Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXIV Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 283.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Съ средины октября текущаго года въ дѣлахъ нашего журнала сталъ принимать ближайшее участіе приватъ-доцентъ Новороссійскаго университета В. Ф. Каганъ. Послѣ того, какъ г. Каганъ взялъ на себя значительную часть труда по руководству журналомъ, мы можемъ сообщить нашимъ читателямъ, что обстоятельства, вызывавшія неправильное появленіе номеровъ „Вѣстника“ этимъ устраняется. Чтобы восполнить по мѣрѣ силъ задержку, происшедшую въ теченіе лѣтнихъ каникулъ, мы выпустили четыре номера въ короткій срокъ. Съ настоящаго же номера выпуски „Вѣстника“ будутъ выходить совершенно правильно 1-го и 15-го числа каждаго мѣсяца.

Впечатлѣнія отъ перваго международнаго физическаго конгресса.

Ко всякой всемірной выставкѣ пріурочивается рядъ международныхъ конгрессовъ въ томъ простомъ разсчетѣ, что многіе, изъ тѣхъ кто безъ того, можетъ быть, не собрался бы на конгрессъ, пріѣдутъ въ виду возможности осмотрѣть кстати и выставку; съ другой стороны, члены устраиваемыхъ конгрессовъ увеличатъ собою число посѣтителей выставки. Къ Парижской выставкѣ этого года было пріурочено 127 самыхъ разнообразныхъ конгрессовъ, въ спискѣ которыхъ находились и конгрессъ ацетилена, и конгрессъ исторіи религій, и конгрессъ коммивояжеровъ, и конгрессъ противъ злоупотребленія табакомъ, и конгрессъ воскреснаго отдыха, и конгрессъ для установки единства въ нумеровкѣ нитокъ, и конгрессъ булочниковъ и т. д., и т. д. Въ числѣ этихъ конгрессовъ впервые находился въ этомъ году международный *физическій* конгрессъ, иниціативу созыва котораго приняло на себя французское физическое общество.

По отдѣльнымъ частямъ физики—въ широкомъ смыслѣ этого слова—уже было нѣсколько международныхъ конгрессовъ, принесшихъ въ свое время громадную пользу: упомяну, напр., конгрессы метеорологическіе и электрическіе и укажу на то обстоятельство, что принятая теперь повсюду система практическихъ электрическихъ единицъ была выработана и введена въ науку и практику именно благодаря электрическимъ конгрессамъ. Но по физикѣ въ ея совокупности еще ни разу не было конгресса, и отъ него можно было съ полнымъ правомъ ожидать благодѣтельныхъ для науки результатовъ, какъ въ смыслѣ соглашенія относительно установки единицъ, такъ и въ смыслѣ разъясненія путемъ живого слова разныхъ спорныхъ вопросовъ. Не ограничиваясь этими цѣлями, организаторы конгресса присоединили къ нимъ еще общій обзоръ современнаго развитія физики. Для этого они составили списокъ основныхъ вопросовъ, которыми, по возможности, исчерпывалось бы содержаніе физики, и обратились къ тѣмъ изъ ученыхъ, кто наиболѣе работалъ въ области какого нибудь изъ этихъ вопросовъ, съ просьбою изложить результаты, достигнутые въ данномъ направленіи.

Призывъ организаціоннаго комитета конгресса встрѣтилъ весьма большое сочувствіе, и большинство докладовъ было прислано къ сроку,—за достаточный промежутокъ времени до начала конгресса. Къ началу конгресса почти всѣ доклады были отпечатаны въ видѣ отдѣльныхъ оттисковъ, которые могли получать заранѣе тѣ изъ членовъ конгресса, которые желали бы ознакомиться съ ними для болѣе плодотворнаго участія въ преніяхъ.

Большинство этихъ докладовъ написано не только съ полной компетентностью, но и съ удивительнымъ мастерствомъ, и отличается, при сжатости, къ которой призывалъ авторовъ организаціонный комитетъ, замѣчательною содержательностью. Но несмотря на краткость докладовъ совокупность ихъ составитъ 3 большихъ тома, которые представятъ собою полную картину состоянія физики къ концу XIX вѣка.

Эти 3 тома докладовъ съ присоединеніемъ 4-го тома—отчетовъ о самихъ засѣданіяхъ—явятся наиболѣе существеннымъ результатомъ работы той тысячи съ лишкомъ лицъ, которыя записались въ члены конгресса и большинство которыхъ присутствовало на немъ, такъ какъ другіе результаты оказались менѣе удачными. Такъ, по отношенію къ установкѣ единицъ конгрессъ не пришелъ почти ни къ какимъ результатамъ, главнымъ образомъ вслѣдствіе несогласія представителей германскаго физико-техническаго учрежденія (Physikalisch- Technisches Reichsanstalt) со многими предложеніями, исходившими отъ представителей международнаго бюро мѣръ и вѣсовъ въ Сэврѣ (Bureau international des poids et mesures). Вслѣдствіе такихъ разногласій, въ постановленіяхъ конгресса были выражены только desiderata относительно установки нѣкоторыхъ единицъ, а относительно другихъ было лишь упомянуто о томъ, что большинство склоняется къ такому-то выбору, а меньшинство къ такому-то; и такимъ образомъ, вѣроятно, лишь на послѣдующихъ конгрессахъ,— послѣ того, какъ результаты многихъ изслѣдованій будутъ выражены въ тѣхъ или другихъ единицахъ, — придутъ къ окончательному соглашенію.

Нужно замѣтить однако, что упомянутое несогласіе нѣмцевъ и французовъ въ вопросѣ объ единицахъ никакъ не являлось результатомъ племенной розни, ибо на этомъ конгрессѣ чисто научные интересы стояли на первомъ планѣ и всѣ члены конгресса чувствовали себя членами одной общей научной семьи, несмотря на то, что принятый для этого конгресса французскій языкъ далеко не для всѣхъ являлся удобнымъ способомъ выраженія мыслей.

Изъ иностранцевъ на конгрессѣ больше всего было англичанъ, русскихъ *) и нѣмцевъ, — но были и представители такихъ отдаленныхъ странъ какъ Индія и Японія. Центральною фигурою конгресса являлся симпатичнѣйшій старикъ, лордъ Кельвинъ (сэръ Вилльямъ Томсонъ), почетный президентъ конгресса, умъ котораго все еще блещетъ мощью и свѣжестью, несмотря на то, что тѣло уже начинаетъ поддаваться вліянію времени. Замѣчу всетаки, что среди 73-лѣтнихъ старцевъ рѣдко встрѣтишь человѣка, настолько бодраго, какъ онъ: достаточно сказать, что въ одномъ изъ засѣданій онъ произнесъ рѣчь объ „условіяхъ образованія волнъ въ эфирѣ посредствомъ перемѣщеній вѣсомой матеріи“ **) и говорилъ живо (по англійски, такъ какъ французскимъ онъ владѣетъ не особенно хорошо), горячо и довольно громко втеченіе $1^1/_4$ часа!

Конгрессъ былъ раздѣленъ на 7 секцій: 1) общіе вопросы, единицы, вопросы обученія; 2) механическая и молекулярная физика; 3) оптика и термодинамика; 4) электричество и магнетизмъ; 5) магнито-оптика: катодные лучи, излученія радія и т. д.; 6) космическая физика; 7) біологическая физика. На каждую изъ

*) Изъ русскихъ были академики: Голицынъ, Рыкачевъ, профессора: Зиловъ (Варшава), Гольдгаммеръ (Казань), Де-Метцъ (Кіевъ), Лебедевъ (Москва), Пильчиковъ, Шведовъ (Одесса), Боргманъ, Гезехусъ, Егоровъ, Терешинъ, Шателенъ (Петербургъ), Ефимовъ, Капустинъ (Томскъ) и много молодыхъ физиковъ.

**) Къ этой весьма интересной рѣчи я надѣюсь вернуться въ одномъ изъ послѣдующихъ номеровъ „Вѣстника“.

секцій пришлось отъ 3 до 5 трехчасовыхъ засѣданій, ибо собственно научныя засѣданія конгресса длились 5 дней и при этомъ старались избѣгать совпаденія занятій секцій, близкихъ по своимъ областямъ. При такомъ недостаткѣ времени, для того чтобы успѣть выполнить всю программу, докладчики должны были излагать возможно короче свои и безъ того кратко составленные доклады. Вслѣдствіе этого засѣданія секцій были не настолько интересны, насколько можно было ожидать a priori, ибо при столь краткомъ изложеніи приходилось сравнительно рѣдко услышать что нибудь новое, какъ въ смыслѣ фактовъ, такъ и въ смыслѣ идей, — чего отнюдь нельзя сказать про самые напечатанные доклады.

Такая краткость докладовъ при весьма большомъ ихъ числѣ (около 80) явилась также одною изъ причинъ того, что и преній было сравнительно мало, и они не во всѣхъ случаяхъ представляли интересъ для слушателей. Наиболѣе интересенъ бывалъ обмѣнъ мнѣній въ 1-ой и 5-ой секціяхъ.

Такъ какъ даже краткій обзоръ содержанія всѣхъ докладовъ весьма затруднителенъ (въ особенности пока не вышли 3 тома этихъ докладовъ) я ограничусь перечисленіемъ.

Въ программу первой секціи кромѣ 2-хъ докладовъ общаго характера—Henri Poincaré, „соотношенія между опытной и математической физикой“ и Pellat, „національныя лабораторіи“,—и 2-хъ докладовъ, касающихся общихъ вопросовъ метрологіи — Benoit „точность метрологическихъ опредѣленій“ и Guillaume, „обзоръ различныхъ предложеній относительно установки единицъ“—входилъ рядъ докладовъ по отдѣльнымъ вопросамъ метрологіи и установки единицъ, а именно: Macé de Lepinay — метрологическія опредѣленія по интерференціоннымъ способамъ, Chappuis — термометрическіе шкалы, Barus — пирометрія, Ames — механическій эквивалентъ теплоты, Griffiths—единица теплоты, Gouy—эталонъ электродвижущей силы, Leduc—электрохимическій эквивалентъ серебра, Boys — постоянная тяготѣнія, Eötvös — изученіе поверхностей уровня, Bourgeois—тяжесть на поверхности земного шара и Violle — скорость звука.

Во второй секціи былъ сдѣланъ рядъ докладовъ, касающихся свойствъ тѣлъ въ твердомъ, жидкомъ и газообразномъ состояніи и вопроса о непрерывности этихъ состояній, а именно: Voigt — упругость и симметрія кристалловъ, Mesnager—деформаціи твердыхъ тѣлъ (любопытные, какъ теоретическіе, такъ и экспериментальные результаты, касающіеся деформацій на предѣлѣ упругости), Guillaume—остаточныя деформаціи металловъ (одинъ изъ самыхъ интересныхъ докладовъ по новизнѣ и широтѣ взглядовъ: исходя изъ того, что остаточныя деформаціи ничтожны въ чистыхъ металлахъ, что въ стеклахъ онѣ тѣмъ рѣзче, чѣмъ сложнѣе составъ ихъ, что остаточное намагниченіе тѣмъ больше, чѣмъ больше въ желѣзѣ углерода, и что хлористый кальцій фосфоресцируетъ лишь въ случаѣ присутствія въ немъ примѣсей другихъ солей,—Guillaume объясняетъ всѣ подобныя остаточныя дѣйствія происходящими подъ вліяніемъ механическихъ силъ, магнитнаго поля или свѣта химическими измѣненіями тѣлъ, лишь медленно возвращающихся къ первоначальному распредѣленію), Robert-Austen — микрографія сплавовъ, Spring—твердыя тѣла подъ давленіемъ, Вейнбергъ—плавленіе и кристаллизація по изслѣдованіямъ Таммана, Van-t-Hoff—кристаллизація при постоянной температурѣ; Шведовъ—твердость жидкостей, Battelli — калориметрія жидкостей, Van der Mensbrugghe — капиллярность, Amagat — статика жидкостей, Van der Waals—то же относительно смѣсей, Mathias — критическія постоянныя, кн. Голицынъ — критическій показатель преломленія, Brilloúin — диффузія газовъ, Perrin — осмосъ, Bierknes—гидродинамическія дѣйствія на разстояніи.

Въ 3-ьей секціи кромѣ упомянутой рѣчи Kelvin'a былъ рядъ докладовъ, касающихся спектровъ и показателей преломленія, и рядъ докладовъ, касающихся излученія, а именно: Rydberg —распредѣленіе спектральныхъ линій, Rubens — большія длины волнъ, Carvallo—формулы дисперсіи, Drude—оптическія свойства металловъ, Cornu—скорость свѣта, Wien—температура и энтропія излученія, Lummer — излученіе черныхъ тѣлъ, твердыхъ тѣлъ и жидкостей, Pringsheim — излученіе газовъ, Лебедевъ — давленіе, вызываемое излученіемъ,—и 2 доклада собственно по термодинамикѣ—Lippmann—принципъ Carnot и кинетическая теорія газовъ и Witz—прогрессъ теоріи тепловыхъ двигателей.

Въ 4-ой секціи были намѣчены слѣдующіе доклады: Poynting—теорія распространенія электричества, Abraham—опредѣленія v (отношенія между электромагнитною и электростатическою единицами электричества), Blondlot и Gutton—скорость электрическихъ волнъ, Righi—Герцовскія волны, Branly—радіокондукторы (кохереры), Bouty—газы, какъ діэлектрики, Arrhenius—электролизъ и іонизація, Christiansen — электричество соприкосновенія, Lucien Poincaré—теорія элемента, Dubois — магнитныя свойства тѣлъ, Warburg—гистерезисъ, Nagaoka—магнетострикція, Hurmuzescu—дѣйствія намагниченія, Von Lang — электрическая дуга, Potier—многофазные токи, Blondel—осциллографы.

Въ 5-ой секціи были намѣчены доклады Lorentz'о—магнитооптика; Becquerel — ураническіе лучи; г. и г-жа Curie — новыя радіоактивныя вещества; Bichat и Swyngedauw — актиноэлектрическія явленія; Villard—катодные лучи; J. J. Thomson — электрическіе разряды въ газахъ; Villari—іонизація газовъ.

6-ая и 7-ая секціи привлекли сравнительно мало и докладовъ и участниковъ,—вѣроятно, потому, что въ настоящемъ году состоялись также конгрессы метеорологическій, гигіены, медицины и „медицинскихъ электрологіи и радіологіи". Въ 6-ой секціи предполагались доклады: Sarasin и Forel—колебанія озеръ. Hagenbach—оптика льда, Exner—атмосферное электричество, Paulsen—сѣверное сіяніе, Crova—солнечная постоянная, Birkeland—физическое строеніе солнца, Dufour—фотометрія звѣздъ,—а въ 7-ой—

D'Arsonval — токи большой частоты въ организмѣ; Broca—передача энергіи въ организмѣ; Charpentier — физическія явленія на сѣтчаткѣ; Tscherning — аккомодація и Henocque — приложеніе спектральнаго анализа къ біологической физикѣ.

Къ недостаткамъ конгресса, вызваннымъ, вѣроятно, также обиліемъ матеріала въ видѣ докладовъ, нужно отнести малое количество демонстрацій и опытовъ. Одинъ разъ въ музеѣ естественной исторіи (Museum d'Histoire Naturelle) были весьма наглядно показаны H. Becquerel'емъ и супругами Curie опыты надъ радіоактивными веществами; другой разъ въ École Polytechnique Cornu прочелъ свое сообщеніе о скорости свѣта, иллюстрируя его *имитаціей* опыта Физо и воспроизведеніемъ опыта Фуко съ его приборами; третій разъ, при посѣщеніи Сорбонны, было также показано нѣсколько опытовъ. Къ этому можно, если угодно, присоединить осмотръ пресловутаго большого телескопа („la grande lunette"), механическая часть котораго, дѣйствительно, превосходна, но оптическая пока, какъ легко было заключить изъ того, что видѣли въ него члены конгресса (обыкновеннымъ посѣтителямъ выставки и того не показываютъ), еще далеко не совершенна.

Такая немногочисленность демонстрацій (отдѣльныя сообщенія ими, сколько мнѣ извѣстно, совершенно не сопровождались) заставила, вѣроятно, многихъ изъ русскихъ, — чувствовавшихъ себя зачастую такъ, какъ будто это былъ не только международный, но и всероссійскій съѣздъ,—вспомнить о послѣднихъ нашихъ съѣздахъ естествоиспытателей и врачей.

Прив.-доц. *Б. П. Вейнбергъ* (Одесса).

О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости.

§ 1. Рѣшеніе тр-ка по элементамъ, опредѣляющимъ его, приводится, во первыхъ, къ составленію системы уравненій, которыми опредѣляются искомые элементы тр-ка; во вторыхъ, къ разнообразнымъ упрощеніямъ этихъ уравненій обыкновенно путемъ тождественныхъ преобразованій выраженій, содержащихъ тригонометрическія функціи угловъ, и, въ третьихъ, къ рѣшенію полученной такимъ образомъ упрощенной системы уравненій.

Ниже мы дадимъ теорему, которая почти всегда даетъ возможность немедленно получить систему уравненій, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе тр-ка. Теперь-же укажемъ тѣ тождества, которыми особенно часто пользуются при преобразованіи упомянутыхъ уравненій. Къ этимъ тождествамъ, кромѣ тѣхъ, которыя обыкновенно заучиваются наизусть учащимися, мы относимъ еще слѣдующія:

1. $$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos A,$$

2. $$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B,$$

3. $$\cos(A-B)+\cos(A+B)=2\cos A\cos B,$$

4. $$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B,$$

Сюда же мы относимъ рядъ равенствъ, связывающихъ тригонометрическія функціи трехъ угловъ, A, B, C при условіи, что

$$A+B+C=180^\circ:$$

5. $$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

6. $$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

7. $$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

8. $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

и т. д.

Въ справедливости равенствъ 5. и 6. убѣждаемся, замѣняя одинъ изъ угловъ, напримѣръ C, равнымъ ему угломъ $180^\circ-(A+B)$.

Изъ равенствъ 5. и 6. легко получить новый рядъ равенствъ въ томъ числѣ и равенства 7. и 8. на основаніи слѣдующаго соображенія:

Если $A+B+C=180^\circ$, то

$$(180^\circ-A)+(180^\circ-B)+(-C)=180^\circ,$$

$$\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)+\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)+\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=180^\circ,$$

$$(180^\circ-A)+(90^\circ-B)+(90^\circ-C)=180^\circ$$

и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что равенства 5. и 6. могутъ быть отнесены къ тремъ угламъ

$$180^\circ-A,\ 180^\circ-B,\ -C;\ \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

или же

$$90^\circ-\frac{A}{2},\ 90^\circ-\frac{B}{2},\ 90^\circ-\frac{C}{2},\ \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

и т. д.

Относя, напримѣръ, равенство 5. къ тремъ угламъ (α), а равенство 6. къ тремъ угламъ (β), получимъ соотвѣтственно равенства 7. и 8.

Равенствами 1. — 8. весьма часто приходится пользоваться при рѣшеніи тр-ка. На нихъ должно быть обращено особое вниманіе въ курсѣ тригонометріи и они должны быть запоминаемы наравнѣ съ другими основными формулами гоніометріи. *)

§ 2. Изъ уравненій, съ которыми очень часто приходится встрѣчаться при рѣшеніи тр-ка и которыя намъ ниже понадобятся, мы отмѣтимъ тотъ случай, когда дается сумма s двухъ угловъ A и B и величина m одного изъ слѣдующихъ выраженій:

I. $\sin A \pm \sin B$, II. $\cos A \pm \cos B$, III. $\sin A \cos B$,

IV. $\cos A \cos B$, V. $\sin A \sin B$, VI. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$, VII. $\dfrac{\sin A}{\sin B}$,

VIII. $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$ и IX. $\operatorname{tg} A \operatorname{ct} B$.

Въ случаяхъ I — II прибѣгаемъ къ одному изъ тождествъ

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\frac{A \pm B}{2}\cos\frac{A \pm B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

для опредѣленія тригонометрической функціи угла $\dfrac{A-B}{2}$.

Въ случаяхъ III — V прибѣгаемъ соотвѣтственно къ одному изъ тождествъ 1., 3., 4., предыдущаго параграфа.

Случай VI приводится къ случаю IV на основаніи тождества

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}.$$

Наконецъ, въ случаяхъ VI — VIII примѣняемъ соотвѣтственно къ одному изъ равенствъ

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{m}{1}, \quad \frac{\sin A . \sin B}{\cos A . \cos B} = \frac{m}{1}, \quad \frac{\sin A . \cos B}{\cos A . \sin B} = \frac{m}{1}$$

теорему: въ геометрической пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ и т. д.

*) Мы имѣемъ въ виду реальныя училища и другія учебныя заведенія, въ которыхъ математика поставлена на томъ-же уровнѣ.

Ученикъ долженъ умѣть рѣшать указанныя здѣсь системы уравненій, не задумываясь. Въ самомъ дѣлѣ, съ такими системами мы постоянно встрѣчаемся при рѣшеніи тр-ка, когда данъ одинъ изъ его угловъ.

§ 3. Кромѣ сторонъ тр-ка a, b, c и его угловъ A, B, C, данными или искомыми задачи могутъ быть его высоты h_a, h_b, h_c, биссекторы его угловъ l_a, l_b, l_c, медіаны m_a, m_b, m_c, радіусы внѣвписанныхъ круговъ r_a, r_b, r_c, разстоянія h_a', h_b', h_c', ортоцентра отъ сторонъ тр-ка, периметръ треугольника $2p$, его площадь Δ, радіусъ r вписаннаго, радіусъ R описаннаго круга и т. д. Слѣдуетъ поэтому знать, хотя бы и не наизусть, слѣдующія зависимости между этими элементами съ одной стороны, сторонами и углами тр-ка съ другой стороны:

$$h_a = b\sin C = c\sin B,$$

$$l_a = \frac{h_a}{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)} = \frac{h_a}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)} = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

$$m_a{}^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{4},$$

$$h_a' = a\,\frac{\cos B\cos C}{\sin A},$$

$$\Delta = \frac{bc\sin A}{2},$$

$$r = \frac{\Delta}{p},$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

и т. д.

§ 4. Мы докажемъ теперь теорему, дающую возможность легко составить систему уравненій, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе тр-ка.

Теорема. *Однородная функція нулевого измѣренія относительно сторонъ треугольника не измѣняетъ своей величины отъ замѣны сторонъ синусами противолежащихъ угловъ.*

Дѣйствительно, если $f(a, b, c)$ есть однородная фукнція нулевого измѣренія отъ сторонъ a, b, c тр-ка ABC, то для произвольнаго числа t будетъ справедливо тождество

$$f(a, b, c) = f(ta, tb, tc).$$

Полагая здѣсь $t = \frac{1}{2R}$, гдѣ R радіусъ описаннаго круга, и замѣчая, что

$$\frac{a}{2R} = \sin A,\quad \frac{b}{2R} = \sin B,\quad \frac{c}{2R} = \sin C,$$

находимъ

$$f(a,\ b,\ c) = f(\sin A,\ \sin B,\ \sin C). \text{ *)}$$

Примѣры:

$$\frac{p}{a} = \frac{a+b+c}{2a} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2\sin A} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{p-a}{a} = \frac{b+c-a}{2a} = \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{2\sin A} = \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{p-a}{b} = \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \text{ и т. д.}$$

Вышеприведенная теорема даетъ возможность составить произвольное число системъ уравненій, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе треугольника, если только задано достаточное число его элементовъ или достаточное число однородныхъ функцій отъ этихъ элементовъ. Для этой цѣли составляемъ сколько угодно однородныхъ дробей Q_1, Q_2, Q_3 . . . . . . , нулевого измѣренія относительно данныхъ линейныхъ элементовъ (что всегда будетъ

---

*) Ученикамъ среднихъ учебныхъ заведеній достаточно показать справедливость этой теоремы на частномъ примѣрѣ. Разсмотримъ, напримѣръ, раціональную дробь

$$Q = \frac{a^3 + 3abc\sin C + b^3}{c^3 - a^2b\sin B + a^2c}$$

однородную относительно сторонъ тр-ка. Такъ какъ всѣ члены, входящіе въ составъ ея числителя и знаменателя, третьяго измѣренія, то измѣреніе дроби равно нулю. Если a, b, c замѣнимъ соотвѣтственно равными имъ величинами $2R\sin A$, $2R\sin B$ и $2R\sin C$, то члены числителя и знаменателя будутъ имѣть $(2R)^3$ общимъ множителемъ и, по сокращеніи на этотъ множитель, получимъ $Q = Q_1$, гдѣ Q_1 отличается отъ Q только тѣмъ, что количества a, b, c соотвѣтственно замѣнены черезъ $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

возможно, если заданы самые линейные элементы или однородныя функціи отъ нихъ), выражаемъ каждый изъ элементовъ въ функціи сторонъ и угловъ треугольника по формуламъ предыдущаго параграфа и, наконецъ, замѣняемъ въ полученныхъ выраженіяхъ стороны треугольника синусами противолежащихъ угловъ. Такимъ образомъ получимъ рядъ уравненій:

$$Q_1 = f_1,\ Q_2 = f_2,\ Q_3 = f_3, \ldots\ldots,$$

гдѣ Q_1, Q_2, Q_3, ... извѣстныя величины, а f_1, f_2, f_3 ...... суть функціи только отъ угловъ треугольника. Выбравъ достаточное число удобныхъ для рѣшенія уравненій, опредѣляемъ углы A, B, C.

Примѣры:

1. Дается $2p$, h_a и A. Опредѣлить B и C. Такъ какъ $2p$ и h_a перваго измѣренія, то $\frac{2p}{h_a}$ есть дробь нулевого измѣренія. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{a+b+c}{b\sin C} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2},$$

слѣдовательно, имѣемъ дѣло съ системой уравненій, разсмотрѣнной раньше (§ 2, случай 3).

2. Даны: $2p$, Δ, A. Такъ какъ Δ второго измѣренія, то пишемъ

$$\frac{\Delta}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2} = \frac{2ab\sin C}{(a+b+c)^2} = \frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Далѣе см. § 2, случай VIII.

3. Даны: a, b, c. Опредѣлить углы A, B, C. Двѣ однородныя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ нулевого измѣренія даютъ

$$(1) \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B},\quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} \ldots\ldots (2)$$

Исключивъ C при помощи уравненія $C = 180^0 - (A + B)$, получимъ

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(A + B)}{\sin B} = \sin A \operatorname{ctg} B + \cos A \ldots\ldots (3).$$

Для исключенія угла B нужно къ уравненіямъ (1) и (3) присоединить равенство

$$\operatorname{ctg}^2 B = \operatorname{cosec}^2 B - 1 = \frac{1}{\sin^2 B} - 1 \ldots\ldots (4)$$

связывающее $\operatorname{ctg} B$ и $\sin B$. Исключивъ B изъ ур-ій (1), (3) и (4) и замѣнивъ $\sin^2 A$ черезъ $1 - \cos^2 A$, получимъ извѣстное соотношеніе

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

для опредѣленія угла A. Если бы вмѣсто дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ мы взяли дроби $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, то получили бы

$$\frac{p-a}{a} = \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}; \quad \frac{p-b}{b} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},$$

откуда

$$\frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \sin^2\frac{C}{2}.$$

§ 5. Рѣшеніе послѣдней задачи показываетъ, что удачный выборъ дробей нулевого измѣренія играетъ значительную роль въ вопросѣ о рѣшеніи задачи. Намъ предстоитъ поэтому заняться рѣшеніемъ двухъ вопросовъ. Какія однородныя дроби нулевого измѣренія слѣдуетъ предпочесть при составленіи уравненій, соотвѣтствующихъ условіямъ задачи? Когда уравненія составлены, то какія изъ неизвѣстныхъ предпочтительнѣе исключить и въ какихъ случаяхъ представляется удобнымъ вводить новыя вспомогательныя неизвѣстныя? Нельзя дать общаго отвѣта на эти вопросы, но слѣдуетъ вообще руководствоваться слѣдующими правилами.

Правило первое. Вообще говоря, удобно вводить въ разсмотрѣніе выраженія вида $a + b + c$, $a + b - c$, ибо такія выраженія, какъ мы видѣли на предыдущихъ примѣрахъ, приводятъ къ логариѳмическимъ выраженіямъ.

Правило второе. Числители и знаменатели однородныхъ дробей не должны быть очень высокаго измѣренія, такъ какъ въ противномъ случаѣ будемъ, вообще говоря, получать уравненія высокихъ степеней относительно тригонометрическихъ функцій угловъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

С. Шатуновскій (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О гидростатическомъ парадоксѣ Въ вышедшемъ недавно I томѣ III-ьей серіи „Bibliotheca Mathematica“ помѣщена интересная статья, принадлежащая профессору университета въ Бордо Duhem'u — подъ заглавіемъ: „Archimèdi connaissait—il le paradoxe hydrostatique?“ Еще Лагранжъ въ началѣ своихъ „Основъ гидростатики“ [1]), приписывая Архимеду открытіе основного закона, которому подчиняется давленіе внутри вѣсомой жидкости, указываетъ, что только S. Stewin [2]) замѣтилъ парадоксальный характеръ, какой часто представляютъ собой слѣдствія этого закона. Подвергая строгому критическому разбору текстъ того принципа, который положенъ Архимедомъ въ основаніе „Трактата о плавающихъ тѣлахъ“, сопоставляя и комбинируя различныя мѣста, въ которыхъ Архимедъ этотъ принципъ примѣняетъ, Dahem очень убѣдительно доказываетъ, что Архимедъ вовсе не имѣлъ яснаго представленія о размѣрахъ давленія, производимаго жидкостью на дно сосуда. Напротивъ того, онъ считалъ, что это давленіе равно вѣсу, заключающейся въ сосудѣ жидкости и плавающихъ въ ней тѣлъ. Если это не помѣшало генію Архимеда правильно вывести законы, которымъ подчиняются плавающія тѣла, то это по мнѣнію Duhem'a представляетъ собой только замѣчательный примѣръ того, какъ вѣрное заключеніе выводится неправильнымъ путемъ. Поэтому создателемъ вѣрныхъ основъ гидростатики, по мнѣнію Duhem'a, слѣдуетъ считать *Simon'a Stewin'a*. Во всякомъ случаѣ эти соображенія служатъ лишнимъ примѣромъ того, что вполнѣ точное и полное выраженіе основныхъ законовъ почти никогда не дается тѣми, кто ихъ высказываетъ въ первый разъ.

Русская математическая литература за 1898 годъ. Въ вышедшемъ недавно 4-мъ выпускѣ IX тома (II серіи) Извѣстій Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ помѣщенъ подъ заглавіемъ: „Bibliographia Mathematica Rossica“ списокъ книгъ и статей по чистой математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи въ теченіе 1898 г. Списокъ этотъ составленъ профессоромъ Д. Синцовымъ и заключаетъ 150 сочиненій. Изъ нихъ на ариѳметику приходится 48, на элементарную алгебру 13, на элементарную геометрію 6, на тригонометрію 8. Всего слѣдовательно по элементарной математикѣ 75 сочиненій; изъ нихъ однако сочиненій новыхъ (т. е. появляющихся въ печати въ первый

---

[1]) „Mécanique Analytique“. Seet. VI.

[2]) Simon Stewin математикъ герцога Оранскаго и инженеръ голландской канализаціи,—родился въ Брюггэ около 1548 г., умеръ въ 1620 г. Занимался онъ математикой и механикой, главнымъ образомъ гидростатикой. Stewin первый разрѣшилъ задачу объ условіи равновѣсія тяжелаго тѣла на наклонной плоскости, и, что еще важнѣе, нашелъ условіе равновѣсія трехъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.

разъ) только 41. Наконецъ изъ числа послѣднихъ 22 сочиненія представляютъ собой статьи, помѣщенныя въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ и только 19 вышли отдѣльными изданіями.

Настоящій выпускъ „Bibliographia Mathematica Rossica" уже третій; первые два выпуска содержатъ списки сочиненій по чистой математикѣ, опубликованныхъ въ 1896-мъ и 1897-мъ году.

Съѣздъ въ Аахенѣ. Къ 3-му сентября текущаго года въ Аахенѣ былъ созванъ съѣздъ членовъ „Союза германскихъ математиковъ". Какъ объ этомъ съѣздѣ, такъ и о самомъ Союзѣ, мы дадимъ нѣсколько позже болѣе подробныя свѣдѣнія. Изъ русскихъ ученыхъ для прочтенія на засѣданіяхъ съѣзда предложилъ рефератъ профессоръ Екатеринославскаго Горнаго Училища Д. Синцовъ. („О коннексахъ въ пространствѣ").

Сочиненія, представленныя на премію имени Лобачевскаго. На премію имени Н. И. Лобачевскаго поступили до 22-го Октября 1899 года сочиненія Whitheaheadl'a, Killing'a, Binder'a и Долянскаго. За отзывами о работахъ первыхъ трехъ ученыхъ Казанское Физико-Математическое Общество обратилось къ К. Ball'ю, H. Poincaré и К. Андрееву, профессору Харьковскаго Университета. За отказомъ H. Poincaré постановлено просить профессора Bianchi дать отзывъ о работахъ Killing'a. (Изв. Каз. Физ. Мат. Общ. X № 1).

Отъ Московскаго математическаго общества.

Въ виду общепризнанной потребности Общество постановило издать на собственныя средства библіографическій указатель математическихъ сочиненій русскихъ ученыхъ съ начала истекающаго XIX столѣтія. Составленіе указателя взялъ на себя В. В. Бобынинъ, какъ по приглашенію Общества, такъ и по порученію Секціи Математики X Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Указатель выйдетъ въ свѣтъ подъ заглавіемъ:

Русская математическая литература XIX столѣтія

и будетъ состоять изъ слѣдующихъ пяти отдѣловъ:

1) Указатель періодическихъ изданій съ подробными библіографическими свѣдѣніями о каждомъ.

2) Систематическій указатель, расположенный по системѣ, введенной Парижскимъ международнымъ конгрессомъ библіографіи математическихъ наукъ 1889 года въ свой „Répertoire bibliographique des sciences mathématiques".

3) Хронологическій указатель.

4) Указатель учебной математической литературы въ областяхъ низшаго и средняго преподаванія.

5) Біографическій словарь русскихъ математиковъ XIX столѣтія.

Лицъ, напечатавшихъ на русскомъ или иностранныхъ языкахъ, въ русскихъ или заграничныхъ изданіяхъ, статьи и отдѣльныя сочиненія по всѣмъ отдѣламъ Чистой и Прикладной Математики, Астрономіи, Математической Физики и Метеорологіи, Московское Математическое Общество проситъ сообщить свѣдѣнія: біографическія о себѣ и библіографическія о своей учено-литературной дѣятельности, адресуя ихъ на имя составителя В. В. Бобынина (Москва, редакція журнала „Физико-Мамематическія Науки") или на имя Общества (Москва, Университетъ).

Московское Математическое Общество проситъ редакціи газетъ и журналовъ не отказать ему въ возможно широкомъ распространеніи настоящаго заявленія въ кругу своихъ читателей.

РЕЦЕНЗІИ.

Курсъ примѣнимой Алгебры. Систематическое изложеніе основныхъ пріемовъ элементарной алгебры, находящихъ примѣненіе въ техникѣ и наукахъ о природѣ, и обычныхъ дополнительныхъ статей. Составилъ **В. Лермантовъ,** Лаборантъ и Приватъ-Доцентъ по Физикѣ Императорскаго С.-Петербургскаго Университета, для самообученія и школъ. Содержитъ матеріалъ 3, 4, 5 и 6 классовъ гимназій, 3, 4 и 5 классовъ Реальныхъ Училищъ, и всего курса Техническихъ Училищъ, Духовныхъ семинарій и Женскихъ гимназій. С.-Петербургъ. 1900. 143 стр. 8°.

Какъ видно изъ заглавія и предисловія книги авторъ поставилъ себѣ цѣлью выдѣлить тѣ алгебраическіе пріемы, которые имѣютъ непосредственное примѣненіе при изученіи природы и въ техникѣ. Авторъ справедливо замѣчаетъ однако, что изложеніе однихъ правилъ вычисленія было бы не цѣлесообразно потому, что учащійся при малѣйшемъ уклоненіи отъ шаблона не умѣлъ бы ими воспользоваться. Необходимо поэтому указать и принципы, на которыхъ эти вычисленія основываются. Сообразно этой задачѣ книга раздѣлена на двѣ части: первая содержитъ тѣ части алгебры, о которыхъ сейчасъ была рѣчь, а вторая подъ заглавіемъ „Дополненія" содержитъ болѣе трудныя статьи, которыя, по мнѣнію автора, въ обычной системѣ изложенія только отвлекаютъ читателя отъ сути дѣла.

Посмотримъ, какъ эта задача выполнена авторомъ.

I. Первая глава носитъ такое заглавіе: „Для какой цѣли придумана Алгебра, и каковы основныя положенія и пріемы этой науки". На первый вопросъ послѣ надлежащихъ разъясненій авторъ отвѣчаетъ слѣдующимъ образомъ:

И такъ, *суть алгебраическаго метода* для рѣшенія задачъ *заключается въ замѣнѣ чиселъ буквами и въ составленіи помощью этихъ буквъ уравненія, выражающаго* *численную зависимость между данными задачи. Преобразуя уравненіе* по опредѣленнымъ правиламъ, *находятъ „выраженіе" неизвѣстной помощью данныхъ задачи.* Въ этомъ выраженіи *обозначено какія ариѳметическія дѣйствія надо произвести надъ цифровыми данными каждой задачи такого рода, чтобы получить ея рѣшеніе въ цифрахъ*". *)

Съ такимъ утвержденіемъ никакъ нельзя согласиться, потому что многіе очень существенные отдѣлы алгебры, какъ-то: рѣшеніе численныхъ уравненій, теорія логориѳмовъ, извлеченіе корней и т. д. имѣютъ своей задачей именно численную, а не буквенную калькуляцію. Мы не говоримъ уже о смѣшеніи численной и цифровой стороны дѣла, которое у г. Лермантова встрѣчается нѣсколько разъ.

Впрочемъ, формулировать задачу алгебры, въ особенности въ доступной для начинающаго формѣ чрезвычайно трудно и именно потому, что наука эта не „придумана", по выраженію г. Лермантова, для какой нибудь опредѣленной цѣли, а создавалась вѣками при разрѣшеніи самыхъ разнообразныхъ задачъ.

Авторъ переходитъ далѣе къ основнымъ опредѣленіямъ. Многія изъ этихъ опредѣленій представляются намъ однако крайне неправильными.

Такъ въ пунктѣ 2 смѣшиваются такія существенно различныя понятія, какъ „величина" и „значеніе величины".

„*Все*, что *можетъ быть больше или меньше*, все, что подлежитъ измѣренію называется въ Алгебрѣ „величина". . . . . Въ *Алгебрѣ никогда не разсуждаютъ о величинахъ непосредственно*, а всегда предполагается, что каждая величина, выражена именованнымъ числомъ посредствомъ сравненія съ величиной того-же рода, принятой за единицу мѣры". Далѣе, на страницѣ 71: „*Пропорціональность связываетъ всякую величину и ея численное выраженіе въ условленныхъ единицахъ мѣры*".

Мы считаемъ существенно важнымъ всегда выяснить учащемуся, что именованное число выражаетъ не самую величину, а нѣкоторое ея значеніе. **)

Далѣе мы находимъ слѣдующее опредѣленіе одночлена: „Словомъ: „*одночленъ*" или просто „*членъ*" формулы или многочленнаго выраженія называютъ въ алгебрѣ *всякую совокупность буквъ и цифръ соединенныхъ между собою знаками умноженія и дѣленія и отдѣленныхъ* отъ другихъ членовъ знаками + и — ". Въ подстрочномъ примѣчаніи прибавлено, что „другое опредѣленіе, часто встрѣчающееся въ книгахъ, легко можетъ дать поводъ къ превратному толкованію". Не знаемъ, на сколько справедливо это

*) Здѣсь, какъ и въ дальнѣйшемъ изложеніи, сохраненъ курсивъ автора.

**) См. также объяснительную записку въ программѣ по ариѳметикѣ въ гимназіяхъ и прогимназіяхъ.

замѣчаніе, но только несомнѣнно, что согласно опредѣленію г. Лермантова, выраженія

$$\sqrt{ab},\ \lg\frac{a}{b},\ \sin 3x$$

не будутъ одночленами.

Извлеченіе корня опредѣлено какъ дѣйствіе обратное возвышенію въ степени. Между тѣмъ такое опредѣленіе безъ дальнѣйшихъ оговорокъ безусловно неправильно, такъ какъ логориѳмированіе есть также дѣйствіе, обратное возвышенію въ степень.

При изложеніи дѣйствій надъ алгебраическими количествами преподаватель всегда старается выяснить учащемуся, что *сложить* можно всякія два выраженія, тогда какъ *приведенію* подлежатъ только подобные члены. Вмѣсто этого мы находимъ у г. Лермантова слѣдующее странное замѣчаніе:

„Каждая буква выражаетъ особое алгебраическое количество, и подобна опредѣленному именованному числу. Какъ нельзя складывать или перемножать свѣчи и людей, коровъ и пуды сѣна, такъ точно нельзя въ дѣйствительности произвести дѣйствіе надъ двумя разными буквами. Но мы можемъ складывать и вычитать однородныя именованныя числа; такъ точно можно поступать и съ членами, состоящими изъ одинаковыхъ буквъ (?): въ такомъ случаѣ только коэффиціенты измѣняются въ дѣйствительности. Такъ напримѣръ:

$$2ab - 10ab + 100\,ab = 92ab.$$

Послѣднія страницы первой главы посвящены выясненію понятія о положительномъ и отрицательномъ количествѣ.

Глава II посвящена уравненіямъ первой степени. „*Всякое равенство между постоянными, извѣстными* „*алгебраическими количествами*“, говоритъ авторъ, обращается въ „*тождество*“, если будутъ сдѣланы въ той и другой части *необходимыя* „*преобразованія*“. Это совершенно неправильно: равенство между постоянными величинами, если только оно справедливо, всегда представляетъ собой „тождество“. Преобразованія могутъ служить только къ тому, чтобы обнаружить справедливость тождества, а не къ тому, чтобы сдѣлать равенство тождествомъ.

„Другое дѣло, говоритъ авторъ далѣе, когда „въ число алгебраическихъ количествъ составляющихъ данное равенство, входятъ и „*неизвѣстныя*“. Въ такомъ случаѣ равенство всегда возможно и называется „*уравненіемъ*“.

Какое содержаніе вложено въ слова „равенство всегда возможно“? Если оно должно выражать, что уравненіе всегда имѣетъ корень, то это явно несправедливо; въ противномъ же случаѣ представляется чрезвычайно страннымъ, почему авторъ не объяснилъ своей мысли.

Понятіе о равнозначущихъ уравненіяхъ вовсе отсутствуетъ и естественно, что при такихъ условіяхъ авторъ лишенъ возможности установить принципы, на которыхъ покоится рѣшеніе уравненій, и вынужденъ ограничиться указаніемъ пріемовъ, ведущихъ къ этой цѣли. Рѣшая многочисленные примѣры, авторъ *между* *прочимъ* знакомитъ учащагося съ возвышеніемъ двучленовъ въ квадратъ, съ умноженіемъ суммы двухъ количествъ на ихъ разность и съ т. п. тождественными преобразованіями. На чемъ-же долженъ сосредоточить свое вниманіе учащійся? На рѣшеніи уравненія, или на изученіи новыхъ для него преобразованій?

Третья глава посвящена составленію уравненій первой степени, а четвертая рѣшенію уравненій первой степени со многими неизвѣстными. Изложивъ способъ подстановокъ, авторъ говоритъ слѣдующее:

„Способъ подстановокъ" удобенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда одна изъ неизвѣстныхъ очень просто выражается съ помощью другихъ, благодаря особенной формѣ одного изъ уравненій. Если оба уравненія одинаковой степени сложности (?), можно пользоваться и „*способомъ исключенія*". Для этого рѣшаютъ первое и второе уравненіе относительно одной неизвѣстной, считая другую какъ бы извѣстной; затѣмъ приравниваютъ между собою оба полученныя такимъ путемъ выраженія одной и той-же неизвѣстной. Такъ получается одно новое уравненіе, содержащее уже одно только неизвѣстное."

Такимъ образомъ способъ исключенія является не общимъ методомъ рѣшенія двухъ линейныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными, для производства котораго существуютъ различные пріемы, а только однимъ изъ способовъ рѣшенія этихъ уравненій. На примѣрахъ авторъ опять таки *между прочимъ* знакомитъ читателя съ дѣленіемъ многочленовъ и особыми случаями этого дѣленія.

Пятая глава посвящена квадратнымъ уравненіямъ. Но для ихъ рѣшенія необходимо умѣть извлекать квадратные корни изъ чиселъ. Авторъ указываетъ, что корень изъ двузначнаго числа можетъ быть указанъ непосредственно, для нахожденія же корней изъ большихъ чиселъ приходится прибѣгать къ готовымъ таблицамъ и къ методу логариѳмовъ. Впрочемъ, авторъ прибавляетъ,— что „находить корни квадратные изъ чиселъ можно и чисто алгебраическимъ способомъ, только способъ этотъ сложенъ для пониманія и мѣшкотенъ для примѣненія". Казалось бы, что при такомъ взглядѣ авторъ либо вовсе обойдетъ этотъ вопросъ, либо изложитъ его съ тою обстоятельностью, которая соотвѣтствуетъ его трудности. Между тѣмъ г. Лермантовъ удѣляетъ ему $1^1/_2$ страницы, въ которыхъ учащійся не найдетъ ничего новаго, если онъ съ вопросомъ знакомъ и ничего не пойметъ, если онъ съ нимъ не знакомъ.

Излагая свойства корней и квадратнаго уравненія, авторъ формулируетъ одно изъ нихъ такъ: „*Произведеніе корней общаго уравненія второй степени равно его извѣстной части, взятой съ обратнымъ знакомъ*". Почему-же общаго уравненія? Развѣ теорема не справедлива для всякаго частнаго случая? Впрочемъ, быть можетъ это и хотѣлъ сказать авторъ, но тогда онъ странно выразилъ свою мысль. Еще болѣе странно формулировать слѣдующее предложеніе: „*Уравненіе второй степени, въ его общемъ видѣ, когда извѣстная часть перенесена въ лѣвую половину, выражаетъ произведеніе разностей неизвѣстной и того и другого корня*". Какимъ образомъ уравненіе можетъ выражать произведеніе?

Шестая глава содержитъ изложеніе нѣсколькихъ не связанныхъ между собой вопросовъ, какъ-то: теорію пропорціональностей, ариѳметической и геометрической прогрессіи. Наконецъ въ послѣдней главѣ первой части изложенъ методъ логариѳмовъ.

„Основную идею логариѳмическаго метода можно изложить слѣдующими словами. Рядъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 100000 не хитро написать или напечатать, въ немъ будутъ заключены всѣ сомножители и тѣ ихъ произведенія, которыя не превышаютъ 100000.

Если бы найти удобный указатель, по которому, зная сомножители, можно было бы найти въ этомъ ряду число, равное ихъ произведенію, то не надо было бы вовсе производить ариѳметическое умноженіе. Такой указатель Неперъ нашелъ, разсматривая свойства показательнаго уравненія:

$$a^x = b.$$

Очевидно, что выбравъ произвольно „*основаніе*“ a, (въ настоящее время берутъ $a = 10$) всегда можно подобрать такую, вообще дробную, степень x, чтобы b вышло заданнымъ числомъ. Такъ, при $a = 10$, надо взять $x = 0$, чтобы $b = 1$; $x = 1$, чтобы $b = 10$; $x = 2$, чтобы $b = 100$. Для чиселъ между 1 и 10, x будетъ всегда правильная дробь, заключающаяся между 0 и 1; для чиселъ между 10 и 100, y будетъ 1 съ десятичною дробью. Неперъ назвалъ этотъ показатель x „логариѳмомъ“, дробную часть логариѳма словомъ: „мантисса“, а цѣлую: „характеристика“.

Эта цитата можетъ служить образцомъ того, въ какой мѣрѣ ясно изложеніе г. Лермантова. Утвержденіе-же, что всегда можно найти степень x (не показатель степени, а степень!) „вообще дробную“, въ которую достаточно возвысить основаніе a, чтобы получить заданное число b, тѣмъ менѣе очевидно, что въ этой формулировкѣ его нельзя назвать справедливымъ. Самый методъ изложенъ на нашъ взглядъ слишкомъ сжато и неясно.

Вторая часть книги „Дополненія“ состоитъ изъ ряда не связанныхъ между собой главокъ, содержащихъ операціи надъ многочленами, нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя одночленовъ и многочленовъ, извлеченіе квадратныхъ корней по приближенію, биномъ Ньютона и т. д. Все изложено крайне сжато и мало понятно. Такъ напр., биному Ньютона вмѣстѣ съ необходимыми свѣдѣніями изъ теорій соединеній, посвящено всего 4 страницы. Быть можетъ преподаватель, какъ авторъ говоритъ въ предисловіи, и могъ бы прибѣгать къ этимъ дополненіямъ своевременно при прохожденіи основной части курса, но при самообученіи ими совершенно невозможно воспользоваться.

Г. Лермантовъ поставилъ себѣ очень почтенную задачу, но на нашъ взглядъ ему мало удалось съ нею справиться. Вслѣдствіе недостатка системы, часто неяснаго и неточнаго изложенія, а подчасъ и серьезныхъ недочетовъ, его книга, на нашъ взглядъ, врядъ ли пригодна для изученія алгебры.

Прив.-Доц. *В. Каганъ.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 619. Даны прямыя AB, AC, AD и окружность O. Провести окружность, касательную къ окружности O такъ, чтобы она встрѣчала данныя прямыя въ трехъ точкахъ, образующихъ треугольникъ, подобный данному.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 620. Показать, что

$$a^2+b^2+c^2+r^2+r_a{}^2+r_b{}^2+r_c{}^2=16R^2,$$

гдѣ a, b, c — стороны треугольника, R — радіусъ описаннаго, r — вписаннаго круга, а r_a , r_b , r_c — радіусы внѣвписанныхъ круговъ.

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 621. Пусть AH высота равнобедреннаго треугольника ABC, CD — биссекторъ одного изъ равныхъ угловъ. Изъ точки D опущенъ перпендикуляръ DE на основаніе BC треугольника и въ той же точкѣ D возставленъ перпендикуляръ къ биссектору CD до встрѣчи его съ основаніемъ въ точкѣ F. Доказать, что

$$HE=\frac{1}{4}CF.$$

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 622. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{10^{-5}}{x^{19\log x}}\cdot x^{91\log^2 x+101}=\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}x^{10(\log^2 x+1)}.$$

(Заимств.) *В. Г.*

№ 623. Рѣшить уравненіе:

$$\sqrt[4]{1300-x}+\sqrt[4]{x+12}=8.$$

(Заимств.) *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 624. Въ стекляномъ баллонѣ вмѣщается при температурѣ 10^0 и давленіи 756 мм. 6,32 грамма сухого воздуха. Какой вѣсъ будетъ имѣть двуокись углерода, наполняющая этотъ баллонъ при нормальныхъ условіяхъ?

Дано: плотность двуокиси 1,5; коэффиціентъ кубическаго расширенія стекла $^1/_{38700}$ и коэффиціентъ расширенія газа 0,004.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 531 (3 серіи). *На діаметрѣ* AB *окружности* O *построенъ равносторонній треугольникъ* ABC; *діаметръ* AB *раздѣленъ на* n *равныхъ частей и вершина* C *соединена съ концомъ* D *второго дѣленія; прямая* CD *продолжена до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ* F. *Требуется вычислить длину хорды* AF *по данному радіусу окружности* O. *Разсмотрѣть частные случаи:* n = 3, 4, 6.

Изъ точки F проведемъ перпендикуляръ FK къ діаметру AB и введемъ обозначенія:

$$AO = r,\ AD = a,\ DO = b,\ CO = h,\ KD = z,\ KF = y,\ AF = x.$$

Тогда, пользуясь прямоугольными треугольниками AFK и OFK, а также подобіемъ треугольниковъ COD и KFD составляемъ уравненія:

$$(b+z)^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{z} = \frac{h}{r}$$

$$x^2 = y^2 + (a-z)^2,$$

или

$$y^2 + z^2 + 2bz = r^2 - b^2 \qquad (1)$$

$$y = \frac{hz}{r} \qquad (2)$$

$$x^2 = y^2 + z^2 + a^2 - 2az. \qquad (3)$$

Подставивъ y изъ второго уравненія въ первое, послѣ надлежащихъ преобразованій имѣемъ:

$$z^2(b^2 + h^2) + 2b^3z + b^4 - b^2r^2 = 0. \qquad (4)$$

Пользуясь равенствами

$$a = \frac{4r}{n},\ h^2 = 3r^2,\ b = r - a = r - \frac{4r}{n} = \frac{r(n-4)}{n} \qquad (5)$$

и полагая

$$\frac{n-4}{n} = \alpha,$$

приводимъ уравненіе (4) послѣ сокращенія на r^2 къ виду:

$$z^2(3+\alpha^2) + 2r\alpha^3 z - r^2(\alpha^2 - \alpha^4) = 0, \qquad (4\text{ bis})$$

откуда

$$z = \frac{z\alpha(-\alpha^2 \pm \sqrt{3 - 2\alpha^2})}{3+\alpha^2} \qquad (6).$$

Внеся значеніе $y^2 + z^2$ изъ перваго уравненія въ третье, получимъ:

$$x^2 = r^2 - b^2 + a^2 - 2(a+b)z,$$

откуда (см. (5) и (6))

$$AF = x = r\sqrt{\frac{8}{n} - \frac{2\alpha}{3+\alpha^2}\left(\alpha^2 \pm \sqrt{3-2\alpha^2}\right)}. \quad (7)$$

Знакъ $+$ передъ радикаломъ отвѣчаетъ положительному, знакъ $-$ отрицательному значенію z, что легко видѣть изъ уравненія (4 bis). Дѣйствительно, такъ какъ

$$\alpha < 1,$$

то извѣстный членъ этого уравненія отрицательный, и корни будутъ дѣйствительные и *разныхъ* знаковъ.

При

$$n = 4, \quad z = 0.$$

При $n > 4$ положительному z отвѣчаетъ точка F, расположенная внѣ треугольника ABC, а отрицательному z — точка F', расположенная внутри треугольника ABC.

При $n < 4$, т. е. при $n = 2$, 3 имѣетъ мѣсто прямо противоположное соотвѣтствіе.

Возьмемъ въ равенствѣ (7) знакъ $+$ и положимъ $n = 3$, 4, 6, т. е. $\alpha = -\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$. Тогда равенство (7) даетъ соотвѣтственно:

$$AF = r\sqrt{3},\ r\sqrt{2},\ r,$$

т. е. стороны правильныхъ вписанныхъ треугольника, квадрата и шестиугольника. Первая изъ этихъ хордъ лежитъ внутри, а двѣ другія внѣ треугольника ABC.

А. Гвоздевъ (Курскъ); *П. Лисевичъ* (Курскъ); *Я. Полущкинъ* (Знаменка); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 551 (3 сер.). *Доказать, что во всякомъ треугольникѣ*

$$\frac{m_a n_a}{h_a^2} + \frac{m_b n_b}{h_b^2} + \frac{m_c n_c}{h_c^2} = 1,$$

гдѣ m_a *и* n_a *отрѣзки основанія* a, *на которые оно дѣлится высотой* h_a, *опущенной изъ вершины* A, *а* m_b, n_b, m_c и n_c *имѣютъ соотвѣтственныя значенія.*

Пусть A, B, C — углы треугольника.

Тогда

$$m_a = h_a \cot B, \quad n_a = h_a \cot C,$$

откуда

$$\frac{m_a n_a}{h_a^2} = \cot B \cot C.$$

Преобразуя подобнымъ же образомъ выраженія

$$\frac{m_b\, n_b}{h_b^2} \text{ и } \frac{m_c\, n_c}{h_c^2},$$

находимъ:

$$\frac{m_a\, n_r}{h_a^2} + \frac{m_b\, n_b}{h_b^2} + \frac{m_c\, n_c}{h_c^2} = \cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B =$$

$$= \cot C\,(\cot A + \cot B) + \cot A \cot B = \frac{\cos B + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} =$$

$$= \frac{\cos(A+B) + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = 1.$$

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 566 (3 сер.). *Доказать, что если*

$$a + b + c = 0,$$

то

1) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

2) $a^5 + b^5 + c^5$ *можетъ быть представлено въ видѣ многочлена, дѣлящагося безъ остатка на* $5abc$;

3) $a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b$;

4) *Выраженіе*

$$-(a^3b + b^3c + c^3a) = -(a^3c + b^3a + c^3b)$$

можетъ быть представлено въ видѣ полнаго квадрата нѣкотораго многочлена.

1) Изъ условія задачи имѣемъ:

$$a + b = -c. \quad (1)$$

Возвышая обѣ части равенства въ кубъ, находимъ:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3,$$

откуда, принимая во вниманіе равенство (1), безъ труда получимъ:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

2) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 0,$

откуда

$$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca).$$

Перемноживъ это равенство почленно съ первымъ изъ предложенныхъ для доказательства и прибавивъ къ обѣимъ частямъ новаго равенства по $abc(ab+bc+ca)$, получимъ:

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)+abc(ab+bc+ca) = a^5+b^5+c^5+(a^2b^2+b^2c^2+$$
$$+c^2a^2)(a+b+c) = -5abc(ab+bc+ca),$$

откуда, принимая во вниманіе условіе задачи, находимъ:

$$a^5+b^5+c^5 = -5abc(ab+bc+ca).$$

3) Изъ равенствъ

$$-abc[(a-b)+(b-c)+(c-a)] = -abc(a-b)-abc(b-c)-abc(c-a) = 0,$$

$$-abc(a-b) = ab(a+b)(a-b),\quad -abc(b-c) = bc(b+c)(b-c)$$

$$-abc(c-a) = ac(c+a)(c-a),$$

находимъ:

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) = a^3b+b^3c+c^3a-(a^3c+c^3b+b^3a) = 0.$$

4) Замѣнивъ въ выраженіи

$$-(a^3b+b^3c+c^3a)$$

c черезъ

$$-(a+b),$$

раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$-(a^3b+b^3c+c^3a) = a^4+2b^3a+2a^3b+3a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)^2.$$

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *С. М. Р.* (Житоміръ).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 10-го Октября 1900 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
пщется