренія площа-

дей,—и площадь квадрата, сторона котораго равна единицѣ длины, принята за единицу площадей, то площади прямоугольника и параллелограмма выражаются произведениемъ изъ основанія на высоту, а площадь треугольника выражается половиною такого же произведенія, площадь многоугольника равняется суммѣ площадей треугольниковъ, на которые мы его можемъ разбить.

Если мы теперь поступимъ обратно: площадь квадрата, сторона котораго равна единицѣ длины, примемъ за единицу, площадь всякаго треугольника примемъ равной половинѣ произведенія изъ основанія на высоту, каждый многоугольникъ разобьемъ опредѣленнымъ образомъ на треугольники и примемъ за площадь многоугольника число, равное суммѣ площадей, составляющихъ его треугольниковъ,—то будетъ ли этимъ установлена система измѣренія площадей? Не будемъ ли мы прежде всего при этихъ условіяхъ получать различныя числа, если будемъ различнымъ образомъ разбивать многоугольникъ на составляющие треугольники? Будетъ ли при этихъ условіяхъ площадь всякаго многоугольника, составленнаго изъ нѣсколькихъ многоугольниковъ, равна суммѣ площадей этихъ составляющихъ фигуръ?

На эти вопросы предыдущая теорія не даетъ никакого отвѣта. Обычное изложеніе геометріи, апеллируеть здѣсь къ интуиціи, къ а priori'ному понятію о неизмѣнной площади, „опредѣленію не подлежащему и въ немъ не нуждающемуся“.

Мы потому уже не станемъ оспаривать этой точки зрѣнія, что ея нецѣлесообразность, ея неправильность станетъ очевидной, если мы докажемъ, что на всѣ поставленные выше вопросы можно дать опредѣленные отвѣты, не прибѣгая ни къ какому специальному постулату.

Это обнаружено работами С. Шатуновскаго и D. Hilbert'a.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Wilhelm Weber.

(Страничка изъ исторіи физики).

23-го іюня настоящаго года исполнилось 10 лѣтъ со дня смерти одного изъ самыхъ выдающихся физиковъ истекшаго столѣтія—*Wilhelm'a Weber'a*. Родившись въ 1804 году, *W. Weber* прожилъ почти весь девятнадцатый вѣкъ; но не только хронологически онъ долженъ считаться сыномъ своего вѣка: его имя связано съ величайшимъ завоеваніемъ этого вѣка—изобрѣтеніемъ телеграфа. Дѣло его жизни составляетъ прочное звено исторической цѣпи физики—звено, скованное съ другимъ, на которомъ начертано безсмертное имя *Gauss'a*.

Первый труд *W. Weber'a*—результатъ совмѣстной работы его съ старшимъ братомъ, *Ernst'омъ Heinrich'омъ Weber'омъ* *)—это классическое учение о волнообразномъ движеніи, основанное на опытѣ („*Wellenlehre auf Experiment gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall und Lichtwellen*“). Это сочиненіе братья посвятили своему первому руководителю, основателю экспериментальной акустики *Chladni*. Интересно отмѣтить, что сочиненіе это начато было, когда *Wilhelm* посѣщалъ еще среднюю школу, а окончено—когда онъ былъ студентомъ, двадцатилѣтнимъ юношей. Въ этомъ трудѣ впервые данъ былъ рядъ опытовъ, демонстрировавшихъ волнообразныя движенія въ жидкостяхъ, отраженіе волнъ, ихъ интерференцію и т. п. Книга эта была обнародована въ 1825 году и разрѣшала одинъ изъ самыхъ животрепещущихъ вопросовъ того времени. Незадолго передъ тѣмъ (въ 1802 году) *Chladni* опубликовалъ свои замѣчательныя открытія, касающіяся колебанія твердыхъ тѣлъ, удивительныя фигуры, объяснить которыя до появленія работы братьевъ *Weber* не удалось. Съ другой стороны *Young* обратилъ вниманіе физиковъ на интересное явленіе диффракціи, объясняя его на основаніи теоріи волнообразнаго движенія ээира, теоріи тогда еще не общепринятой, но которая въ то время какъ разъ была предметомъ усиленнаго вниманія ученаго міра. Поэтому обширное и полное экспериментальное изслѣдованіе волнообразнаго движенія обратило вниманіе физиковъ на молодого *W. Weber'a* и его ученая карьера была обезпечена.

Работы *Weber'a*, слѣдующія непосредственно за первой, почти всѣ относятся къ акустикѣ. Часть ихъ онъ публикуетъ еще будучи студентомъ, часть уже какъ приватъ-доцентъ университета въ Галлѣ. (Всего онъ напечаталъ въ промежутокъ времени отъ 1825 по 1835 по акустикѣ 23 статьи).

Въ 1831 году *W. Weber* получаетъ кафедру физики въ Геттингенскомъ университетѣ и начинаетъ вмѣстѣ съ *Gauss'омъ* свои классическія изслѣдованія въ области магнетизма и, въ особенности, земного магнетизма. Къ этому же времени (1833 годъ) относится и устройство перваго телеграфа, который служилъ *Gauss'у* и *Weber'у* для сношеній между физическимъ институтомъ и обсерваторіей. Изслѣдованія ихъ получили особенное значеніе для науки вслѣдствіе того, что они дали поводъ къ основанію коопераціи для изслѣдованія магнетизма въ различныхъ мѣстахъ земного шара. Результаты этихъ совмѣстныхъ наблюденій многихъ изслѣдователей издавались *Gauss'омъ* и *Weber'омъ* ежегодно. Кромѣ того, имъ принадлежатъ многочисленныя работы въ этой области, работы, имѣвшія по преимуществу про-

*) *Ernst Heinrich Weber*, профессоръ анатоміи и фізіологіи Лейпцигскаго университета (1795—1878), былъ на десять лѣтъ старше своего брата. Онъ извѣстенъ не столько какъ физикъ, сколько какъ фізіологъ и психологъ; основной законъ психофизики носитъ его имя (законъ *Weber-Fechner'a*).

мадное принципиальное значеніе. Наконецъ, однимъ изъ результатовъ этихъ изслѣдованій является изданный въ 1840 г. *Gauss'омъ* и *Weber'омъ* „Атласъ земного магнетизма“.

Но въ то же самое время *W. Weber* успѣваетъ заниматься еще однимъ вопросомъ, не имѣющимъ ничего общаго съ магнетизмомъ. вмѣстѣ съ своимъ младшимъ братомъ, *Eduard'омъ Weber'омъ* *), онъ изучаетъ механику походки человѣка. Въ обширномъ сочиненіи, появившемся въ 1836 году, братья *Weber* даютъ полную картину того сложнаго механизма, которымъ мы безсознательно пользуемся при хожденіи и бѣгѣ.

Но совмѣстная работа *Gauss'a* и *Weber'a* не продолжалась такъ долго, какъ было бы желательно. Политическія тревоженія проникли и въ тихій уголокъ, гдѣ два ученыхъ мужа совершали свое дѣло. Въ 1837 году *Weber* былъ удаленъ изъ Геттингенскаго университета за то, что вмѣстѣ съ 6 другими профессорами **) выразилъ протестъ противъ нарушенія Ганноверскимъ княземъ конституціи 1833 года. Политическіе единомышленники немедленно же собрали необходимыя средства для того, чтобы пострадавшіе ученые были матеріально обезпечены. *Weber* остался жить въ Геттингенѣ, чтобы продолжать совмѣстно съ *Gauss'омъ* свои магнитныя изслѣдованія. Но неопредѣленное положеніе тяготило его и, когда въ 1843 году Лейпцигскій университетъ пригласилъ его занять кафедру физики вмѣсто *Fechner'a*, страдавшаго тяжелой болѣзнью глазъ, то *Weber*, послѣ нѣкотораго колебанія, согласился и оставилъ Геттингенъ.

Съ этого момента вниманіе *W. Weber'a* всецѣло обращается къ новой области—*электромагнетизму*. Въ этой области онъ сдѣлалъ больше, чѣмъ въ какой-либо другой, и построенная имъ теорія господствовала въ наукѣ больше четверти вѣка, уступивъ въ настоящее время мѣсто теоріи *Faraday—Maxwell'a*. *Weber* изслѣдовалъ взаимодѣйствіе между двумя электрическими массами, находящимися въ движеніи, другъ относительно друга; установленный имъ законъ заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, *Coulomb'овъ* законъ, который справедливъ только для покоящихся электрическихъ массъ. Тотъ фактъ, что движеніе двухъ массъ вліяетъ на ихъ взаимодѣйствіе, имѣлъ еще значеніе при открытіи закона сохраненія энергіи, относящагося къ той же эпохѣ. Но теорія электромагнетизма, данная *Weber'омъ*, основанная на принципѣ дальнодѣйствія—*actio in distans*, хотя и сыграла важную историческую роль, должна была по исторической необходимости уступить мѣсто другой, основанной на принципѣ передачи дѣйствія черезъ окружающую среду.

*) *Eduard Friedrich Weber* (1806—1871) былъ сначала прозекторомъ, затѣмъ профессоромъ анатоміи Лейпцигскаго Университета.

**) А именно: *F. E. Dahlmann, E. Albrecht, Jacob Grimm, Wilhelm Grimm, G. Gervinus, H. Ewald*.

Въ 1849 году *W. Weber* снова переходитъ въ Геттингенскій университетъ, послѣ того, какъ революція 1848 года заставила правительство понять значеніе того шага, который былъ сдѣланъ семью Геттингенскими профессорами. Но о совмѣстной работѣ



ПАМЯТНИКЪ

Гауссу и Веберу

въ Геттингенѣ.

съ *Gauss'омъ* не могло быть и рѣчи. Великій геометръ былъ слишкомъ старъ для того, чтобы посвятить себя упорному труду. *W. Weber* продолжаетъ и въ Геттингенѣ свои электромагнитныя изслѣдованія. Онъ устанавливаетъ абсолютную систему мѣръ для

магнетизма и электричества и публикует работы по диамагнетизму, въ одной изъ которыхъ высказываетъ гипотезу, что диамагнетизмъ или магнетизмъ известнаго тѣла зависятъ отъ отсутствія или присутствія въ тѣлахъ молекулярныхъ токовъ. Наконецъ, въ работѣ, обнародованной въ 1857 году, *W. Weber* вмѣстѣ съ *Rudolf'омъ Kohlrausch'емъ* устанавливаетъ нѣкоторую электрическую постоянную—отношеніе электромагнитной и электростатической единицъ, которая оказывается равной скорости свѣта—фактъ, имѣвшій громадное значеніе для *Maxwell'евой* электромагнитной теоріи свѣта.

Мы упомянули въ вышеприведенномъ очеркѣ лишь о самыхъ существенныхъ трудахъ Геттингенскаго физика, но и этого довольно, чтобы составить себѣ вѣрное понятіе о его историческомъ значеніи. Изображенный на прилагаемомъ рисункѣ памятникъ воздвигнутъ въ Геттингенѣ въ 1899 году. *Gauss* изображенъ сидящимъ въ креслѣ, въ рукахъ у него катушка телеграфа; *Weber* стоитъ съ нимъ рядомъ.

П. Э. (Одесса).

ОПЫТЫ И ПРИБОРЫ.

Нѣсколько лекціонныхъ опытовъ по теплотѣ.

(Окончаніе *).

Мы изложимъ теперь методъ демонстративнаго опредѣленія измѣненій температуръ—помощью термоэлектрической пары или термоэлектрическаго столбика. Приготавливаютъ спай изъ двухъ проволокъ, напр. мѣдной и желѣзной. Концы ихъ соединяютъ съ борнами гальванометра (напр. Д'Арсонваля). Передъ зеркальцемъ гальванометра помѣщаютъ вертикально черную нить и отраженіе ея проецируютъ помощью волшебнаго фонаря и собирающей линзы на горизонтальную шкалу; такимъ образомъ можно получить на шкалѣ отчетливую черную полосу, видимую съ отдаленныхъ концовъ аудиторіи. Проволоки для спая можно взять очень длинныя, спай можно переносить въ разныя мѣста, не передвигая гальванометра, опускать его въ пробирки и сосуды, содержащіе вещества различныхъ температуръ, и по отклоненію зеркальца и перемѣщенію полосы на шкалѣ опредѣлять довольно точно напряженіе термоэлектрическаго тока и пропорціональную ему разность температуръ—искомой и комнатной.

Пользуясь этой установкой, можно произвести много опытовъ. Опишемъ нѣкоторые изъ нихъ.

*) См. „В. О. Ф.“ № 306.

Этимъ способомъ удобно демонстрировать стаціонарное распределе́ніе температуръ на металлическомъ стержнѣ, отношеніе теплопроводностей двухъ металловъ. Для этой цѣли былъ построенъ слѣдующій общеизвѣстный приборъ: въ цинковый сосудъ были впаяны мѣдный и желѣзный стержни, параллельные между собой, выходящіе изъ сосуда на метръ. На стержняхъ были сдѣланы черезъ каждыя 10 ст. нарѣзы. Сосудъ былъ наполненъ кипящей водой; по наступленіи стаціонарнаго распределе́нія температуръ на стержняхъ, экспериментаторъ прикасался спаемъ то къ одному, то къ другому нарѣзу ¹⁾. По отклоненіямъ полосы можно было провѣрить теорему о зависимости между температурой трехъ равноотстоящихъ другъ отъ друга сѣченій и нѣкоторые другіе законы, касающіеся теплопроводности.

Пользуясь той же установкой, но замѣняя термоэлектрическую пару термоэлектрическимъ столбикомъ, удобно показать нагрѣваніе металлической пластины отъ удара, гнущя, скобленія, пиленія, тренія и т. п. Удается также слѣдующій опытъ съ резиновой полосой. Растягивая полосу резины и касаясь ею закопченной стороны термоэлектрическаго столбика замѣчаемъ нагрѣваніе резины; доведя растянутую резину до комнатной температуры, предоставляемъ ей сжаться, и замѣчаемъ, что она охладилась настолько же, насколько нагрѣлась при растяженіи.

Вл. Оболенскій.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Дѣйствіе Becquerel'евскихъ лучей на бактеріи. Уже давно извѣстно, что обыкновенный свѣтъ замѣтнымъ образомъ вліяетъ на развитіе микроорганизмовъ. *E. Aschkinass* и *W. Caspari* наблюдали въ *Wied. Ann.* за текущій годъ (№ 11, стр. 570—574) свои наблюденія надъ *дѣйствіемъ Becquerel'евскихъ лучей на бактеріи*. Оказывается, что соотвѣтственно тому, какъ при помощи чисто физическихъ методовъ обнаружены два совершенно различныхъ рода лучей, испускаемыхъ радиоактивными веществами, точно такъ же и этотъ біологическій методъ даетъ совершенно различныхъ два результата, въ зависимости отъ того дѣйствію какого изъ этихъ двухъ родовъ лучей мы подвергнемъ бактеріи. Такимъ образомъ біологическій методъ находитъ примѣненіе въ физикѣ.

¹⁾ Въ этихъ опытахъ не слѣдуетъ держать спая непосредственно въ рукахъ; тѣ мѣста проволоки, которыхъ касается рука слѣдуетъ изолировать дурнымъ проводникомъ тепла: сукномъ, пробкой и т. п.

Поверхностное натяжение жидкого воздуха. Въ XXXVIII тетради (25 іюля 1901 г.) журнала Берлинской Академіи Наукъ (Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) обнародованы результаты изслѣдованія *поверхностнаго натяженія жидкаго воздуха*, произведеннаго проф. *L. Grunmach'омъ*. При температурѣ въ $-190^{\circ},3$ С и плотности, не превышающей существеннымъ образомъ единицы, поверхностное натяжение $\left(\alpha = \frac{a^2\sigma}{2} \cdot \frac{\text{динъ}}{\text{центиметръ}}\right)$ жидкаго воздуха колеблется по этимъ наблюденіямъ отъ 11,6—12,6.

Объ акустическомъ притяженіи. Въ № 12-омъ Wied. Ann. за истекающій годъ *Robert Geigel* сообщаетъ о своихъ опытахъ, обнаруживающихъ фактъ притяженія звучащими тѣлами близко къ нимъ расположенныхъ легкихъ предметовъ, какъ-то листочковъ станіюля и т. п. Причиной этого притяженія является, по мнѣнію *Geigel'я*, колебанія воздуха, соотвѣтствующія очень высокимъ тонамъ, не воспринимаемымъ большею частью человѣческимъ ухомъ. Если держать звучащій камертонъ близко надъ поверхностью воды, то подъ камертономъ образуется возвышеніе жидкости. Болѣе подробные опыты производятся съ камертономъ, на который насыпается пыль ликоподія.

Магнитныя съемки въ Индіи. Какъ сообщаетъ журналъ „Globus“, Лондонское Королевское Общество побудило правительство Индіи произвести магнитныя съемки этой страны. Эта работа можетъ имѣть не только теоретическій, но и практический результатъ. А именно: замѣчено, что періоды засухъ, являющихся бичемъ населенія Индіи, соотвѣтствуютъ періодамъ солнечныхъ пятенъ; между тѣмъ солнечныя пятна въ свою очередь мѣняются вмѣстѣ съ колебаніями земного магнетизма.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Послѣднія избранія.

Профессоръ математики университета въ Галлѣ *G. Cantor*, извѣстный какъ основатель ученія объ ансамбляхъ (*Mengen* — нѣмецкихъ авторовъ, *ensemble* — французскихъ; *aggregati* — итальянскихъ), избранъ почетнымъ членомъ Лондонскаго Математическаго Общества. (*Mathematical Society of London*).

Профессоръ термодинамики Мюнхенскаго Политехникума *P. von Linde* избранъ въ члены-корреспонденты Вѣнской Академіи Наукъ. *Linde* извѣстенъ, главнымъ образомъ, какъ изобрѣтатель машины для приготовленія жидкаго воздуха.

РЕЦЕНЗІИ.

Григорьевъ, краткій курсъ химіи. Для средней общеобразовательной школы и для самообразования. Изданіе Товарищества „Знаніе“. 1901 г. С.-Петербургъ. Цѣна 80 коп.

Курсъ химіи Григорьева представляетъ популярное изложене основныхъ началъ химіи и знакомитъ вкратцѣ съ главнѣйшими свойствами и соединеніями металлоидовъ. Послѣ ознакомленія съ характерными чертами химическихъ явленій, сейчасъ же излагается атомистическая гипотеза и такимъ образомъ даются читателю представленія, которые облегчаютъ усвоеніе какъ частныхъ законовъ, такъ и фактического матеріала. Для лицъ, стремящихся къ самообразованію и не имѣющихъ возможности индуктивно, при помощи опытнаго нагляднаго ознакомленія со многими фактами, притти постепенно къ составленію теоретическихъ представленій—это очень хорошо и необходимо, тѣмъ болѣе, что представленія, сгруппированныя въ атомистическую гипотезу, вплетены нынѣ во всѣ области естествознанія. Затѣмъ слѣдуетъ описаніе элементовъ и ихъ главнѣйшихъ соединеній. Особенное вниманіе обращено на установку понятій о кислотахъ, основаніяхъ и соляхъ. При кислородѣ авторъ подробно останавливается на роли этого элемента въ явленіяхъ горѣнія, тлѣнія и дыханія, а при углеродѣ на процессъ горѣнія органическихъ веществъ, строеніи пламени и условіяхъ свѣченія пламени. Весьма умѣстно также изложеніе въ концѣ книги періодической системы элементовъ Менделѣева. Жаль, что авторъ совершенно, можно сказать, не включаетъ металлы въ свой курсъ. Онъ ограничивается изложеніемъ на 12 страницахъ общихъ свѣдѣній о металлахъ вообще. Между тѣмъ для самообразования и для средней школы необходимы и интересны многія свѣдѣнія о тяжелыхъ металлахъ, употребляющихся въ технику, о ихъ сплавахъ и важнѣйшихъ или употребительнѣйшихъ соединеніяхъ. Также необходимы нѣкоторыя свѣдѣнія о соединеніяхъ такихъ металловъ, какъ кальцій, натрій и калий. Вслѣдствіе этого краткій курсъ химіи Григорьева является неполнымъ. Слѣдовало-бы или дополнить курсъ сотней страницъ о металлахъ, или издать вторую часть курса, трактующую о металлахъ.

Проф. С. Ганатаръ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 130 (4 сер.). По данному произведенію четырехъ сторонъ, произведенію діагоналей и площади вписаннаго въ кругъ даннаго радіуса R четырехугольника опредѣлить разстояніе точки пересѣченія діагоналей отъ центра круга.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 131 (4 сер.). На основаніи рѣшенія предыдущей задачи опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія діагоналей вписанныхъ въ данный кругъ четырехугольниковъ, діагонали которыхъ взаимно перпендикулярны, при условіи, что произведеніе четырехъ сторонъ этихъ четырехугольниковъ остается постояннымъ.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 132 (4 сер.). По данной гипотенузѣ построить прямоугольный треугольникъ, зная, что уголъ между однимъ изъ катетовъ и высотой, проведенной изъ вершины прямого угла, вдвое меньше угла между тѣмъ же катетомъ и медианой, проведенной также изъ вершины прямого угла.

Н. С. (Одесса).

№ 133 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$(y+z)^2 = a(1+x), \quad (z+x)^2 = a(1+y), \quad (x+y)^2 = a(1+z).$$

Займств. изъ *Periodico di matematica*.

№ 134 (4 сер.). Данъ кругъ діаметра AB . Проведа изъ центра круга O перпендикулярный къ AB радіусъ OC , изъ середины O' радіуса AO описываютъ какъ изъ центра, окружность радіусомъ $O'C$ до пересѣченія ея въ точкѣ P съ радіусомъ OB . Доказать, что CP есть сторона правильнаго вписаннаго въ данный кругъ пятиугольника, и, обобщая это предложеніе, вывести способъ построения хорды

$$\frac{R \sqrt{2(n^2+1)} - 2\sqrt{n^2+1}}{n},$$

гдѣ R —радіусъ даннаго круга и n —отношеніе двухъ данныхъ отрезковъ.

Займств. изъ *Journal de Mathématiques Élémentaires*.

№ 135 (4 сер.). Въ резервуаръ, емкостью въ 25 литровъ, введено при 0°39 граммовъ воздуха. Опредѣлить: 1) давленіе воздуха въ резервуарѣ и 2) температуру, при которой давленіе введеннаго воздуха будетъ равно 2 атмосферамъ. Удельный вѣсъ воздуха при нормальныхъ условіяхъ равенъ 0,0013; коэффициентъ расширенія газа $\alpha = 0,004$.

(Займств.) М. Гербановскій.

РѢШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

№ 2 (4 сер.). Построить треугольник ABC по данной разности его угловъ C и A , суммѣ его высоты и биссектора, проведенныхъ изъ вершины B , и радиусу круга описаннаго R .

Пусть ABC есть искомый треугольникъ, и пусть BD есть его высота, BE —биссекторъ. Опишемъ около этого треугольника окружность, центръ которой мы обозначимъ черезъ O , и продолжимъ биссекторъ BE до встрѣчи съ окружностью въ точку F . Дуги AF и FC , на которыя опираются равные вписанные углы ABF и FBC , равны, а слѣдовательно прямая OF перпендикулярна къ прямой AC . Углы EBD равенъ половинѣ данной разности угловъ $\angle C - \angle A$ (мы предполагаемъ, что буквой C обозначенъ больший изъ угловъ C и A). Дѣйствительно,

$$\angle EBD = \angle BEA - \angle BDE = \angle C + \angle EBC - \angle BDE,$$

или, замѣчая, что

$$\angle EBC = \frac{\angle B}{2}, \quad \angle BDE = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2},$$

$$\angle EBD = \angle C + \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle C - \angle A}{2}.$$

Такимъ образомъ уголъ EBD , а значитъ и равный ему уголъ OFB можетъ быть построенъ, какъ половина данной разности угловъ $\angle C - \angle A$. Отсюда вытекаетъ построение. Описавъ изъ нѣкоторой точки O , какъ изъ центра, окружность радиусомъ R , беремъ на этой окружности произвольную точку F , проводимъ радиусъ OF и строимъ хорду FB подъ угломъ $OFB = \frac{\angle C - \angle A}{2}$ къ прямой OF . Затѣмъ строимъ общеизвѣстнымъ способомъ прямоугольный треугольникъ по острому углу EBD и по суммѣ $EB + BD$ гипотенузы и катета и такимъ образомъ узнаемъ длину высоты BD . Затѣмъ черезъ точку B проводимъ внутри окружности отрѣзокъ BD , параллельный прямой OF и равный найденной высотѣ искомага треугольника; затѣмъ черезъ точку D проводимъ прямую, перпендикулярную къ отрѣзку BD , до встрѣчи съ окружностью O въ точкахъ A и C . Треугольникъ ABC есть искомый.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); **П. Полушкинъ** (Знаменка); **М. Поповъ** (Асхабадъ).

№ 56 (4 сер.). Дана окружность радиуса R и два взаимно перпендикулярныхъ діаметра Ox и Oy этого круга: на діаметръ Ox дана точка P на разстояніи d отъ центра. Провести къ данной окружности касательную, пересѣкающую прямую Ox и Oy соответственно въ точкахъ A и B , чтобы уголъ PBA былъ прямой. (Рѣшить задачу приложеніемъ алгебры къ геометріи).

Пусть M есть точка прикосновения прямой AB къ данной окружности. Обозначимъ черезъ R радиусъ окружности, а черезъ x отрѣзокъ OA . Тогда, по свойству прямоугольнаго треугольника,

$$\frac{AO}{OP} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BP}^2} \quad (1).$$

Но изъ подобія треугольниковъ AMO и ABP слѣдуетъ, что

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AM}{OM}.$$

Поэтому (см. (1))

$$\frac{AO}{OP} = \frac{AM^2}{OM^2} = \frac{OA^2 - OM^2}{OM^2},$$

или, пользуясь вышеуказанными обозначеніями, —

$$\frac{x}{d} = \frac{x^2 - R^2}{R^2}, \quad dx^2 - R^2x - dR^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{R^2 \pm \sqrt{R^4 + 4d^2R^2}}{2d} = R \cdot \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4d^2}}{2d} \quad (2).$$

Если въ этой формулѣ взять знакъ — передъ радикаломъ, то получимъ отрицательное выраженіе, абсолютное значеніе котораго меньше R ; такимъ образомъ отрицательный корень не допускаетъ геометрическаго толкованія, такъ какъ точка A не можетъ лежать внутри окружности. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{(R - \sqrt{R^2 + 4d^2})}{2d} = \frac{\sqrt{R^2 + 4d^2} - R}{2d}.$$

Разность

$$\frac{\sqrt{R^2 + 4d^2} - R}{2d} - 1 = \frac{\sqrt{R^2 + 4d^2} - (R + 2d)}{2d}$$

отрицательна, такъ какъ

$$(\sqrt{R^2 + 4d^2})^2 < (R + 2d)^2,$$

а потому абсолютная величина дроби $\frac{R - \sqrt{R^2 + 4d^2}}{2d}$ меньше 1, и слѣдовательно (см. (2)) абсолютная величина отрицательнаго значенія x меньше R . Поэтому геометрическое значеніе имѣетъ лишь рѣшеніе

$$OA = R \cdot \frac{R + \sqrt{R^2 + 4d^2}}{2d}.$$

Построивъ $\sqrt{R^2 + 4d^2}$, какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть R и $2d$, мы строимъ OA , какъ четвертую пропорціональную отрезковъ $2d$, $R + \sqrt{R^2 + 4d^2}$ и R .

Отложивъ на прямой Ox отрезокъ OA въ сторону, обратную отрезку OP , проводимъ изъ точки A касательныя къ данной окружности; каждая изъ этихъ касательныхъ даетъ правильное рѣшеніе.

П. Полушкинъ (Знаменка); **Н. Готлибъ** (Митава); **М. Поповъ** (Асхабадъ);
Б. Мерцаловъ (Орель).

№ 64 (4 сер.). Построить прямоугольный треугольник по радиусам r и r' кругов, вписанных в треугольники, на которые искомым треугольник разбивается перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу.

Пусть A —вершина прямого угла, BC —гипотенуза, D —основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу искомого прямоугольного треугольника.

Пусть O и O' суть соответственно центры кругов, вписанных в треугольники ABD и ACD . Прямые AO и AO' суть соответственно биссектрисы углов BAD и CAD , и потому

$$\angle OAO' = \angle OAD + \angle O'AD = \frac{\angle BAD + \angle CAD}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ.$$

Отсюда вытекает построение. Из некоторой точки D произвольной прямой $B'C'$ возставляем перпендикуляр DA' ; на прямых DA' и DB' откладываем отрезки $DM = DN = r$ и из точек M и N возставляем соответственно перпендикуляры к прямым DA' и DB' до пересечения этих перпендикуляров в точке O . Подобным же образом, пользуясь вторым данным, r' , строим точку O' по другую сторону перпендикуляра DA' . Затем строим на отрезке OO' сегмент, вмещающий угол в 45° , и из точки встречи A дуги этого сегмента с перпендикуляром DA' проводим прямые AX и AX' , образующие с прямыми AO и AO' соответственно углы, равные углам DAO и DAO' . Пусть B и C суть точки пересечения прямой $B'C'$ с прямыми AX и AX' ; треугольник ABC есть искомым.

Б. Мерцалов (Орель); А. Сорокин (Москва); В. Микиш (Новочеркасск).

№ 65 (4 сер.). Даны в одной плоскости точка P и три прямые L , L' и L'' , первая две из которых параллельны. Провести через точку P прямую, пересекающую прямые L , L' и L'' в точках A , B и C так, чтобы отношение AB к PC равнялось данному отношению $\frac{m}{n}$.

Пусть прямая L'' не параллельна прямым L и L' и пересекает их соответственно в точках A' и B' . Предположим, что задача решена, и проведем через точку A прямую, параллельную прямой L'' , до пересечения с прямой L' в точке B'' , а через точку P — прямую, параллельную прямым L и L' до пересечения с прямой L'' в точке P' .

Принимая во внимание, что $AB'' = A'B'$, из подобия треугольников $P'PC$ и $B''BA$ имеем:

$$\frac{P'C}{AB''} = \frac{P'C}{A'B'} = \frac{PC}{AB} = \frac{n}{m}.$$

Отсюда вытекает построение. Строя из пропорции

$$\frac{P'C}{A'B'} = \frac{n}{m}$$

отрезок $P'C$, как четвертую пропорциональную к величинам $A'B'$, m и n , откладываем длину этого отрезка на прямой L'' от точки P' в ту или другую сторону. Таким образом положение точки C на прямой L'' может быть двойное. Выбрав любое из них, соединим точку C с точкой P ;

прямая PC есть искомая. Таким образом задача имѣетъ два рѣшенія. Если бы прямая L'' была параллельна прямымъ L и L' , то либо всякая прямая, проходящая черезъ точку P и пересѣкающая прямые L , L' и L'' , удовлетворяла бы требованіямъ задачи, либо задача оказалась бы невозможной.

В. Мерцаловъ (Орель); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

№ 69 (4 сер.) Къ чашкамъ въсовъ привѣшены два куба; ребро одного изъ нихъ равно 10 см., а другое 1 см. Въ безвоздушномъ пространствѣ въсы находятся въ равновѣсіи. Въ воздухѣ же при температурѣ 15° равновѣсіе наступаетъ тогда, когда на болѣебій кубъ наложимъ ширю въ 1 граммъ; определить давленіе этого воздуха, зная, что коэффициентъ расширенія воздуха — $\alpha = 0,004$, удѣльный въсь $d = 0,0013$.

Объемъ большаго куба равенъ 1000 кубич. сантиметровъ, объемъ меньшаго — 1 куб. сантиметру. Согласно съ закономъ Архимеда воздухъ, взятый въ объемъ $1000 - 1 = 999$ куб. сантиметровъ въсѣтъ, по условію задачи, 1 граммъ. Этотъ объемъ воздухъ занимаетъ при неизвѣстномъ давленіи и температурѣ 15° ; узнаемъ объемъ его V_0 при нормальныхъ условіяхъ.

По формулъ Мариотта-Гэ-Люссака

$$V_0 \cdot 760 = \frac{999p}{1+15\alpha}, \quad (1)$$

а по условію задачи

$$V_0 d = 1,$$

откуда (см. 1)

$$\frac{760}{d} = \frac{999p}{1+15\alpha}.$$

Слѣдовательно

$$p = \frac{(1+15\alpha)760}{999 \cdot d} = \frac{(1+15 \cdot 0,004) \cdot 760}{999 \cdot 0,0013} = 620,3 \text{ милл.}$$

Н. С. (Одесса); *Д. Дьяковъ* (Персіановка).

Обложка
щется

Обложка
щется