Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXIII Сем. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 272.

Содержаніе: Давленіе воздуха на поверхности, введенныя въ искусственный воздушный потокъ. (Окончаніе). *К. Ціолковскаго.* — Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго (Окончаніе). *В. Кагана.* — Протоколъ засѣданія Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 6-го ноября 1898 года. — Задачи №№ 553—558. — Рѣшенія задачъ (3-ей серіи) №№ 439, 440, 473. — Объявленія.

Давленіе воздуха на поверхности, введенныя въ искусственный воздушный потокъ.

К. Ціолковскаго.

(*Окончаніе**).

Значеніе на сопротивленіе кормы.

137. Нѣкоторые отрицаютъ значеніе кормовой части тѣла въ дѣлѣ его сопротивленія вѣтру. И дѣйствительно, мы видѣли (напр, 120), что въ нѣкоторыхъ случаяхъ кормовая часть даже увеличиваетъ сопротивленіе воздуха движенію тѣла. Однако, для удлиненныхъ и плавныхъ тѣлъ, значеніе кормового придатка громадно. Даемъ тутъ результаты опытовъ, показывающихъ *значеніе кормовой части* для различныхъ тѣлъ.

138. Для этого, между прочимъ, я бралъ извѣстныя намъ продолговатыя тѣла, раздѣленныя среднимъ поперечнымъ сѣченіемъ на двѣ равныхъ части. Такъ я бралъ половину эллипсоида вращенія и поло-

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физ." № 271.

вину тѣла, полученнаго отъ вращенія отрѣзка круга вокругъ его хорды. Тѣла я располагалъ обыкновеннымъ образомъ, вдоль потока, но обращалъ ихъ то остріемъ къ вѣтру, то тупымъ концемъ, который я заклеивалъ бумагой (черт. 3 и 4-ый).

139.	½	1	2	4	8
Половина эллипсоида; дл.=11 с; выпуклою стороною къ вѣтру.	7,5	14	28	55	106
То-же; но тупымъ концемъ къ вѣтру.	30	60	120	238	
Половина тѣла отъ вращенія дуги; дл.=21 с Остріемъ къ вѣтру		13	26	49	88
То-же Тупымъ концемъ къ вѣтру.	19	40	81	164	

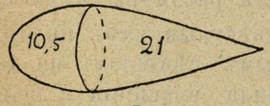
140. Сравнивая вторую гориз. строку таблицы съ давленіемъ на полный эллипсоидъ (133), видимъ, что корма у эллипсоида, примѣрно, на $1/3$ лишь уменьшаетъ сопротивленіе

141. Разсматривая третью строку (139) и сравнивая ее съ давленіемъ на плоскость видимъ, что давленіе на послѣднюю меньше и потому корма у плоскости *увеличиваетъ* сопротивленіе.

142. Сравнивая давленія третьей строки съ давленіемъ на полное тѣло (126), видимъ, что у него *кормовая частъ раза въ два уменьшаетъ сопротивленіе*

143. Наконецъ, сравненіе давленій 4-ой строки съ давленіемъ на плоскость, равную площади средняго поперечнаго сѣченія полнаго тѣла, указываетъ намъ, что кормовой придатокъ *такого удлиненія уменьшаетъ* сопротивленіе плоскости. Изъ всего этого видно, что пренебрегать значеніемъ кормы отнюдь не слѣдуетъ.

143 Привожу тутъ еще опыты не только интересные сами по себѣ, но и указывающіе еще нѣсколько разъ па значеніе задней части тѣла. Я взялъ половину эллипсоида вращенія (черт. 3 и 4) и половину тѣла (въ 42 сант. длины) полученнаго отъ вращенія отрѣзка круга: короче — половинки, взятыя для предыдущаго опыта (139) Эти половины я соединилъ плоскими (и равными) краями такъ, что получилось тѣло, нѣсколько напоминающее (только менѣе продолговатое: вдвое) аэростатъ Кребса и Ренара (черт. 5).



Фиг. 5.

144 Вотъ числа давленій на это тѣло, обращенное то эллиптическимъ концемъ къ вѣтру, то острымъ.

	1/2	1	2	4	8	16
Тупымъ концемъ къ вѣтру.	3,5	7	14	25	45	85
Острымъ.	6	12	24	46	84	134.

145. Прежде всего бросается въ глаза, что давленіе при острой кормѣ почти вдвое менѣе, чѣмъ при тупой.

146. Сравнивая затѣмъ числа 2-ой строки съ давленіемъ на половину эллипсоида (139, 2-я строка), видимъ, что при малой скорости кормовой придатокъ вдвое уменьшаетъ сопротивленіе; но чѣмъ больше скорость, тѣмъ больше его полезное значеніе.

147. Длина тѣла (143) = 32 сант.; сравнивая его съ тѣломъ той-же длины и продолговатости (смотр. табл. 126), находимъ, что давленіе на составное тѣло нѣсколько меньше, чѣмъ на простое (126) Однако, при скорости 3—4 метровъ, давленіе на болѣе симметричное тѣло (съ коническими концами) уже становится менѣе значительнымъ.

148. Выводъ тотъ, что аэростатъ выгоднѣе строить симметрично, съ наибольшимъ поперечнымъ сѣченіемъ *въ серединѣ*, (эти явленія легко объясняются сжатіемъ воздуха и возвращеніемъ энергіи; см. 128).

Давленіе на полуцилиндръ, полу-шаръ коническую поверхность и на аэростатъ Шварца.

149. *Давленіе на послѣдующія поверхности* почти строго пропорціонально грузу (иля квадрату скорости) и потому я буду давать давленія *при одной скорости*, *вызываемой грузами въ 2 фунта.*

150. Давленіе на полуцилиндрическую поверхность, ось которой нормальна къ потоку, а выпуклость обращена къ вѣтру, оказалось равнымъ 23. Давленіе на проекцію равно 34 (площадь проекціи = $3{,}2 \times 8$). Слѣдовательно, коэффиц сопротивленія равенъ 0,67.

151. При обратномъ положеніи цилиндра, т. е. при давленіи вѣтра внутрь его, сопротивленіе = 43, т. е. чуть не вдвое больше. Давленіе на проекцію = 34 Значитъ оно меньше, чѣмъ на самый полуцилиндръ; коэффиц. сопр. = 1,26. Давленіе на полный цилиндръ съ раскрытыми основаніями (сквозная труба), также какъ и на такой-же полуцилиндръ нѣсколько болѣе, чѣмъ на цилиндръ, закрытый съ боковъ.

152. Давленіе на острую половину открытаго конуса выражается 44, а закрытаго кругомъ (основаніемъ) 51. Высота этого конуса, какъ и испытаннаго уже двойного (133), равна 10 сант.; также и площадь поперечнаго сѣченія равна 80 кв. сант. Сравнивая это сопротивленіе съ сопротивленіемъ двойного конуса (табл. 133), видимъ, что послѣднее, не смотря на кормовой придатокъ, даже нѣсколько больше сопротив-

ленія открытой конической поверхности. Такъ что корма у двойного конуса, въ отношеніи сопротивленія, приноситъ одинъ вредъ.

153. Та-же коническая поверхность, но обращенная отверстіемъ къ вѣтру даетъ при открытомъ основаніи 128, а при закрытомъ 108. Давленіе на плоскость проекціи равно 104, т. е даже немного менѣе

154. Давленіе на низкіе открытые конусы выражается слѣдующею таблицею, гдѣ первый рядъ означаетъ высоту конусовъ въ миллиметрамъ; діаметръ основанія каждого конуса былъ немного болѣе 7 сант.

Высота =	0	11	16	20	23	26	31	35 м.м.
Отверстіемъ къ вѣтру.	60	63	64	65	66	67	68	68
Угломъ къ вѣтру.	60	50	48	45	43	42	39	37

155. Я интересовался знать, будетъ-ли давленіе на конусы, пропорціонально числу ихъ, если расположить ихъ вдоль потока. Для этого я сдѣлалъ 5 равныхъ (*двойныхъ*) конусовъ и располагалъ ихъ въ разномъ числѣ на проволокѣ, такъ что вершины ихъ соприкасались; получились слѣдующіе результаты:

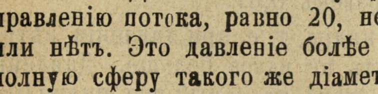
Число конусовъ	1	2	3	4	5
Давленіе	4	8,5	11,5	16	19

Значитъ давленіе почти пропорціонально числу конусовъ. Отсюда видно, что караванъ аэростатовъ едва ли будетъ подвигаться съ большею скоростью, чѣмъ каждый аэростатъ отдѣльно. Грузъ былъ равенъ 4 фунт. Длина двойного конуса = 14 сант.; діаметръ основанія (средняго сѣченія) = $3^1/_3$ сант.

156. Давленіе на полусферическую поверхность, расположенную выпуклостью къ вѣтру, равнялось 31; когда-же отверстіе было закрыто кругомъ, то 32. При отверстіи, обращенномъ къ вѣтру, получаемъ, въ случаѣ открытой чаши,—99, а закрытой—94; т. е. давленіе увеличивается въ 3,2 раза, когда полусфера поворачивается отверстіемъ къ вѣтру. Сравнивая наименьшее давленіе съ давленіемъ на полную сферу такого-же діаметра (124), видимъ, что давленіе на открытую полу-сферу меньше въ 1,13 раза.

157. Давленіе на полу-сферу, отверстіе которой параллельно направленію потока, равно 20, независимо оттого—закрыта-ли полу-сфера, или нѣтъ. Это давленіе болѣе половины давленія ($35:2 = 17^1/_2$) на полную сферу такого же діаметра (грузъ 2 ф.)

168. Аллюминіевый аэростатъ Эхварца (черт. 6 и 7) (опытъ близъ Берлина, въ 1897 году), какъ извѣстно, въ носовой части имѣлъ форму полушара, а въ кормовой—круглаго конуса, длиною (или высотою) въ 10 метровъ. Корму съ носомъ соединялъ цилиндръ діаметромъ въ 12 метр. и длиною въ 24 м. Чтобы испытать сопротивленіе такого тѣла, я сдѣлалъ подобное ему, съ площадью круглаго поперечнаго сѣченія въ 63 кв. сант.



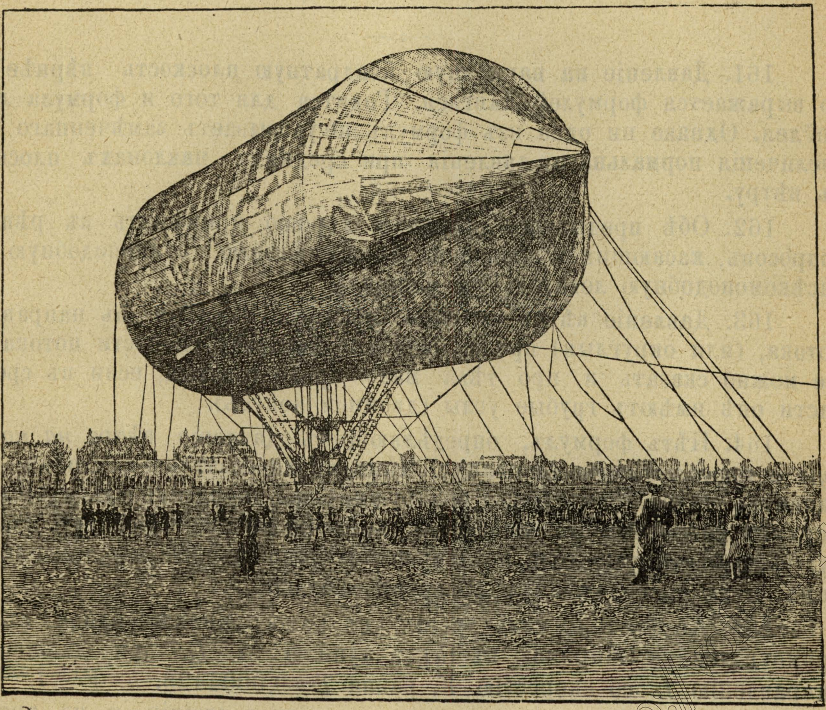
Фиг. 6.

159. Вотъ результаты опытовъ:

	2 фун	4	8
Сферой къ вѣтру.	26	50	98
Конусомъ къ вѣтру	28	54	107

Слѣдовательно давленіе почти пропорціонально квадрату скорости.

Далѣе, видимъ, что сопротивленіе сферой впередъ немного менѣе, чѣмъ конусомъ впередъ. Давленіе на проекцію равно 328 (при грузѣ въ 8 ф.) значитъ коеффиц. сопротивленія, при самыхъ благопріятныхъ условіяхъ, = 98:328 = 0,30; утилизація-же формы = 3,34, т. е. она немного болѣе полезности шаровой поверхности и много уступаетъ полезности продолговатыхъ тѣлъ простѣйшей формы (смотрите табл. 130).



160. Укажу въ заключеніе на опытъ съ поверхностью, полученною отъ соединенія сферы и касательнаго къ нему конуса.

Образующая конуса равна 12 сантим. Площадь большого круга шара равна 63 кв. сан.; діаметръ—около 8,9 с. Испытаніе было при грузахъ въ 2, 4 и 8 фунтовъ; высота конуса была параллельна направленію потока. Результаты слѣдующіе:

	2	4	8 ф.
Сфера обращена къ вѣтру. . . .	28	51	90
Конусъ разсѣкаетъ воздухъ	28	55	112 м.м.

Т. е., при скорости, большей 1-го метра, сопротивленіе меньше, при движеніи сферой впередъ. Наибольшая утилизація формы $= 3{,}65$; наименьшая $= 2{,}93$. Наименьшій коэффиціентъ сопротивленія $= 0{,}27$, тогда какъ для шара онъ равенъ $0{,}43$. Значитъ конусъ кормовой части значительно уменьшаетъ сопротивленіе шара.

ВЫВОДЫ.

161. Давленіе на наклонную квадратную плоскость вѣрнѣе всего выражается формулой Ланглея. Годится для того и формула лорда Рейлея. Однако ни одна изъ формулъ не указываетъ замѣченнаго нами увеличенія нормальнаго давленія при среднихъ наклонахъ плоскости къ вѣтру.

162. Обѣ предыдущія формулы хорошо примѣнять къ рѣшенію вопросовъ, касающихся аэроплана (подразумѣваю птицеподобную или насѣкомоподобную летательную машину).

163. Давленіе вѣтра на тѣла не продолговатыя въ направленіи потока, (или округлыя) пропорціонально квадрату скорости потока. Тоже можно сказать и про тѣла мало продолговатыя, если въ средней части онѣ имѣютъ грубые углы (двойной конусъ).

164. Нѣтъ формулъ, опредѣляющихъ давленіе вѣтра *на наклонную и продолговатую* пластинку. Чѣмъ продолговатѣе и наклоннѣе пластинка къ вѣтру, тѣмъ болѣе обнаруживается непригодность извѣстныхъ формулъ сопротивленія плоскости: давленіе на продолговатую пластинку, расположенную вдоль потока, значительно меньше вычисляемаго по нимъ, а на расположенную поперекъ—больше.

165. Абсолютная сила тренія, въ килограммахъ, одной стороны прямоугольника, шириною въ (h), а длиною въ L, при движеніи по направленію L, со скоростію V, равна $T = 0{,}0004423.\ h.\ V^{1,6}.L^{0,63}$ т. е. она не пропорціональна квадрату скорости движенія и не пропорц. длинѣ прямоугольника L

166. Абсолютное треніе, приходящееся на единицу поверхности прямоугольника, равно:

$$T_1 = 0{,}0004423.\ \frac{V^{1,6}}{L^{0,37}}.$$

http://lib.ru

167. Коэффиціентъ тренія равенъ:

$$\frac{0{,}00623}{V^{0,4}.\,L^{0,37}},\ \text{т. е.}$$

онъ уменьшается почти въ одинаковой степени (0,4) какъ отъ увеличенія скорости, такъ и отъ увеличенія длины поверхности по направленію движенія (L и V выражены въ метрахъ).

168. Чтобы законы тренія, принятые мною въ недавно напечатанной мною статьѣ, („В. О. Физ.", № 259), вполнѣ оправдались, необходимо чтобы длина трущейся поверхности, въ направленіи движенія, возрастала по условію: $L = 0{,}0646.V^{1,62}$, т. е. возрастала съ увеличеніемъ скорости движенія. Въ примѣненіи къ размѣрамъ нашихъ аэростатовъ, величина тренія несравненно меньше, чѣмъ мы принимали въ упомянутой статьѣ. Такъ для аэростата въ 200 метровъ длины, движущагося со скоростью 12 метр. въ секунду, она оказывается раза въ 4 меньше, чѣмъ мы принимали ранѣе. („Желѣзный управляемый аэростатъ", Ціолковскій").

169. Чѣмъ огромнѣе поверхность, чѣмъ менѣе она продолговата и чѣмъ быстрѣе ея движеніе, тѣмъ болѣе мы въ правѣ пренебрегать величиною тренія, въ сравненіи съ величиною сопротивленія отъ инерціи. Однако, для управляемыхъ аэростатовъ, величиною тренія пренебрегать никакъ нельзя.

170. Ни одну изъ формулъ сопротивленія плоскости также невозможно примѣнять и къ аналитическому опредѣленію сопротивленія кривыхъ или многогранныхъ поверхностей, потому что результаты такихъ вычисленій грубо противорѣчатъ опыту. Согласіе съ нимъ можетъ быть только случайное. Такъ невозможная формула Ньютона даетъ результаты, болѣе близкіе къ истинѣ, чѣмъ вѣрная, сама по себѣ, формула Ланглея.

171. *Каждому желающему я готовъ охотно повторить любой изъ опытовъ, описанныхъ въ этой статьѣ.*

172. Приборъ, устроенный мною, такъ дёшевъ, удобенъ и простъ, такъ быстро рѣшаетъ неразрѣшимые теоретически вопросы, что долженъ считаться необходимою принадлежностію каждаго университета или физическаго кабинета.

Множество неописанныхъ мною тутъ опытовъ производятся съ помощію его въ 2—3 минуты.

173. Давленіе на плавныя продолговатыя тѣла (кораблеподобныя) возрастаетъ не такъ быстро, какъ квадратъ скорости.

174. Сопротивленіе воздуха слагается изъ двухъ силъ: тренія и инерціи воздуха. Вычитая сопротивленіе 1-го рода, увидимъ, что сопротивленіе отъ инерціи также возрастаетъ менѣе быстро, чѣмъ квадратъ скорости, что легко видѣть на тѣлахъ малопродолговатыхъ и что объясняется упругостью воздуха, который, быстро сжимаясь по бокамъ носовою частію тѣла, также быстро расширяется, давя на заднюю часть тѣла и подгоняя его тѣмъ (или возвращая *часть* затраченной тѣломъ работы).

175. Для малыхъ скоростей и малопродолговатыхъ поверхностей

publ.lib.ru / tsiolkovsky watermark

или для большихъ скоростей и сильно продолговатыхъ тѣлъ, упругостью воздуха можно пренебречь, и тогда сопротивленіе тѣла *отъ инерціи* будетъ обратно пропорціонально квадрату продолговатости его (продолговатость есть отношеніе длины тѣла къ ширинѣ).

176. Если скорость тѣла будетъ возрастать пропорціонально его продолговатости, то боковое сжиманіе упругой воздушной среды будетъ приблизительно одинаково и потому, приблизительно, будутъ соблюдаться два закона относительно сопротивленія отъ инерціи: а) сопротивленіе отъ инерціи будетъ пропорціонально квадрату скорости и в) обратно пропорціонально квадрату продолговатости.

177. Кормовой (или задній) придатокъ тѣла иногда увеличиваетъ его сопротивленіе, иногда не измѣняетъ, но большою частію уменьшаетъ.

Для кораблеподобныхъ тѣлъ или для управляемыхъ аэростатовъ значеніе кормы (или формы задняго придатка) громадно.

178. Закончу выраженіемъ сожалѣнія по поводу того, что мои опыты не настолько точны, не настолько обширны и многочисленны, чтобы служить для вывода эмпирическихъ формулъ сопротивленія продолговатыхъ тѣлъ. На ограниченное же значеніе приводимыхъ тутъ формулъ тренія я уже указывалъ.

А какъ важно возможно точно формулировать законы сопротивленія и тренія! Какое громадное примѣненіе они имѣютъ къ теоріи аэростата и аэроплана! Да и есть ли области техники и науки, въ которыхъ законы сопротивленія упругой среды не имѣли бы значенія. Такъ пожелаемъ же горячо опредѣленія этихъ законовъ и поспособствуемъ, насколько отъ насъ зависитъ, производству необходимыхъ для того опытовъ.

К. Ціалковскій.

Очеркъ геометрической системы Лобачесвкаго.

В. Кагана

(*Продолженіе* *).

XI. Значеніе Лобачевскаго.

Послѣ того, какъ мы достаточно подробно изложили геометрическое ученіе Лобачевскаго, намъ предстоитъ наиболѣе трудная задача — оцѣнка той роли, которую онъ сыгралъ въ исторіи математики и въ исторіи науки вообще.

Задача эта представляется тѣмъ болѣе трудной, что различные авторы далеко не всегда сходятся въ своихъ взглядахъ на этотъ во-

*) См. „Вѣстникъ Оп Физ." № 270.

http://vofem.ru

просъ. Мы не можемъ поэтому изложить одной установившейся точки зрѣнія; мы должны указать различные взгляды и подвергнуть ихъ обсужденію.

Главная цѣль, которую Лобачевскій себѣ ставилъ, заключалась въ томъ, чтобы заполнить пробѣлъ въ теоріи параллельныхъ линій, установить независимость евклидова постулата и такимъ путемъ обосновать строго научное изложеніе этой главы элементарной геометріи. Согласно установившейся классификаціи, эти вопросы, касающіеся взаимнаго отношенія основныхъ началъ математики, принято относить къ особой дисциплинѣ, называемой философіей математики.

По мнѣнію многихъ авторовъ, изслѣдованія Лобачевскаго пролили яркій свѣтъ на вопросъ объ источникѣ нашихъ знаній вообще и нашихъ свѣдѣній въ области геометріи въ частности; эти авторы приписываютъ поэтому Лобачевскому большое значеніе въ области теоріи познанія

Наконецъ геометрическая система, созданная Лобачевскимъ, оказалась полезной при рѣшеніи нѣкоторыхъ чисто аналитическихъ вопросовъ, напримѣръ при вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ. Лобачевскій оставилъ поэтому извѣстный слѣдъ и въ области чистаго математическаго анализа.

Труды Лобачевскаго отразились такимъ образомъ на трехъ болѣе или менѣе связанныхъ отрасляхъ знанія. Смотря по тому, въ чемъ тотъ или другой авторъ усматриваетъ главную задачу математики и науки вообще, онъ выдвигаетъ на первый планъ тѣ или другіе результаты научной дѣятельности Лобачевскаго; въ этомъ есть субъективизмъ, отъ котораго врядъ-ли возможно отрѣшиться при обсужденіи чьей бы то ни было дѣятельности, а въ особенности при оцѣнкѣ научнаго значенія геометра, труды котораго носятъ совершенно оригинальный характеръ и не поддаются измѣренію установившейся мѣркой.

Мы оставимъ, однако, въ сторонѣ вопросъ о роли Лобачевскаго въ теоріи познанія—и сдѣлаемъ это не потому, что считаемъ его значеніе въ этой дисциплинѣ маловажнымъ, — а по совершенно иной причинѣ.

Въ настоящее время трудно указать новое сочиненіе по философіи или теоріи познанія, которое игнорировало бы ученіе Лобачевскаго; но лишь весьма немногія изъ нихъ трактуютъ объ этомъ вопросѣ съ полнымъ знаніемъ дѣла; въ большинствѣ случаевъ въ этихъ сочиненіяхъ рѣзко отражается отсутствіе у авторовъ строго математической подготовки и обусловленное этимъ незнакомство съ первоисточниками. Мы думаемъ поэтому, что математику будетъ разрѣшено, съ своей стороны, оставить скользкую почву обще-философскихъ разсужденій и ограничиться цикломъ строго-математическихъ вопросовъ.

Въ предыдущей главѣ мы подробно изложили тѣ принципы, на которыхъ основаны различныя приложенія геометріи Лобачевскаго къ вычисленію простыхъ и кратныхъ квадратуръ. Казалось бы, что оцѣнка этихъ пріемовъ должна слѣдовать за обсужденіями правильности самой геометрической системы Лобачевскаго, лежащей въ основаніи этихъ пріемовъ; такой точки зрѣнія могутъ въ особенности придерживаться тѣ математики, которые по тѣмъ или другимъ причинамъ не убѣждены въ логической правильности геометрической системы Лобачевскаго; но это не такъ,—по крайней мѣрѣ на этомъ нельзя настаивать.

Идея приложенія Воображаемой Геометріи къ вычисленію квадратуръ заключается, какъ мы видѣли, въ томъ, что подъинтегральный дифференціалъ разсматривается какъ элементъ длины, площади, объема или массы въ пространствѣ Лобачевскаго; это обстоятельство можетъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ служить указаніемъ на цѣлесообразное преобразованіе координатъ. Самое производство этого преобразованія представляетъ собой чисто аналитическій процессъ перехода отъ однихъ независимыхъ перемѣнныхъ къ другимъ, связаннымъ между собой извѣстными уравненіями; и это процессъ законный, независимо отъ того, какія соображенія привели насъ къ мысли произвести именно то, а не иное преобразованіе перемѣнныхъ. Аналитическія приложенія Воображаемой Геометріи не могутъ поэтому вызывать никакихъ сомнѣній относительно законности ихъ примѣненія. Съ другой стороны, такая чисто внѣшняя роль геометрической системы въ дѣлѣ приложенія сама по себѣ еще не умаляетъ значенія этой идеи; Лобачевскій совершенно справедливо замѣчаетъ, что безусловно такой же смыслъ имѣютъ приложенія къ анализу безконечно малыхъ обыкновенной геометріи всюду, гдѣ они имѣютъ мѣсто; и хотя геометрія въ своихъ приложеніяхъ къ анализу всегда играетъ только наводящую роль, она оказала ему немаловажныя услуги. Но въ такомъ чисто практическомъ вопросѣ, какъ вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ, о значеніи метода, можно судить исключительно по результатамъ. Лобачевскій въ различныхъ своихъ сочиненіяхъ, какъ уже было указано въ прошлой главѣ, удѣляетъ очень много мѣста и вниманія аналитическимъ приложеніямъ „Воображаемой Геометріи". Но, во первыхъ, онъ часто повторяется; въ различныхъ статьяхъ мы почти постоянно встрѣчаемъ однѣ и тѣ-же квадратуры, различнымъ образомъ обработанныя; въ общемъ мы находимъ у него около двухъ трехъ десятковъ квадратуръ, значенія которыхъ найдены имъ вполнѣ, и столько же квадратуръ, значенія которыхъ не найдены сполна, но которыя приведены къ квадратурамъ болѣе простымъ. Опредѣленные интегралы, которые разобраны у Лобачевскаго, нельзя, подобно Эйлеровымъ интеграламъ и тому подобнымъ, считать типами, къ которымъ приводятся многочисленныя квадратуры; хотя въ нѣкоторыхъ изъ нихъ фигурируютъ даже произвольныя функціи, онѣ все таки являются случайными квадратурами, болѣе или менѣе искусственно подобранными въ видахъ приложенія геометрическаго метода. Такимъ образомъ идея Лобачевскаго не представляетъ собой метода, который находитъ себѣ примѣненіе къ извѣстному классу квадратуръ, къ нѣкоторымъ опредѣленнымъ типамъ интеграловъ; — мы будемъ не далеки отъ истины, если скажемъ, что пріемы Лобачевскаго, въ смыслѣ примѣненія къ Анализу Воображаемой Геометріи, не привели къ рѣшенію вопросовъ, стоявшихъ на очереди, или, по крайней мѣрѣ, намѣченныхъ; будетъ гораздо правильнѣе сказать, что Лобачевскій *подобралъ* интегралы, раскрытіе которыхъ облегчается примѣненіемъ Воображаемой Геометріи.

Въ какой мѣрѣ можно поэтому считать цѣннымъ методъ Лобачевскаго, какъ пріемъ для разысканія значенія квадратуръ, это опять таки вопросъ, не лишенный субъективной окраски; можетъ быть онъ еще дастъ болѣе плодотворные результаты, въ особенности, если знакомство съ геометріей Лобачевскаго получитъ большое распространеніе. Но въ виду изложенныхъ соображеній можно съ увѣренностью высказать слѣдующее утвержденіе: въ настоящее время заслуга Лобачевскаго заключается не въ аналитическихъ приложеніяхъ построенной имъ геометрической системы—и не на нихъ покоится его слава.

Но зато въ философіи математики Лобачевскій неизгладимо запечатлѣлъ свое имя; здѣсь онъ не только проложилъ новые пути, но создалъ въ этой дисциплинѣ эпоху, и, если не самъ, то во всякомъ случаѣ своей школой сдѣлалъ изъ нея настоящую науку. Можно сказать, что благодаря ему и его школѣ многіе изъ относящихся сюда вопросовъ рѣшаются теперь съ тою же исчерпывающей полнотой, съ какой рѣшаются другіе вопросы анализа.

Какъ мы уже сказали выше, къ философіи математики относятъ всѣ вопросы, касающіеся опредѣленія основныхъ понятій въ анализѣ и геометріи, касающіеся взаимной связи между основными положеніями и, слѣдовательно, наиболѣе раціональнаго распредѣленія матеріала. Это чисто теоретическое стремленіе строго систематизировать науку, какъ мы уже имѣли случай говорить, еще въ древности пустило глубокіе корни. Со временъ Евклида вопросъ о геометрической системѣ, о числѣ аксіомъ и постулатовъ, о ихъ взаимоотношеніи никогда не переставалъ интересовать математиковъ. Въ анализѣ эти вопросы возникли гораздо позже, какъ и весь вообще анализъ имѣетъ гораздо болѣе позднее происхожденіе, нежели геометрія.

Оказалось, однако, что эти основные, на первый взглядъ—элементарные вопросы гораздо сложнѣе, чѣмъ это можно было думать, что съ ними труднѣе справиться, чѣмъ со многими сложными задачами калькуляціи и построенія. Оказалось также, что въ наукѣ чиселъ съ ними легче справиться, чѣмъ въ геометріи. Благодаря работамъ Грассмана, Шредера Дедекинда, Кантора, Вейерштрасса и другихъ, начала ариѳметики построены строго научно, указана и проведена основная нить, связывающая эти начала съ элементарными и высшими частями анализа. Здѣсь можно варіировать систему, можно замѣнить одно изложеніе другимъ, сдѣлать тѣ или другія упрощенія—но самый вопросъ рѣшенъ, и принципіальныхъ затрудненій здѣсь нѣтъ.

Но въ геометріи вопросы эти и въ настоящее время еще далеко не рѣшены. Да оно и естественно. Алгебра всегда развивалась абстрактно; если сюда и входилъ элементъ реальности, наглядности, то здѣсь оказалось легче отрѣшиться отъ него и перейти къ чисто формальной системѣ условныхъ символовъ, нежели въ геометріи. Въ геометріи каждый шагъ, каждое положеніе было неразрывно связано съ реальными образами, а многимъ и до сихъ поръ кажется, что отказаться отъ этихъ образовъ значитъ отказаться отъ геометріи. Было предложено неисчислимое количество системъ элементарной геометріи, въ большинствѣ случаевъ мало отличающихся другъ отъ друга; каждый авторъ, переставивъ двѣ три аксіомы, замѣнивъ одну систему опредѣленій другой, ей равносильной, думалъ, что онъ достигъ цѣли, рѣшилъ вопросъ о системѣ геометріи. Число такихъ системъ безгранично возрастало, да и въ настоящее время возрастаетъ тѣмъ быстрѣе, что ихъ можно стряпать, не обладая даже солиднымъ математическимъ образованіемъ.

Между тѣмъ здѣсь представлялись принципіальныя затрудненія, безъ разрѣшенія которыхъ задача не могла ни на волосъ подвинуться впередъ.

Самая задача, какъ вамъ уже извѣстно, заключается въ слѣдующемъ: нужно установить рядъ посылокъ (опредѣленій, аксіомъ), которыя были бы необходимы и достаточны для построенія системы; онѣ должны быть необходимы; это значитъ — ни одна посылка не должна быть слѣдствіемъ остальныхъ; онѣ должны быть достаточны; это значитъ — вся теорія должна быть строго логическимъ слѣдствіемъ установленныхъ основныхъ положеній При этомъ дѣло въ настоящее время еще вовсе не въ томъ, чтобы найти систему, которая была бы лучше, проще другихъ, — а въ томъ, чтобы теоретически обосновать правильность системы.

Трудность заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что мы остановились на опредѣленной системѣ. Какъ доказать, что принятыя въ ней положенія дѣйствительно необходимы? Гдѣ гарантія въ томъ, что то или другое изъ этихъ положеній не представляетъ собой слѣдствія остальныхъ посылокъ. Или еще иначе: допустимъ, что мы дошли въ нашей системѣ до нѣкотораго новаго положенія, доказать котораго мы не можемъ; какъ рѣшить вопросъ, представляетъ ли оно собой слѣдствіе остальныхъ посылокъ, или нѣтъ? Какъ убѣдиться въ томъ, что оно имъ не противорѣчитъ? Далѣе какъ доказать, что принятая система достаточна? Мы уже говорили во введеніи, что лучшія системы синтетической геометріи, существующія въ настоящее время, грѣшатъ въ смыслѣ строго логическаго обоснованія выводовъ, — грѣшатъ въ томъ отношеніи, что заключенія часто опираются на реальныя представленія, а не на формальныя посылки. Допустимъ, новый геометръ будетъ глубже, осторожнѣе; но дѣло не въ томъ; нужно найти извѣстныя гарантіи въ томъ, что мы заключаемъ изъ посылокъ, а не прибѣгаемъ незамѣтно для насъ самихъ къ интуиціи.

Вотъ трудности, которыя необходимо устранить для построенія удовлетворительной системы геометріи.

Главная заслуга Лобачевскаго, на нашъ взглядъ, заключается въ томъ, что онъ указалъ путь къ устраненію — если не всѣхъ этихъ затрудненій, то во всякомъ случаѣ одного изъ наиболѣе существенныхъ, — къ рѣшенію вопроса о независимости посылокъ. Насколько онъ при этомъ самъ достигъ цѣли въ той частной задачѣ, которую онъ себѣ поставилъ, — вопросъ другой; мы ниже обсудимъ его подробно.

Пусть X означаетъ совокупность извѣстныхъ посылокъ, послужившихъ основаніемъ научной системѣ. Допустимъ, что отсутствіе въ этой комбинаціи логическихъ противорѣчій представляется намъ — по тѣмъ или инымъ соображеніямъ — несомнѣннымъ.

Допустимъ далѣе, что y и z суть два новыхъ положенія такого рода, что отрицаніе обоихъ, при наличности системы X, въ силу законовъ логики представляется невозможнымъ.

Если мы присоединимъ къ системѣ X положеніе y, то совокупность (Xy) можетъ оказаться противорѣчивой въ томъ смыслѣ, что выводы, проистекающіе изъ этой комбинаціи посылокъ, находятся въ прямомъ противорѣчіи между собой; такой результатъ приводитъ насъ къ заключенію, что при наличности системы X положеніе y не можетъ быть допустимо, а потому должно имѣть мѣсто положеніе z. Наоборотъ, если мы къ системѣ X присоединимъ положеніе z и окажется, что комбинація (Xz) приводитъ къ противорѣчію, то этимъ отрицается положеніе z и устанавливается положеніе y. Обѣ комбинаціи (Xy) и (Xz) не могутъ вести къ противорѣчію, ибо это привело бы къ отрицанію обоихъ положеній y и z, что противно условію. *)

Этотъ логическій пріемъ издавна фигурировалъ въ числѣ методовъ геометрическаго изслѣдованія и извѣстенъ подъ названіемъ доказательства отъ противнаго.

Но можетъ имѣть мѣсто еще одинъ случай; можетъ оказаться, что ни одна изъ системъ (Xy) и (Xz) несомнѣнно не заключаетъ внутренняго противорѣчія, а напротивъ того, обѣ ведутъ къ стройнымъ логически правильнымъ доктринамъ. *Въ этомъ случаѣ положенія y и z не зависятъ отъ системы X; ни одно изъ нихъ не представляетъ собой логическаго слѣдствія системы X, а потому, на основаніи этой системы, и доказано быть не можетъ.* Въ этомъ заключается основная идея Лобачевскаго.

Намъ не разъ приходилось слышать, что Лобачевскій не создалъ новаго метода, что онъ пользовался старымъ пріемомъ—доказательствомъ отъ противнаго. Мы старались строго формулировать сущность стараго пріема доказательства отъ противнаго и основную идею Лобачевскаго. До Лобачевскаго никто не пользовался доказательствомъ отъ противнаго въ томъ смыслѣ, въ какомъ имъ воспользовался Лобачевскій До Лобачевскаго пріемъ служилъ всегда для приведенія къ абсурду; Лобачевскій распространилъ его на тотъ случай, когда противное допущеніе не приводитъ къ абсурду. До Лобачевскаго пріемъ всегда служилъ отрицательной цѣли. Лобачевскій показалъ, что онъ можетъ быть съ пользой для дѣла примѣненъ и для положительной цѣли.

Отождествить эти двѣ точки зрѣнія врядъ ли возможно. Какъ ни трудно установить, можетъ ли данный логическій пріемъ считаться существенно новымъ методомъ изслѣдованія —или нѣтъ,—въ настоящемъ случаѣ, послѣ тщательнаго изученія вопроса, врядъ ли возможно придти къ различнымъ выводамъ. Отъ себя позволимъ себѣ еще прибавить, что въ томъ, какъ эта идея Лобачевскимъ формулирована и проведена, мы

---

*) Примѣръ. За систему X принимаемъ весь тотъ геометрическій матеріалъ, который предшествуетъ теоремѣ о равенствѣ прямыхъ угловъ; за y принимается положеніе: „всѣ прямые углы равны“, за z принимается положеніе: „прямые углы могутъ быть неравны“. Эти положенія удовлетворяютъ условію въ томъ смыслѣ, что отрицаніе обоихъ невозможно. Мы доказываемъ далѣе, что комбинація (Xz) приводитъ къ противорѣчію и тѣмъ устанавливаемъ положеніе y.

усматриваемъ одинъ изъ наиболѣе оригинальныхъ, наиболѣе смѣлыхъ шаговъ въ исторіи человѣческой мысли, — не смотря даже на тѣ пробѣлы, о которыхъ намъ еще придется много говорить.

Обратимся теперь къ той частной задачѣ, которая привела Лобачевскаго къ этимъ общимъ соображеніямъ.

Будемъ разумѣть подъ X совокупность тѣхъ посылокъ, которыя опредѣляютъ такъ называемую абсолютную часть геометріи, т. е. ту часть, которая не зависитъ отъ постулата Евклида. Подъ y будемъ разумѣть этотъ постулатъ или одно изъ равносильныхъ ему положеній. Для большей опредѣленности фиксируемъ это соглашеніе. Подъ y будемъ разумѣть положеніе: „черезъ данную точку на плоскости можно на ней провести только одну прямую, не встрѣчающую данной прямой, расположенной въ той-же плоскости.“ Подъ z будемъ разумѣть утвержденіе: „черезъ данную точку на плоскости можно на ней провести нѣсколько прямыхъ, не встрѣчающихъ данной прямой, расположенной въ той-же плоскости“ (См. начало IV главы). Совокупность (Xy) составляетъ основаніе евклидовой геометріи. Лобачевскій положилъ въ основаніе своихъ изслѣдованій совокупность (Xz) и построилъ на ней геометрическую систему, изложенію которой были посвящены предыдущія главы.

Мы глубоко убѣждены, что всякій математикъ, который вчитается въ эту геометрію, признаетъ ея силу даже въ томъ случаѣ, если онъ приступитъ къ чтенію съ глубокимъ предубѣжденіемъ. Чѣмъ больше ее изучаешь, чѣмъ больше оперируешь въ области этой геометріи, тѣмъ больше осваиваешься съ ней, тѣмъ глубже чувствуешь, что это не вздорная выдумка, а прочная система, оковывающая своей безупречной послѣдовательностью. Но если таково обаяніе, производимое геометріей Лобачевскаго на посторонняго читателя, то какъ глубоко долженъ былъ быть проникнутъ вѣрой въ свою систему самъ творецъ ея. И все же это убѣжденіе ни для кого не обязательно.

Чтобы дѣйствительно установить независимость евклидова постулата, Лобачевскій долженъ былъ *доказать* отсутствіе противорѣчія, какъ въ системѣ (Xy) такъ и въ системѣ (Xz), т. е. какъ въ евклидовой, такъ и въ его геометріи.

Первую часть вопроса мы оставляемъ въ сторонѣ; мы къ ней еще вернемся. Второй же частью задачи, т. е доказательствомъ логической правильности созданной имъ геометрической системы, Лобачевскій занимался всю жизнь; онъ подходилъ къ ней съ различныхъ сторонъ, съ различныхъ точекъ зрѣнія. Посмотримъ-же, въ чемъ заключается его аргументація

Статья „О началахъ геометріи“ оканчивается слѣдующимъ заключеніемъ:

„Послѣ того, какъ мы нашли уравненія, которыя представляютъ зависимость угловъ и боковъ треугольника; когда наконецъ дали мы общія выраженія для элементовъ линій, площадей и объема тѣлъ, все прочее въ Геометріи будетъ уже аналитикой, гдѣ исчисленія необходимо должны быть согласны между собой и ничего не въ состояніи открыть новаго, чего бы не заключалось въ тѣхъ первыхъ уравненіяхъ,

http://vofem.ru

откуда должны быть взяты всѣ отношенія геометрическихъ величинъ другъ къ другу. Итакъ, если надобно предполагать теперь, что какое нибудь противорѣчіе принудитъ въ послѣдствіи опровергнуть начала, принятыя нами въ этой новой Геометріи; то это противорѣчіе можетъ только заключаться въ самыхъ уравненіяхъ (17). *) Замѣтимъ однакожъ, что эти уравненія перемѣняются въ (уравненія) сферической Тригонометріи, какъ скоро вмѣсто боковъ a, b, c ставимъ $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но въ обыкновенной Геометріи и сферической Тригонометріи вездѣ входятъ одни содержанія **) линій; слѣдовательно, обыкновенная Геометрія, Тригонометрія и эта новая геометрія всегда будутъ согласны между собой."

Насколько глубоко продумана вся статья, настолько поспѣшно это заключеніе. Прежде всего нельзя считать обоснованнымъ первое утвержденіе, что всѣ выводы, слѣдующіе за уравненіями тригонометріи, составляютъ не болѣе, какъ аналитическій выводъ изъ этихъ уравненій. Конечно, дальнѣйшіе выводы могутъ опираться на эти уравненія; но въ разсужденія постоянно приводитъ элементъ геометрическій; аналитическіе пріемы опираются на геометрическія соображенія, и потому можно ожидать, что такая комбинація приведетъ къ противорѣчію, хотя бы его и не было въ тригонометрическихъ уравненіяхъ. По крайней мѣрѣ нѣтъ достаточнаго основанія утверждать противное. Чтобы, въ свою очередь, не дѣлать голословныхъ утвержденій, приведемъ факты. Выводъ формулы, выражающей площадь треугольника въ томъ видѣ, въ какомъ онъ приведенъ у Лобачевскаго, ни въ одномъ пунктѣ не опирается на тригонометрическія соображенія; напротивъ того, онъ производится совершенно независимо отъ нихъ. Можно-ли при такихъ условіяхъ сказать, что теорія площадей представляетъ собой *только развитіе* тѣхъ соображеній, которыя выражены въ основныхъ уравненіяхъ тригонометріи. Теорія объемовъ существенно опирается на теорію площадей и на тригонометрію,—но въ ея основаніи лежитъ еще одинъ принципъ, нигдѣ у Лобачевскаго не доказанный,—что объемъ безконечно малаго прямоугольнаго параллелопипеда выражается въ его геометріи такъ же, какъ и въ геометріи Евклида,—произведеніемъ трехъ его измѣреній.

Посмотримъ далѣе, насколько основательны тѣ соображенія, которыми Лобачевскій старается доказать, что основныя уравненія тригонометріи не заключаютъ внутренняго противорѣчія.

Если рѣчь идетъ о томъ, чтобы доказать, что эти уравненія не заключаютъ внутренняго противорѣчія съ точки зрѣнія аналитической, т. е. попросту, что эти уравненія совмѣстны,—то нужно-ли для этого прибѣгать къ комплекснымъ величинамъ? Для этого достаточно показать, что эти уравненія удовлетворяются дѣйствительными значеніями входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ, удовлетворяются безчисленнымъ множествомъ такихъ значеній, какъ это и показано Лобачевскимъ въ другой статьѣ. ***)

Здѣсь рѣчь идетъ однако не только объ этомъ; вопросъ идетъ

*) У насъ эти уравненія приведены подъ номерами XIII, XXV, XXVI, XXVII

**) Отношенія.

***) „Воображаемая Геометрія" стр. 77–79.

http://...ru

еще о томъ, способны-ли эти уравненія выражать соотношенія между сторонами и углами треугольника, нѣтъ-ли противорѣчія между ихъ аналитической формой и геометрическимъ ихъ значеніемъ. Это вопросъ сложный, — и то обстоятельство, что они могутъ быть получены изъ уравненій сферической тригонометріи при помощи извѣстнаго комплекснаго преобразованія, ничего не говоритъ въ пользу такого утвержденія.

Что касается того обстоятельства, что въ уравненія сферической тригонометріи входятъ только отношенія линій, то мы рѣшительно отказываемся понять, что Лобачевскій хотѣлъ этимъ сказать. Въ уравненія сферической тригонометріи, подъ знаками тригонометрическихъ функцій, дѣйствительно входятъ отношенія длинъ a, b, c къ радіусу шара R. Чтобы получить изъ нихъ уравненія плоской тригонометріи Лобачевскаго, нужно замѣнить *либо* величины a, b, c черезъ $\frac{a}{i}, \frac{b}{i}, \frac{c}{i}$, — *либо* R черезъ R$i$; если мнимый множитель исключается при такой подстановкѣ, то отнюдь не потому, что въ уравненія входятъ только отношенія; и вообще мы никакъ не можемъ себѣ уяснить, почему это обстоятельство обусловливаетъ „согласіе между обыкновенной Геометріей, Тригонометріей и новой Геометріей“.

Врядъ-ли возможно сомнѣваться въ томъ, что Лобачевскій чувствовалъ шаткость этихъ соображеній. Поэтому онъ и возвращается къ нимъ въ каждой статьѣ, и въ каждой статьѣ онъ ставитъ вопросъ нѣсколько иначе. Въ „Воображаемой Геометріи“ онъ хочетъ оставаться на чисто аналитической почвѣ. Здѣсь онъ слѣдуетъ такому пути:

Онъ опредѣляетъ аналитически функцію $\Pi(x)$ или x' независимаго перемѣннаго x уравненіемъ XX

$$\cot\frac{1}{2}x' = e^x$$

и вслѣдъ затѣмъ *a priori* пишетъ уравненія VII, X и IV:

$$\sin c' = \sin a' \sin b'$$

$$\sin c' = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$$

$$\cot a' = \cot c' \sin A.$$

въ качествѣ основныхъ для прямоугольнаго треугольника. Смыслъ такой постановки вопроса заключается въ слѣдующемъ: Лобачевскій желаетъ прежде всего подтвердить мысль, уже высказанную имъ въ статьѣ „О началахъ Геометріи“, — что геометрическая система вполнѣ опредѣляется уравненіями, связывающими стороны и углы треугольника. Полагая поэтому названныя уравненія въ основаніе системы, онъ желаетъ показать, что изъ нихъ дѣйствительно можетъ быть развита геометрическая система.

Изъ приведенныхъ уравненій прямоугольнаго треугольника онъ прежде всего выводитъ уравненія косоугольнаго треугольника [ур. XIII, XXV, XXVI и XXII]. Доказавъ затѣмъ, что эти уравненія не противорѣчатъ другъ другу, онъ ставитъ вопросъ, который, очевидно, нужно было поднять,—могутъ-ли они выражать зависимость между сторонами и углами треугольника. Здѣсь мы снова приведемъ его подлинныя слова.

„Теперь посмотримъ, удовлетворяютъ ли эти уравненія тѣмъ условіямъ, при которыхъ составленіе всякаго треугольника возможно. Такихъ условій, независимо отъ значенія суммы трехъ угловъ, находится только два: *составленіе треугольника всякой разъ возможно, когда даны или три стороны, изъ которыхъ сумма двухъ болѣе третьей, или двѣ стороны и уголъ между ними произвольные*". *)

За этимъ слѣдуетъ строгое доказательство того, что основныя уравненія удовлетворяютъ этимъ требованіямъ,—иными словами, что всегда, какія бы ни были даны значенія для двухъ сторонъ и угла между ними (меньше $2d$), уравненія даютъ дѣйствительныя значенія для третьей стороны и двухъ другихъ угловъ; точно такъ-же, какія бы ни были даны значенія трехъ сторонъ, если только сумма двухъ меньшихъ больше третьей, уравненія даютъ дѣйствительныя значенія для угловъ; при этомъ, какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ случаѣ сумма угловъ оказывается меньше $2d$.

„Въ этомъ предположеніи" (т. е. что сумма трехъ угловъ меньше $2d$) продолжаетъ Лобачевскій, „чтобы дополнить все Геометрическое ученіе, остается теперь указать только способъ, какимъ образомъ должны быть измѣряемы линіи, поверхности и объемъ тѣла".

„Способъ къ тому самъ собой уже представляется, когда замѣтимъ, что для весьма малыхъ сторонъ a, b, c въ треугольникѣ и когда можно довольствоваться въ приближеніи значеніями:

$$\sin a' = 1 - \frac{1}{2} a^2, \ \cos a' = a$$

подобнымъ образомъ и для b, c,—уравненія 13 **) сдѣлаются

$$\begin{aligned} b\sin A - a\sin B &= 0 \\ a^2 = b^2 + c^2 &- 2\,bc\cos A \\ \sin(A+B) - \frac{c}{a}\sin A &= 0 \\ \cos A + \cos(B+C) &= 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

уравненіями для прямолинейныхъ треугольниковъ въ употребительной Геометріи. Послѣ всего этого мы въ правѣ утверждать:

1. *Въ теоріи ничто не мѣшаетъ сумму угловъ прямолинейнаго треугольника принимать меньше двухъ прямыхъ.*

2. *Съ такимъ предположеніемъ уравненія (13) замѣняютъ уравненія (15) и не могутъ вести къ ложнымъ заключеніямъ.*

3. *Воображаемая Геометрія обнимаетъ употребительную Гео-*

*) Курсивъ подлинника.

**) Т. е. у насъ уравненія XIII, XXV, XXVI, XXVII.

http://vofem.ru

метрію, какъ частный случай, къ которому переходимъ, принимая линіи безконечно малыми: такъ что въ этомъ отношеніи употребительная Геометрія можетъ быть названа геометрія дифференціальная.

4. *Значенія для элементовъ линіи, поверхности и объема тѣлъ въ обѣихъ Геометріяхъ одинаковы.*

5. *Предположеніе, что сумма угловъ треугольника меньше двухъ прямыхъ, можетъ быть допущено только въ примѣненіи къ Аналитикѣ, потому что измѣренія въ природѣ не открываютъ намъ въ этой суммѣ ни малѣйшаго отклоненія отъ половины окружности.*"

Что-же можно сказать объ этомъ разсужденіи? Пунктъ пятый, касающійся реальной, а не формальной стороны дѣла, мы покамѣстъ оставимъ въ сторонѣ Вся остальная аргументація, которая приведена въ статьѣ „Воображаемая Геометрія" и которая нами сейчасъ изложена, вмѣстѣ съ выводомъ исчерпывается слѣдующей формулой:

Изъ того обстоятельства, что при тригонометрическихъ уравненіяхъ новой геометріи всегда возможно построеніе треугольника, когда произвольно даны двѣ стороны и уголъ, между ними заключенный,—или три стороны, изъ которыхъ сумма двухъ меньшихъ больше третьей,—и что уравненія эти при безконечно малыхъ значеніяхъ сторонъ совпадаютъ съ уравненіями евклидовой геометріи, — вытекаетъ, что новая геометрія не заключаетъ внутренняго противорѣчія.

Врядъ-ли кто нибудь найдетъ убѣдительными такіе доводы; врядъ-ли они убѣждали и самого Лобачевскаго; его вѣра въ логическую цѣльность созданной имъ геометріи покоится скорѣе на инстинктѣ ученаго и математика, имѣетъ источникомъ могучую силу истины, хотя бы еще не доказанной, даже еще не вполнѣ усвоенной.

А между тѣмъ эту слабую аргументацію мы находимъ и въ позднѣйшихъ сочиненіяхъ Лобачевскаго. Такъ въ „Пангеометріи", написанной подъ конецъ жизни, на стр. 548 — мы находимъ почти дословное повтореніе тѣхъ соображеній, которыя мы сейчасъ изложили.

Кромѣ тѣхъ формально аналитическихъ разсужденій, которыя нами подробно разобраны, у Лобачевскаго есть еще и другія. Новая геометрія развита имъ до тѣхъ-же предѣловъ, до которыхъ доведена Геометрія Евклида; почему-же у насъ не является вопросъ, нѣтъ-ли внутренняго противорѣчія въ его системѣ и почему мы подвергаемъ въ этомъ отношеніи сомнѣнію новую геометрію? Иначе говоря, геометрія, созданная Лобачевскимъ, развивается такъ же послѣдовательно, какъ и обыкновенная; гдѣ-же основаніе того довѣрія, которое достается въ удѣлъ одной системѣ и строгаго недовѣрія къ другой? Если нужно доказывать логическую достовѣрность геометріи воображаемой, почему не предъявляется такое же требованіе къ геометріи Евклида?

Лобачевскій слишкомъ хорошо знаетъ обычный отвѣтъ на этотъ вопросъ. „Геометрія Евклида отвѣчаетъ природѣ вещей, всѣ ея выводы оправдываются на каждомъ шагу, а Геометрія Воображаемая—съ точки зрѣнія реальной—противорѣчитъ всякому опыту."

Когда твердо усвоишь опредѣленную и притомъ новую точку зрѣнія, то часто не можешь даже повторить старой формулы, — до того она кажется безсодержательной; приведенная сейчасъ формулировка обычнаго взгляда представляется намъ настолько неправильно построенной, что мы долго не рѣшались нанести ее на бумагу.

И все таки въ ней концентрировалось сильное возраженіе противъ ученія Лобачевскаго; она служила наиболѣе устойчивымъ оплотомъ его противниковъ; за ней скрывался консерватизмъ, которому нельзя отказать въ уваженіи.

Въ исторіи науки, даже такой, какъ математика, новыя идеи рѣдко излагались въ первый разъ вполнѣ обоснованными. Прошло почти два столѣтія, пока создававшійся анализъ безконечно малыхъ вылился въ строго научную форму. Для насъ еще интереснѣе другой примѣръ: почти цѣлое столѣтіе прошло съ того времени, какъ комплексныя величины утвердились въ анализѣ, раньше, чѣмъ была строго доказана законность этого нововведенія; и великіе математики, работавшіе этимъ оружіемъ, руководились скорѣе чутьемъ, чѣмъ научнымъ убѣжденіемъ. При каждомъ появленіи новыхъ взглядовъ, новаго ученія вокругъ ихъ провозвѣстника всегда группируется небольшое число учениковъ, которые—либо подъ обаяніемъ ученаго, либо силою особаго чутья, характеризующаго истинное дарованіе,—проникаются новой идеей и становятся ея поборниками; и если эта идея здоровая, если въ ея основѣ лежитъ истина, то они разрушаютъ возраженія и прокладываютъ дорогу новому ученію; но на это нужно время; пока происходитъ борьба, за малочисленными учеными, сознательно работающими на пользу новой доктрины, идетъ толпа quasi приверженцевъ этого ученія,—достаточно легковѣрныхъ, чтобы не нуждаться въ строгой критикѣ, — достаточно неискреннихъ, чтобы проповѣдывать то, чего они не продумали,—или даже достаточно поверхностныхъ, чтобы не отличать того, что имъ неясно, отъ того, что они понимаютъ. Въ частности, трудно оцѣнить, сколько вреда принесли дѣлу Лобачевскаго такіе непрошенные сотрудники. Есть люди и третьяго типа. Обладая прочными убѣжденіями, не освоившись съ новыми взглядами, не будучи въ состояніи говорить то, чего они не понимаютъ, эти люди относятся къ новымъ взглядамъ нейтрально или даже отрицательно, пока имъ этихъ идей не выяснятъ, пока имъ не приведутъ убѣдительныхъ доказательствъ. Это консерватизмъ, который заслуживаетъ полнаго уваженія, если только онъ не апріоренъ, т. е. если отрицаніе не предшествуетъ ознакомленію съ новыми взглядами. Вполнѣ законны были тѣ возраженія, которыя дѣлались въ свое время ученію о безконечно малыхъ величинахъ, о мнимыхъ числахъ и т. д.; законно было и то недовѣріе, которымъ была встрѣчена геометрія Лобачевскаго, ибо онъ не выяснилъ ея истиннаго смысла.

Лобачевскій очень хорошо понималъ, насколько этотъ вопросъ серьезенъ. Единственный вѣрный путь, который можетъ устранить всѣ сомнѣнія, заключается, какъ мы увидимъ ниже, въ строгомъ отдѣленіи формальной системы отъ тѣхъ реальныхъ образовъ, къ которымъ она примѣняется, — и въ теоретическомъ доказательствѣ логической правильности формальной системы; въ такомъ доказательствѣ нуждается при томъ, какъ евклидова, такъ и неевклидова геометрія. Но для

Лобачевскаго это еще было невозможно; онъ понимаетъ разницу между „теоріей“ и „природой“, между формальной системой и соотношеніями реальныхъ объектовъ,—но понимаетъ ее не достаточно отчетливо — и въ эомъ заключается источникъ заблужденій, о которыхъ мы будемъ говорить.

Лобачевскій задается вопросомъ, не призрачно-ли то довѣріе, которое мы питаемъ къ геометріи Евклида въ томъ смыслѣ, что она „дѣйствительно существуетъ въ природѣ.“ По его мнѣнію, „только опытъ можетъ рѣшить, какая геометрія существуетъ въ дѣйствительности.“ Къ производству соотвѣтствующаго эксперимента, какъ мы уже говорили въ главѣ VI, его побуждаетъ, главнымъ образомъ, то обстоятельство, что новая геометрія приближается къ евклидовой при уменьшеніи линейныхъ размѣровъ фигуръ. Далѣе, если допустить, выражаясь опять таки словами Лобачевскаго, „что въ природѣ существуетъ не употребительная, а новая геометрія“, то a priori нельзя сказать, каковы должны быть линейные размѣры, скажемъ, треугольника для того, чтобы сумма его угловъ замѣтно (на данную величину) отличалась отъ $2d$. Эти размѣры должны быть ничтожны по сравненію съ длиной l, такъ называемымъ радіусомъ кривизны пространства. Но длина эта напередъ неизвѣстна, а потому можно сдѣлать предположеніе, что обыкновенно всѣ наши измѣренія производятся въ предѣлахъ, ничтожныхъ по сравненію съ величиной l,—чѣмъ и объясняется совпаденіе результатовъ измѣренія съ выводами геометріи. Впрочемъ, Лобачевскій дѣлаетъ только одну попытку экспериментальнаго рѣшенія вопроса. Онъ изъ наблюденій вычисляетъ сумму угловъ треугольника, вершинами котораго служатъ звѣзда Кейда, центръ и перигелій земной орбиты. Оказывается, что сумма эта меньше $2d$ на $0'',43$. Принимая во вниманіе несовершенство методовъ, какими въ то время опредѣлялся параллаксъ неподвижныхъ звѣздъ, Лобачевскій безусловно относитъ этотъ фактъ къ несовершенству нашихъ измѣреній. „Послѣ этого“, говоритъ онъ, *) „нельзя утверждать болѣе, что предположеніе, будто мѣра линій не зависитъ отъ угловъ — предположеніе, которое многіе хотѣли принимать за строгую истину, не требующую доказательства,— можетъ быть оказалось бы примѣтно ложнымъ еще прежде, нежели перейдемъ за предѣлы видимаго міра. Съ другой стороны, мы не въ состояніи постигать, какая бы связь могла существовать въ природѣ вещей и соединять въ ней величины столь разнородныя, каковы линіи и углы. Итакъ, очень вѣроятно, что евклидовы положенія одни только истинныя, хотя останутся навсегда недоказанными. Какъ бы то ни было, новая Геометрія, основаніе которой уже здѣсь положено, если и не существуетъ въ природѣ, тѣмъ не менѣе можетъ существовать въ нашемъ воображеніи и, оставаясь безъ употребленія для измѣренія на самомъ дѣлѣ, открываетъ новое обширное поле для взаимныхъ приложеній Геометріи и Анализа“. Ставъ однажды на эту точку зрѣнія, Лобачевскій ея болѣе не покидаетъ. Ни разу онъ не высказывается въ пользу предположенія, что неевклидова геометрія, быть можетъ, все-таки существуетъ въ природѣ; напротивъ онъ настаиваетъ на томъ,

*) „О началахъ геометріи“ стр. 20.

что „евклидовы положенія одни только истинныя, хотя и останутся навсегда недоказанными," — его же геометрія существуетъ только въ теоріи, и значеніе ея заключается въ томъ, что она доказываетъ независимость евклидова постулата и находитъ примѣненіе въ анализѣ.

И все таки читатель не можетъ не чувствовать сбивчивости всѣхъ этихъ разсужденій. Въ чемъ заключается та „истинность", которая присуща только евклидовой геометріи и отсутствіе которой не мѣшаетъ новой геометріи существовать въ теоріи, въ нашемъ воображеніи,—не мѣшаетъ ей находить примѣненіе въ анализѣ? Нужн сдѣлать осязательно очевиднымъ, что здѣсь нѣтъ противорѣчія, а такой осязательности не даетъ ни одно изъ разсужденій Лобачевскаго.

Всѣ эти разсужденія не могутъ не быть сбивчивыми уже потому, что самый вопросъ поставленъ неправильно и неправиленъ методъ, предложенный для его разрѣшенія.

Вопросъ поставленъ неправильно, потому что не выяснено, какое въ него вложено содержаніе: неясно, въ чемъ должна заключаться „истинность" одной или другой геометріи, что значитъ: та или другая геометрія „существуетъ въ дѣйствительности" и „отвѣчаетъ природѣ вещей."

Методъ неправиленъ, потому что опытъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ рѣшить, какая геометрія истинна или какая существуетъ въ природѣ. Опытъ можетъ только отвѣтить на слѣдующій вопросъ: *примѣняется-ли къ данной системѣ реальныхъ образовъ данная формальная система или нѣтъ?* И только. Быть можетъ и мы не достаточно ясно изложили свою мысль, но къ этимъ вопросамъ мы скоро вернемся. Теперь же обратимъ вниманіе еще на одно обстоятельство, указывающее, что Лобачевскій сознавалъ, насколько мало имъ доказана логическая достовѣрность его системы и законность ея примѣненій.

Мы уже говорили, что онъ удѣляетъ очень много мѣста примѣненію „Воображаемой Геометріи" къ вычисленію значеній опредѣленныхъ интеграловъ. Послѣ каждаго такого примѣненія онъ отыскиваетъ обыкновенно значеніе того же интеграла чисто аналитически и въ совпаденіи результатовъ видитъ доказательство правильности системы.

„Такъ что всѣ построенія ведутъ всегда къ согласнымъ заключеніямъ и доказываютъ вѣрность принятыхъ началъ въ Воображаемой Геометріи." *)

Одно изъ двухъ: либо правильность системы доказана,—тогда всѣ аналитическіе выводы, къ которымъ она приводитъ, *должны* быть справедливы; либо она не доказана,—тогда всѣ эти соображенія могутъ имѣть для насъ значеніе лишь въ томъ смыслѣ, что они укрѣпляютъ нашу вѣру въ правильность системы; но *доказать* они ничего не могутъ.

Мы резюмируемъ все, сказанное нами о значеніи Лобачевскаго. Значеніе Лобачевскаго заключается въ томъ, что онъ создалъ методъ для теоретическаго изученія вопросовъ о взаимномъ отношеніи основныхъ положеній Геометріи; онъ расширилъ область примѣненія метода дока-

*) „Примѣненіе Воображаемой Геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ". Стр. 202.

зательства отъ противнаго и далъ такимъ образомъ совершенно новый пріемъ математическаго изслѣдованія, который въ извѣстномъ циклѣ вопросовъ совершенно незамѣнимъ. Создавъ новую геометрическую систему, онъ вполнѣ подготовилъ почву для рѣшенія вопроса о значеніи постулата въ теоріи параллельныхъ линій и указалъ путь, по которому должны слѣдовать геометры, желающіе выработать строго обоснованную систему синтетической геометріи. Онъ не довелъ своего дѣла до конца и завѣщалъ его своимъ послѣдователямъ.

Велико-ли это значеніе? Значительно ли оно умаляется, какъ нѣкоторые это утверждаютъ, тѣмъ, что онъ не дошелъ до намѣченной цѣли? Это вопросы, въ рѣшеніи которыхъ слишкомъ большую роль играютъ субъективныя соображенія. Мы старались только объективно изложить, что Лобачевскимъ сдѣлано и что имъ не сдѣлано. Остальное каждый читатель рѣшитъ по своему.

Мы только прибавимъ нѣсколько словъ отъ себя. По поводу перваго вопроса мы позволяемъ себѣ высказать глубокое убѣжденіе, что въ настоящее время еще даже нельзя достаточно оцѣнить значеніе Лобачевскаго; его ученіе еще не достаточно усвоено, оно еще не сдѣлало своего дѣла — ему еще нельзя подводить итоговъ.

Что касается второго вопроса, то мы скажемъ слѣдующее. Въ письмѣ, адресованномъ Казанскому физико-математическому Обществу, англійскій математикъ Сильвестръ — очень удачно, на нашъ взглядъ, — называетъ Лобачевскаго Коперникомъ Геометріи; но развѣ Коперникъ *доказалъ* справедливость своей системы? И умаляетъ-ли это его заслугу? Возвратимся, однако, къ болѣе опредѣленнымъ вопросамъ и укажемъ нѣсколько основныхъ моментовъ дальнѣйшей исторіи метода, созданнаго Лобачевскимъ.

В. Каганъ.

ПРОТОКОЛЪ

засѣданія Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 6-го ноября 1898 года.

Предсѣдатель: *К. В. Май.* Присутствовали члены Общества: *И. М. Занчевскій, В. Ѳ. Каганъ, И. В. Слешинскій, И. М. Луценко, В. В. Преображенскій, И. Я. Точидловскій и С. О. Шатуновскій.*

Предметы занятій:

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Выслушано сообщеніе Е. Л. Буницкаго: „Къ теоріи сравненій по сложному модулю“. Замѣчанія по поводу этого сообщенія сдѣланы были В. Ѳ. Каганомъ и И. В. Слешинскимъ.

3. И. В. Слешинскій сдѣлалъ сообщеніе изъ области элементарной математики: „О равенствахъ“.

4. Д-ръ И. М. Луценко демонстрировалъ въ помѣщеніи Одесскаго Ганнемановскаго Общества приборы для полученія токовъ большой частоты.

http://vofem.ru

ЗАДАЧИ.

№ 553. Показать, что число, состоящее изъ 3^n одинаковыхъ цифръ дѣлится на 3^n.

В. Соллертинскій. (Гатчина).

№ 554. Данъ объемъ A прямого цилиндра съ круговыми основаніями. Опредѣлить радіусъ основанія и высоту, при которыхъ онъ будетъ имѣть наименьшую величину поверхности.

И. Вонсикъ (Воронежъ).

№ 555. Доказать, что высшая степень, въ которой первоначальное нечетное число p входитъ множителемъ въ произведеніе

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2m+1)$$

равна

$$\left[E\left(\frac{2m+1}{p}\right)-E\left(\frac{m}{p}\right)\right]+\left[E\left(\frac{2m+1}{p^2}\right)-E\left(\frac{m}{p^2}\right)\right]+$$

$$+\left[E\left(\frac{2m+1}{p^3}\right)-E\left(\frac{m}{p^3}\right)\right]+\ldots,$$

гдѣ E означаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ числѣ, стоящемъ въ скобкахъ. Формула должна быть продолжена до тѣхъ поръ, пока всѣ дальнѣйшіе члены не обратятся въ нули.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 556. Рѣшить уравненіе

$$x^5+(a+1)x^4+(a+b)x^3+(b+na)x^2+n(a+n)x+n^2=0.$$

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 557. Найти сумму

$$100^2-99^2+98^2+\ldots+2^2-1.$$

(Заимств.) *В. Г.*

№ 558. Въ пріемникъ, вмѣстимостью въ 20 литровъ введено при 0° кислорода 10 граммовъ и азота 3,776 грам. Опредѣлить давленіе смѣси. Даны: удѣльный вѣсъ воздуха при нормальныхъ условіяхъ $a = 0{,}0013$; плотность кислорода $d = 1{,}1$; плотность азота — 0,97.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

http://vofem.ru

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 439 (3 сер.). *Извѣстно, что три ложки могутъ быть установлены, какъ показываетъ фиг. 9* *) *Обозначимъ точки, въ которыхъ эти ложки касаются стола, черезъ A, B и C, а точки, въ которыхъ онѣ касаются другъ друга—черезъ M, N и P, и пусть проэкціи точекъ M, N и P на плоскость стола суть соотвѣтственно m, n и p. Опредѣлить, какое давленіе произведетъ на столъ въ точкахъ A, B и C опредѣленный грузъ положенный въ точкѣ M, если извѣстно, что*

$$Am = Bn = Cp = a \text{ и } mp = nm = pn = b.$$

Пусть Q — сила, выражающая давленіе, оказываемое грузомъ, положеннымъ въ точкѣ m. Для разрѣшенія предложенной задачи достаточно разложить силу Q на три параллельныя силѣ Q и одного направленія съ ней силы Q_A, Q_B, Q_C, приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ A, B и C. Это разложеніе можно выполнить непосредственно. Пусть α есть точка встрѣчи прямыхъ Ap и BC. Вычисляя отношенія

$$\frac{Am}{m\alpha} \text{ и } \frac{C\alpha}{\alpha B},$$

— для чего черезъ точку n проведемъ вспомогательную прямую, параллельную прямой Ap, — разложимъ силу Q сперва на двѣ силы Q_A и Q_α, приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ A и α, затѣмъ силу Q_α на двѣ силы Q_C и Q_B, приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ C и B. Силы

$$Q_A,\ Q_B,\ Q_C$$

и будутъ искомыя давленія.

Но можно поступить проще.

Разложимъ силу Q на силы

$$\frac{Qb}{a+b} \text{ и } \frac{Qa}{a+b},$$

приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ A и p; силу $\frac{Qa}{a+b}$ — на силы

$$\frac{Qab}{(a+b)^2} \text{ и } \frac{Qa^2}{(a+b)^2},$$

приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ C и n; затѣмъ силу $\frac{Qa^2}{(a+b)^2}$ на силы

$$\frac{Qa^2b}{(a+b)^3} \text{ и } \frac{Qa^3}{(a+b)^3},$$

приложенныя соотвѣтственно въ точкахъ B и m.

*) См. № 253 Вѣстника.

http://vofem.ru

Съ силой $\frac{Qa^3}{(a+b)^3}$ поступимъ такъ, какъ только что поступили съ силой Q и т. д. Повторяя эту операцію n разъ, найдемъ, что въ точкахъ A, B, C, m будутъ приложены соотвѣтственно силы

$$R_A = \frac{Qb}{a+b} + \frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^6}{(a+b)^6} + \cdots + \frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}},$$

$$R_B = \frac{Qa^2b}{(a+b)^3} + \frac{Qa^2b}{(a+b)^3}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{Qa^2b}{(a+b)^3}\cdot\frac{a^6}{(a+b)^6} + \cdots + \frac{Qa^2b}{(a+b)^3}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}},$$

$$R_C = \frac{Qab}{(a+b)^2} + \frac{Qab}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{Qab}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^6}{(a+b)^6} + \cdots + \frac{Qab}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}},$$

$$R_m = \frac{Qa^{3n}}{(a+b)^{3n}}.$$

Поэтому

$$Q_A = \frac{Qb}{a+b} + \frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \cdots + \frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}} + x_n \quad (1)$$

$$Q_B = \frac{Qa^2b}{(a+b)^3} + \frac{Qa^2b}{(a+b)^3}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \cdots + \frac{Qa^2b}{(a+b)^3}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}} + y_n \quad (2)$$

$$Q_C = \frac{Qab}{(a+b)^2} + \frac{Qab}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3} + \cdots + \frac{Qab}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}} + z_n \quad (3),$$

гдѣ x_n, y_n, z_n, суть параллельныя силѣ R_m и одного направленія съ нею силы, равнодѣйствующая которыхъ есть R_m.

Поэтому

$$x_n + y_n + z_n = R_m. \quad (4)$$

Такъ какъ при безконечномъ возрастаніи n выраженіе

$$R_m = \frac{Qa^{3n}}{(a+b)^{3n}} = Q\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^{3n}$$

стремится къ нулю, то (см. 4)

$$\lim_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty} y_n = \lim_{n=\infty} z_n = 0.$$

http://rofem.ru

Слѣдовательно (см уравненіе 1)

$$Q_A = \lim_{n=\infty}\left[\frac{Qb}{a+b}+\frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^3}+\cdots+\frac{Qb}{a+b}\cdot\frac{a^{3(n-1)}}{(a+b)^{3(n-1)}}\right].$$

Суммируя безконечную геометрическую прогрессію, заключенную въ скобкахъ, найдемъ:

$$Q_A = \frac{Qb(a+b)^2}{(a+b)^3-a^3}.$$

Точно также изъ уравненій (2) и (3) найдемъ:

$$Q_B = \frac{Qa^2b}{(a+b)^3-a^3},$$

$$Q_C = \frac{Qab(a+b)}{(a+b)^3-a^3}.$$

И. Поповскій (Умань); *Лежебокъ* и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ); *Н. С.* (Одесса); *К. Зновицкій* (Кіевъ).

№ 440 (3 сер.). *Опредѣлить первую и послѣднюю цифры числа* 777^{777}.

По пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ

$$\log 777 = 2,\ 89042 + E,$$

гдѣ

$$|E| < 0,\ 000005.$$

Поэтому

$$\log 777^{777} = 777\,(2,\ 89042 + E) =$$

$$= 2,\ 89042\ .\ 777 + 777\,E,$$

откуда

$$2,\ 89042\ .\ 777 + 1000\ |E| > \log 777^{777} > 2,\ 89042\ \ 777 - 1000\ .\ |E|,$$

или

$$2245,\ 86134 > \log 777^{777} > 2245,\ 85134.$$

Подыскивая числа къ мантиссамъ $0,86134$ и $0,85134$ найдемъ два числа, начинающіяся цифрой 7; поэтому и число 777^{777} начинается цифрой 7.

Что касается послѣдней цифры даннаго числа, она также есть 7. Дѣйствительно, числа

$$777,\ 777^2,\ 777^3,\ 777^4$$

оканчиваются соотвѣтственно на

$$7,\quad 9,\quad 3,\quad 1.$$

Въ слѣдующихъ степеняхъ числа 777 эти цифры повторяются періодически.

http://vofem.ru

Такъ какъ

$$777 = 4 \,.\, 194 + 1 \,,$$

то числа

$$777^{777} \text{ и } 777^1$$

оканчиваются на одну и ту же цифру, т. е. на 7.

И. Поповскій (Умань); *Лежебокъ* и *Г* (Иваново-Вознесенскъ), *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Сибирякъ* (Томскъ); *А. Д* (Иваново-Вознесенскъ); *К. Зновицкій* (Кіевъ); *В. Аврамовъ* (Житоміръ); *Юргенсонъ* (Юрьевъ); *Чернякъ* (Николаевъ); *П. Лисевичъ* (Курскъ).

№ 473 (3 сер.). *Изъ уравненій*

$$p = n \,.\, a,$$

$$p_1 = 2n \,.\, \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

$$p_2 = 4n \,.\, \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}$$

исключить n, a, r.

Разсмотримъ раньше тотъ случай, когда

$$2r > a > 0.$$

Построивъ окружность O радіуса r, отложимъ на ней хорду $AB = a$. Центральный уголъ AOB назовемъ черезъ $8x$. Тогда хорды окружности O, противолежащія центральнымъ угламъ $8x$, $4x$, $2x$, выразятся соотвѣтственно черезъ

$$2r\sin 4x, \; 2r\sin 2x, \; 2r\sin x,$$

а съ другой стороны черезъ

$$a, \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}, \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}.$$

Чтобы найти два послѣднія выраженія, достаточно примѣнить дважды къ хордѣ a ту самую формулу, которой пользуются при удвоеніи числа сторонъ правильнаго многоугольника.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что данная система уравненій равносильна слѣдующей:

$$p = 2nr\sin 4x$$

$$p_1 = 4nr\sin 2x$$

$$p_2 = 8nr\sin x.$$

Изъ этой системы уравненій имѣемъ:

$$\frac{p}{p_1} = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \cos x.$$

http://vofem.ru

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій $\cos x$, найдемъ:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{2p_1^2}{p_2^2} - 1,$$

или

$$\frac{p + p_1}{p_1} = 2\frac{p_1^2}{p_2^2} \qquad (1).$$

Для провѣрки этого равенства въ общемъ случаѣ, напишемъ на основаніи данной системы уравненій:

$$\frac{p + p_1}{p_1} = \frac{a + 2\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{2\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}},$$

$$\frac{2p_1^2}{p_2^2} = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - a^2}}{2(2r^2 - \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}})} \qquad (2).$$

Помноживъ числителя и знаменателя второй части уравненія (2) на $2r + \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ и произведя сокращеніе на $2r - \sqrt{4r^2 - a^2}$ найдемъ:

$$\frac{2p_1^2}{p_2^2} = \frac{2r + \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{2r},$$

Приведя дроби

$$\frac{a + 2\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{2\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}, \quad \frac{2r + \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{2r}$$

къ одному знаменателю, убѣждаемся въ ихъ равенствѣ. а слѣдовательно въ справедливости уравненія (1).

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *Н. С.* (Одесса); неполныя рѣшенія дали: *И. Поповскій* (Умань); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

Редакторъ В. А. Циммерманъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою. Одесса, 30-го Іюля 1899 г.
Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.

http://vofem.ru

Обложка
пщется

Обложка
ищется