

Обложка  
щется

Обложка  
щется

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

## и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 277.

**Содержаніе:** Отъ редакціи. — Связь между анализомъ и математической физикой. Н. Poincaré, пер. *Е. Буницкаго*. — Забѣтки учителя. *К. Смолича*. — Построеніе  $\pi$  съ точностью  $\frac{1}{10^4}$ . *А. Писцова*. — Задачи для учащихся №№ 588 — 588. — Задачи №№ 1—6. — Рѣшенія задачъ (3-ей серіи) №№ 412, 496, 497. — Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ: Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей: Засѣданія 5-го марта, 19-го марта и 2 апрѣля 1899 года. — Варшавскій кружокъ Преподавателей Физики и Математики: Засѣданіе 21 ноября 1899 г. *Ф. Ростовцева*. — Обзоръ научныхъ журналовъ: Bulletin de la Société Astronomique de France. 1898. № 6. *К. Смолича*. — Присланныя въ редакцію книги и брошюры. — Полученныя рѣшенія задачъ. — Объявленія.

### ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Намъ неоднократно приходилось получать отъ преподавателей средне-учебныхъ заведеній заявленія, что большая часть помѣщаемыхъ въ „Вѣстникъ“ задачъ слишкомъ трудны для ихъ учениковъ и ученицъ. Съ другой стороны нѣкоторые любители математики жалуются на то, что въ „Вѣстникъ“ помѣщаются очень элементарныя задачи. Признавая справедливость какъ тѣхъ, такъ и другихъ заявленій, редакція рѣшила, начиная съ настоящаго номера, выдѣлить изъ отдѣла задачъ болѣе легкія въ особую рубрику „задачъ для учащихся“, а подъ заглавіемъ „задачи“ помѣщать, съ отдѣльной нумераціей, лишь такія, рѣшеніе которыхъ требуетъ большаго навыка и большей сообразительности. Разбивая такимъ образомъ отдѣлъ задачъ на два отдѣла, редакція разсчитываетъ увеличить кругъ лицъ, занимающихся рѣшеніемъ помѣщаемыхъ въ „Вѣстникъ“ задачъ, полагая, что въ рѣшеніи ихъ примутъ участіе и тѣ учащіеся, для которыхъ до сихъ поръ эти задачи были не подъ силу.

Въ настоящемъ семестрѣ будутъ также напечатаны вновь условія всѣхъ тѣхъ задачъ 1-ой и 2-ой серіи, на которыя до настоящаго времени не было получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

*Редакція.*



# Связь между анализом и математической физикой. \*)

## I.

Безъ сомнѣнія, вамъ часто задавали вопросъ, къ чему служить математика, и не являются ли тонкія математическія построенія, извлекаемыя нами всецѣло изъ нашего разума, чѣмъ-то искусственнымъ и порожденнымъ нашимъ капризомъ.

Между лицами, предлагающими такого рода вопросъ, я долженъ установить нѣкоторое различіе. Люди практическіе требуютъ отъ насъ только способа наживать деньги. Они не заслуживаютъ отвѣта. Скорѣе ихъ слѣдуетъ спросить, къ чему накапливать столько богатствъ, и должно ли ради того, чтобы выгадать время для ихъ приобрѣтенія, пренебрегать искусствомъ и наукой, которыя одни только даютъ намъ способность наслаждаться плодами нашихъ трудовъ et, propter vitam, vivendi perdere causas.

Кромѣ того, наука, созданная исключительно ради приложеній, невозможна; истины плодотворны только тогда, когда онѣ связаны другъ съ другомъ неразрывной цѣпью; если же останавливаться только на тѣхъ изъ нихъ, отъ которыхъ можно ожидать непосредственнаго пракческаго результата, то промежуточные звенья исчезнутъ, а съ ними и цѣпь.

Люди, наиболѣе презрительно относящіеся къ теоріи, ежедневно пользуются, не подозревая о томъ, ея плодами; если бы человечество лишилось этихъ плодовъ, прогрессъ скоро остановился бы, и мы тотчасъ застыли бы въ неподвижности Китая.

Но довольно заниматься непримиримыми практиками; на ряду съ ними есть и такія лица, которыя интересуются только природой и которыя спрашиваютъ насъ, въ состояніи ли мы научить ихъ лучше понимать ее. Чтобы отвѣтить имъ, намъ достаточно указать на два уже построенныхъ вчернѣ монумента, — на небесную механику и на математическую физику. Безъ сомнѣнія, они согласятся съ нами, что эти монументы вполне стоятъ труда, который мы на нихъ затратили. Но этого мало. Математическія науки преслѣдуютъ троякую цѣль. Онѣ должны доставить инструментъ для изученія природы; кромѣ того, онѣ преслѣдуютъ еще философскую цѣль и, я осмѣлюсь это сказать, цѣль эстетическую.

Онѣ должны побуждать философа углубляться въ понятія о числѣ, времени и пространствѣ. А адепты этихъ наукъ находятъ въ нихъ кромѣ того наслажденіе, аналогичное съ тѣмъ, которое доставляютъ живопись и музыка. Они восхищаются тонкой гармоніей чиселъ и формъ; они изумляются, когда новое открытіе от-

\*) Рѣчь, которую намѣренъ былъ прочесть Henri Poincaré на Международномъ съѣздѣ Математиковъ и которая была напечатана затѣмъ въ „Révue générale des Sciences“.



крываетъ предъ ними неожиданныя перспективы; и развѣ радость, которую они такимъ образомъ испытываютъ, не имѣетъ эстетическаго характера, хотя чувство не принимаетъ въ ней никакого участія? Мало избранныхъ призваны вкусить вполне эту радость, это правда; но развѣ не такъ же дѣло обстоитъ по отношенію къ наиболѣе благороднымъ видамъ искусства? Вотъ почему я не колеблюсь сказать, что математика заслуживаетъ разработки сама по себѣ и что теоріи, которыя не могутъ быть приложены къ физикѣ, должны быть изучаемы на ряду съ прочими.

Даже если бы цѣли физическая и эстетическая не были солидарны, мы не должны были бы жертвовать ни той ни другой. Но болѣе того: эти двѣ цѣли нераздѣльны, и лучшее средство достигнуть одной изъ нихъ—это добиваться другой, или по крайней мѣрѣ никогда не терять ея изъ вида. Вотъ это именно я и постараюсь сейчасъ доказать, опредѣляя точно природу отношеній между чистой наукой и ея приложеніями.

Математикъ не долженъ быть для физика простымъ поставщикомъ формулъ, нужно, чтобы ихъ соединяло болѣе тѣсное сотрудничество. Математическая физика и анализъ не суть лишь сопредѣльныя державы, поддерживающія отношенія добраго соседства; они взаимно проникаютъ другъ въ друга, и духъ ихъ одинъ и тотъ же. Это станетъ болѣе понятнымъ, когда я покажу, что физика получаетъ отъ математики и что математика, въ вознагражденіе за это, заимствуетъ отъ физики.

## II.

Физикъ не можетъ требовать у аналита, чтобы онъ открылъ ему новую истину; послѣдній въ лучшемъ случаѣ можетъ развѣ только помочь ему ее предвидѣть.

Уже давно никто не думаетъ о томъ, чтобы опережать опытъ или построить міръ во всѣхъ подробностяхъ, опираясь на нѣсколько скороспѣлыхъ гипотезъ. Отъ всѣхъ построеній такого рода, которыми еще тѣшились наивно столѣтіе назадъ, не осталось ничего, кромѣ развалинъ.

Итакъ всѣ законы получены изъ опыта; но для того, чтобы ихъ выразить, необходимъ специальный языкъ; обыкновенный языкъ слишкомъ бѣденъ и, кромѣ того, слишкомъ неясенъ, чтобы выразить отношенія столь тонкія, столь разнообразныя и столь точныя.

Итакъ вотъ первая причина, по которой физикъ не можетъ обойтись безъ математики: она доставляетъ ему единственный языкъ, на которомъ онъ можетъ говорить.

А хорошій языкъ—далеко не безразличное дѣло. Не будемъ выходить изъ области физики: неизвѣстный челоѣкъ, который изобрѣлъ слово *теплота*, обрекъ много поколѣній на ошибку; на теплоту смотрѣли какъ на вещество просто потому, что она была обозначена именемъ существительнымъ, и поэтому ее считали не-



разрушимой. Наоборотъ, тотъ кто изобрѣлъ слово *электричество*, имѣлъ незаслуженное счастье одарить неявно физику новымъ закономъ, а именно закономъ сохраненія электричества, который, благодаря чистой случайности, оказался точнымъ, по крайней мѣрѣ до сихъ поръ. Что же, воспользуемся снова сравненіемъ изъ области изящныхъ искусствъ: писатели, которые обогащаютъ языкъ новыми красотами, которые обращаются съ нимъ, какъ съ предметомъ искусства, дѣлаютъ изъ него въ то же время болѣе гибкій инструментъ, болѣе пригодный для передачи оттънковой мысли. Тогда понятно, какъ аналитъ, который стремится къ чисто эстетической цѣли, именно этимъ стремленіемъ содѣйствуетъ созданію языка, болѣе способнаго удовлетворить физика.

Но это еще не все; законъ вытекаетъ изъ опыта, но онъ не вытекаетъ изъ него непосредственно. Опытъ индивидуаленъ, а законъ, выводимый изъ него, общъ; опытъ только приближителенъ, а законъ точенъ или, по крайней мѣрѣ, претендуетъ на точность. Опытъ производится всегда при сложныхъ условіяхъ; текстъ закона исключаетъ эти усложненія. Въ этомъ и заключается такъ называемое «исправленіе систематическихъ ошибокъ».

Однимъ словомъ, чтобы добыть законъ изъ опыта, нужно обобщать; необходимость такого обобщенія бросается въ глаза самому поверхностному наблюдателю. Но какъ обобщать? Всякая частная истина можетъ быть расширена очевидно безконечнымъ числомъ способовъ. Между тысячами путей, которые открываются передъ нами, нужно сдѣлать выборъ, хотя бы и произвольный; кто будетъ руководить нами при этомъ выборѣ?

Конечно, только аналогія. Но какъ неопредѣленно это слово! Первобытный человѣкъ знаетъ только грубыя аналогіи, а именно тѣ, которыя поражаютъ чувства,—аналогіи цвѣтовъ и звуковъ.

Такому человѣку нечего и думать сблизить, на примѣръ, свѣтъ съ лучистой теплотой.

Что же научило насъ познавать аналогіи въ истинномъ смыслѣ этого слова, аналогіи глубокия, невидимыя для глазъ и доступныя лишь уму? Да не что иное, какъ математическая сторона нашихъ способностей, которая пренебрегаетъ матеріей съ тѣмъ, чтобы остановиться лишь на чистой формѣ; именно эта способность научила насъ называть однимъ и тѣмъ же именемъ предметы, которые разнятся лишь матеріально, — на примѣръ, называть однимъ и тѣмъ же именемъ умноженіе кватерніоновъ и умноженіе цѣлыхъ чиселъ.

Если бы кватерніоны, о которыхъ я только что сказалъ, не были такъ скоро утилизированы англійскими физиками, то многіе, безъ сомнѣнія, смотрѣли бы на нихъ лишь какъ на праздную фантазію; и однако, научая насъ сблизать то, что различается съ ви́шней стороны, кватерніоны уже тѣмъ самымъ могли бы расширить нашу способность проникать въ тайны природы.



Вотъ услуги, которыхъ физикъ долженъ ждать отъ анализа. Но для того, чтобы эта наука могла ему ихъ оказать, ее должно разрабатывать съ самой широкой точки зрѣнія, не забывая главнымъ образомъ о немедленныхъ практическихъ приложеніяхъ; нужно, чтобы математикъ работалъ, какъ артистъ. Мы просимъ у него только того, чтобы онъ помогъ намъ видѣть, помогъ намъ различать нашъ путь въ лабиринтъ, который открывается передъ нами. Но вѣдь лучше всѣхъ видѣть тотъ, кто какъ можно выше поднялся. Примѣровъ, разъясняющихъ эту мысль, множество, и я ограничусь лишь самыми поразительными изъ нихъ.

Первый изъ нихъ укажетъ намъ, какъ иногда бываетъ достаточно измѣнить языкъ, чтобы подмѣнить обобщенія, которыхъ раньше никто и не подозрѣвалъ. Когда законъ Ньютона былъ представленъ вмѣсто закона Кеплера, тогда не знали еще никакого движенія, кромѣ эллиптическаго. Но, что касается этого движенія, оба закона отличаются другъ отъ друга лишь по формѣ: отъ одного изъ нихъ переходятъ къ другому при помощи простого дифференцированія. И однако, изъ закона Ньютона можно вывести, при помощи непосредственнаго обобщенія, всѣ явленія пертурбаціи и всю небесную механику. Наоборотъ, если бы былъ сохраненъ текстъ закона въ томъ видѣ, какъ его изложилъ Кеплеръ, то на орбиты возмущеннаго движенія планетъ, — на эти сложные кривыя, уравненія которыхъ никто никогда не написалъ, — не могли бы взглянуть, какъ на естественное обобщеніе эллипса. Усовершенствованіе методовъ наблюденія могло бы тогда привести лишь къ вѣрѣ въ хаосъ.

Второй примѣръ равнымъ образомъ стоитъ того, чтобы надъ нимъ подумать. Когда Максвеллъ началъ свои работы, допущенные до него законы электродинамики давали объясненія всѣхъ извѣстныхъ въ этой области фактовъ. Въ данномъ случаѣ не новый опытъ отмѣнилъ эти законы, нѣтъ. Взглянувши на тѣ же законы съ нѣсколько иной точки зрѣнія, Максвеллъ замѣтилъ, что уравненія становятся болѣе симметричными, если въ нихъ ввести еще одинъ членъ и что, съ другой стороны, членъ этотъ слишкомъ малъ, чтобы вызвать явленія, ощутительныя при старыхъ методахъ наблюденія. Извѣстно, что *априорные* взгляды Максвелла втеченіе двадцати лѣтъ ожидали опытнаго подтвержденія; или, если хотите, Максвеллъ на двадцать лѣтъ опередилъ опытъ. Какимъ образомъ была одержана такая побѣда?

Дѣло въ томъ, что Максвеллъ былъ глубоко проникнутъ чувствомъ математической симетріи; и еще вопросъ, былъ ли бы онъ ею проникнутъ, если бы другіе, до него не отыскивали этой симетріи ради ея собственной красоты?

Дѣло въ томъ, что Максвеллъ привыкъ «мыслить векторами», и однако, если векторы были введены въ анализъ, то лишь при посредствѣ теоріи мнимыхъ чиселъ. А вѣдь тѣ, кто изобрѣли мнимыя числа, нисколько и не подозрѣвали о выгодѣ, которую можно



извлечь изъ нихъ при изученіи дѣйствительнаго міра; данное этимъ числамъ названіе достаточно доказываетъ это.

Однимъ словомъ, Максвеллъ, быть можетъ и не былъ искуснымъ аналитомъ, да и не было ли бы это искусство для него бесполезнымъ и стѣснительнымъ багажомъ? Наоборотъ, онъ въ высшей степени обладалъ внутреннимъ чутьемъ по отношенію къ математическимъ аналогіямъ. Потому-то онъ и далъ хорошія работы въ области математической физики.

Примѣръ Максвелла поучителенъ еще въ другомъ отношеніи. Какой точки зрѣнія на уравненія математической физики слѣдуетъ держаться? Должны ли мы просто выводить изъ нихъ слѣдствія и смотрѣть на нихъ, какъ на неприкосновенный реальный фактъ? Далеко не такъ; уравненія эти въ особенности должны насъ научить тому, что въ нихъ можно и нужно измѣнить. Только тогда мы можемъ извлечь изъ нихъ нѣчто полезное.

Третій примѣръ покажетъ намъ сейчасъ, что мы можемъ замѣчать математическія аналогіи между явленіями, — которыя съ точки зрѣнія физики не имѣютъ никакой связи ни наружной, ни дѣйствительной, — аналогіи такого рода, что законы одного изъ этихъ явленій помогаютъ намъ угадывать законы другого. Одно и то же уравненіе, а именно уравненіе Лапласа, встрѣчается въ теоріи ньютонова притяженія, въ теоріи движенія жидкостей, въ теоріи электрическаго и магнитнаго потенціала, въ теоріи распространенія теплоты и еще во многихъ другихъ теоріяхъ. Что же изъ этого слѣдуетъ? Эти теоріи кяжутся какъ бы картинами, срисованными одна съ другой; онѣ разъясняютъ взаимно другъ друга, заимствуя другъ у друга языкъ; спросите специалистовъ въ области электричества, не радуются ли они тому, что придумали терминъ «потокъ силы», подсказанный гидродинамикой и теоріей теплоты.

Такимъ образомъ математическія аналогіи не только даютъ намъ возможность предвидѣть аналогіи физическія, но не перестаютъ быть полезными даже тогда, когда послѣднихъ нѣтъ на лицо.

Словомъ, цѣль математической физики не состоитъ только въ томъ, чтобы облегчить физику вычисленіе нѣкоторыхъ постоянныхъ или интегрированіе нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій; эта цѣль еще въ томъ и въ особенности въ томъ, чтобы дать физику возможность познать скрытую гармонію явленій, заставляя его взглянуть на нихъ съ новой точки зрѣнія.

Самые возвышенные, самые чистые, такъ сказать, отдѣлы анализа, — именно они среди всѣхъ отдѣловъ будутъ наиболѣе плодотворны въ рукахъ тѣхъ, кто умѣютъ ими пользоваться.

### III.

Посмотримъ теперь, чѣмъ анализъ обязанъ физикѣ. Нужно было бы совершенно забыть теорію науки, чтобы не вспомнить, что желаніе познать природу имѣло весьма постоянное и въ высшей степени благопріятное вліяніе на развитіе математики.



Прежде всего, физикъ предлагаетъ намъ задачи, разрѣшенія которыхъ онъ отъ насъ ожидаетъ. Предлагая ихъ намъ, онъ напередъ щедро платитъ намъ за услугу, которую мы можемъ ему оказать, если сумѣемъ разрѣшить эти задачи. Если мнѣ позволятъ продолжать мое сравненіе съ изящными искусствами, то я могу сказать, что чистый математикъ, позабывшій о существованіи внѣшняго міра, былъ бы подобенъ художнику, умѣющему гармонически комбинировать цвѣта и формы, но не имѣющему моделей. Творческая способность такого художника скоро должна была бы изсякнуть.

Комбинацій, которыя могутъ образовать числа и символы, безконечное множество. Какъ выбрать намъ среди этого множества тѣ, которыя достойны нашего вниманія? Позволимъ ли мы себѣ руководствоваться исключительно нашимъ капризомъ? Но капризъ, — не говоря уже о томъ, что и онъ рано или поздно можетъ, такъ сказать, переутомиться, — увлечь бы насъ, безъ сомнѣнія, въ разныя стороны, далеко разрознивъ однихъ отъ другихъ, и мы скоро перестали бы понимать другъ друга.

Но это лишь одна, не столь важная сторона разсматриваемаго вопроса. Дѣло въ томъ, что физика, безъ сомнѣнія, не дастъ намъ заблудиться, но кромѣ того она еще предохранитъ насъ отъ гораздо болѣе страшной опасности: она помѣшаетъ намъ вращаться безъ остановки въ одномъ и томъ же кругѣ. Физика, какъ это доказываетъ исторія науки, не только принудила насъ произвести опредѣленный выборъ между представлявшимися въ изобиліи задачами, но она заставила насъ заняться такими задачами, о которыхъ безъ нея мы никогда бы и не подумали. Какъ бы ни было разнообразно воображеніе человѣка, природа еще въ тысячу разъ богаче. Чтобы слѣдить за природой, мы часто должны избирать пути, которые мы уже оставили безъ вниманія, и эти пути часто приводятъ насъ къ вершинамъ, откуда намъ открываются новые пейзажи. Что можетъ быть полезнѣе! Между математическими символами и физической дѣйствительностью есть нѣкотораго рода соответствие; а вѣдь сравнивая объекты различнаго рода, мы только и можемъ понять ихъ внутреннюю гармонію, которая одна прекрасна и слѣдовательно достойна нашихъ усилій.

Первый примѣръ, который я приведу, настолько старъ, что можно поддаться искушенію позабыть о немъ; тѣмъ не менѣе онъ самый важный изъ всѣхъ. Единственный естественный объектъ математической мысли, — это цѣлое число. Идею же непрерывности намъ навязать внѣшній міръ; эту идею изобрѣли мы, но вѣдь внѣшній міръ принудилъ насъ ее изобрѣсти. Безъ этой идеи не было бы анализа безконечно малыхъ, и вся математика свелась бы къ ариметикѣ или же къ теоріи субституцій. Наоборотъ, мы посвятили изученію непрерывныхъ объектовъ почти все наше время и все наши силы. Кто станетъ жалѣть объ этомъ? Кто подумаетъ, что это время и эти силы потеряны?

Анализъ раскрываетъ передъ нами безконечныя перспективы,



о которых арифметика не подозревает; онъ даетъ намъ возможность окинуть однимъ взглядомъ нѣчто цѣльное и грандіозное, но расположенное просто и симметрично; наоборотъ, въ теоріи чиселъ, гдѣ царитъ неожиданность, взоръ какъ бы останавливается на каждомъ шагѣ.

Безъ сомнѣнія, вамъ скажутъ, что внѣ понятія о цѣломъ числѣ нѣтъ строгости, а слѣдовательно нѣтъ и математической истины; что всюду скрыто это понятіе, и что надо стараться сдѣлать прозрачными покровы, которые его скрываютъ, даже если для этого необходимо обречь себя на безчисленные оговорки. Не будемъ настолько пуристами и будемъ благодарны *непрерывному*, понятію о которомъ, если оно и проистекаетъ изъ понятія о цѣломъ числѣ, одно только было способно сдѣлать изъ послѣдняго такъ много выводовъ.

Долженъ ли я, послѣ всего сказаннаго, напомнить о томъ, что Эрмитъ извлекъ удивительную пользу вслѣдствіе введенія непрерывныхъ переменныхъ въ теорію чиселъ? Такимъ образомъ область, всецѣло относящаяся къ понятію о цѣломъ числѣ, сама подверглась вторженію, и это вторженіе возстановило порядокъ тамъ, гдѣ царилъ безпорядокъ. Вотъ чѣмъ обязаны мы *непрерывному*, а слѣдовательно и физической природѣ.

Рядъ Фурье является драгоценнымъ инструментомъ, которымъ аналитъ постоянно пользуется; но, если Фурье его изобрѣлъ, то лишь для того, чтобы разрѣшить задачу изъ области физики; если бы эта задача не была предложена естественнымъ путемъ, то никогда не осмѣлились бы *разрывному* возвратить его права, и долго бы еще смотрѣли на непрерывныя функціи, какъ на единственные настоящія функціи.

Такимъ путемъ понятіе о *функціи* значительно расширилось и развилось благодаря нѣкоторымъ аналитамъ - логикамъ въ неожиданномъ направленіи. Эти аналиты отважились проникнуть въ области, гдѣ царитъ чистѣйшая абстракція, и удалились, насколько это возможно, отъ реального міра. И однако же не что иное, какъ задача физики доставила имъ благопріятный случай для этого. Вслѣдъ за рядомъ Фурье другіе аналогичные ряды вошли въ область анализа; они прошли туда черезъ тѣ же двери: они были придуманы съ цѣлью нѣкоторыхъ приложений. Теорія уравненій въ частныхъ производныхъ второго порядка имѣетъ аналогичную исторію: она развилась преимущественно при помощи физики и для физики. Если бы аналиты отдались своимъ естественнымъ склонностямъ, вотъ какъ, вѣроятно они взглянули бы на эти уравненія и выбрали бы предѣльные условія. Возьмемъ, на примѣръ, уравненіе между переменными  $x$  и  $y$  и функцію  $F$  этихъ переменныхъ. Они задали бы себѣ  $F$  и  $\frac{dF}{dx}$  при  $x=0$ . Такъ именно и сдѣлала, на примѣръ, Ковалевская въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ. Но есть множество другихъ способовъ поставить задачу.



Можно задать себѣ  $F$  вдоль замкнутого контура, какъ въ задачѣ Дирихле, или дать отношеніе  $F$  къ  $\frac{dF}{dx}$ , какъ въ теоріи теплоты.

Всѣми этими способами постановки задачи мы обязаны физикѣ. Итакъ можно сказать, что безъ нея мы не знали бы уравненій въ частныхъ производныхъ.

Безполезно увеличивать число примѣровъ: я достаточно далъ ихъ для того, чтобы изъ нихъ можно было сдѣлать выводъ. Когда физики требуютъ отъ насъ рѣшенія нѣкоторой задачи, нельзя сказать, что они обременяютъ насъ непосильной работой; наоборотъ, еще мы должны ихъ поблагодарить.

#### IV.

Но это еще все. Физика не только даетъ намъ поводъ рѣшать задачи, но и помогаетъ отыскивать пути для ихъ рѣшенія. Дѣлаетъ это она двумя способами: иногда даетъ намъ возможность предвидѣть рѣшеніе, иногда же подсказываетъ методы разсужденія. Выше я говорилъ объ уравненіи Лапласа, которое встрѣчается въ цѣломъ рядѣ физическихъ теорій, весьма далеко стоящихъ другъ отъ друга. Мы снова находимъ это уравненіе въ геометріи, именно въ теоріи конформнаго представленія, и, въ чистомъ анализѣ, — въ теоріи мнимыхъ величинъ. Такимъ образомъ въ теоріи функций комплекснаго переменнаго аналитикъ на ряду съ геометрическимъ образомъ, который является его обычнымъ орудіемъ, находитъ еще нѣсколько физическихъ образовъ, которыми онъ можетъ пользоваться съ тѣмъ же успѣхомъ. Благодаря этимъ образамъ онъ можетъ охватить однимъ взглядомъ то, что чистая дедукція можетъ представить уму лишь послѣдовательно. Такимъ образомъ онъ собираетъ разсѣянные отдѣльные части рѣшенія и, съ помощью особаго рода интуиціи, отгадываетъ, прежде чѣмъ сумѣетъ доказать.

Угадать, прежде чѣмъ доказать! Долженъ ли я напомнить, что именно такъ были сдѣланы всѣ важныя открытія? Сколько есть истинъ, которыя мы можемъ предчувствовать при помощи физическихъ аналогій, но которыхъ мы еще не въ силахъ установить при помощи строгаго разсужденія! Напримѣръ, математическая физика вводитъ большое число разложеній въ ряды. Эти ряды сходятся, никто въ этомъ не сомнѣвается; но, чтобы поручиться за это, не достаетъ математической достовѣрности. Сколько такихъ рядовъ, столько же обезпеченныхъ побѣдъ для тѣхъ изслѣдователей, которые прійдутъ вслѣдъ за нами.

Съ другой стороны, физика не только даетъ намъ готовые рѣшенія; она еще доставляетъ, въ извѣстной мѣрѣ, методы разсужденія. Мнѣ будетъ достаточно напомнить, какъ Клейнъ въ одномъ вопросѣ, относящемся къ поверхностямъ Риманна, воспользовался свойствами электрическихъ токовъ. Правда, что разсужденія такого рода не строги — въ томъ смыслѣ, который связываетъ съ этимъ словомъ аналитикъ.



По этому поводу является слѣдующаго рода вопросъ: какъ доказательство, которое не достаточно строго въ глазахъ аналита, можетъ удовлетворить физика? Кажется вѣдь, что не можетъ быть двухъ видовъ строгости, что строгость или есть или отсутствуетъ и что тамъ, гдѣ ея нѣтъ, не можетъ быть и логически правильнаго разсужденія.

Этотъ кажущійся парадоксъ станетъ болѣе понятнымъ, если вспомнить, при какихъ условіяхъ число можетъ быть приложено къ явленіямъ природы. Откуда вообще проистекаютъ трудности, съ которыми встрѣчаются, желая дать строгое доказательство? На эти трудности почти всегда наталкиваются тогда, когда хотятъ установить, что нѣкоторое количество стремится къ опредѣленному предѣлу, или что нѣкоторая функція непрерывна, или же что она имѣетъ производную. Но числа, которыя получаетъ физикъ въ результатъ измѣренія при опытѣ, всегда бываютъ ему извѣстны лишь приближенно, и, съ другой стороны, всякая функція различается сколь угодно мало отъ разрывной и, въ то же время, она отличается также сколь угодно мало отъ непрерывной функціи. Итакъ физикъ можетъ предположить по своему усмотрѣнію, что изучаемая функція непрерывна или же, что она разрывна; что она имѣетъ производную или же что она ея не имѣетъ. И онъ можетъ сдѣлать это не опасаясь встрѣтить когда-либо противорѣчіе ни въ производимомъ имъ сейчасъ опытѣ, ни въ какомъ бы то ни было опытѣ будущаго. Понятно, что при такой свободѣ, физикъ смѣется надъ трудностями, которыя останавливаютъ аналита. Онъ можетъ всегда разсуждать такъ, какъ если бы всѣ функціи, которыя входятъ въ его вычисленія, были цѣлыми полиномами.

Итакъ точка зрѣнія, которая удовлетворительна въ области физики, не есть то разсужденіе, котораго требуетъ анализъ. Но отсюда не слѣдуетъ, что первая не можетъ помочь отыскать второе.

Уже столько физическихъ воззрѣній преобразовано въ точныя доказательства, что теперь это преобразование легко. Можно было бы привести много примѣровъ такого преобразованія, если бы я не боялся, приводя ихъ, утомить ваше вниманіе, и если бы это засѣданіе не было бы и такъ уже слишкомъ долгимъ.

Я надѣюсь, что сказалъ достаточно по этому поводу для того, чтобы доказать, что чистый анализъ и математическая физика могутъ служить другъ другу, не принося другъ другу никакой жертвы, и что каждая изъ этихъ двухъ наукъ должна быть довольна тѣмъ, что возвеличиваетъ ея союзницу.

*Henri Poincaré.*

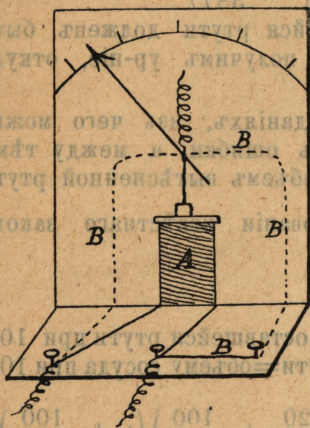
Перевелъ съ французскаго *Е. Буницкий* (Одесса).



# ЗАМѢТКИ УЧИТЕЛЯ.

## I.

При подготовкѣ физическихъ опытовъ преподавателю очень важно бываетъ произвести *быстро* нѣкоторыя электрическія измѣренія. Для опредѣленія силы тока очень удобенъ амперметръ (см. каталогъ Трындина № 2159), при помощи котораго можно также *быстро* измѣрить внутреннее сопротивление элемента.



Фиг. 1.

Въ этомъ амперметрѣ можно токъ либо сполна пропустить въ ватуску *A*, либо раздвоить, причѣмъ часть пойдетъ въ *A*, часть въ шунтъ *B*. Въ имѣющемся у насъ приборѣ сопротивление *A* = 0,87 ома, сопротивление шунта *B* = 0,217 ома, такъ что токъ дѣлится на части приблизительно въ отношеніи 1:4. Вводя въ цѣпь изъ одного элемента Бунзена только *A*, получаемъ

$$J = 1,6 = \frac{E}{r + 0,87}; \quad \text{I}$$

вводя и шунтъ *B*, найдемъ

$$J_1 = 4,5 = \frac{E}{r + R}. \quad \text{II}$$

гдѣ полсе вѣншее сопротивление *R* опредѣлится изъ ур-нія

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{0,217} + \frac{1}{0,87}$$

откуда

$$R = \frac{0,217 \cdot 0,87}{1,087} = 0,174 \text{ ома.}$$

Для I на II, имѣемъ

$$\frac{16}{45} = \frac{r + 0,174}{r + 0,87}$$

откуда  $r = 0,21$  ома. Измѣреніе здѣсь настолько быстро, что обстоятельства тока врядъ-ли успѣютъ измѣниться замѣтнымъ образомъ.

Этотъ же амперметръ вмѣстѣ съ магазиномъ сопротивленій годится для уясненія ученикамъ самаго понятія объ электрическомъ сопротивленіи и для повѣрки закона Ома при параллельномъ и послѣдовательномъ соединеніи, для чего достаточно двухъ элементовъ Гренз.

## II.

Въ физикѣ Малинина есть такая задача:

„Въ стеклянномъ сосудѣ налито 120 гр. ртути; въ ртути плаваетъ кусокъ желѣза въ 100 гр.; общая температура 0°, сосудъ наполненъ ртутью. Сколько вытечетъ ртути, если нагрѣть сосудъ до 100°? Плотность



жельза при  $0^0 = 7,78$ , плотность ртути при  $0^0 = 13,59$ ; коэффициенты кубического расширения: жельза  $\frac{1}{28200}$ , ртути  $\frac{1}{5550}$ , стекла  $\frac{1}{38700}$ .

Приведено и рѣшеніе:

Объемъ жельза при  $100^0 = \frac{100}{7,78} \left(1 + \frac{1}{282}\right)$  куб. с.; если вытекло  $x$  гр. ртути, то объемъ оставшейся ртути при  $100^0 = \frac{120-x}{13,59} \left(1 + \frac{1}{55,5}\right)$ ;

объемъ сосуда при  $100^0 = \left(\frac{100}{7,78} + \frac{120}{13,59}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{387}\right)$ , такъ какъ объемъ нагрѣтаго жельза + объемъ оставшейся ртути долженъ быть равенъ объему расширившагося сосуда, то получимъ ур-ніе, откуда  $x = 1,9$  гр.

Рѣшеніе это одинаково въ разныхъ изданіяхъ, изъ чего можно заключить, что Малининъ не видитъ въ немъ ошибки, а между тѣмъ таковая имѣется: разъ жельзо *плаваетъ*, то объемъ вытѣсненной ртути при  $0^0$  равенъ отнюдь не  $\frac{100}{7,78}$ , а на основаніи извѣстнаго закона о равновѣсіи плававшихъ тѣлъ  $= \frac{100}{13,59}$ .

Задачу слѣдуетъ рѣшить такъ: объемъ оставшейся ртути при  $100^0$  + объемъ вытѣсненной жельзомъ при  $100^0$  ртути = объему сосуда при  $100^0$

$$\frac{120-x}{13,59} \left(1 + \frac{100}{5550}\right) + \frac{100}{13,59} \left(1 + \frac{100}{5550}\right) = \left(\frac{120}{13,59} + \frac{100}{13,59}\right) \left(1 + \frac{100}{38700}\right)$$

$x = \frac{220.3315}{387.565}$  гр. Плотность и коэф. куб. расш. жельза оказываются лишними.

Задачу и ея рѣшеніе вѣроятно Малининъ заимствовалъ изъ Сборника Жз, гдѣ она помѣщена подъ № 253. У Жз только нѣсколько иначе выражено условіе: тамъ сказано, что въ сосудѣ *лежитъ* кусокъ жельза. Если кусокъ *удерживается* какъ-нибудь *вполнѣ погруженнымъ* въ ртуть, тогда дѣло другое.

К. Смоличъ.

Построеніе  $\pi$  съ точностью до  $\frac{1}{10^4}$ .

Этотъ способъ основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ:

Возьмемъ  $\pi$  съ четырьмя десятичными знаками, откинемъ запятую и разложимъ полученное число на первоначальныхъ производителей. Найдемъ,

$$31416 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17.$$

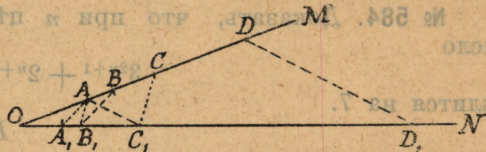
Но, отбросивъ запятую, мы увеличили  $\pi$  въ  $10^4$  разъ и потому, чтобы



получить его действительную величину, должно  $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$  разделить на  $10^4$ , или на  $2^4 \cdot 5^4$ . Сокращая на  $2^3$ , получимъ:

$$2\pi = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17}{5^4}.$$

Построение этого выражения производится слѣдующимъ образомъ: беремъ произвольный уголъ MON, на одной изъ сторонъ котораго, напр. OM, откладываемъ отъ вершины O отрезокъ OA равный радиусу данной окружности, затѣмъ откладываемъ:  $OB = \frac{7}{5}R$ ,  $OC = \frac{11}{5}R$  и  $OD = \frac{17}{5}R$ . На другой же сторонѣ угла отъ точки O отложимъ отрезокъ  $OA_1 = \frac{3}{5}R$ .



Соединимъ точку A съ  $A_1$  и черезъ точку B проведемъ линію  $BB_1$  параллельную  $AA_1$ . Положимъ, что она пересѣчетъ сторону угла ON въ точкѣ  $B_1$ . Соединяя эту точку опять съ A и проведя параллельную черезъ точку C, найдемъ еще точку  $C_1$ . Наконецъ, черезъ точку D проведемъ линію  $DD_1$ , параллельную  $AC_1$ , полученной отъ соединенія точекъ A и  $C_1$ . Тогда линія  $OD_1$  будетъ равняться  $2\pi R$ , т. е. длинѣ окружности круга радиуса R съ точностію до 0,0001.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$$

или

$$\frac{5}{3} = \frac{7}{5OB_1}$$

откуда

$$OB_1 = \frac{3 \cdot 7}{5^2}$$

Далѣе

$$\frac{OA}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1},$$

или

$$\frac{5^2}{3 \cdot 7} = \frac{11}{5OC_1}$$

откуда

$$OC_1 = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{5^3}$$

и, наконецъ,

$$\frac{OA}{OC_1} = \frac{OD}{OD_1} \cdot \frac{5^3}{3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{17}{5OD_1}$$

откуда

$$OD_1 = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17}{5^4} = 2\pi.$$

Александръ Пивцовъ (Иваново-Вознесенскъ).



## ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 583. Решить систему

$$x + y = 19$$

$$(x - 8)^4 + (y - 5)^4 = 272.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 584. Доказать, что при  $n$  цѣломъ и не меньшемъ нуля число

$$3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

дѣлится на 7.

Ю. Шейнбергъ (Пинскъ).

№ 585. Доказать, что число

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1,$$

гдѣ  $x$  и  $n$  числа цѣлыя и  $n$  не меньше нуля, дѣлится на  $(x-1)^2$ .

№ 586. Исключить  $x$  и  $y$  изъ уравненій

$$x + \frac{1}{x} = a, \quad y + \frac{1}{y} = b, \quad xy + \frac{1}{xy} = c.$$

(Заимств.) В. Г.

№ 587. Построить треугольникъ, когда даны: основаніе, точка касанія его съ окружностью, вписанною въ искомый треугольникъ, и уголъ при вершинѣ.

Н. Сборовскій (Пермь).

№ 588. Въ соляномъ растворѣ плотности 1,32 ареометръ Боме показываетъ 35°. Сколько надо прибавить воды къ одному литру этого раствора, чтобы тотъ же ареометръ показывалъ въ растворѣ только 25°?

М. Гербановскій.

## ЗАДАЧИ.

№ 1. На основаніи  $BC$  равнобедреннаго треугольника  $ABC$  найти точку  $X$  такъ, чтобы произведение

$$AX^2 \cdot BX \cdot CX$$

было maximum.

М. Зиминъ (Елецъ).



№ 2. На линии, соединяющей центры двухъ сферъ, лежащихъ внѣ другъ друга, найти такую точку, чтобы сумма поверхностей сегментовъ, видимыхъ изъ этой точки, была наибольшая.

(Займств.) Я. Тепляковъ (Кіевъ).

№ 3. Вписать въ данный кругъ треугольникъ, двѣ стороны котораго проходили бы черезъ данныя точки  $A$  и  $B$ , а третья была параллельна прямой  $AB$ . Всегда ли возможна задача?

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 4. Показать, что условіе

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2}{3} \geq \sqrt[3]{2\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2}$$

необходимо и достаточно для дѣйствительности чиселъ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha + \beta$ .

Вывести отсюда условіе дѣйствительности всѣхъ корней уравненія

$$x^3 + px + q = 0.$$

Е. Буницкій (Одесса).

№ 5. Плоскость разграфлена на равные квадраты. Доказать, что не существуетъ правильнаго треугольника, вершины котораго совпадали бы съ вершинами квадратовъ.

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 6. Доказать, что удвоенная сумма всевозможныхъ произведеній, содержащихъ данное нечетное число различныхъ множителей, взятыхъ изъ ряда цѣлыхъ чиселъ

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

которыя составляютъ арифметическую прогрессию, дѣлится безъ остатка на  $u_1 + u_n$ .

Е. Буницкій (Одесса).

## РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 412 (3 сер.). Найти отношеніе катетовъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ полусуммѣ другою острымъ угла и угла Брокера того-же треугольника. Построить самый треугольникъ.

Пусть  $A$  — прямой,  $B$ ,  $C$  — острые углы треугольника,  $\omega$  — уголъ Брокера. Тогда

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C^*) = \cot B + \operatorname{tg} B = \frac{1}{\sin B \cos B},$$

\*) См. № 232 Вѣстника, „Новая геометрія треугольника“, стр. 87, § 8.



откуда

$$\operatorname{tg} \omega = \sin B \cos B \quad (1).$$

По условию

$$C = \frac{1}{2} (B + \omega), \quad 2C = B + \omega, \quad 2\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = B + \omega,$$

откуда

$$\pi - \omega = 3B, \quad \operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} 3B.$$

Поэтому (см. 1)

$$\sin B \cos B = -\operatorname{tg} 3B,$$

$$\sin B \cos B \cos 3B + \sin 3B = 0,$$

$$\sin B \cos B (4\cos^3 B - 3\cos B) + 3\sin B - 4\sin^3 B = 0,$$

откуда, такъ какъ  $\sin B$  отличенъ отъ нуля, —

$$4\cos^4 B + 3(1 - \cos^2 B) - 4\sin^2 B = 4\cos^4 B - \sin^2 B = 0,$$

или

$$\sin^2 B (\sin^2 B + \cos^2 B) - 4\cos^4 B = 0,$$

$$\sin^4 B + \sin^2 B \cos^2 B - 4\cos^4 B = 0,$$

$$\operatorname{tg}^4 B + \operatorname{tg}^2 B - 4 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} B = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}}.$$

Такъ какъ  $\operatorname{tg} B$  — вещественное положительное число, то окончательно отношеніе катетовъ равно

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}.$$

Для построения треугольника отложимъ произвольный отрезокъ  $AB$  и построимъ отрезокъ  $AN = 4AB$ , перпендикулярный къ  $AB$ . Радиусомъ  $BN$  изъ точки  $B$ , какъ изъ центра, опишемъ дугу до встрѣчи съ лучомъ  $BA$  въ точкѣ  $K$ , затѣмъ раздѣлимъ отрезокъ  $AK$  въ точкѣ  $C'$  пополамъ. На отрезкѣ  $C'B$ , какъ на диаметръ, строимъ окружность; пусть  $C$  — точка встрѣчи ея съ прямою  $AN$ . Треугольникъ  $ABC$  есть искомый.

Я. Полушкинъ (Знаменка); Н. С. (Олесса).

№ 496 (3 сер.). Рѣшить въ целыхъ числахъ уравненіе:

$$x^3 - yx^2 + x - y = 102.$$

Представляя предложенное уравненіе въ видѣ

$$(x - y)(x^2 + 1) = 102,$$

находимъ, что число  $x^2 + 1$  равно одному изъ дѣлителей 102, взятому со знакомъ  $+$ .

Поэтому должно имѣть мѣсто одно изъ 8-ми равенствъ:

$$x^2 + 1 = 1; 2; 3; 6; 17; 34; 51; 102.$$



Изъ этихъ равенствъ лишь три

$$x^2 + 1 = 1; 2; 17$$

даютъ для  $x$  цѣлыя значенія:

$$x = 0; x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 4; x_4 = -4.$$

Соотвѣтствующія значенія  $y$  также оказываются цѣлыми:

$$y = -102; y_1 = -50; y_2 = -52; y_3 = -2; y_4 = -10.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ); П. Полушкинъ (Знаменка); И. Поповскій (Умань); Н. С. (Одесса). И. Шейнбергъ (Пинскъ); неполныя рѣшенія прислали: С. Адамовичъ (Двинскъ); Л. Малазаникъ (Бердичевъ); П. Полушкинъ (Знаменка); А. Вареницовъ (Ростовъ на Дону).

№ 497 (3 сер.). Стороны  $AB$  и  $AD$  параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , діагональ  $AC = c$ . На діагонали (или ея продолженіи) взята точка  $M$ ; пусть  $AM = c'$ . Пусть  $a'$  и  $b'$  суть прямоугольныя проєкціи  $AM$  соотвѣтственно на стороны  $AB$  и  $AD$ .

Доказать, что

$$cc' = aa' + bb'.$$

Пусть діагональ  $AC$  образуетъ со сторонами  $AB$  и  $AD$  соотвѣтственно острые углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда

$$\frac{a'}{c'} = \cos \alpha, \quad \frac{b'}{c'} = \cos \beta.$$

Изъ треугольника  $ACD$

$$AC = CD \cos ACD + AD \cos CAD,$$

или

$$c = a \cos \alpha + b \cos \beta.$$

Подставляя вмѣсто  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  ихъ значенія, находимъ:

$$c = \frac{aa'}{c'} + \frac{bb'}{c'},$$

откуда

$$cc' = aa' + bb'.$$

Чтобы эта формула сохранилась и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ угловъ, образуемыхъ діагональю со сторонами, будетъ тупымъ, надо условиться считать отрѣзки, лежащіе на прямыхъ  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  и отсчитываемые отъ точки  $A$ , положительными, если они направлены по лучамъ  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  и отрицательными — если они направлены въ прямо противоположныя стороны.

Я. Полушкинъ (Знаменка); И. Шейнбергъ (Пинскъ); А. Вареницовъ (Ростовъ на Дону).



# ОТЧЕТЫ О ЗАСѢДАНІЯХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

## Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей

5-го Марта 1899 года.

Предсѣдательствоваль: В. А. Циммерманъ. Присутствовали члены Общества: С. И. Березинъ, Х. І. Гохманъ, С. В. Житковъ, И. М. Занчевскій, Г. П. Каченовскій, П. И. Коляга, В. О. Каганъ, О. Н. Муляницкій, К. В. Май, Н. Д. Пильчиковъ, П. Я. Точидловскій и С. О. Шатуновскій.

Предметы занятій:

I. В. О. Каганъ внесъ поправку въ протоколъ предыдущаго засѣданія.

Подвергнуто обсужденію предложеніе Н. Д. Пильчикова о назначеніи особаго засѣданія совмѣстно съ членами Техническаго Общества по поводу наступающаго столѣтія со дня введенія метра во Франціи.

Принимая предложеніе Николая Дмитриевича, Отдѣленіе постановило:

1. Детальное рѣшеніе вопроса предоставить во всѣхъ частяхъ на усмотрѣніе комиссіи, въ составъ которой избраны: И. М. Занчевскій, Г. П. Каченовскій, К. В. Май и Н. Д. Пильчиковъ.

2. Снестись съ предсѣдателемъ Техническаго Общества черезъ президента Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Для этой цѣли просить предсѣдателя Отдѣленія войти въ переговоры съ президентомъ Общества.

III. Выслушано сообщеніе Х. І. Гохмана: „Поправки къ учебнику геометріи Кисилева“, докладчикъ предложилъ упрощенныя доказательства слѣдующихъ двухъ теоремъ: 1. Треугольники равны, когда три стороны одного соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого. 2. Если прямые параллельны, то соотвѣтственные углы равны.

IV. Выслушано сообщеніе В. О. Кагана: „По поводу двухъ вопросовъ изъ области дифференціальной геометріи“:

За недостаткомъ времени В. О. Каганъ коснулся одного только изъ этихъ вопросовъ, а именно вопроса объ огибающихъ. Докладчикъ высказалъ мнѣніе, что обычное изложеніе этого вопроса, при которомъ огибающая опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто предѣльныхъ положеній точекъ пересѣченія смежныхъ кривыхъ даннаго семейства, не можетъ считаться правильнымъ.

Вопросъ объ огибающихъ, по мнѣнію докладчика, долженъ примыкать къ теоріи траекторій: именно, огибающая должна быть разсматриваема, какъ траекторія, встрѣчающая кривыя даннаго семейства подъ угломъ, равнымъ нулю. При такомъ частномъ предположеніи интеграль дифференціальнаго уравненія траекторій воспроизводитъ самое семейство кривыхъ. Существованіе огибающей зависитъ поэтому отъ существованія особаго интеграла. Последний въ Гауссовыхъ коэффициентахъ выражается уравненіемъ  $F^2 - EG = 0$ , которое, по составу его лѣвой части, приводится къ двумъ уравненіямъ и только въ томъ случаѣ, когда эти уравненія эквиваленты, они опредѣляютъ особый интеграль упомянутаго дифференціальнаго уравненія. Впрочемъ, кривая опредѣляемая этимъ интеграломъ, дѣйствительно касается кривыхъ данной системы лишь въ томъ случаѣ, если точка встрѣчи не есть особая точка заданной кривой. Въ виду этого можетъ случиться, что полученная кривая представляетъ не огибающую, а геометрическое мѣсто особенныхъ точекъ кривыхъ даннаго семейства. Въ заключеніе докладчикъ указалъ случай, въ которомъ обычная точка зрѣнія на огибающую приводитъ къ парадоксальному заключенію, которое устраняется правильной постановкой вопроса.



19-го Марта 1899 года.

Предсѣдатель *В. А. Циммерманъ*. Присутствовали члены Общества: *С. В. Житковъ, И. М. Занчевскій, В. Ѳ. Каланъ, Н. Н. Лане, К. В. Май, Ѳ. Н. Милатицкій, Н. Д. Пильчиковъ, В. В. Преображенскій, И. В. Слешинскій, П. Я. Точидловскій, и С. О. Шатуновскій.*

Предметы занятій:

I. Одобрены протоколы двухъ предыдущихъ засѣданій.

II. Н. Д. Пильчиковъ, какъ предсѣдатель метрической комиссіи по устройству соединеннаго засѣданія членовъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ членами Императорскаго Техническаго Общества, вошелъ въ Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ прилагаемымъ къ этому протоколу докладомъ, содержащимъ въ десяти пунктахъ изложеніе того, что комиссія нашла желательнымъ относительно устройства упомянутаго засѣданія, и просилъ Отдѣленіе высказаться по всемъ пунктамъ доклада.

По обсужденіи доклада Н. Д. Отдѣленіе пришло къ слѣдующимъ заключеніямъ:

По пунктамъ 1-му и 2-му. Назначеніе времени и мѣста засѣданія представить на усмотрѣніе комиссіи.

Пункты 3-й и 7-й, какъ не относящіеся до Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей, обсужденію не подвергать.

По 4-му пункту. Отпустить изъ средствъ Математическаго Отдѣленія въ распоряженіе комиссіи пятнадцать рублей и поручить предсѣдателю Математическаго Отдѣленія войти съ представленіемъ въ Совѣтъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей объ отпускѣ въ распоряженіе комиссіи нѣкоторой суммы сообразно со средствами Общества.

По 5-му пункту. Просить господина Ректора Новороссійскаго Университета черезъ господина президента Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей довести до свѣдѣнія Совѣта Университета о предстоящемъ празднествѣ на этотъ случай, если-бы гг. члены Университета пожелали почтить своимъ присутствіемъ предстоящее засѣданіе или принять участіе въ засѣданіи своими рефератами.

Пунктъ 6-й отклонить.

По пункту 8-му. Желательно, чтобы въ день засѣданія были выставлены для обозрѣнія публики образцы метрическихъ и иныхъ мѣръ.

По пункту 9-му. Содержаніе и число докладовъ предоставить на усмотрѣніе комиссіи.

По пункту 10-му. Отчетъ по празднеству, тѣ изъ рефератовъ, которые будутъ прочитаны членами Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей и другіе матеріалы, относящіеся до празднества, желательно напечатать въ запискахъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей, а также и отдѣльными оттисками.

Предсѣдатель комиссіи Н. Д. Пильчиковъ выразилъ Отдѣленію свою благодарность за отпущенныя Отдѣленіемъ въ распоряженіе комиссіи денежныя средства.

III. Выслушано сообщеніе В. В. Преображенскаго: „Къ вопросу о Максвелевой теоріи электричества“, въ которомъ В. В. показали, что интегрируя дифференціальныя слагающія силу упругости съ потенциальной функцией, необходимо придемъ къ Максвелевымъ выраженіямъ электрическихъ силъ, если предположимъ, что нормальныя и тангенціальныя слагающія силу упругости выражаются черезъ производныя отъ потенциальной функции безъ помощи производныхъ функций.



Въ Математическое отдѣленіе Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Новороссійскомъ Университетѣ.

Избранная по моему предложенію Обществомъ Естествоиспытателей и Одесскимъ Отдѣленіемъ Императорскаго Техническаго Общества метрическая коммиссія въ засѣданіи своемъ 10-го сего Марта нашла желательнымъ:

1. Отложить назначеніе дня посвящаемаго празднованію столѣтія установленія метрическихъ мѣръ до полученія свѣдѣній изъ Франціи.

2. Назначить мѣстомъ праздника зданіе Одесскаго Отдѣленія Императорскаго Техническаго Общества, согласно заявленію члена коммисіи г. Секретаря Императорскаго Техническаго Общества Г. М. Вольфензона о предоставленіи Обществомъ своего помѣщенія для праздника.

3. Чтобы Одесское Отдѣленіе Императорскаго Техническаго Общества обратилось съ просьбой къ г. Директору Департамента Торговли и Мануфактуръ о разъясненіи вопроса о введеніи въ Россіи системы метрическихъ мѣръ.

4. Чтобы Общество Естествоиспытателей при Императорскомъ Новороссійскомъ Университетѣ оказало содѣйствіе въ устройствѣ праздника и если возможно, то и матеріальную помощь.

5. Чтобы Императорскій Новороссійскій Университетъ въ лицѣ г. Ректора Университета и Совѣта Университета былъ увѣдомленъ Обществомъ Естествоиспытателей о предстоящемъ празднествѣ, участіе въ которомъ членовъ Совѣта Университета, не входящихъ въ составъ Общества Естествоиспытателей, было бы въ высшей степени интереснымъ для разносторонней оцѣнки значенія международнаго метрическаго союза съ точки зрѣнія юридическихъ наукъ и общихъ культурныхъ вопросовъ.

6. Чтобы Общество Естествоиспытателей при Императорскомъ Новороссійскомъ Университетѣ снеслось съ Обществами Естествоиспытателей при другихъ русскихъ Императорскихъ университетахъ о возможномъ ихъ участіи въ предстоящемъ празднествѣ.

7. Чтобы Одесское Отдѣленіе Императорскаго Техническаго Общества снеслось съ другими отдѣленіями Императорскаго Техническаго Общества о возможности ихъ участія въ предстоящемъ празднествѣ и оказало, буде возможно, матеріальную помощь по устройству праздника.

8. Чтобы была устроена въ день праздника выставка метрическихъ и другихъ мѣръ.

9. Чтобы были выслушаны въ день праздника слѣдующіе доклады:

*Бернардацци.* Историческій обзоръ возникновенія и развитія метрической системы мѣръ.

*Вольфензонъ.* Метрическая система въ фабрично-заводскомъ дѣлѣ въ Россіи.

*Зуевъ.* Вопросъ о введеніи метрической системы въ Россіи на Всероссийскомъ Торгово-Промышленномъ Сѣздѣ въ Нижнемъ-Новгородѣ.

*Казанскій.* Международный метрическій союзъ съ точки зрѣнія юридической и культурной.

*Каченовскій.* Метрическая система въ торгово-промышленномъ дѣлѣ.

*Май.* О возможности введенія метрической системы мѣръ въ Россіи.

*Пильчиковъ.* О значеніи метрической системы въ точныхъ наукахъ и о работахъ Международнаго бюро мѣръ и вѣсовъ.

10. Чтобы былъ изданъ сборникъ рефератовъ прочтенныхъ на празднествѣ и другихъ матеріаловъ, относящихся къ празднованію въ Одессѣ столѣтія метрической системы мѣръ.



2-го Апреля 1899 года.

Предсѣдательствовалъ: В. А. Циммерманъ. Присутствовали члены Общества: Ст. В. Житковъ, А. Кроссовскій, Г. П. Каченовскій, К. В. Май, Ѳ. Н. Милитинскій, Н. В. Слешинскій, Н. Ю. Тимченко, П. Я. Точидловскій и С. О. Шатуновскій.

Предметы занятій:

I. Предсѣдатель комиссіи для устройства торжественнаго засѣданія по поводу истекающаго столѣтія со дня введенія метрической системы мѣръ во Франціи Н. Д. Пильчиковъ доложилъ Отдѣленію, что въ засѣданіи комиссіи 21-го Марта 1899 года рѣшено отложить устройство торжественнаго засѣданія на осень текущаго года.

II. Н. Д. Пильчиковъ прочиталъ рефератъ: „О децимализаціи времени и угловъ“.

III. Иванъ Юрьевичъ Тимченко сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе одной теоремы Парсеваля изъ области теоріи рядовъ“.

## Варшавскій Кружокъ Преподавателей Физики и Математики.

### Засѣданіе 21 ноября 1899 г.

21-го ноября 1899 года, въ 7½ час. вечера, въ физической аудиторіи Университета, подъ предсѣдательствомъ Н. М. Бородинъ, состоялось закрытое засѣданіе Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики.

I. По предложенію Правленія Кружка былъ избранъ единогласно въ почетные члены профессоръ Варшавскаго Университета В. В. Станкевичъ.

II. Заслушаны: протоколъ предыдущаго засѣданія Кружка, протоколъ засѣданія Правленія Кружка, объявленіе Педагогическаго Общества, состоящаго при Московскомъ Университетѣ, о проектѣ сѣзда преподавателей физико-математическихъ наукъ въ Московскомъ Учебномъ Округѣ, письмо г. Гернета на имя секретаря Кружка.

Постановлено принять къ свѣдѣнію. Предложенія же Правленія одобрить и выполнить.

III. Принято нѣсколько новыхъ членовъ.

IV. Заслушаны сообщенія:

а) В. В. Станкевича. Къ вопросу объ элементарномъ изложеніи ученія объ электричествѣ.

б) П. А. Зилова. Способы анализа звука. Сообщеніе сопровождалось опытами.

с) Ф. И. Ростовцева. Къ вопросу о преподаваніи физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Примѣчаніе. Въ числѣ предложеній Правленія были также указаны дни засѣданій въ первой половинѣ будущаго 1900 г., которые и были приняты собраніемъ, а именно:

I. — 20 января (четвергъ).

II. — 1 февраля (пятница).

III. — 12 марта (воскресенье).

IV. — 24 марта (пятница).

Начало засѣданій въ 7½ час. вечера.

Ф. Ростовцевъ.



## ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## Bulletin de la Société Astronomique de France.

№ 6—1898.

**Le soleil et la nature, C. Flammarion.** Задавшись цѣлью прослѣдить зависимость между дѣятельностью солнца и обусловливаемыми ею растительными явлениями (появление почекъ на каштанахъ, листьевъ, цвѣтовъ), Фламмаріонъ собралъ свои наблюденія съ 1886 г. по 1898 г. и обработалъ ихъ слѣд. образомъ: принявши самый поздній срокъ какого-нибудь явления (напр. появленія листьевъ) за начало, онъ другіе болѣе ранніе сроки обозначилъ №№; такъ напр. самымъ позднимъ срокомъ для развитія листьевъ было 23 Апр., потому 22 Апр. будетъ № 1, 21 Апр. — № 2 и т. д.; чтобы исключить вліяніе разныхъ случайностей онъ взялъ среднія числа изъ 4-хъ послѣдовательныхъ лѣтъ и получилъ такимъ образомъ слѣд. таблицу:

|           | листья | цвѣты |
|-----------|--------|-------|
| 1886 — 89 | 7, 5   | 7     |
| 1887 — 90 | 8, 25  | 7     |
| 1888 — 91 | 8, 25  | 7, 25 |
| 1889 — 92 | 12, 25 | 12.   |

и. т. д.

изъ которой видно, что въ четырехлѣтіе 1886 — 1889 листва развивается среднимъ числомъ 7,5 днями раньше 23 Апр., цвѣты — 7 днями раньше самого поздняго срока (9 Мая) и т. д. Для наглядности онъ вычертилъ діаграмму, гдѣ абсциссы соотвѣтствуютъ времени, а ординаты — этимъ вычисленнымъ числамъ, т. е. наибольшія ординаты соотвѣтствуютъ наиболѣе раннему моменту извѣстной фазы растительности; на той же діаграммѣ вычерчена кривая измѣненія площади солнечныхъ пятенъ, выраженной въ миллионныхъ частяхъ видимой поверхности солнца, причемъ годы комбинировались попарно т. е. 1887 — 1888, 1888 — 1889 и т. д. Чертежъ показываетъ, что обѣ кривыя идутъ одинаково, такъ что maxima и minima ихъ соотвѣтствуютъ.

Желая распространить свое изслѣдованіе на болѣшій промежутокъ времени, онъ, за отсутствіемъ подобныхъ наблюденій, воспользовался наблюденіями de Vosquigny-Adanson надъ временемъ возвращенія перелетныхъ птицъ (ласточки, кукушки, соловья); эти наблюденія производились съ 1876 по 1898 г. Діаграмма, составленная вышеописаннымъ способомъ, показываетъ полное соотвѣстіе между кривыми (только кукушка запаздываетъ). — Наконецъ, взявши наблюденія только надъ временемъ прилета ласточки съ 1853 г. по настоящее время, онъ опять получилъ кривую, въ общемъ соотвѣтствующую своимъ maxima и minima таковымъ же солнечной кривой.

Заключеніе отсюда слѣдующее: годамъ maxima солнечныхъ пятенъ соотвѣтствуетъ самое раннее развитіе растительности и самое раннее появленіе перелетныхъ птицъ, а слѣд. maximum солнечныхъ пятенъ соотвѣтствуетъ maximum средней температуры.

**Soc. Astr. de France. Séance du 4 Mai.**

Фламмаріонъ представилъ новое изображеніе Марса въ видѣ глобуса діаметромъ въ 47 сант., на которомъ изображено все то, что было видимо по крайней мѣрѣ тремя наблюдателями (продается у Bertaux, rue Serpente, Paris. цѣна 7½ франковъ).

Quénisset произвелъ опытъ Ст. Менье: металлическій полированный шаръ, на поверхности коего нарисованы линіи на подобіе каналовъ Марса, покрывается кисеей и освѣщается сильнымъ свѣтомъ; при этомъ каналы двоятся.

**Anomalies magnétiques en Russie. Th. Moureaux.** По приглашенію Императорскаго Россійскаго Географ. Общ. Муро произвелъ изслѣдованіе магнитной аномаліи въ 149 пунктахъ Курской губ. \*) Оказались 3 главныхъ центра такихъ ано-

\*) Изслѣдованіе это было произведено совмѣстно съ профессор. Н. Д. Пильчиковымъ. — Ред.



малій на протяженіи 27 кил. между Обоянью и Бѣлгородомъ. Первый изъ нихъ, изученный раньше русскими учеными, находится въ Неправѣ Бѣлгор. у.; здѣсь въ районѣ меньше одного кило. вокругъ церкви склоненіе измѣняется отъ  $-18^{\circ}$  до  $+55^{\circ}$ , наклоненіе — отъ  $67^{\circ}$  до  $82^{\circ}$ , горизонтальная слагающая отъ 0,10 до 0,24. Второй центръ въ Покровскомъ въ 13 кил. на ССВ отъ Неправа; склоненіе тамъ измѣняется вдругъ съ  $-11^{\circ}$  на  $+45^{\circ}$ , наклоненіе достигаетъ  $82^{\circ}$ , а горизонтальная слагающая 0,08 — 0,35. Третій центръ наиболее полно изслѣдованный, въ Кочетовкѣ Обоянскаго у. въ 25 кил. отъ Обояни на ЮЮЗ и въ 14 кил. къ С. отъ Покровскаго; здѣсь на разстояніи 2 кил. склоненіе измѣняется отъ  $-34^{\circ}$  до  $+96^{\circ}$ , наклоненіе  $48^{\circ}$  —  $79^{\circ}$ , горизонтальная же слагающая достигаетъ 0,59 ед. С. S. G., въ то время какъ наибольшія для земного шара величины ея = 0,40 (около Борнео). — Встрѣчающіяся аномаліи менѣе изслѣдованныя въ Дмитріевскомъ, Тимскомъ, Старо Оскольскомъ и Корочанскомъ уѣздахъ. — Приложено 5 картъ, изображающихъ измѣненія магнитныхъ элементовъ въ Кочетовкѣ.

**Le crépuscule et sa photographie à minuit, au solstice d'été, au sommet de la tour d'Eiffel. F. Quéniisset et E. Touchet.**

Извѣстно, что когда солнце опустится подъ горизонтомъ на  $6^{\circ}$ , появляются звѣзды 1 величины — конецъ гражданскихъ сумерокъ; когда же солнце опустится на  $18^{\circ}$  и видны звѣзды до 6 вел. — конецъ астрономическихъ сумерокъ. Послѣ заката солнца на западѣ виднѣн красноватый сегментъ, вершина коего опускается все ниже и ниже вслѣдъ за солнцемъ; этотъ сегментъ сверху ограниченъ свѣтлоголубой дугой — это т. наз. leur crépusculaire. сумерочный свѣтъ; высота атмосферы и высота этой дуги находится въ зависимости другъ отъ друга.

Quéniisset и Touchet задались цѣлью съ Эйфелевой башни фотографировать эту дугу, чтобъ опредѣлить величину, форму и положеніе ея. Для этой цѣли наиболее пригодны портретные объективы. 23 Юня 1897 г. удалось получить нѣсколько фотографій. Первая съ портретнымъ объективомъ d'Hermgis (diam. 40 мил. и 15 сант. фок. разст.) съ позою въ 48 м. довольно слаба хотя на свѣтломъ фонѣ ея виденъ одинъ изъ громоотводовъ Эйфелевой башни. Вторая съ позою въ 57 м. и пластинкой Люмьера получилась не смотря на то, что вошла луна. Третья съ позою въ 15 м. Такимъ образомъ сумерочный свѣтъ фотографировать удалось, хотя формы его на фотографіяхъ различить нельзя.

**Les canaux de Mars et les canaux de la Lune V. Cerrelli.** Авторъ высказываетъ новый взглядъ на каналы Марса.

Такъ какъ Марсъ дальше отъ земли чѣмъ Луна разъ въ 300, то при увеличеніи въ 600 онъ представляется намъ на такомъ же разстояніи, какъ Луна въ бинокль съ увеличеніемъ въ 2 раза. Если посмотрѣть на Луну въ бинокль, то мы увидимъ, что поверхность ея пересѣкается въ разныхъ наравленіяхъ темными полосами съ расширеніями въ нѣкоторыхъ мѣстахъ; при большемъ увеличеніи оказываются, что эти темныя полосы — рядъ темныхъ пятенъ на лунѣ. Если бы удалось приблизить Марсъ настолько, насколько телескопъ приближаетъ луну, то не разложились-ли бы эти линіи — каналы Марса на рядъ отдѣльныхъ путей?

**La planète Mars. Tardy.**

**Les gelées blanches. T. Folie.** По ночамъ холодный воздухъ, какъ показываютъ наблюденія, стекаетъ съ возвышенностей въ долины, гдѣ растительность и подвергается опасности. Для предохраненія ея необходимо разведеніе лѣсовъ на скатахъ возвышенностей.

**Calendrier perpétuel. G. Howgan.**

**Calendrier lunaire perpétuel.** Шубертъ далъ таблицу, съ помощью которой быстро сложениемъ и вычитаніемъ можно опредѣлить, въ какое число мѣсяца любого года приходилось новолуніе и полнолуніе. (Приложена таблица).

**Nouvelles de la Science. Variétés.**

17 Дек 1897. L. Libert на основаніи наблюденія 10 метеоровъ опредѣлилъ новый радіантъ, координаты коего

$$AB = 62^{\circ} \text{ и } D = +49^{\circ}.$$

**Le ciel du 15 Juin au 15 Juillet.**

**К. Смоличъ. (Умань).**



## ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

159. Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, съ приложеніемъ задачъ, рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ А. Воиновъ, и. о. инспектора Корочанской гимназіи. Второе изданіе, исправленное и дополненное. М. 1899. Ц. 75 коп.

160. Новая теорія прохожденія свѣтотепловыхъ лучей солнца къ земной поверхности. Н. Ермолина. Війскъ. 1899. (3 экз.).

161. А. А. Комовъ, Начальникъ Асхабадскаго технического ж. д. училища. Стереометрія. Учебникъ элементарной геометріи для низшихъ техническихъ, промышленныхъ и желѣзнодорожныхъ училищъ. Первое изданіе. Изданіе Н. Н. Комовой. Асхабадъ. 1899. Ц. 65 к.

162. *Plato v. Reussner. Morceaux choisis de lecture française*. 2 Livraison 1-ère édition. Varsovie. 1899. Prix 15 cop.

163. Вліяніе электрической тяги на магнитныя обсерваторіи. П. Т. Пасальскаго, приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета. Одесса. 1899.

164. А. П. Мининъ. Сборникъ задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. М. 1899. Ц. 60 коп.

165. Рядъ по функціямъ  $(n+1-x)$  для функцій  $\Theta(n)$ , выражающей число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ числа  $n$ . А. П. Минина. (Отд. отд. изъ X тома трудовъ Отд. Физ. Наукъ О-ва Любителей Естествознанія, Антропологии и Этнографіи). М. 1898.

166. Вит. Зин. Рабцевичъ. Методика начальной ариѳметики. Руководство для учителей и учительницъ начальныхъ училищъ, для учительскихъ институтовъ и семинарій, для педагогическихъ классовъ женскихъ гимназій. Черниговъ. 1899. Ц. 90 к., съ перес. 1 р.

167. Основы землевѣдѣнія. Выпускъ IV, часть 1-я. Географія растений. Законы распредѣленія растений и описаніе растительности земного шара. Проф. А. И. Краснова. Харьковъ. 1899. Ц. 2 р. 40 к.

168. Годовой отчетъ по русской публичной библіотекѣ въ гор. Юрьевѣ. Съ 1-го Января 1898 г. по 1-е Января 1899 г. Юрьевъ. 1899.

**ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ** отъ слѣдующихъ лицъ: С. Адамовича (Двинскъ) 509, 532, 537, 538, 542, 544, 545 (3 сер.); А. Грабовскаго (ст. Павелецъ) 550 (3 сер.); Л. Магазиника (Бердичевъ) 549, 550, 551, 557, 558, 564, 566, 574, 575 (3 сер.); П. Полушкина (с. Знаменка) 454, 541, 559, 560, 561, 563, 565, 568, 569, 572, 575, 579 (3 сер.); Ф. Бюлярицева (Казань) 562 (3 сер.); М. Николаева (Севастополь) 568 (3 сер.); В. Шварцбаха (Севастополь) 568 (3 сер.); П. Дембовскаго (Севастополь) 559, 560, 561 (3 сер.); В. Шатунова (Полтава) 549, 550, 554, 556 (3 сер.); М. Зимина (Елецъ) 547 (3 сер.); В. Буханича (Новочеркасскъ) 548 (3 сер.); Л. Мирлессъ (Казань) 553, 557, 559, 560, 562 (3 сер.).

Редакторъ В. А. Циммерманъ.

Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою, Одесса, 23-го Февраля 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.



Обложка  
щется



Обложка  
щется