Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXIV Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 288.

Физическое Отдѣленіе Физико-Химическаго Института Императорскаго Новороссійскаго Университета.

Лаборанта Института А. Полль въ Одессѣ.

Начало текущаго учебнаго года ознаменовано открытіемъ Медицинскаго факультета при Новороссійскомъ Университетѣ. Это событіе въ жизни Университета, города и даже цѣлаго края имѣло уже и будетъ еще имѣть весьма важныя послѣдствія.

На Университетѣ оно отразилось прежде всего тѣмъ, что онъ долженъ былъ расшириться. Цѣлый рядъ зданій возведенъ, а часть еще строится для спеціальныхъ медицинскихъ цѣлей на Безыменной площади, которая со временемъ должна образовать особый медицинскій городокъ, подобный такому-же въ Москвѣ.—Старыя зданія подверглись перестройкѣ, вызванной главнымъ образомъ нуждами естественныхъ наукъ, положенныхъ въ основаніе медицинскаго образованія. Зданіе по Преображенской улицѣ будетъ совершенно разобрано и на его мѣстѣ выстроено новое, предназначенное для филологическаго и юридическаго факультетовъ. Во дворѣ его уже сейчасъ воздвигнуто, но еще не отдѣлано, новое зданіе, построенное исключительно изъ кирпича и желѣза, въ которое перейдетъ университетская библіотека. Освободившееся главное зданіе по Дворянской улицѣ будетъ предоставлено естественнымъ и математическимъ наукамъ. Для физики и химіи возведенъ особый корпусъ между Херсонской и Елисаветинской, который совершенно преобразилъ когда то маленькій и мрачный дворъ Университета. Этотъ корпусъ расположился на мѣстѣ нѣсколькихъ небольшихъ, тѣснившихся между собою и отдѣленныхъ одинъ отъ другого небольшими заборами домиковъ, которые были построены въ различные періоды жизни Университета для нуждъ служащаго персонала и притомъ безъ всякаго плана и порядка. Небольшое, какъ будто, по размѣрамъ новое зданіе оттѣснилось вглубь и оставило между собою и главнымъ зданіемъ широкій просторъ, на которомъ свободно раскинулся скверъ. Со вкусомъ возведенное новое зданіе во флорентійскомъ стилѣ, этотъ скверъ, просторъ, легкая металлическая ограда двора производятъ благопріятное впечатлѣніе.

Фасадъ новаго корпуса обращенъ во дворъ и смотритъ на главное зданіе. Боковыя части, или два его крыла выдвинулись нѣсколько впередъ и поднялись выше. Они имѣютъ по четыре этажа и вмѣщаютъ въ себя всѣ кабинеты, лабораторіи, склады приборовъ и малыя аудиторіи. Это, такъ сказать, закулисныя помѣщенія, гдѣ идутъ приготовленія къ лекціямъ и производятся работы. Въ этихъ помѣщеніяхъ студентъ изъ слушателя обращается въ активнаго работника.

Средняя часть имѣетъ только два этажа. Но второй этажъ съ его громадными венеціанскими окнами смѣло можно приравнять двумъ. Этотъ этажъ отведенъ подъ двѣ большихъ аудиторіи, раздѣленныя просторнымъ съ колоннами и балкономъ вестибюлемъ, въ который слушатели выходятъ освѣжиться въ перерывахъ между лекціями. Сюда ведетъ широкая мраморная лѣстница изъ раздѣвальни, которая находится въ первомъ этажѣ и примыкаетъ къ наружному ходу. Двѣ двери изъ вестибюля ведутъ въ аудиторіи: одна, надъ которой красуется бюстъ Лавуазье,—въ химическую и другая, съ бюстомъ Галилея,—въ физическую.

Физическая аудиторія (она приходится въ лѣвой части зданія, въ сторону Херсонской улицы) представляетъ собою очень большой залъ съ громадными окнами. Размѣры зала сильно скрадываются амфитеатромъ съ неподвижными на 250 человѣкъ скамьями. Каждая скамья разсчитана на одно лицо, имѣетъ столикъ съ мѣстомъ для чернильницы, полку и подъемное сидѣніе. Освѣщается аудиторія двумя дуговыми фонарями и боковыми бра. По желанію она можетъ быть затемнѣна особыми плотными шторами, которыя свободно приводятся въ одновременное движеніе однимъ человѣкомъ. Громадныхъ размѣровъ рама сзади лектора закрываетъ дверь въ коллекціонную. На этой рамѣ натянуто безконечное полотно, къ которому могутъ быть прикрѣплены до лекціи таблицы или чертежи и на лекціи по мѣрѣ надобности проходить передъ глазами слушателей. Передъ полотномъ можетъ подниматься линолеумъ, скрытый до тѣхъ поръ за доскою. На немъ заранѣе заготовляются чертежи или формулы и появляются только по мѣрѣ надобности. Эта выдвижная доска удобна также для длинныхъ математическихъ выводовъ. Всѣ выкладки могутъ постепенно удаляться изъ-подъ руки лектора, не исчезая въ то-же время ни изъ его глазъ ни изъ глазъ его слушателей. Для небольшихъ случайныхъ выкладокъ или записей на раму обыкновенно навѣшивается легкая доска изъ линолеума. Большая рама сдѣлана подвижной и по рельсамъ отодвигается въ сторону; тогда можно отворить дверь въ коллекціонную, въ чемъ иногда оказывается необходимость, напримѣръ въ нѣкоторыхъ опытахъ по оптикѣ. На мѣстѣ, которое занимала рама, можно также опустить (вѣрнѣе размотать) полотняный экранъ для проэкцій. Слѣва отъ дверей съ помощью блока опускается деревянный остовъ, на которомъ до лекціи прикрѣпляются необходимые чертежи, діаграммы, таблицы, рисунки. Справа виднѣется дверь въ подготовительную, гдѣ налаживаются опыты, собираются разборные приборы и приготовляется вообще все необходимое для лекцій. Надъ среднею дверью устроенъ балконъ. Оказывая большую услугу во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда является необходимость въ весьма высокихъ штативахъ, онъ служитъ въ то же время украшеніемъ аудиторіи.

Столъ лектора продолжается барьеромъ, доходящимъ до обѣихъ стѣнъ. Благодаря этому у лектора остается большое свободное пространство, гдѣ могутъ быть еще до лекціи установлены приборы и опыты безъ опасенія, чтобы неосторожный слушатель, заглядѣвшись, не зацѣпилъ и не разбилъ прибора.

Вода, отливъ, газъ и электричество у лектора подъ руками. Въ акустическомъ отношеніи аудиторія вполнѣ удовлетворяетъ своему назначенію. Въ самыхъ послѣднихъ высокихъ рядахъ голосъ лектора слышится ясно и отчетливо.

Отопленіе, какъ и во всемъ зданіи, паровое. Вентиляція совершается съ помощью нагрѣтаго въ особыхъ калориферахъ воздуха.

Для освѣщенія токъ доставляется изъ центральной университетской станціи, помѣщающейся на Безыменной площади. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно пользоваться токомъ отъ собственной динамо-машины, которая приводится въ дѣйствіе газовымъ моторомъ.

Небольшой коридорчикъ соединяетъ аудиторію съ коллекціонной, гдѣ собраны приборы, необходимые главнымъ образомъ для лекцій. Это большой залъ въ два свѣта. По тремъ внутреннимъ стѣнамъ ея идутъ два сплошныхъ балкона въ два яруса, куда можно попасть по лѣстницѣ изъ коридорчика. Въ наружной стѣнѣ установлены въ нишахъ въ два яруса бюсты Фарадея, Ньютона, Гельмгольца и Вольта. Балконы заставлены шкафами съ приборами для практическихъ занятій или съ приборами, имѣющими спеціальное назначеніе. Коллекціонная занимаетъ часть второго и третьяго этажа.

Въ лѣвомъ крылѣ новаго корпуса кромѣ коллекціонной помѣщаются еще: общая, измѣрительная и спеціальная лабораторіи, лабораторія въ первомъ этажѣ для чувствительныхъ къ сотрясеніямъ зданія наблюденій, кабинеты для профессоровъ, комнаты для лаборантовъ, темныя комнаты для фотографическихъ или оптическихъ цѣлей, механическія и столярныя, помѣщенія для служителей и склады, а также каменный погребъ со сводомъ для точныхъ магнитныхъ наблюденій.

Какъ въ физической, такъ и въ химической аудиторіяхъ средняя часть потолка по всей длинѣ идетъ выше боковыхъ частей, которыя опускаются полусводами. Благодаря этому подъ крышей оказалось возможнымъ устроить два очень длинныхъ коридора; здѣсь можно установить оптическіе или электрическіе опыты, которые потребовали бы большого протяженія въ одномъ направленіи.

Остается еще сказать о вертикальномъ каналѣ, который идетъ по внутренней стѣнѣ съ перваго до четвертаго этажа. Здѣсь могли бы быть воспроизведены знаменитые опыты Маріотта надъ упругостью газовъ, провѣрены законы *паденія тѣлъ* и т. п.

Общей лабораторіей завѣдуетъ ректоръ университета проф. Ѳ. Н. Шведовъ. Здѣсь поставлено до настоящаго времени около 40 работъ. На этихъ работахъ студенты знакомятся съ общими пріемами физическихъ изслѣдованій, съ важнѣйшими приборами и машинами. Практическія занятія ведетъ Прив.-Доц. Б. П. Вейнбергъ.

Въ измѣрительной лабораторіи, которая находится въ вѣденіи проф. Н. Д. Пильчикова, студенты знакомятся съ нѣкоторыми избранными методами измѣрительной физики во всѣхъ ихъ подробностяхъ.

Число поставленныхъ работъ здѣсь можетъ быть невелико, но зато приборы должны быть искуснѣе скомпованы и должны быть указаны пріемы манипуляцій болѣе удобные въ практическомъ отношеніи и болѣе выгодные съ точки зрѣнія теоретической. Наконецъ, спеціальная лабораторія предназначается для работъ неимѣющихъ общеобязательнаго характера. Для примѣра можно указать на тѣ работы, которые здѣсь могутъ выполняться при выборѣ студентами сочиненій по физикѣ для зачета семестра или-же на соисканіе медали.

Есть просторъ, удобства, кабинеты пополняются. Работаютъ для студентовъ, работаютъ студенты.

Уже нѣсколько лѣтъ подъ-рядъ Лекціонный Комитетъ при Новороссійскомъ Обществѣ Естествоиспытателей устраиваетъ публичныя лекціи по естественнымъ наукамъ. По физикѣ въ этомъ семестрѣ привать-доцентъ Б. П. Вейнбергъ читалъ „курсъ лекцій по лучистой энергіи.“ Читались лекціи въ физической аудиторіи. Такимъ образомъ двери Университета со всѣми его научными средствами являются до нѣкоторой степени открытыми и для публики.

Новое зданіе было окончено въ прошломъ году. Лекціи и практическія занятія начались съ этого года.

Выстроено зданіе, какъ и всѣ зданія медицинскаго факультета, по проэкту и подъ наблюденіемъ архитектора Толвинскаго, нынѣ профессора Варшавскаго Политехникума. Главный же надзоръ надъ постройками и выработка плановъ принадлежитъ Строительной Коммиссіи, предсѣдателемъ которой состоитъ все время ректоръ Университета Ѳ. Н. Шведовъ. Компетенціи его, какъ профессора физики, Физическій Кабинетъ многимъ обязанъ своимъ благоустройствомъ.

При оцѣнкѣ научнаго и промышленнаго развитія Англіи, Франціи и Германіи, послѣдней предоставляютъ въ настоящее время первое мѣсто. Вѣроятно, въ этомъ не второстепенную роль играла та щедрая правительственная поддержка, которая тамъ оказывается дѣлу образованія вообще, естественнаго въ частности и въ особенности постановкѣ преподаванія физики и химіи.

Открытіе у насъ Политехникумовъ въ Кіевѣ и Варшавѣ, ожидаемое открытіе Политехникума въ С.-Петербургѣ, открытіе Технологическаго Института въ Томскѣ, Высшаго Горнаго Училища въ Екатеринославѣ и Медицинскаго Факультета въ Одессѣ, показываетъ, что естественныя и прикладныя знанія въ Россіи находятся въ настоящее время въ стадіи усиленнаго развитія.

Пожелаемъ же, чтобы оно привело къ болѣе широкой разработкѣ непочатыхъ богатствъ нашей страны на благо ея народа.

О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ.

*(Окончаніе *).*

§ 15. Перейдемъ теперь къ рѣшенію второй задачи, которая будетъ заключаться въ разысканіи условій существованія и въ опредѣленіи (въ случаѣ существованія) трехъ вещественныхъ значеній для $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$, удовлетворяющихъ системѣ уравненій

$$\Sigma t(\alpha)=x;\ \Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y;\ t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z,\ .\ .\ .\ .\ .\ (m),$$

гдѣ x, y, z данныя вещественныя числа. Задача эта по существу алгебраическая: величины $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$ суть корни кубическаго уравненія $t^3-xt^2+yt-z=0$. Если t_1, t_2, t_3 суть корни этого уравненія, то каждая изъ неизвѣстныхъ $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$ соотвѣт-

*) См. № 287 „Вѣстника“. Въ текстѣ статьи, напечатанной въ № 285 допущены слѣдующія опечатки: на стр. 250 въ 1-й стрк. сниз. вмѣсто 265 д. быть 285; на стр. 255 въ 1-й стрк. сниз. вмѣсто $\Sigma(\sin^3\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma)$ д. быть $\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$; на стр. 257 въ 12 стрк. снизу вмѣсто $\sin A\sin B$ д. быть $\sin A+\sin B$. На стр. 253 въ стрк. 8 сн. вмѣсто $\sin^2 B$ д. б. sfnB.

ственно равна одному изъ чиселъ t_1, t_2, t_3. Отсюда слѣдуетъ, что $t(\alpha)$ можетъ имѣть только три значенія t_1, t_2, t_3 и что, зная эти значенія, будемъ имѣть всѣ системы рѣшеній, удовлетворяющія системѣ уравненій (m). Но система уравненій (m), въ случаѣ существованія системы вещественныхъ корней, допускаетъ чисто гоніометрическое рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если $t(\alpha)=t(\beta)=t(\gamma)$, то $3t(\alpha)=x$; $3[t(\alpha)]^2=y$; $[t(\alpha)]^3=z$ или

$$t(\alpha)=t(\beta)=t(\gamma)=\frac{x}{3};\ x^2-3y=0;\ x^3=27z.$$

Исключивъ изъ разсмотрѣнія этотъ случай и положивъ

$$t(\alpha)=\lambda u+\frac{x}{3};\ t(\beta)=\lambda v+\frac{x}{3};\ t(\gamma)=\lambda w+\frac{x}{3}\quad \ldots\ldots (n),$$

гдѣ λ неопредѣленный пока отличный отъ нуля вещественный множитель, u, v, w три вспомогательныя неизвѣстныя, которыя вещественны (такъ какъ величины $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$ вещественны) и не всѣ равны нулю (ибо случай $t(\alpha)=t(\beta)=t(\gamma)=\frac{x}{3}$ исключенъ), получимъ изъ уравненій (m), что $\lambda(u+v+w)+x=x$ или

$$u+v+w=0\ \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\left(\lambda u+\frac{x}{3}\right)\left(\lambda v+\frac{x}{3}\right)+\left(\lambda u+\frac{x}{3}\right)\left(\lambda w+\frac{x}{3}\right)+\left(\lambda v+\frac{x}{3}\right)\left(\lambda w+\frac{x}{3}\right)=y \text{ или}$$

$\lambda^2(uv+uw+vw)+\frac{2\lambda}{3}(u+v+w)+\frac{x^2}{3}=y$, а потому, принимая во вниманіе уравненіе (1), имѣемъ

$$uv+uw+vw=-\frac{x^2-3y}{3\lambda^2}\ \ldots\ldots (2)$$

Точно такъ-же изъ уравненія $\left(\lambda u+\frac{x}{3}\right)\left(\lambda v+\frac{x}{3}\right)\left(\lambda w+\frac{x}{3}\right)=z$ или $\lambda^3 uvw+\frac{x\lambda^2}{3}(uv+uw+vw)+\frac{x^2\lambda}{9}(u+v+w)+\frac{x^3}{27}=z$, принимая во вниманіе уравненія (1) и (2), находимъ

$$uvw=\frac{2x^3-9xy+27z}{27\lambda^3}\ \ldots\ldots (3).$$

Такимъ образомъ разысканіе вещественныхъ рѣшеній системы (m) приведено къ опредѣленію вещественныхъ рѣшеній системы уравненій (1), (2), (3). Допустивъ, что эта система уравненій имѣетъ вещественныя рѣшенія и принимая во вниманіе тождество $(u+v+w)^2-2(uv+uw+vw)=u^2+v^2+w^2$, или

$$2\,\frac{x^2-3y}{3\lambda^2}=u^2+v^2+w^2,$$

находимъ, что x^2-3y должно быть больше нуля (ибо случай $u=v=w=0$ исключенъ). Такимъ образомъ убѣждаемся, что система (m) допускаетъ вещественную систему рѣшеній только тогда, когда

$$x^2-3y>0.$$

Если это требованіе выполнено, то можемъ положить вещественное число λ равнымъ $+\frac{2\sqrt{x^2-3y}}{3}$. Тогда, полагая

$$\frac{2x^3-9xy+27z}{2(x^2-3y)^{\frac{3}{2}}}=q \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$

получимъ систему уравненій

$$u+v+w=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$

$$uv+uw+vw=-\frac{3}{4} \quad . \; . \; . \; . \; (2')$$

$$uvw=\frac{q}{4} \quad . \; . \; . \; . \; (3').$$

Условіе, чтобы x^2-3y было >0, можно замѣнить условіемъ, чтобы q было вещественное число, отличное отъ нуля. *) Но для того, чтобы u, v и w могли имѣть вещественныя значенія, необходимо еще (и этого будетъ достаточно), чтобы $|q|\leqslant 1$, гдѣ $|q|$ обозначаетъ абсолютную величину q. Дѣйствительно, $v+w=-u$, $vw=-\frac{3}{4}-u(v+w)=u^2-\frac{3}{4}$, поэтому $(v-w)^2=(v+w)^2-4vw=3(1-u^2)$, а такъ какъ $(v-w)^2\geqslant 0$, то и $1-u^2\geqslant 0$, т. е. $|u|\leqslant 1$, а потому можемъ положить

$$u=\cos\varphi, vw=\cos^2\varphi-\frac{3}{4}.$$

Перемножая послѣднія два равенства, замѣняя uvw черезъ $\frac{q}{4}$, $4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$—черезъ $\cos 3\varphi$, находимъ

$$\cos 3\varphi=q$$

и отсюда заключаемъ, что абсолютная величина q не можетъ быть больше 1-цы и что u должно быть равно $\cos\varphi$, гдѣ φ одинъ изъ вещественныхъ угловъ, удовлетворяющихъ уравненію $\cos 3\varphi=q$. Наоборотъ, если $|q|\leqslant 1$, то существуютъ вещественные углы φ, удовлетворяющіе уравненію $\cos 3\varphi=q$. Если φ есть одинъ опредѣленный изъ этихъ угловъ, то всякій другой φ_1 изъ этихъ угловъ опредѣляется равенствомъ

$$3\varphi_1=3\varphi+k\,.\,360^0 \text{ или } \varphi_1=\varphi+k\,.\,120^0,$$

*(Случай $q=0$ исчерпывается весьма просто.

гдѣ k цѣлое положительное или отрицательное число. Здѣсь $k=3k_1+r$, гдѣ k_1 цѣлое число, а r=одному изъ чиселъ -1, 0, $+1$, поэтому

$$u=\cos\varphi_1=\cos[\varphi+(3k_1+r)120^0]=\cos(\varphi+r\,.\,120^0),$$

слѣдовательно u можетъ имѣть только три значенія: $u=\cos(\varphi-120^0)$, $u=\cos\varphi$, $u=\cos(\varphi+120^0)$. Только эти три значенія, будучи соотвѣтственно приравнены u, v, w, могутъ дать систему рѣшеній уравненій (1′), (2′), (3′). Не трудно также убѣдиться въ томъ, что эти уравненія удовлетворяются, когда $q=\cos 3\varphi$ и когда замѣнимъ въ уравненіяхъ (1′), (2′), (3′) величины u, v, w числами $\cos(120^0-\varphi)$, $\cos\varphi$, $\cos 120^0+\varphi$; иными словами, условіе $|q|\leqslant 1$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы система (1′), (2′), (3′) имѣла вещественныя рѣшенія.

Принимая во вниманіе равенство $\lambda=\dfrac{2\sqrt{x^2-3y}}{3}$ и равенства (n) и резюмируя полученные результаты, приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Для того, чтобы система уравненій $\Sigma t(\alpha)=x$, $\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y$; $t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z$, *гдѣ* x, y, z *вещественныя данныя числа, имѣла вещественныя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы число*

$$\frac{2x^3-9xy+27z}{2(x^2-3y)^{\frac{3}{2}}}$$

было вещественно и чтобы его абсолютная величина была не больше 1-цы. Если это условіе выполнено, то найдя уголъ φ *изъ уравненія*

$$\cos 3\varphi=\frac{2x^3-9xy+27z}{2(x^3-3y)^{\frac{3}{2}}}\quad\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

будемъ имѣть систему рѣшеній

$$t(\alpha)=\frac{x+2\sqrt{x^2-3y}\cos(120^0-\varphi)}{3};\quad t(\beta)=\frac{x+2\sqrt{x^2-3y}\cos\varphi}{3};$$

$$t(\gamma)=\frac{x+2\sqrt{x^2-3y}\cos(120^0+\varphi)}{3}.\quad\ldots\ (6)$$

Случай, когда $x^2=3y$; $x^3=27z$ можно включить. Въ этомъ случаѣ $t(\alpha)=t(\beta)=t(\gamma)=\dfrac{x}{3}$.

§ 16. Возвращаясь къ задачѣ, которую мы поставили себѣ въ началѣ § 13, разберемъ второй случай, когда прямое исключеніе двухъ угловъ изъ системы уравненій

$$A+B+C=180^0,\ f_1=q_1,\ f_2=q_2\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

приводитъ вообще къ окончательному уравненію, степень котораго выше числа различныхъ геометрическихъ рѣшеній.

Второй случай. Каждая изъ функцій q_1 и q_2 симметрична относительно трехъ буквъ a, b и c. Въ каждое изъ трехъ уравненій (1) углы A, B и C входятъ симметрично, а потому уголъ A (или B или C) есть любой уголъ искомаго треугольника. Если n есть число геометрически различныхъ (попарно неподобныхъ) треугольниковъ, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи, то A (или B или C) будетъ любой изъ $3n$ угловъ этихъ n треугольниковъ. Каждый изъ угловъ A, B и C будетъ поэтому имѣть $3n$ значеній и какая либо его тригонометрическая функція будетъ вообще опредѣляться изъ уравненія степени $3n$. Мы покажемъ, что задача можетъ быть приведена къ рѣшенію уравненія степени n и къ трисекціи угла, величина котораго извѣстнымъ образомъ будетъ зависѣть отъ корня этого уравненія. Для этой цѣли введемъ три новыя вспомогательныя неизвѣстныя x, y и z, опредѣляемыя равенствами

$$\Sigma t(\alpha)=x;\ \Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y;\ t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z\ \ldots\ldots\ (2),$$

гдѣ t имѣетъ то-же значеніе, что и въ § 14, суммированіе Σ распространяется на три угла α, β, γ, причемъ

$$\alpha=m\mathrm{A};\ \beta=m\mathrm{B};\ \gamma=m\mathrm{C},$$

а m есть раціональное число, выборъ котораго будетъ указанъ ниже.

Если $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ есть одинъ изъ n треугольниковъ, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи, то уравненія (1) удовлетворятся, когда будемъ полагать A, B, C соотвѣтственно равными членамъ какой либо перестановки трехъ величинъ A_1, B_1, C_1. При этомъ A, B и C (а, слѣдовательно и α, β, γ) будутъ мѣняться своими значеніями, что не будетъ измѣнять величины x, y, z, ибо x, y, z суть симметрическія функціи отъ α, β, γ. Такимъ образомъ, въ то время, какъ каждый изъ угловъ A, B, C имѣетъ $3n$ значеній, каждая изъ величинъ x, y, z, имѣя одно только значеніе для каждаго изъ искомыхъ треугольниковъ, будетъ имѣть всего только n значеній и будетъ вообще опредѣляться изъ уравненія степени n. Если же найдемъ x, y и z, то опредѣленіе величинъ $t(\alpha)$, $t(\beta)$ и $t(\gamma)$ по формуламъ (6) § 15 потребуетъ только дѣленія на три части угла 3φ, опредѣляемаго формулой (5) § 15.

Опредѣленіе x, y и z потребуетъ прежде всего исключенія A, B и C изъ шести уравненій (1) и (2). Освободивъ для этого уравненія $f_1=q_1$ и $f_2=q_2$ отъ радикаловъ, содержащихъ углы A, B и C и обозначивъ черезъ d наименьшее кратное всѣхъ чиселъ, на которыя дѣлится уголъ A (а, вслѣдствіе симметріи, и углы B и C) въ преобразованныхъ уравненіяхъ, положимъ $m=\frac{k}{2d}$, гдѣ $k=1$ или $k=2$. Тогда можно будетъ раціонально выразить всѣ тригонометрическія функціи, входящія въ составъ нашихъ уравненій, через тригонометрическія функціи угловъ $mA=\alpha$; $mB=\beta$; $mC=\gamma$. Въ частныхъ случаяхъ это возможно будетъ сдѣлать, давая k цѣлое значеніе, большее 2. Система уравненій (1) замѣнится такимъ образомъ системой уравненій

$$\alpha+\beta+\gamma=m.180^0;\ F_1=0;\ F_2=0,$$

причемъ вообще F_1 и F_2 будутъ содержать раціонально различныя тригонометрическія функціи угловъ α, β, γ. Выразивъ каждую въ функціи одной опредѣленной тригонометрической функціи t, гдѣ t есть синусъ, косинусъ или тангенсъ, и приведя вновь уравненія къ раціональному виду, замѣнимъ систему уравненій (1) уравненіями

$$\alpha+\beta+\gamma=m.180^0;\ \varphi_1=0;\ \varphi_2=0,$$

въ которыхъ φ_1 и φ_2 суть раціональныя *симметрическія* функціи относительно $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$. *) Но изъ теоріи симметрическихъ функцій извѣстно, что всякая раціональная симметрическая функція отъ $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$ можетъ быть раціонально выражена въ функціяхъ $\Sigma t(\alpha)$, $\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]$, $t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)$, а потому уравненія $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=0$ преобразовываются при помощи уравненій (2) въ уравненія

$$\psi_1=0;\ \psi_2=0,$$

причемъ ψ_1 и ψ_2, не содержа A, B и C, суть раціональныя функціи отъ x, y и z. Къ этимъ двумъ уравненіямъ присоединимъ соотвѣтственно тому, обозначаетъ ли t тангенсъ, синусъ или косинусъ, одно изъ уравненій (1)—(6) § 14, замѣщая s через $m.120^0$, ибо при $s=m.180^0$ эти уравненія представляютъ результатъ исключенія α, β и γ изъ уравненій $\alpha+\beta+\gamma=m.180^0$; $\Sigma t(\alpha)=x$; $\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y$; $t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z$. Такимъ образомъ получаемъ систему трехъ уравненій для опредѣленія x, y и z.

---

*) Такъ какъ F_1 и F_2 во всякомъ случаѣ суть раціональныя функціи отъ синусовъ и косинусовъ угловъ $\frac{A}{d}$, $\frac{B}{d}$ и $\frac{C}{d}$, а эти синусы и косинусы выражаются раціонально въ тангенсахъ угловъ $\frac{A}{2d}$, $\frac{B}{2d}$, $\frac{C}{2d}$, по формуламъ $\sin\frac{A}{d}=2\operatorname{tg}\frac{A}{2d}:\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2d}\right)$; $\cos\frac{A}{d}=\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2d}\right):\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2d}\right)$ и т. п., то ясно, что φ_1 и φ_2 будутъ раціональныя функціи отъ однихъ $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, если возьмемъ $k=1$, т. е. $m=\frac{1}{2d}$, $\alpha=\frac{A}{2d}$. Скажемъ еще, что вообще при указанныхъ въ текстѣ преобразованіяхъ для избѣжанія ирраціональностей весьма полезно прибѣгать, какъ увидимъ на примѣрахъ, къ тождествамъ

$$\Sigma[t(\alpha)]^2=[\Sigma t(\alpha)]^2-2\Sigma[t(\alpha)t(\beta)];\ \Sigma[t(\alpha)t(\beta)]^2=\{\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]\}^2-2t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)\Sigma t(\alpha);$$

$$\Sigma(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma)=\sin(m\,.\,180^0)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$\Sigma(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(m.180^0)$ и т. п. Указанія для ихъ вывода см. § 14.

§ 17. Резюмируя все сказанное, устанавливаемъ

Правило шестое. Если даны двѣ функціи q_1 и q_2 нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника и если эти функціи симметричны относительно a, b и c, то

Во 1-хъ, преобразовываемъ уравненія $f_1=q_1$; $f_2=q_2$ такъ, чтобы получить два уравненія $\varphi_1=0$; $\varphi_2=0$, гдѣ φ_1 и φ_2 суть раціональныя функціи отъ $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$; t означаетъ тангенсъ, синусъ или косинусъ, $\alpha=m\mathrm{A}$; $\beta=m\mathrm{B}$; $\gamma=m\mathrm{C}$, $m=\dfrac{k}{2d}$, d есть наименьшее кратное чиселъ, на которыя дѣлится уголъ А въ функціяхъ f_1 и f_2; $k=1$ или $k=2$, а въ частныхъ случаяхъ k бываетъ возможно и выгодно приписать другое цѣлое положительное значеніе.

Во 2-хъ, полагая $\Sigma t(\alpha)=x$; $\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y$; $t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z$, выражаемъ φ_1 и φ_2 раціонально въ функціи x, y и z, что всегда возможно сдѣлать, и къ полученнымъ такимъ образомъ двумъ уравненіямъ

$$\psi_1=0;\ \psi_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

присоединяемъ соотвѣтственно тому, обозначаетъ-ли t тангенсъ, синусъ или косинусъ, одно изъ уравненій

$$x+y\operatorname{tg}(m.180^0)-z=\operatorname{tg}(m.180^0) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$[x^2-2y+2z\sin(m.180^0)-2+\sin^2(m.180^0)]^2=$$
$$=4(1+x+y+z)(1-x+y-z)\cos^2(m.180^0) \quad \ldots \quad (3)$$

$$[x^2-2y-2z\cos(m.180^0)-2+\cos^2(m.180^0)]=$$
$$=4(1+x+y+z)(1-x+y-z)\sin^2(m.180^0) \quad \ldots \quad (4)$$

Когда $m=1$; $\alpha=\mathrm{A}$, то беремъ соотвѣтственно вмѣсто уравненій (2), (3) и (4) уравненія

$$x=z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$x^4-4yx^2+8zx+4z^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$x^2-2y+2z-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Если же $m=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=\dfrac{\mathrm{A}}{2}$, то вмѣсто уравненія (2) беремъ

$$y=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

а вмѣсто (3) и (4) соотвѣтственно (7) и (6).

Въ 3-хъ, опредѣливъ x, y и z изъ уравненій (1) и соотвѣтствующаго изъ уравненій (2)—(8) и найдя такой уголъ φ, чтобы

$$\cos 3\varphi=\frac{2x^3-9xy+27z}{2(x^2-3y)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

получимъ для $t(\alpha)$, $t(\beta)$, $t(\gamma)$ слѣдующую систему значеній:

$$t(\alpha)=\frac{x+2(x^2-3y)^{\frac{1}{2}}\cos(120^0-\varphi)}{3};\quad t(\beta)=\frac{x+2(x^2-3y)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi}{3};$$

$$t(\gamma)=\frac{x+2(x^2-3y)^{\frac{1}{2}}\cos(120^0+\varphi)}{3}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

Примѣры:

Ищутся углы A, B, C треугольника по даннымъ тремъ изъ десяти функцій: Δ, r, R, $a+b+c$, $a'+b'+c'$, $h_a+h_b+h_c$, $h'_a+h'_b+h'_c$, $r_a+r_b+r_c$, $l'_a+l'_b+l'_c$, $L_a+L_b+L_c$, гдѣ $a'=\pm a\cos A$ есть сторона ортоцентрическаго треугольника, соединяющая подошвы высотъ h_b и h_c; $l'_a=r:\sin\frac{A}{2}$ есть разстояніе центра вписаннаго круга отъ вершины A; $L_a=\pm R\cos A$ есть разстояніе центра описаннаго круга отъ стороны a. Въ выраженіяхъ $\pm a\cos A$ и $\pm R\cos A$ должно взять (+), когда уголъ A острый, и (—) въ противномъ случаѣ. Рѣшимъ нѣкоторыя изъ представляющихся здѣсь 110-ти задачъ.

1. Даны: Δ, $a+b+c$ и $h_a+h_b+h_c$. Полагая $\Sigma\sin A=x$; $\Sigma(\sin A\sin B)=y$; $\sin A\sin B\sin C=z$, имѣемъ $q_1=\Delta:(a+b+c)^2=z:(2x^2)$; $q_2=(h_a+h_b+h_c):(a+b+c)=y:x$. Присоединяя къ уравненіямъ $z=2q_1x^2$; $y=q_2x$ уравненіе (6) этого § найдемъ:

$$x=4(q_2-4q_1):(1+16q_1^2);\quad y=4q_2(q_2-4q_1):(1+16q_1^2);$$

$$z=8q_1(q_2-4q_1):(1+16q_1^2).$$

Эти выраженія должно вставить въ равенство (9). Опредѣливъ φ и вставивъ значенія x, y, φ въ равенства (10), получимъ значенія sinA, sinB, sinC.

2. Найти, если возможно, остроугольный треугольникъ по даннымъ $a'+b'+c'$, $h_a+h_b+h_c$ и r. Полагая опять $\Sigma\sin A=x$ и т. д., имѣемъ; $q_1=(h_a+h_b+h_c):r=(a+b+c)(h_a+h_b+h_c):(ab\sin C)=xy:z$; $q_2=(a'+b'+c'):(h_a+h_b+h_c)=(\Sigma\sin 2A):2\Sigma(\sin A\sin B)=2z:y$, *) поэтому $x=q_1q_2:2$; $z=q_2y:2$. Присоединяя къ этимъ двумъ уравненіямъ уравненіе (6) и исключивъ x и z, найдемъ квадратное уравненіе для опредѣленія y и т. д.

3. Ищутся углы остроугольнаго треугольника по даннымъ r, $l'_a+l'_b+l'_c$, $L_a+L_b+L_c$. Полагая $\Sigma\sin\frac{A}{2}=x$; $\Sigma\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=y$;

---

*) Такъ какъ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ для всякихъ трехъ угловъ, коихъ сумма $A+B+C=180^0$, то, замѣняя соотвѣтственно углы A, B, C углами 180^0-2A, 180^0-2B, 180^0-2C, коихъ сумма $3\,.\,180-2(A+B+C)$ также равно 180^0, получимъ $\Sigma\sin 2A=4\sin A\sin B\sin C=4z$.

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=z$, имѣемъ $q_1=(l'_a+l'_b+l'_c):r=\Sigma\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)=$

$$=\frac{\Sigma\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{y}{z};\ q_2=\frac{L_a+L_b+L_c}{r}=\frac{\Sigma\cos A}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\Sigma\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{4z}=\frac{3-2\Sigma\sin^2\frac{A}{2}}{4z}=$$

$$=\frac{3-2\left[\left(\Sigma\sin\frac{A}{2}\right)^2-2\Sigma\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\right]}{4z}=\frac{3-2x^2+4y}{4z}.$$ Присоединяя къ двумъ уравненіямъ $y=q_1z$; $4y-2x^2+3=4q_2z$ уравненіе x^2-2y+ $+2z-1=0$, легко найдемъ x, y, z т. д.

4. Даны: $a+b+c$, $r_a+r_b+r_c$ и R. Полагая $\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=z$, имѣемъ, согласно рав. (8), $\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=y=1$.

Далѣе, $q_1=(a+b+c):R=8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; $q_2=\frac{2(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c}=$

$=\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$. Но съ другой стороны $q_2=\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$

$$=\left[\Sigma\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\right]:\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=\left[\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]:\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=1:\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)+$$

$+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1:\frac{q_1}{8}+z$. Такимъ образомъ $x=q_2$; $y=1$; $z=q_2-\frac{8}{q_1}$ и т. д.

5. Даны $r_a+r_b+r_c$, $h_a+h_b+h_c$ и r. Положивъ опять $\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$, $\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=y=1$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=z$, имѣемъ

$$q_1=r:(r_a+r_b+r_c)=z:x;\ q_2=\frac{4(r_a+r_b+r_c)}{h_a+h_b+h_c}=\frac{4p\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{(h_a+h_b+h_c)}=\frac{2x\Sigma\sin A}{\Sigma(\sin A\sin B}=$$

$$=\left[4x\Sigma\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}\right)\right]:\left[4\Sigma\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}\right)\right]=$$

$$=\left\{x\Sigma\left[\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\right]\right\}:\Sigma\left[\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\right]=$$

$$=\left[x\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}+x\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)+x\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\,\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\right]:$$

$$\left[\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)+\operatorname{tg}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right]=\left[x^2+x\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)+xz\right]:(1+xz).$$

Но $\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=\left[\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\right]\cdot\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}-3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=x-3z$, поэтому $q_2=(2x^2-2xz):(1+xz)$. Опредѣливъ x и z изъ уравненій $z=q_1x$; $(1+xz)q_2=2x^2-2xz$, находимъ $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ по формуламъ (9) и (10).

6. Опредѣлить углы A, B, C остроугольнаго треугольника по даннымъ r, $r_a+r_b+r_c$ и $L_a+L_b+L_c$. Полагая $\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$; $\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=y=1$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=z$, находимъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ,

$$q_1=\frac{r_a+r_b+r_c}{r}=\frac{x}{z};\ q_2=(L_a+L_b+L_c):r=(4pR\Sigma\cos A):4\Delta=$$

$$=[(\Sigma\sin A)\Sigma(\cos A)]:(2\sin A\sin B\sin C).\ \text{Но}\ (\Sigma\sin A)(\Sigma\cos A)=$$

$$=\Sigma(\sin A\cos A)+\Sigma(\sin A\cos B)=2\sin A\sin B\sin C+\Sigma(\sin A\cos B),$$

поэтому $q_2-1=[\Sigma(\sin A\cos B)]:(2\sin A\sin B\sin C)=$

$$\left[2\Sigma\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}\right)\right]:\frac{16\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)}=$$

$$=\left\{\Sigma\left[\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\right]\right\}:\left(8\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=$$

$$=\left[2\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)-2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\right]:8z=(2x-2z):8z=$$

$=\frac{x}{4z}-\frac{1}{4}$, поэтому $4q_2-3=\frac{x}{z}=q_1$. Такимъ образомъ задача зывается невозможной, когда $4q_2 - 3$ не равно q_1 и неопредѣленной въ противномъ случаѣ. Это приводитъ къ слѣдующей интересной теоремѣ: *Сумма разстояній центра описаннаго круга отъ сторонъ остроугольнаго треугольника, сумма радіусовъ трехъ внѣвписанныхъ круговъ и радіусъ вписаннаго круга суть три величины, обладающія тѣмъ свойствомъ, что двумя изъ нихъ третья вполнѣ опредѣляется по формулѣ*

$$4(L_a + L_b + L_c) - (r_a + r_b + r_c) = 3r.$$

Новая теорія атмосфернаго электричества.

Прив.-Доц. Л. Данилова въ Одессѣ.

Еще въ 1887 г. H. Hertz обратилъ вниманіе на то, что электрическая искра гораздо скорѣе появляется при освѣщеніи проводниковъ ультра-фіолетовыми лучами, чѣмъ безъ этого освѣщенія. Спустя годъ, Wiedemann и Ebert показали, что явленіе это обнаруживается не одинаково рѣзко при различныхъ давленіяхъ окружающаго электроды воздуха; maxim'альнаго развитія достигаетъ оно при упругости воздуха около 300 mm. Другіе ученые не были съ ними согласны въ опредѣленіи упругости, соотвѣтствующей maxim'альной интенсивности явленія; такъ, Arrhenius принимавъ его въ 6 mm., а Столѣтовъ полагалъ, что упругость эта не постоянна при различныхъ условіяхъ, будучи при этомъ пропорціональной напряженію электрическаго поля. Внимательное изученіе явленія показало, что каждый металлическій проводникъ, заряжаемый отрицательнымъ электричествомъ, теряетъ свой зарядъ, какъ бы послѣдній малъ ни былъ, если проводникъ подвергнутъ дѣйствію ультра-фіолетовыхъ лучей. Наоборотъ, на положительное электричество утьтра-фіолетовая радіація не оказываетъ никакого дѣйствія.

Въ послѣднее время Buisson въ физической лабораторіи нормальной школы (Парижъ) произвелъ рядъ опытовъ для выясненія дѣйствія ультра-фіолетовыхъ лучей на *ледъ*. Онъ бралъ пучокъ ультра-фіолетовыхъ лучей (напр. вольтовой дуги), пропускалъ чрезъ прозрачную латунную пластинку, положительно наэлектризованную, и заставлялъ отражаться отъ пластинки льда, служившей отрицательнымъ полюсомъ канденсатора. До освѣщенія ледяная пластинка и электрометръ соединялись съ землей, затѣмъ соединеніе прекращалось. При освѣщеніи стрѣлка электрометра приходитъ въ движеніе и показываетъ, что ледяной кружокъ теряетъ свой отрицательный зарядъ до тѣхъ поръ, пока потенціалы на обѣихъ пластинкахъ не сдѣлаются равными. Оказывается далѣе, что дѣйствіе ультра-фіолетовыхъ лучей на сухую ледяную пластинку (напр. только что вынутую изъ сильно охлаждающей смѣси) и на пластинку, покрывшуюся отъ таянія водой, существенно различно: въ первомъ случаѣ оно чрезвычайно сильно (по опредѣленію Buisson'а приблизительно въ 15—20 разъ сильнѣе, чѣмъ на цинкъ); но какъ только поверхность пластинки начинаетъ подтаивать, дѣйствіе ультра-фіолетовыхъ лучей быстро слабѣетъ и наконецъ, когда вся поверхность льда покроется водой, потеря отрицательнаго электричества становится исчезающе малой. Все это показываетъ, что ледъ является очень чувствительнымъ въ ультра-фіолетовой радіаціи, тогда какъ вода нечувствительна.

Основываясь на этихъ данныхъ, Marcel Brillouin пытается (Journal de Physique, 1900, pp. 91 ss.) построить теорію атмосфернаго электричества, причемъ онъ особенно останавливаетъ вниманіе на томъ несомнѣнномъ фактѣ, что явленіе потери отрицательнаго заряда усиливается по мѣрѣ пониженія давленія, на томъ обстоятельствѣ, что ультра-фіолетовая радіація солнца въ атмосферѣ подвергается чрезвычайно сильному поглощенію. Brillouin разсуждаетъ при этомъ такимъ образомъ. Если, говоритъ онъ, въ извѣстный моментъ времени въ атмосферѣ возникаетъ электрическое поле, то ледяные кристаллы перистыхъ облаковъ, находящіеся въ этомъ полѣ, наэлектризуются такимъ образомъ, что одни концы ледяныхъ иглъ будутъ заряжены положительнымъ, другіе—отрицательнымъ электричествомъ. Если затѣмъ на отрицательно-заряженные концы кристалловъ будутъ падать ультрафіолетовые лучи солнечной радіаціи, то освѣщаемые солнцемъ кристаллы несомнѣнно потеряютъ свой отрицательный зарядъ и останутся наэлектризованными положительно по всей длинѣ. Такимъ образомъ, нейтральное состояніе кристалловъ облаковъ Cirrus, а равно и отрицательная ихъ электризація представляются состояніями неустойчивыми по существу; каждый кристаллъ, освѣщаемый солнцемъ, становится наэлектризованнымъ положительно.

Опытъ показываетъ кромѣ того, говоритъ далѣе Brillouin, что воздухъ, сквозь который проходятъ такимъ образомъ ультрафіолетовые лучи, остается изоляторомъ (въ противоположность тому, какъ это имѣетъ мѣсто при лучахъ Röntgen'а). Въ лабораторныхъ опытахъ, когда положительный кондукторъ находится на небольшомъ разстояніи отъ отрицательнаго, переносъ электричества вслѣдствіе движенія воздуха происходитъ быстро; въ атмосферѣ дѣло обстоитъ иначе. Нужно допустить, что отрицательное электричество, теряемое освѣщенными ледяными кристаллами, переходитъ въ окружающій воздухъ. Въ то же время вся масса облака представляется наэлектризованной положительно. Нейтральное состояніе воздуха такимъ образомъ представляется также неустойчивымъ, воздушныя массы, протекающія чрезъ область, гдѣ образуются и подвергаются солнечному освѣщенію, перистыя облака являются наэлектризованными отрицательно. Воздушныя массы, элелектрически—нейтральныя, среди которыхъ происходитъ разряженіе наэлектризованныхъ положительно перистыхъ облаковъ, сами электризуются положительно.

При об разованіи перистыхъ облаковъ чрезъ смѣшеніе (М.

Brillouin. „Vents et nuages“, Ann. du Bureau Cent. Métér. de France, 1898) нерѣдко наблюдаются независимыя одно отъ другого движенія сосѣднихъ воздушныхъ массъ, изъ которыхъ однѣ совершенно прозрачны, другія—насыщены туманными пузырьками. Такимъ образомъ отрицательно наэлектризованный воздухъ будетъ отдѣляться отъ наэлектризованныхъ положительно перистыхъ облаковъ. Если далѣе отрицательно наэлектризованная воздушная масса будетъ опускаться и, оставаясь отрицательно наэлектризованой—ибо электричество не можетъ исчезнуть, достигнетъ земной поверхности, покрытой растительностью, безчисленныя острія листьевъ и травинокъ облегчатъ обмѣнъ электричества между воздухомъ и почвой. Слѣдовательно, и поверхность суши вообще, вслѣдствіе сообщенія съ воздухомъ, будетъ наэлектризована отрицательно. Надъ моремъ дѣло происходитъ немного иначе. Воздухъ, наэлектризованный отрицательно, воспринимаетъ въ себя водяные пары; если далѣе при поднятіи на извѣстную большую или меньшую высоту эти пары при расширеніи конденсируются въ маленькія водяныя капли, то и послѣднія явятся также наэлектризованными отрицательно; онѣ будутъ брать на себя зарядъ воздуха, „дѣйствуя, какъ безконечно малыя острія“. Въ виду этого, кучевыя облака, образующіяся въ восходящихъ потокахъ, будутъ наэлектризованы отрицательно.

На уровнѣ земной поверхности прямое дѣйствіе ультра-фіолетовыхъ лучей ничѣмъ не обнаруживается, такъ какъ лучи эти почти не достигаютъ земной поверхности и кромѣ того вода къ нимъ нечувствительна.

Таковы основныя положенія Brillouin'а. Исходя изъ этихъ положеній, онъ находитъ даже излишнимъ говорить о суточныхъ измѣненіяхъ въ состояніи атмосфернаго электричества и явленіяхъ, обусловливаемыхъ движеніемъ наэлектризованныхъ массъ. Одинъ и тотъ же порывъ вѣтра, по словамъ автора теоріи, обусловливаетъ болѣе или менѣе сильный дождь ночью и грозу послѣ полудня, въ зависимости отъ того, что солнечная радіація электризуетъ перистыя облака, а конвекціонные токи удаляютъ отрицательно наэлектризованный воздухъ. Такъ какъ конвекція дѣйствуетъ медленно, то понятно, почему въ нашихъ странахъ нерѣдко проходятъ 2 или 3 дня съ явно выраженной наклонностью въ грозѣ, прежде чѣмъ гроза дѣйствительно разразится. Въ тѣхъ странахъ, гдѣ воздухъ на извѣстныхъ высотахъ спокоенъ, среди дня должно происходить то же самое, т. е. перистыя облака электризуются положительно, а окружающій воздухъ отрицательно. Пока перистыя облака находятся подъ дѣйствіемъ солнечной радіаціи, такое состояніе удерживается, но съ наступленіемъ ночи начинается обмѣнъ электричества между положительно наэлектризованной массой облака и отрицательно наэлектризованнымъ окружающимъ воздухомъ. Обмѣнъ этотъ—тихій разрядъ—долженъ сопровождаться свѣченіемъ и этимъ Brillouin объясняетъ какъ полярныя сіянія, такъ и явленіе такъ называемыхъ „свѣтящихся ночныхъ облаковъ“.

Наконецъ, съ точки зрѣнія его теоріи нетрудно объяснить и дѣйствіе солнечныхъ пятенъ: каждое измѣненіе въ составѣ или интенсивности ультра-фіолетовой радіаціи солнца оказываетъ непосредственное дѣйствіе на полярныя сіянія, на состояніе атмосфернаго электричества, а тамъ гдѣ образуются перистыя облака —на грозы, при чемъ послѣднее проявленіе можетъ замедлиться на нѣсколько дней въ томъ случаѣ, если подъ перистыми облаками находятся почти или совершенно электрически—нейтральныя кучевыя. Необходимость перистыхъ облаковъ въ сформированномъ видѣ или въ состояніи образованія ограничиваетъ дѣйствіе радіаціи въ томъ смыслѣ, что это дѣйствіе зависитъ отъ совокупности метеорологическихъ процессовъ въ атмосферѣ надъ данной точкой земной поверхности. Величина вызванныхъ измѣненій совсѣмъ не совпадаетъ съ величиной видимыхъ солнечныхъ пятенъ, а зависитъ лишь отъ интенсивности ультра-фіолетовой радіаціи, проникающей въ земную атмосферу. Поэтому солнечные факелы и особенно пятна, замѣтные простымъ глазомъ, служатъ недостаточными примѣтами, и съ этой точки зрѣнія представляется въ высшей степени желательнымъ тщательное изслѣдованіе этихъ явленій геліофизики.

Окончательный выводъ Brillouin'а таковъ: „Атмосферное электричество поддерживается вслѣдствіе дѣйствія ультра-фіолетовой (актинической) радіаціи на ледяные кристаллы перистыхъ облаковъ; причина его возникновенія та же, причемъ необходимое для первичнаго заряда перистыхъ иглъ электрическое поле возникаетъ вслѣдствіе перемѣщенія верхнихъ слоевъ атмосферы въ магнитномъ полѣ земли".

Письмо въ редакцію.

Милостивый Государь, Г-нъ Редакторъ!

Изъ доставленнаго мнѣ краткаго курса тригонометріи К. Торопова (Пермь 1894 г.) усматривается, что теорема объ однородной функціи нулевого измѣренія отъ сторонъ треугольника, установленная мною въ парагр. 4. моей статьи „О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости" содержится въ учебникѣ г-на Торопова въ иной только формѣ. Г-нъ Тороповъ, исходя изъ этой теоремы, классифицируетъ задачи тригонометріи такъ, какъ это дѣлаю и я. Принимая во вниманіе, что эта классификація установлена мною весьма недавно, а упомянутая теорема, хотя и была мнѣ извѣстна далеко раньше 1891 г. (приблизительно съ 1882 г.), но не была мною опубликована (нѣсколько лѣтъ тому назадъ, но позже 1894 г., я говорилъ о ней въ одномъ изъ засѣданій математич. отдѣленія Новорос. Общ. Естествоиспытателей), слѣдуетъ признать, что пріоритетъ, какъ относительно этой теоремы, такъ и относительно упомянутой классификаціи задачъ тригонометріи долженъ быть отданъ г-ну Торопову. Почти невозможно написать что либо въ области элементовъ математики и не найти въ литературѣ предшественниковъ, высказавшихъ или сдѣлавшихъ почти то-же. Весьма возможно, что и въ изслѣдованіяхъ, составляющихъ главное содержаніе моей статьи и не вошедшихъ въ учебникъ г-на Торопова, я былъ кѣмъ-либо предупрежденъ, а потому и въ этомъ отношеніи отклоняю отъ себя всякое право на пріоритетъ тѣмъ охотнѣе, что это право по счастью никогда не находится ни въ какой связи ни со строгостью доказательствъ, ни съ важностью методовъ, ни со значительностью трактуемыхъ вопросовъ.

Примите и проч.

С. Шатуновскій.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 648. Черезъ центръ даннаго круга O проведены радіусы OA и OB. Построить касательную MN къ кругу такъ, чтобы разность отрѣзковъ PM и PN между точкой касанія P и сторонами угла AOB равнялась данному отрѣзку l.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 649. Показать, что при n цѣломъ число

$$n^3(n^2-7)^2-36n$$

дѣлится на 5040.

(Заимств.) *Г. Легошинъ* (Знаменка).

№ 650. Показать, что

$$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=0,$$

гдѣ a, b, c—стороны, A, B, C—углы треугольника.

П. Д. (Житоміръ).

№ 651. Параллельно діагонали даннаго квадрата провести прямую, дѣлящую его площадь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Г. Өеодоровъ (Тамбовъ).

№ 652. Рѣшить уравненіе:

$$2x^4-8x^3-x^2+18x-5=0.$$

Б. Дидковскій (Кіевъ).

№ 653. Въ сосудъ, наполненный водой, погружаютъ твердое тѣло, причемъ вѣсъ сосуда увеличивается на 20,75 грамма. Если тотъ же сосудъ наполнить масломъ, плотность котораго 0,9, и затѣмъ погрузить прежнее тѣло, то увеличенiе вѣса сосуда будетъ 21,58 грам. Опредѣлить вѣсъ тѣла, его плотность и его объемъ.

(Заимств.) *М. Гербановскiй* (Владимiръ).

РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ.

№ 582 (3 сер.). *Плотность кварца 2,65, золота 19,36 и золотоноснаго кварца 8. Опредѣлить вѣсъ золота въ 100 граммахъ золотоноснаго кварца.*

Обозначимъ искомый вѣсъ золота въ граммахъ черезъ x. Тогда чистый кварцъ, содержащiйся въ 100 граммахъ золотоноснаго кварца, вѣситъ $100-x$ граммовъ. Объемы 100 граммовъ золотоноснаго кварца, золота и кварца, содержащихся въ этихъ ста граммахъ, выраженные въ кубическихъ сантиметрахъ, равны соотвѣтственно $\frac{100}{8}$, $\frac{x}{19{,}36}$, $\frac{100-x}{2{,}65}$. Слѣдовательно

$$\frac{100}{8}=12{,}5=\frac{x}{19{,}36}+\frac{100-x}{2{,}65},$$

откуда

$$x=77{,}48.$$

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *Завалишина* (Петрозаводскъ); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ).

№ 585 (3 сер.). *Доказать, что число*

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1,$$

гдѣ x и n числа цѣлыя и n не меньше нуля, дѣлится на $(x-1)^2$.

Представимъ данное выраженiе въ видѣ

$$(x-1)\left(nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}\right)=(x-1)\left[nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)\right].$$

Второй множитель правой части равенства при $x=1$ обращается въ нуль и слѣдовательно дѣлится на $x-1$, причемъ въ частномъ получается цѣлый относительно x и n многочленъ. Такимъ образомъ все предложенное выраженiе дѣлится на $(x-1)^2$ безъ остатка и въ частномъ получается цѣлое относительно x и n выраженiе, т. е. число цѣлое.

П. Давидсонъ (Житомiръ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 5-го января 1901 г.

Типографiя Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

В. А. Циммермана.

Двадцать четвертый семестръ.

№№ 277 — 288.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.
1901.

Дозволено цензурою. Одесса, 5-го Января 1901 года.

СОДЕРЖАНІЕ
„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"
ЗА ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТРЪ.
№№ 277—288.

Статьи.

НЕКРОЛОГЪ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

РЕЦЕНЗІИ.

ТЕМА ДЛЯ СОТРУДНИКОВЪ.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

СООБЩЕНІЯ ОТЪ РЕДАКЦІИ.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Третья серія.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Второй серіи.

Третьей серіи.

ПОЛУЧЕННЫЯ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

КНИГИ и БРОШЮРЫ, ПОСТУПИВШІЯ въ РЕДАКЦІЮ.

ПОПРАВКИ.

Обложка
ищется

Обложка
ищется