Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXIII Сем. № 5.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 269.

Давленіе воздуха на поверхности, введенныя въ искусственный воздушный потокъ. *)

К. Ціолковскаго.

I.

Описаніе прибора и производства опытовъ. **)

1. Икусственный воздушный потокъ производится посредствомъ прибора, подобнаго вѣялкѣ: (фиг. 1.)

2. PB лопастная воздуходувка. Высота ея около 150 сантим. (2 арш. 2 вершка); ширина—45 сант. Лопасти Л приводятся во вращеніе посредствомъ грузовъ, отъ 1/2 фунта до 16 фунтовъ. Діаметръ лопастного колеса, состоящаго изъ 12 лопастей, равенъ 100 сант. Грузъ дѣй-

*) Печатая настоящую статью, редакція имѣетъ въ виду 1) познакомить читателей съ интересными опытами автора и 2) наглядно показать любителямъ экспериментальной физики, какимъ образомъ возможно работать научно, не располагая ни физическимъ кабинетомъ, ни какими бы то ни было точными приборами. Оказывается, что нѣкоторый запасъ энергіи и любви къ дѣлу можетъ до извѣстной степени замѣнить благоустроенную физическую лабораторію. *Ред.*

) **Для справокъ при чтеніи статьи. Скорость вращенія лопастей воздуходувки пропорціональна квадратному корню изъ величины груза (5 и 6).

Отклоненіе стрѣлки на 1 миллиметръ соотвѣтствуетъ силѣ въ 1/80 грамма (окоствовалъ такъ: бичевка наматывалась на валъ (В), посредствомъ неизображенной тутъ рукоятки и перекидывалась черезъ неподвижный блокъ ($Б_n$), ввинченный въ потолокъ, и привязывалась къ крючку, вбитому въ потолокъ рядомъ съ неподвижнымъ блокомъ. Къ подвижному блоку ($Б_n$), на 2 крюка, навѣшивались разные грузы. Былъ еще добавочный грузикъ (въ $1/4$ фунта—не болѣе), который, противодѣйствуя тренію и уничтожая его при малыхъ грузахъ, дѣлалъ враще-

---

ло 12 днвъ). Давленія на тѣло выражаются въ миллиметрахъ уклоненія стрѣлки, т. е. въ восьмидесятыхъ доляхъ грамма (24).

Показаніе стрѣлки, при началѣ каждаго опыта, повѣряется грузомъ (23 и 24).

Опыты сопротивленія производились при плотности воздуха, близкой къ 0,0012.

Давленіе на столбики, перекладины и ленты постоянно провѣрялось; большею частію оно было равно (25):

грузъ =	$1/2$	1	2	4	8	16 ф.
Давленіе =	3	6	11,5	21,5	42	82 м.м.

Въ статьѣ приводятся давленія за вычетомъ давленій на стойки и прочее.

Давленіе на одну и ту-же нормально расположенную пластинку пропорціонально величинѣ груза (26, 27 и 28).

Величина давленія на 1 кв. сант., при разныхъ грузахъ, равна:

$1/2$	1	2	4	8	16
0,325;	0,65;	1,3;	2,6;	5,2	10,4 м.м.

Давленіе на 80 кв. сант. = 26, 52, 104, 208, 416, 832 (см. 38).

Скорость *потока* пропорціональна квадратному корню изъ величины груза (29).

Отношеніе скоростей при разныхъ грузахъ выражается числами (30):

1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,7.

Абсолютныя скорости (въ метрахъ) при тѣхъ-же грузахъ равны (35):

$1/2$	1	2	4	8	16 фунт.
0,756	1,069	1,512	2,138	3,024	4,276 метр.

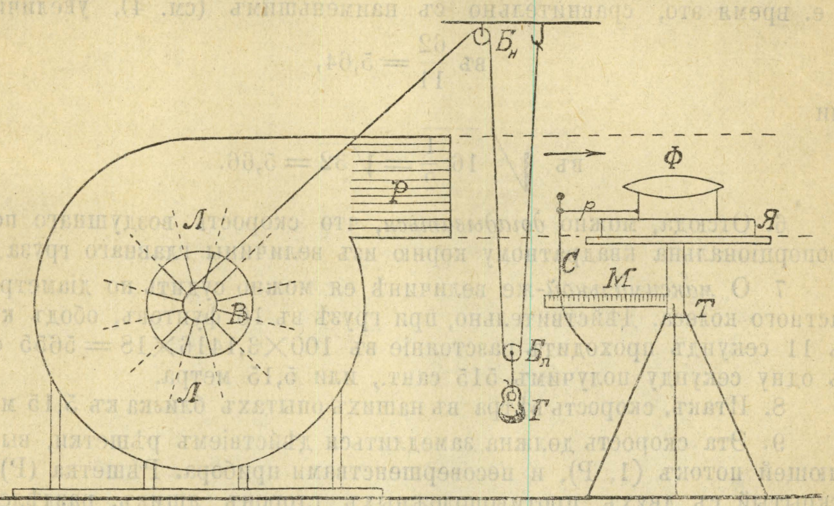
Проекціею даннаго тѣла я называю въ этой статьѣ величину *тѣни* отъ тѣла на плоскость, перпендикулярную къ направленію потока, предполагая, что параллельные лучи свѣта идутъ по направленію вѣтра. Короче—это есть площадь проекціи тѣла на плоскость, нормальную къ потоку (102).

Давленіе на проекцію; т. е. давленіе вѣтра на пластинку, равную площади проекціи.

Коэффиц. сопротивленія; терминъ, часто употребляемый мной. Это есть отношеніе сопротивленія тѣла къ давленію на проекцію, или къ сопротивленію проекціи, при одной и той же скорости вѣтра. Онъ показываетъ, какую часть давленія на проекцію (проекція *иногда* есть площадь наибольшаго поперечнаго сѣченія тѣла) составляетъ давленіе на тѣло, при одной скорости движенія; *утилизаціею формы, или полезностью формы* я называю обратное отношеніе, т. е. отношеніе давленія на проекцію къ давленію на форму при той же скорости вѣтра. Она показываетъ, во сколько разъ уменьшается сопротивленіе тѣла, благодаря его формѣ, сравнительно съ давленіемъ на проекцію при той-же скорости движенія. Утилизація формы обыкновенно больше единицы, коэффиц.-же сопротивленія—наоборотъ -меньше единицы. Однако бываетъ и обратно.

На основаніи *закона относительнаго движенія*, рѣшительно все равно: движется-ли тѣло въ неподвижномъ воздухѣ, или воздухъ движется на встрѣчу неподвижному тѣлу. Давленія на тѣло въ обоихъ случаяхъ должны быть строго равны, при одинаковыхъ условіяхъ движенія; и хотя на опытѣ, напр., съ жидкою средою, Дюбуа и Дюшменъ получили въ обоихъ случаяхъ нѣсколько различные результаты, однако ніе болѣе соотвѣтствующимъ силѣ главныхъ грузовъ, о которыхъ я только и буду упоминать.

3. Къ грузу Г привѣшивалась еще бичевка, касавшаяся всегда пола, ради того, чтобы тяжесть бичевки въ приборѣ производила постоянное дѣйствіе.



Фиг. 1.

4. Бичевка могла наматываться на валѣ не болѣе 18 разъ, а время наблюденія воздушнаго потока и производимыхъ имъ давленій было не менѣе 11 секундъ (при грузѣ въ 16 фунтовъ).

это можно приписать только неточности въ опредѣленіи скорости движенія жидкости. Въ самомъ дѣлѣ для опредѣленія скорости, напримѣръ, воздуха существуютъ нѣсколько формулъ, данныхъ въ нашей статьѣ (41—44) и весьма несогласныхъ между собою.

Коэффиціентъ тренія плоскости о воздухъ есть отношеніе абсолютной силы тренія одной стороны трущейся поверхности къ сопротивленію той-же поверхности при движеніи ея въ воздухѣ, съ тою-же скоростію, но по направленію нормали къ ней. *Продолговатость* есть отношеніе длины тѣла къ среднему діаметру его наибольшаго поперечнаго сѣченія (или къ ширинѣ).

Продолговатыя кривыя поверхности я устраивалъ чрезвычайно легкія,—изъ бумаги. Если мнѣ нужно было устроить форму въ видѣ поверхности вращенія, то я сначала тщательно вычерчивалъ кривую главнаго продольнаго сѣченія формы. По этой кривой вытачивалась на токарномъ станкѣ, изъ дерева, половинка формы—до наибольшаго поперечнаго сѣченія ея. Эту половинку я облѣплялъ полосками мокрой бумаги и завертывалъ (забинтовывалъ) все крѣпко широкой тесьмой (пеленалъ, какъ ребенка). Давъ хорошенько просохнуть бумагѣ, я свертывалъ тесьму и снималъ осторожно бумагу, которая прекрасно принимала выпуклый видъ элементовъ поверхности деревянной болванки. Тогда оставалось только склеить кусочки бумаги на самой формѣ. Послѣ снятія бумажной оболочки, широкое ея отверстіе снабжалось бумажнымъ обручемъ (изъ рисовальной бумаги). Такъ же приготовлялась и другая половина формы, иногда неравная и несходная съ первой. Если надо, обѣ половины слегка склеивались.

Воздуходувка состояла изъ деревянной клѣтки, свинченной гайками. Внутри, боковыя стѣнки были обиты картономъ, а кривая поверхность была устроена изъ бѣлой жести. Ось и спицы крылатки—металлическія; лопатки ея изъ тонкаго картона. Воздуходувку я не взвѣшивалъ, но думаю, что она не вѣситъ болѣе 50 фунтовъ.

Большую часть формъ, для испытанія ихъ сопротивленія, я клеилъ изъ толстой рисовальной бумаги.

5. При добавочномъ грузѣ, наблюдая времена полнаго разматыванія бичевки, увидимъ, что времена эти—почти строго—обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ грузовъ. Такъ, наблюдая время разматыванія бичевки при грузѣ въ 1/2 фунта, получимъ 62 секунды, т. е. время это, сравнительно съ наименьшимъ (см. 4), увеличилось

$$\text{въ } \frac{62}{11} = 5{,}64,$$

или

$$\text{въ } \sqrt{16 : \frac{1}{2}} = \sqrt{32} = 5{,}66.$$

6. Отсюда, можно *догадываться*, что скорость воздушнаго потока пропорціональна квадратному корню изъ величины главнаго груза.

7 О *максимальной*-же величинѣ ея можно судить по діаметру лопастного колеса. Дѣйствительно, при грузѣ въ 16 фунтовъ, ободъ колеса въ 11 секундъ проходитъ разстояніе въ $100 \times 3{,}1416 \times 18 = 5655$ сант.; въ одну секунду получимъ 515 сант., или 5,15 метра.

8. Итакъ, скорость вѣтра въ нашихъ опытахъ близка къ 5,15 метра.

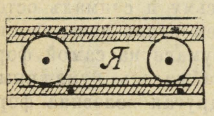
9. Эта скорость должна замедлиться дѣйствіемъ рѣшетки, выправляющей потокъ (1, Р), и несовершенствами прибора. Рѣшетка (Р) есть открытый съ двухъ противоположныхъ сторонъ ящикъ, раздѣленный 11-ю тонкими горизонтальными перегородками на 12 равныхъ отдѣленій, которыя, въ свою очередь, дѣлятся на 48 отдѣленій 3-мя вертикальными перегородками. Рѣшетка ослабляетъ вихри и уравниваетъ скорость, т. е. дѣлаетъ вѣтеръ менѣе порывистымъ.

10. Рѣшетка лишь немного менѣе отверстія воздуходувки. Измѣренія рѣшетки: въ высоту и ширину—около 35 сант., а по направленію потока—25 сант.

11. Испытываемая форма Ф (1) устанавливается на столбикахъ, прикрѣпленныхъ къ открытому жестяному ящику. Ящикъ-же этотъ плаваетъ въ другомъ ящикѣ (Я) съ налитой въ немъ водою.

12. Этотъ послѣдній (Я) закрывается составной крышкой съ прорѣзами для свободнаго движенія 4-хъ столбиковъ съ лежащей на нихъ формой (Ф).

13. Между столбиками (чертежъ 2), вдоль потока, прикрѣплены къ нимъ двѣ параллельныя жестяныя ленты; между ними, на крышкѣ, свободно вертятся, на вертикально поставленныхъ иголкахъ, два горизонтальныхъ легкихъ кружка. Діаметръ ихъ только чуть меньше разстоянія между жестяными лентами. Назначеніе кружковъ—свободное движеніе столбиковъ безъ тренія о края прорѣзовъ. Когда движется форма, одна изъ лентъ чуть нажимаетъ на колеса и катится по нимъ почти безъ тренія.



Фиг. 2.

14. Длина, ширина и высота наружнаго ящика въ сантиметрахъ: 30, 15 и 4. Те-же—внутренняго: 20, 10 и $2^1/_2$ сант.

15. Ясно, что плавающій ящикъ можетъ поднять, считая и его вѣсъ, до 500 грам., т. е. болѣе фунта.

16. Чувствительность этого прибора, даже нагруженнаго тяжелѣйшею формою, болѣе чѣмъ достаточна; именно плавающій ящикъ приходитъ уже въ движеніе отъ горизонтальной силы въ 1 миллиграммъ (около дины). Надо только налить достаточно воды и устранить приставшіе ко дну плавающаго ящика пузыри воздуха.

17. Для этого нужно прижать ящикъ ко дну и немного потереть о него. Сдѣлавъ это, мы однако не застрахуемъ себя навсегда отъ пузырей, потому что отъ согрѣванія воды и другихъ причинъ эти газовые пузыри постоянно выдѣляются и покрываютъ стѣнки сосудовъ. Пузыри воздуха уменьшаютъ подвижность ящика и потому время отъ времени слѣдуетъ устранять ихъ, какъ указано.

18. Ящикъ (Я) устанавливается горизонтально на столикѣ (Т), такъ чтобы форма (Ф) находилась въ серединѣ потока и чтобы направленіе движенія внутренняго ящика совпадало съ направленіемъ воздушнаго потока.

19. Подъ столикомъ (Т), въ направленіи потока, располагается горизонтальная линейка, раздѣленная на миллиметры.

20. Въ одной вертикальной плоскости съ нею качается, подобно маятнику, легкій рычагъ или стрѣлка (С). Ось стрѣлки горизонтальна и неподвижна, какъ и линейка. Все это составляетъ одно цѣлое со столикомъ (Т).

21. Весьма подвижный и легкій рычагъ (Р) соединяетъ стрѣлку (С) со столбиками плавающаго ящика. Такъ что, когда приведемъ воздуходувку въ дѣйствіе, вѣтеръ, вмѣстѣ съ формой, заставитъ двигаться и стрѣлку. Она уклоняется отъ вертикальнаго положенія вправо и покажетъ степень силы давленія воздушнаго потока на форму и столбики.

22. Однако показанія ея тѣмъ менѣе будутъ пропорціональны силѣ давленія воздуха, чѣмъ сильнѣе уклоненіе.

23. Въ этомъ мы легко убѣдимся, если заставимъ уклоняться стрѣлку не давленіемъ воздуха, а силою груза. Для этого, посредствомъ легчайшаго бумажнаго блока, измѣняемъ отвѣсную силу тяжести въ горизонтальную. Одинъ конецъ тончайшей нитки прицѣпляется къ столбикамъ. Нить перекидывается черезъ блокъ и къ другому концу ея привѣшивается бумажная корзиночка. Въ нее мы кладемъ грузы, начиная съ дециграмма. Сначала показанія стрѣлки будутъ почти пропорціональны грузу, но затѣмъ стрѣлка показываетъ меньше, чѣмъ слѣдуетъ.

24. Я искривилъ стрѣлку, какъ показано на чертежѣ (I) и достигъ полной пропорціональности показаній. Мой приборъ былъ устроенъ такъ, что отклоненіе стрѣлки (С) на 1 миллим. соотвѣтствовало силѣ въ $^1/_{80}$ грамма (около 12 динъ).

25. Давленіе (при шести разныхъ грузахъ) на столбики, перекладины, стрѣлку (С) и жестяныя ленты выражается въ миллим.:

$^1/_2$	1	2	4	8	16	фунтовъ
3	6	11,5	21,5	42	82	м. м.

26. Эти давленія всегда нужно вычитать изъ давленій на испытуемыя формы.

27. Для *опредѣленія скорости потока* на двухъ діагонально расположенныхъ столбикахъ укрѣпляемъ нормально къ потоку двѣ почти квадратныя пластинки съ общею площадью въ 14 кв. сант. Давленія на нихъ, за вычетомъ давленія на столбики (25), при тѣхъ-же грузахъ, послѣдовательно будутъ:

4,5; 9; 18; 36,5; 73; 145 м. м.

28. Отсюда видимъ, что давленіе на пластинку пропорціонально степени нагрузки, что и понятно.

29. А такъ какъ извѣстно, что давленіе на пластинку пропорціонально квадрату скорости потока, или — скорость потока пропорціональна квадратному корню изъ давленія на пластинку, то можемъ еще сказать, что эта скорость пропорц. квадратному корню изъ величины груза (Г).

30. Такимъ образомъ, отношеніе скоростей потока для разныхъ степеней нагрузки последовательно будетъ:

$$1;\quad \sqrt{2};\quad 2;\quad 2.\sqrt{2};\quad 4;\quad 4\sqrt{2},$$

т. е. наивысшая скорость, при грузѣ въ 16 фунтовъ, въ 5,66 разъ больше наименьшей скорости, при грузѣ въ $^1/_2$ фунта.

31. Давленіе на нормальную къ потоку пластинку не зависитъ, какъ показываетъ опытъ и теорія, отъ плотности окружающаго воздуха, (если грузъ остается тотъ же). Дѣйствительно, когда уменьшается плотность воздуха, увеличивается скорость потока и уменьшенное давленіе возстановляется.

32. Итакъ, при всѣхъ показаніяхъ барометра и термометра, рядъ 27 долженъ остаться неизмѣннымъ.

33. Однако абсолютная скорость потока измѣняется, а вмѣстѣ съ тѣмъ и давленіе на формы продолговатыя, гдѣ значительную роль играетъ треніе воздуха.

34. Зная абсолютное давленіе (24) на пластинку, легко вычислимъ и соотвѣтствующую скорость потока. Для этого въ основаніе примемъ формулу Кальете и Колардо $0{,}071 . V^2$, которая выражаетъ въ килогр. давленіе вѣтра на 1 кв. метръ при скорости (V) потока въ метрахъ. Предполагается давленіе атмосферы въ 1 килогр. на 1 кв. сантим. (735 м.м.) и температура въ 10^0 Ц, или постоянная плотность воздуха въ 0,0012.

35. Получимъ такія скорости въ метрахъ:

0,756; 1,069; 1,512; 2,138; 3,024; 4,276 м.

Слѣдовательно эти скорости лишь на $^1/_5$ меньше скорости по обороту лопастного колеса въ воздуходувкѣ (7).

36. Нашъ воздушный потокъ имѣетъ ограниченную площадь поперечнаго сѣченія, именно около 1200 кв. сант. ($^1/_8$ кв. метра), значитъ больше, чѣмъ въ аппаратѣ Максима *). Чѣмъ сравнительно обширнѣе для модели воздушный потокъ тѣмъ, теоретически, больше бы должно быть давленіе.

---

*) Hiram Maxim. „Natural and artificial flight“. The Aeronautical Annual 1896.—Boston.

37. Однако опыты для пластинокъ до 80 кв. сант., даже до 100, не обнаружили тутъ явственно выраженной разницы. На этомъ основаніи, можемъ считать нашъ потокъ совершенно достаточнымъ (какъ бы безграничнымъ) для формъ, площадь поперечнаго сѣченія которыхъ не превышаетъ 80 кв. сант.

38. Въ виду того, что мы часто будемъ имѣть дѣло съ такою площадью, даемъ тутъ давленіе на пластинку въ 80 кв. сантим., при разныхъ скоростяхъ потока (см. 35), въ миллиметрахъ:
26; 52; 104; 208; 416; 832 мм.
Давленіе на 1 кв. сантим. будетъ 0,325 0,65 1,3 2,6 5,2 10,4.

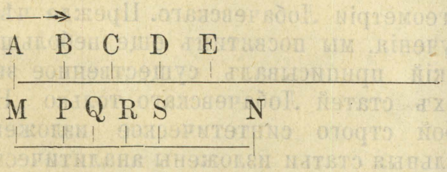
(*Продолженіе слѣдуетъ*).

О логариѳмахъ Непера.

Въ большей части сочиненій по элементарной алгебрѣ какъ въ русской, такъ и иностранной литературѣ изобрѣтателю логариѳмовъ Неперу ошибочно приписываютъ составленіе таблицъ гиперболическихъ или натуральныхъ логариѳмовъ, тогда какъ, въ дѣйствительности, эти логариѳмы вычислены геометромъ Speidel'емъ и съ логариѳмами самого Непера имѣютъ очень мало общаго.

Въ своемъ сочиненіи: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio...“ *) Неперъ описываетъ таблицу логариѳмовъ, синусовъ и тангенсовъ дугъ отъ 0^0 до 45^0, вычисленныхъ въ томъ предположеніи, что радіусъ дуги равенъ 10 000 000.

При составленіи своихъ таблицъ Неперъ разсматривалъ одновременное движеніе двухъ точекъ: одна изъ нихъ A (см. черт.) движется равномѣрно по безконечной прямой AE, а другая M по нѣкоторой конечной прямой MN такимъ образомъ, что разстоянія, проходимыя ею въ каждый моментъ, находятся въ одномъ и томъ же постоянномъ отношеніи къ длинѣ всего непройденнаго до этого момента пути, т. е., если по прошествіи 1, 2, 3, 4 и т. д. моментовъ точка M будетъ въ P, Q, R, S и т. д., то $MP:MN = PQ:PN = QR:QN = RS:RN = \ldots$ Разстоянія AB и MP, проходимыя обѣими точками въ первый моментъ, были взяты равными.



Полагая теперь, что прямая MN выражаетъ число 10 000 000, Неперъ считаетъ число, выражающее разстояніе, пройденное первой точкой, логариѳмомъ числа, выражающаго длину того отрѣзка прямой MN, который не былъ еще пройденъ второю точкою въ то же время. Такъ, $AB = \lg PN$, $AC = \lg QN$, $AD = \lg RN$ и т. д.

*) Считаю долгомъ выразить здѣсь свою глубокую признательность А. П. Грузинцеву, доставившему мнѣ возможность ознакомиться съ рукописнымъ переводомъ этого сочиненія.

Если при этихъ условіяхъ будемъ разсматривать только тѣ одновременныя положенія точекъ А и М, которыя онѣ занимаютъ въ концѣ каждаго момента, то окажется. что Неперовы логариѳмы составляютъ безконечно-возрастающую ариѳметическую прогрессію, а соотвѣтствующія имъ числа—безконечно-убывающую геометрическую прогрессію.

Сравнивая логариѳмы Непера съ натуральными, замѣтимъ слѣдующія особенности:

1) Логариѳмы Непера увеличиваютс съ уменьшеніемъ соотвѣтствующихъ чиселъ.

2) Логариѳмы Непера не служатъ показателями степеней одного и того же основанія.

3) Неперовъ логариѳмъ 10 000 000 равенъ нулю, логариѳмы меньшихъ чиселъ положительны, а бо́льшихъ — отрицательны.

4) Болѣе подробное изслѣдованіе показываетъ, что между Неперовымъ и натуральнымъ логариѳмомъ какого нибудь числа x существуетъ соотношеніе $Lx = 10^7 (\lg 10^7 - \lg x)$, гдѣ черезъ L означенъ Неперовъ, а черезъ lg — натуральный логариѳмъ.

Б. Чихановъ (Люблинъ).

Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго.

В. Кагана

(*Продолженіе**).

X Приложеніе геометріи Лобачевскаго къ анализу безконечно малыхъ.

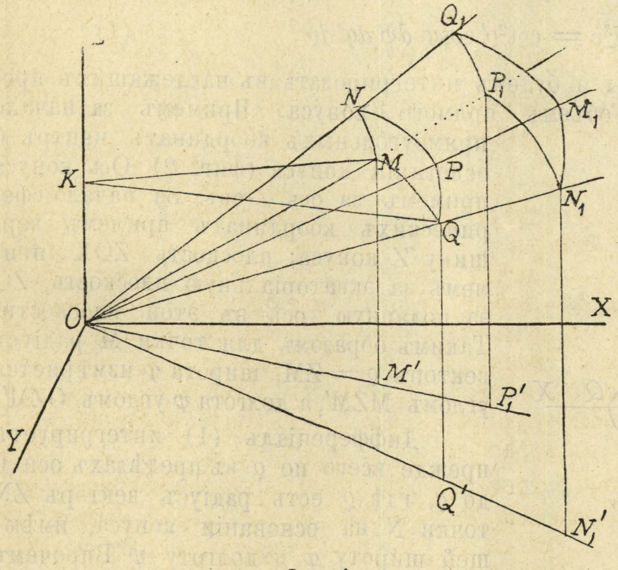
Мы закончили изложеніе геометріи Лобачевскаго. Прежде чѣмъ перейти къ оцѣнкѣ изложеннаго ученія, мы посвятимъ еще небольшую главу вопросу, которому Лобачевскій приписывалъ существенное значеніе. Собственно говоря, изъ всѣхъ статей Лобачевскаго только „Новыя начала“ представляютъ собой строго синтетическое изложеніе геометрической системы. Всѣ остальныя статьи изложены аналитически, при чемъ основаніямъ новой геометріи удѣлено сравнительно немного мѣста; большую часть каждаго мемуара занимаютъ приложенія Воображаемой Геометріи къ анализу и именно къ вычисленію значеній нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Общая идея, на которой основаны эти приложенія, заключается въ слѣдующемъ: данный дифференціалъ разсматривается, какъ элементъ длины, площади, объема или массы въ гиперболическомъ пространствѣ (т. е. въ пространствѣ, къ которому примѣняется геометрія Лобачевскаго); въ зависимости отъ того или другого геометрическаго значенія интеграла, отъ предѣловъ интегрированія – производится соотвѣтствующее преобразованіе координатъ, которое ведетъ къ интеграламъ, легко

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физ.“ № 235.

раскрывающимся. Самое преобразованіе координатъ представляетъ собой, конечно, чисто аналитическій процессъ и роль геометріи заключается лишь въ извѣстномъ наведеніи; но Лобачевскій справедливо замѣчаетъ, что въ смыслѣ приложенія къ анализу евклидова геометрія играетъ обыкновенно совершенно такую же роль. Не входя здѣсь въ оцѣнку самаго метода, которая будетъ сдѣлана въ слѣдующей главѣ, мы замѣтимъ только, что изложенный пріемъ даетъ здѣсь больше простора для преобразованія однихъ интеграловъ въ другіе благодаря большему разнообразію системъ координаціи. Такъ мы видѣли въ VIII главѣ, что декартовой системѣ координаціи соотвѣтствуютъ въ геометріи Лобачевскаго четыре системы координатъ; каждой системѣ соотвѣтствуютъ конечно другія выраженія для элементовъ длины, площади и объема; этимъ именно обстоятельствомъ Лобачевскій широко пользуется для преобразованія и вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

Такимъ образомъ по идеѣ всѣ приложенія геометріи Лобачевскаго къ анализу, которыя мы находимъ въ его сочиненіяхъ, довольно однообразны; различіе заключается лишь въ способахъ примѣненія одного и того же пріема. Намъ будетъ поэтому достаточно привести одинъ примѣръ.*) Въ предыдущей главѣ мы нашли выраженіе для объема прямого кругового конуса. Имѣя въ виду произвести это вычисленіе другимъ способомъ, дадимъ выраженіе элемента объема въ сферическихъ координатахъ. Какъ и въ геометріи Евклида мы будемъ при этомъ опредѣлять положеніе точки M въ пространствѣ (фиг. 1) разстояніемъ $MO=\varrho$ точки отъ нѣкоторой постоянной точки O — широтой φ, т. е угломъ, MOM', который радіусъ векторъ OM образуетъ съ экваторіальной плоскостью XOY,— и долготой ψ, т. е. угломъ, который меридіанальная плоскость ZOM образуетъ съ неподвижной плоскостью ZOX; уголъ этотъ измѣряется линейнымъ угломъ XOM', который проэкція OM' радіуса вектора на экваторіальную плоскость образуетъ съ полярной осью OX.



Фиг. 1.

Координатными поверхностями служатъ сферы ($\varrho=\text{Const.}$), плоскости ($\psi=\text{Const.}$) и конусы, имѣющіе точку O вершиной и прямую OZ осью ($\varphi=\text{Const.}$).

Пусть ϱ, φ, ψ координаты точки M, $\varrho+d\varrho$, $\varphi+d\varphi$, $\psi+d\psi$,

*) „О Началахъ геометріи“ стр. 57 и 58.

координаты безконечно близкой точки M_1. Если мы проведемъ координатныя поверхности въ точкахъ M и M_1, то онѣ выдѣлятъ элементъ объема $MNPQ\ M_1N_1P_1Q_1$; объемъ этого элемента отличается на безконечно малую высшаго порядка отъ объема прямоугольнаго параллелопипеда, въ которомъ тремя измѣреніями служатъ длины MQ, MN и MP. Дуга MQ есть дуга, радіусъ котораго $r = MK$ есть разстояніе точки M отъ оси OZ; уголъ же MKQ есть $d\varphi$; поэтому

$$MQ = \cot r' d\varphi.$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника MOK на основаніи уравненія IV имѣемъ:

$$\cot r' = \cot \varrho' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varrho' \cos \varphi$$

слѣдовательно

$$MQ = \cot \varrho' \cos \varphi \; d\varphi.$$

Далѣе MN есть дуга круга радіуса $OM = \varrho$, которой соотвѣтствуетъ центральный уголъ MON, равный $d\psi$; поэтому

$$MN = \cot \varrho' d\psi.$$

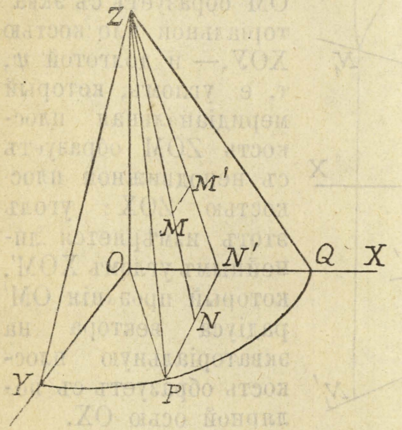
Наконецъ отрѣзокъ MP_1 отличается отъ $d\varrho$ на безконечно малую высшаго порядка; такъ что мы можемъ положить

$$MP_1 = d\varrho.$$

Отсюда слѣдующее выраженіе для элемента объема:

$$d^3v = \cot^2 \varrho' \cos \varphi \; d\psi \; d\varphi \; d\varrho \qquad (1)$$

Это выраженіе мы и будемъ интегрировать въ надлежащихъ предѣлахъ, чтобы найти объемъ прямого конуса. Примемъ за начало прямоугольныхъ координатъ центръ O основанія конуса (фиг. 2). Ось конуса примемъ за ось Z-овъ. За начало сферическихъ координатъ примемъ вершину Z конуса; плоскость ZOX примемъ за экваторіальную плоскость, ZO за полярную ось въ этой плоскости. Такимъ образомъ для точки M радіусъ векторъ $\varrho = ZM$, широта φ измѣряется угломъ MZM', а долгота ψ угломъ OZM'.



Фиг. 2.

Диффереціалъ (1) интегрируетъ прежде всего по ϱ въ предѣлахъ оси 0 до ϱ, гдѣ ϱ есть радіусъ векторъ ZN точки N на основаніи конуса, имѣющей широту φ и долготу ψ. Впрочемъ интегрированіе по ϱ въ предѣлахъ отъ 0 до ϱ замѣняется интегрированнымъ по ϱ' въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до ϱ'. Въ виду соотношенія LXI

$$\cot^2 \varrho' d\varrho' = -\frac{\cos^2 \varrho' d\varrho'}{\sin^3 \varrho'}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\varrho} \cot^2\varrho' d\varrho = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varrho'} \frac{\cos^2\varrho' d\varrho'}{\sin^3\varrho'} = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varrho'} \frac{\cos\varrho' d\sin\varrho'}{\sin^3\varrho} =$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varrho'} \frac{1}{2}\frac{\cos\varrho'}{\sin^2\varrho'} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varrho'} \frac{d\varrho'}{\sin\varrho'} = \frac{1}{2}\frac{\cos\varrho}{\sin^2\varrho'} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varrho'} d\varrho = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\varrho'}{\sin^2\varrho'} - \varrho\right).$$

Слѣдовательно

$$d^2v = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(\frac{\cos\varrho'}{\sin^2\varrho'} - \varrho\right) d\psi\, d\varphi. \qquad (2)$$

Чтобы произвести слѣдующее интегрированіе по φ, замѣтимъ, что мы должны выразить ϱ черезъ ψ и φ. Обозначимъ для этого, какъ въ предыдущей главѣ, черезъ h высоту конуса, черезъ λ—образующую, черезъ R радіусъ основанія. Отрѣзокъ ZN' мы обозначимъ черезъ ϱ_0; это есть то значеніе ϱ, которое соотвѣтствуетъ той же долготѣ ψ и широтѣ 0; пока ψ остается постоянной величиной, и ϱ_0 не мѣняетъ своего значенія. Наконецъ черезъ x и y обозначимъ декартовы координаты точки N, т. е. отрѣзки ON' и $N'N$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ZNN' и ZON мы имѣемъ:

$$\text{треуг. } ZNN';\ \text{ур. XI}\quad \cos\varrho'\cos\varphi = \cos\varrho_0' \qquad (3)$$

$$\text{„ „ ур. V}\quad \mathrm{tg}\varphi = \cos y'\mathrm{tg}\varrho_0' \qquad (4)$$

$$\text{„ „ ур. VII}\quad \sin\varrho' = \sin y'\sin\varrho_0' \qquad (5)$$

$$\text{треуг. } ZON';\ \text{ур. V}\quad \mathrm{tg}\psi = \cos x'\mathrm{tg}h' \qquad (6)$$

$$\text{„ „ ур. VII}\quad \sin h'\sin x' = \sin\varrho_0' \qquad (7).$$

Имѣя въ виду интегрировать дифференціалъ (2) по φ, мы его преобразуемъ, принимая при этомъ ψ за постоянную.

$$\varrho\cos\varphi\, d\varphi = d(\varrho\sin\varphi) - \sin\varphi\, d\varrho \qquad (8)$$

Дифференцируя уравненіе (3), мы находимъ:

$$\cos\varrho'\sin\varphi\, d\varphi + \sin\varrho'\cos\varphi\, d\varrho' = 0.$$

Слѣдовательно

$$-\sin\varphi\, d\varrho = \frac{\sin\varphi}{\sin\varrho}\, d\varrho' = -\frac{\cos\varrho'\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sin^2\varrho'}\, d\varphi. \qquad (9)$$

Подставляя въ уравненіе (8) выраженіе (9), мы найдемъ:

$$\varrho\cos\varphi\, d\varphi = d(\varrho\sin\varphi) - \frac{\cos\varrho'\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sin^2\varrho'}\, d\varphi.$$

Подставляя наконецъ это выраженіе въ уравненіе (2), найдемъ:

$$2d^2v = \frac{\cos\varrho'\cos\varphi}{\sin^2\varrho'}\,d\psi\,d\varphi + \frac{\cos\varrho'\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sin^2\varrho'}\,d\psi\,d\varphi - d(\varrho\sin\varphi)\,d\psi =$$

$$= \frac{\cos\varrho'\,d\psi\,d\varphi}{\cos\varphi\sin^2\varrho'} - (\varrho\sin\varphi)\,d\psi.$$

Это выраженіе нужно интегрировать по φ въ предѣлахъ отъ 0 до Φ, гдѣ Φ есть уголъ PZN. Совершивъ это интегрированіе и замѣчая, что $ZP = \lambda$, получимъ:

$$2dv = d\psi\int_0^\Phi \frac{\cos\varrho'\,d\varphi}{\sin^2\varrho'\cos\varphi} - \lambda\sin\Phi\,d\psi. \qquad (10)$$

Чтобы раскрыть послѣднюю квадратуру, воспользуемся уравненіемъ (3); именно мы опредѣлимъ изъ этого уравненія $\cos\varrho'$ и подставимъ сюда; мы найдемъ:

$$\frac{\cos\varrho' d\varphi}{\sin^2\varrho\cos\varphi} = \frac{\cos\varrho'_0}{\sin^2\varrho'_0}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Съ другой стороны, дифференцируя уравненіе (4) и помня, что при постоянномъ ψ не измѣняется и ϱ_0, мы найдемъ:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = -dy'\sin y'\operatorname{tg}\varrho'_0.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее уравненіе, мы получимъ:

$$\frac{\cos\varrho'\,d\varphi}{\sin^2\varrho\cos\varphi} = -\frac{\sin\varrho'_0\sin y' dy'}{\sin^2\varrho'}. \qquad (11)$$

Если мы теперь воспользуемся уравненіемъ (5), то найдемъ:

$$\frac{\cos\varrho'\,d\varphi}{\sin^2\varrho'\cos\varphi} = -\frac{dy'}{\sin y'\sin\varrho'_0} = \frac{dy}{\sin\varrho'_0};$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_0^\Phi \frac{\cos\varrho'\,d\varphi}{\sin^2\varrho'\cos\varphi} = \int_0^У \frac{dy}{\sin\varrho'_0} = \frac{У}{\sin\varrho'_0}, \qquad (12)$$

гдѣ У есть PN', т. е. наибольшее значеніе ординаты, соотвѣтствующее абсциссѣ x и долготѣ ψ. Эти ординаты связаны со значеніемъ абсциссы x уравненіемъ:

$$\sin У'\sin x' = \sin R' \qquad (13).$$

Подставляя найденное выраженіе (12) въ уравненіе (10), мы получимъ:

$$dv = \frac{1}{2}\left\{\frac{У}{\sin\varrho'_0} - \lambda\sin\Phi\right\}d\psi. \qquad (14)$$

Здѣсь λ есть величина постоянная; всѣ же остальныя величины нужно выразить въ зависимости отъ ψ и интегрировать этотъ дифференціалъ въ предѣлахъ отъ 0 до A, гдѣ A есть уголъ OZQ при вершинѣ конуса; тогда мы получимъ четвертую часть объема конуса. Но мы преобразуемъ предварительно нашъ дифференціалъ къ новымъ перемѣннымъ.

Дифференцируя уравненіе (6), мы найдемъ:

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = -\operatorname{tg}h' \sin x' \, dx'.$$

Съ другой стороны то же уравненіе (6) даетъ:

$$\frac{1}{\cos^2\psi} = 1 + \operatorname{tg}^2\psi = 1 + \operatorname{tg}^2 h' \cos^2 x' = \frac{\cos^2 h' + \sin^2 h' \cos^2 x'}{\cos^2 h'} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'}{\cos^2 h'}.$$

Принимая при этомъ во вниманіе уравненіе (7), мы получимъ:

$$d\psi = -\frac{\sin h' \cos h' \sin x' \, dx'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'} = -\frac{\sin \varrho'_0 \cos h' dx'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'}$$

Подставляя же это выраженіе въ уравненіе (14), получимъ:

$$dv = -\frac{У \cos dx'}{2(1 - \sin^2 h' \sin^2 x')} + \frac{\lambda \sin h' \cos h' \sin x' \sin \Phi dx'}{2(1 - \sin^2 h' \sin^2 x')}.$$

Интегрируя это выраженіе по x въ предѣлахъ отъ 0 до R или по x' въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до R$'$, мы получимъ объемъ четвертой части нашего конуса. Обозначая этотъ объемъ черезъ v, мы будемъ имѣть:

$$v = -\frac{\cos h'}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{У dx'}{1 - \sin^2 x' \sin^2 h'} + \frac{\lambda \cos h' \sin h'}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin x' \sin \Phi \, dx'}{1 - \sin^2 x' \sin^2 h'} \qquad (15)$$

Вторую квадратуру мы постараемся раскрыть. Замѣтимъ, что при $\varphi = \Phi$ имѣемъ $y = У$ и $\varrho = \lambda$; поэтому уравненія (3), (4) и (5) даютъ:

$$\cos \lambda' \cos \Phi = \cos \varrho'_0 \qquad (3_a)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \cos У' \operatorname{tg} \varrho'_0 \qquad (4_a)$$

$$\sin У' \sin \varrho'_0 = \sin \lambda' \qquad (5_a)$$

Перемножая первыя два изъ этихъ уравненій, получимъ:

$$\sin \Phi \cos \lambda' = \cos У' \sin \varrho'_0 = \cos У' \sin h' \sin x'.$$

Отсюда мы опредѣляемъ $\sin \Phi$ и подставляемъ въ уравненіе (15). Мы получимъ:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin h' \sin x' \sin \Phi \, dx'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'} = \frac{1}{\cos \lambda'} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\cos У' \sin^2 h' \sin^2 x' \, dx'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'} =$$

$$\frac{1}{\cos\lambda'}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\cos У'\,dx'}{1-\sin^2 h'\sin^2 x'} - \frac{1}{\cos\lambda'}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \cos У' dx'\,. \tag{16}$$

Эти двѣ квадратуры мы вычислимъ порознь. Выражая на основаніи уравненія (13) $\cos У'$ черезъ x', мы найдемъ:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \cos У'\,dx' = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}}{\sin x'}\,dx' =$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin x'\,dx'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}} - \sin^2 R' \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{dx'}{\sin x'\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}}\,. \tag{17}$$

Во второмъ интегралѣ мы замѣнимъ независимую перемѣнную x черезъ У. Замѣтимъ для этого, что

$$\frac{\sin R' dx'}{\sin x'\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}} = \frac{\sin R' dx'}{\sin^2 x' \cos У'} = \frac{\sin У' dx'}{\sin x' \cos У'} \tag{18}$$

Дифференцируя уравненіе (13), найдемъ:

$$\sin У' \cos x'\,dx' + \cos У' \sin x'\,dУ' = 0 \tag{19}$$

Выразивъ такимъ образомъ dx' черезъ $dУ'$, мы подставимъ найденное выраженіе въ уравненіе (18); тогда мы получимъ:

$$\frac{\sin R' dx'}{\sin x'\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}} = -\frac{dУ'}{\cos x'} = -\frac{\sin У'\,dУ'}{\sqrt{\sin^2 У' - \sin^2 R'}}\,.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin R' dx'}{\sin x'\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}} = -\int\limits_{R'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin У' dУ'}{\sqrt{\sin^2 У' - \sin^2 R'}} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin x' dx'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}}$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (17), мы найдемъ:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \cos У' dx' = (1-\sin R') \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R'} \frac{\sin x' dx'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 R'}} = -\frac{\pi}{2}(1-\sin R')\,. \tag{20}$$

ПРОТОКОЛЪ

засѣданія Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 23-го октября 1898 года.

Предсѣдатель: *В. А. Циммерманъ.* Присутствовали члены Общества: *Х. І. Гохманъ, И. М. Занчевскій, В. Ѳ. Каганъ, Ѳ. Н. Милятицкій, В. В. Преображенскій, И. В. Слешинскій, П. Я. Точидловскій и С. О. Шатуновскій.*

Предметы занятій:

1. Выслушано было сообщеніе члена Общества С. О. Шатуновскаго: „Объ условіяхъ существованія n корней въ сравненіи n-ой степени по простому модулю“.

Въ своемъ сообщеніи докладчикъ далъ слѣдующіе критеріумы существованія n корней въ сравненіи n-ой степени по простому модулю p:

Для того, чтобы сравненіе n-ой степени

$$f(x) \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

гдѣ p простое число, имѣло n корней (между которыми могутъ быть и равные корни) необходимо, чтобы сравненіе

$$S_{p+l} - S_{l+1} \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

имѣло мѣсто для всѣхъ цѣлыхъ значеній $l > -1$, гдѣ вообще подъ S_k разумѣется сумма k-ыхъ степеней корней уравненія $f(x) = 0$. Предыдущее сравненіе должно имѣть мѣсто и при $l = -1$, если независимый членъ функціи $f(x)$ не дѣлится на p безъ остатка.

Наоборотъ, если сравненіе

$$S_{p+l} - S_{l+1} \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

имѣетъ мѣсто для всѣхъ цѣлыхъ значеній l отъ $l = 1$ до $l = n - l$ включительно и если дискриминантъ функціи $f(x)$ несравнимъ съ нулемъ по модулю p, то сравненіе $f(x) \equiv 0$ (мод p) имѣетъ n неравныхъ корней. Если же дискриминантъ функціи $f(x)$ сравнимъ съ нулемъ по модулю p, то сравненіе $f(x) \equiv 0$ (мод. p) либо не имѣетъ n корней, либо имѣетъ n корней, между которыми по крайней мѣрѣ два корня равны.

Примѣнивъ эти критеріумы къ сравненію 3-ей степени, предварительно приведенному къ виду

$$x^3 + 3ax - 2b \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

докладчикъ слѣдующимъ образомъ выражаетъ условія существованія трехъ неравныхъ корней сравненія:

Для того, чтобы при $b^2 + a^3$ несравнимомъ съ нулемъ (мод. p), указанное сравненіе 3-ей степени имѣло 3 корня, необходимо и достаточно, чтобы при $p + 1$ кратномъ числа 3, выполнялись сравненія:

$$R\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^{\frac{p+1}{3}} + a \equiv 0, \quad a^2 R\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^{\frac{p+2}{3}} - b \equiv 0 \text{ (мод. } p)$$

и чтобы, при $p - 1$ кратномъ числа 3, выполнялись сравненія:

$$a \cdot R\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^{\frac{p-1}{3}} - a \equiv 0; \quad R\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^{\frac{p+2}{3}} - b \equiv 0 \text{ (мод. } p),$$

гдѣ вообще подъ $R\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^k$ разумѣется раціональная часть разложенія выраженія $\left(b + \sqrt{b^2 + a^3}\right)^k$ по стройкѣ Ньютона.

2. Обсуждался вопросъ о назначеніи жалованья и выборѣ секретаря Математическаго Отдѣленія. Постановлено: избрать секретаря на одинъ годъ, считая съ 1-го октября 1898 года, назначивъ ему жалованья 120 рублей въ годъ. Въ секретари избранъ Самуилъ Осиповичъ Шатуновскій.

3. Сообщеніе Е. Л. Буницкаго: „Къ теоріи сравненій по сложному модулю“ отложено до слѣдующаго засѣданія.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Интересное свойство алюминія. Изучая свойства алюминія Гольдшмидтъ и Франкъ открыли, что если нагрѣть до достаточно высокой температуры смѣсь металлическаго алюминія съ окисломъ другого металла, то кислородъ окисла переходитъ къ алюминію, такъ что взятый металлъ раскисляется. Эта реакція сопровождается повышеніемъ температуры и выдѣляющагося тепла достаточно, чтобы реакція дошла до конца безъ нагрѣванія извнѣ: нагрѣваніе требуется, слѣдовательно, только въ началѣ. Раскислившійся металлъ при этомъ не сплавляется съ алюминіемъ. Подобное явленіе наблюдается и съ сѣрнистыми соединеніями, но тепла при этомъ выдѣляется меньше. Очевидно, что этой реакціей можно воспользоваться и для полученія высокихъ температуръ въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется нагрѣть небольшую массу вещества, напр. при паяніи, и для полученія металловъ изъ ихъ окисловъ Авторы получили такимъ образомъ хромъ, марганецъ, желѣзо, титанъ, барій вольфрамъ, молибденъ, никель, кобальтъ, ванадій, а возстановленіе нѣкоторыхъ изъ этихъ металловъ при помощи обычныхъ способовъ представляетъ большія затрудненія. (La Nature).

Сплавъ алюминія съ сурьмой, AlSb, представляетъ исключеніе изъ общаго правила, что сплавы плавятся вообще при температурѣ низшей температуры плавленія болѣе тугоплавкаго металла. Wright еще въ 1892 году нашелъ, что этотъ сплавъ плавится при выше 1000^0, тогда какъ алюминій плавится при 600^0, а сурьма при 440^0. Столь значительное уклоненіе заставило г. van Aubel'я опредѣлить съ возможной точностью температуру плавленія сплава AlSb. Опредѣленіе при помощи термоэлектрическаго пирометра Le Chatelier дало 1078^0—1080^0.

Кристаллическая углекислота Наблюдая твердую углекислоту подъ микроскопомъ, г. Liveridge замѣтилъ, что она состоитъ изъ скопленія кристалликовъ, имѣющихъ форму проволоки и состоящихъ изъ вѣтвящихся иголъ, причемъ вѣточки отходятъ повидимому подъ прямымъ угломъ. Кристаллы эти очень напоминаютъ по своему виду тѣ, изъ которыхъ состоитъ кристаллическое желѣзо и золото и которые наблюдаются также у нашатыря. Скорость испаренія твердой углекислоты не дала возможности изучить ближе форму этихъ кристалловъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

11/23 августа въ 12 час. 25 мин. дня *G Hermite*'омъ и *G Besançon*'омъ былъ пущенъ съ Марсова поля въ Парижѣ небольшой шаръ ($40 m^3$), наполненный водородомъ и снабженный баро-термографомъ Ришара. Въ 2 ч. 34 мин по полудни шаръ этотъ спустился въ Orly-sur-Morin. Судя по записямъ баро-термографа, которыя были найдены совершенно неповрежденными, шаръ черезъ 45 мин. послѣ подъема достигъ наибольшей высоты въ 7300 метровъ; на высотѣ въ 6500 метровъ температура оказалась равной -60^0. До настоящаго времени столь низкая температура еще никогда не наблюдалась на такой сравнительно небольшой высотѣ. Баро-термографъ былъ тщательно вывѣренъ до и послѣ поднятія.

Франклиновскій институтъ въ Филадельфіи присудилъ извѣстному французскому химику Муассану медаль Elliost Cresson за изобрѣтеніе электрической печи и за работы сдѣланныя при помощи этой печи.

Полковникъ Беннетъ завѣщалъ Пенсильванскому Университету имѣніе, оцѣненное въ два милліона франковъ; имѣніе это будетъ продано и проценты съ полученнаго такимъ образомъ капитала будутъ употреблены спеціально для доставленія женщинамъ высшаго образованія. За 1897 годъ Columbian College получила 1732045 франковъ пожертвованій и болѣе 220000 франковъ для покрытія различныхъ текущихъ расходовъ. Кажется ни одинъ народъ не жертвуетъ столько своимъ учебнымъ заведеніямъ, какъ американцы.

Бельгійское Астрономическое Общество издаетъ въ настоящее время фотографическій атласъ луны, который представляетъ уменьшенную копію атласа, издаваемаго Парижской Обсерваторіей, г ѣ были получены самые снимки. Каждая таблица будетъ сопровождаться объяснительнымъ текстомъ Loewy и Puiseux. Атласъ этотъ не поступитъ въ продажу, а будетъ разсылаться членамъ Бельгійскаго Астрономическаго Общества по таблицѣ при каждомъ выпускѣ ежемѣсячнаго бюллетеня, издаваемаго Обществомъ. Такимъ образомъ для полученія атласа надо записаться въ члены Общества (членскій взносъ 10 фр, адресъ Общества: Бельгія, Bruxelles, rue des Chevaliers, 21)

1/13 ноября въ 2 часа ночи съ газоваго завода de la Villette въ Парижѣ поднялся шаръ *Alliance*, на которомъ находились г.г Cabalzar и русскій астрономъ Ганскій. Цѣлью поднятія было наблюденіе надъ паденіемъ Леонидъ. Хотя уже на высотѣ въ 150 метровъ наблюдатели вышли изъ тумана, лежавшаго на землѣ, и небо было довольно ясно, число замѣченнныхъ падающихъ звѣздъ было очень незначительно.

Въ настоящее время уже закончена телефонная линія между Москвой и Петербургомъ. Она будетъ открыта 1-го января 1899 года.

На горѣ Schneeberg въ Австріи предполагаютъ соорудить метеорологическую обсерваторію въ память императрицы австрійской Елизаветы.

Извѣстный норвежскій изслѣдователь *Sivert Brakmo* возвратился недавно изъ полярныхъ странъ, не принеся никакихъ извѣстій объ Андре и его товарищахъ.

Медаль Rumfort'а была въ настоящемъ году присуждена г. Keeler'у, директору обсерваторіи Лика, за его труды по примѣненію спектроскопа къ астрономическимъ изслѣдованіямъ, за изслѣдованія собственныхъ движеній туманностей и строенія колецъ Сатурна.

Самый маленькій электродвигатель построенъ г. *D. Goodin de M. Kinney* въ Техасѣ. Онъ вѣситъ всего три грамма и, не смотря на это, развиваетъ громадную скорость, если его питать токомъ отъ маленькаго карманнаго элемента съ хлористымъ серебромъ.

Если вѣрить Scientific American, въ Винчестерѣ, въ штатѣ Массачузетъ, установленъ спиртовый термометръ, имѣющій въ длину *двадцать одинъ метръ*. Термометръ этотъ предназначенъ для наблюденій надъ температурой почвы и установленъ въ колодцѣ глубиною въ 20 метровъ. Было бы интересно знать, какимъ образомъ построенъ этотъ термометръ и сдѣланъ-ли онъ весь изъ стекла. Американскій журналъ не даетъ по этому поводу никакихъ указаній.

ТЕМЫ

для письменныхъ окончательныхъ испытаній въ Московскомъ Учебномъ Округѣ, въ 1898 г.

Иваново-Вознесенское реальное училище.

Для VII класса.

Алгебра.

Опредѣлить коэффиціентъ c многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$, дѣлящагося нацѣло на $x-2$, зная, что коэффиціентъ a равенъ дѣйствительной части выраженія $(3-2i)^3$, а коэффиціентъ b есть minimum суммы трехчленной прогрессіи, первый членъ которой равенъ 4.

Приложеніе алгебры къ геометріи.

Въ секторъ, составляющій восьмую часть круга радіуса R, вписать прямоугольникъ, одна сторона котораго совпадала бы съ радіусомъ, а сумма остальныхъ трехъ сторонъ равнялась бы данной прямой l.

На обѣ задачи назначено 5 часовъ.

Геометрія. (3 часа).

Въ прямой круглый цилиндръ, радіусъ основанія котораго $r=6{,}8055$ сант., вписана треугольная пирамида такъ, что ея основаніе совпадаетъ съ плоскостью нижняго основанія цилиндра, а вершина—съ центромъ верхняго основанія цилиндра.

Одна изъ сторонъ основанія пирамиды есть сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ основанія цилиндра, а другая—сторона правильнаго треугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ. Плоскій уголъ при вершинѣ пирамиды, соотвѣтствующій меньшей сторонѣ основанія ея, $\alpha=66^0 51' 42''$.

Опредѣлить объемъ пирамиды, зная, что всѣ углы ея основанія — острые.

Для VI класса.

Алгебра. (3 часа).

Два куска матеріи были проданы за одинаковую цѣну. Если бы матерія 2-го куска продавалась по цѣнѣ матеріи 1-го куска, то за этотъ кусокъ было бы выручено столько рублей, сколько единицъ заключается въ учетверенномъ среднемъ членѣ геометрической прогрессіи, состоящей изъ пяти членовъ, въ которой разность крайнихъ членовъ равна 400, а сумма 3-го и 4-го членовъ равна 150. Если бы матерію 1-го куска продавали по цѣнѣ матеріи 2-го куска, то за 1-й кусокъ было бы заплачено столько рублей, сколько единицъ въ извѣстномъ членѣ q ур-нія $x^2-21x+q=0$, разность корней котораго равна 11.

По скольку аршинъ было въ каждомъ кускѣ, если въ обоихъ было 100 арш.?

Геометрія. (3 часа)

Чрезъ вершину B прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, встрѣчающая сторону CD въ точкѣ E.

При вращеніи всей фигуры около стороны AC поверхность, описываемая прямой BE, дѣлитъ пополамъ объемъ тѣла, получающійся отъ вращенія даннаго прямоугольника.

Вычислить съ точностью до 0,01 отношеніе отрѣзка ED къ сторонѣ BD, если извѣстно, что сторона прямоугольника AB служитъ стороною правильнаго тр-ка, описаннаго около нѣкотораго круга, а сторона BD—высотою правильнаго тр-ка, вписаннаго въ тотъ же кругъ.

Тригонометрія. (3 часа).

Въ треугольникѣ ABC перпендикуляръ DE, опущенный изъ средины D стороны AB на сторону AC, отсѣкаетъ тр-къ ADE, составляющій $^3/_8$ всего тр ка ABC. Опредѣлить уголъ C и сторону AB, если извѣстно, что сторона $AC = 47,5$ сант. и уголъ $A = 22^0 43' 40''$.

Сообщилъ *Дм. Ефремовъ.*

ЗАДАЧИ.

№ 535. Выраженіе

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

представить въ видѣ разности двухъ корней.

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 536. Доказать, что прямая, проходящая черезъ двѣ точки, соотвѣтственно симметричныя основанію одной изъ высотъ треугольника относительно двухъ его сторонъ, проходитъ черезъ основанія двухъ другихъ его высотъ.

Я. Шатуновскій (Одесса).

№ 538. Рѣшить уравненія:

$$x^3 - y^2 + x = xy(x + y + 1) + a(x - y);$$
$$y^3 - x^2 + y = y^2(x + y + 1) + b(x - y).$$

(Заимств.) *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 539. Данъ квадратъ $ABCD$. На діагоналяхъ его AC и BD взяты соотвѣтственно точки E и F такъ, что площади треугольниковъ AFE и BCE равны между собой. Прямыя AF и BE продолжены до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ G. Найти геометрическое мѣсто точекъ G.

П. Флоровъ. (Ст. Урюпинская).

№ 540. Смѣшано 8 литровъ водорода при давленіи 74 цм. съ 3 литрами кислорода при 76 цм.; температура газовъ 14°. Весь объемъ сведенъ къ 10 литрамъ. При какой температурѣ смѣсь будетъ имѣть давленіе, одинаковое съ начальнымъ давленіемъ кислорода?

Коэффиціентъ расширенія газа: 0,004.

(Заимств.) *М. Г.*

№ 541. Вычислить сторону квадрата, вершины котораго расположены послѣдовательно на четырехъ сторонахъ правильнаго пятиугольника, имѣющаго сторону a.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 253. (1 сер.). *Данную дробь* $\frac{a}{b}$ *раздѣлить на двѣ такія дроби, которыхъ сумма числителей равнялась бы суммѣ знаменателей. Задача подлежитъ изслѣдованію.*

Положимъ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{mx}{my}+\frac{nz}{nt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ x есть число взаимно простое съ y, z—взаимно простое съ t m съ n, и a съ b.

Изъ разложеній вида (1) всѣ остальныя разложенія выведутся по формулѣ

$$\frac{a}{b}=\frac{pmx}{pmy}+\frac{pnz}{pnt},$$

гдѣ p—произвольное цѣлое число. Такимъ образомъ для рѣшенія задачи надо рѣшить уравненіе (1) въ цѣлыхъ числахъ относительно m, x, y, n, z, t.

По условію задачи имѣемъ:

$$mx+nz=my+nt.$$

Опредѣляя отсюда z, получимъ

$$z=t+\frac{m(y-x)}{n},$$

откуда видно, что $y-x$ дѣлится на n. Обозначивъ частное отъ этого дѣленія черезъ v, получимъ:

$$z=t+mv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x=y-nv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Подставивъ эти значенія z и x въ уравненіе (1), по сокращеніи получимъ:

$$\frac{a}{b}=1-\frac{nv}{y}+1+\frac{mv}{t}=2+\left(\frac{m}{t}-\frac{n}{y}\right)v=2+\left(\frac{my-nt}{yt}\right)v,$$

откуда

$$\frac{a-2b}{b}=\frac{(my-nt)v}{yt} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Такъ какъ v есть число, взаимно простое съ y и съ t, что видно изъ уравненій (2) и (3), то очевидно, что $a-2b$ дѣлится на v.

Полагая

$$a-2b=Vv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и подставляя Vv вмѣсто $a-2b$ въ уравненіе (4), получимъ

$$\frac{V}{b}=\frac{my-nt}{yt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Такъ какъ числа a и b взаимно-простыя, то числа $a-2b$ и также взаимно простыя, а такъ какъ V есть дѣлитель числа $a-2b$ (5) то дробь

$$\frac{V}{b}$$

несократима и, слѣдовательно, произведенiе yt дѣлится на b, а по ому можно положить

$$b=hl,\ y=hy_1,\ t=lt_1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Тогда уравненiе (6) принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$V=\frac{mhy_1-nlt_1}{y_1t_2}=\frac{mh}{t_1}-\frac{nl}{y_1}.$$

Пусть s есть общiй наибольшiй дѣлитель чиселъ h и t_1, а r—чиселъ l и y_1. Тогда

$$\left.\begin{aligned} h=sp,\ t_1=sT \\ l=rq,\ y_1=rY \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$V=\frac{mp}{T}-\frac{nq}{Y}=\frac{mpY-nqT}{YT}.$$

Такъ какъ выраженiе

$$mpY-nqT$$

должно дѣлится на Y, то nqT дѣлиться на Y. Но q есть число взаимно простое съ Y (8); n также взаимно простое съ Y, ибо Y есть дѣлитель числа y_1 (8), а y_1 входитъ дѣлителемъ въ число y (7) взаимно простое съ n (3). Поэтому T дѣлится на Y. Подобнымъ же способомъ убѣдимся, что Y дѣлится на T. Слѣдовательно

$$Y=T$$

и

$$V=\frac{mp-nq}{Y}$$

или

$$mp-nq=VY\ \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Легко видѣть, что p и q суть числа взаимно простыя, ибо если бы они имѣли общаго множителя, то этотъ послѣднiй входилъ бы и въ произведенiе VY. Но $Y=T$ есть число взаимно простое съ p и съ q (8); слѣдовательно число V имѣло бы общаго множителя съ p и q, и этотъ множитель входилъ бы въ $a-2b$ (5). Но такъ какъ (7), (8)

$$b=rspq,$$

то числа $a-2b$ и b, или a и b не были бы взаимно простыми.

Если m_1 и n_1 есть пара цѣлыхъ рѣшенiй, удовлетворяющихъ уравненiю

$$m_1p-n_1q=1,$$

то

$$m_1VY \text{ и } n_1VY$$

суть корни уравненiя (9). Общiй же видъ корней этого уравненiя будетъ:

$$m = m_1 VУ + qM,$$
$$n = n_1 VУ + pM,$$

гдѣ M есть произвольное цѣлое число.

Предыдущія замѣчанія приводятъ къ слѣдующему рѣшенію задачи.

Разложимъ $a-2b$ на какихъ либо два множителя:

$$a - 2b = Vv \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Разложимъ b на четыре множителя, такъ что

$$b = pqrs, \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

гдѣ p и q суть числа взаимно простыя. Опредѣлимъ два числа m_1 и n_1 такъ, чтобы было

$$qm_1 - pn_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Назовемъ далѣе черезъ M и $У$ два произвольныхъ цѣлыхъ числа; тогда наиболѣе общее рѣшеніе будетъ:

$$y = prsУ,\ t = qrsУ. \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$
$$m = m_1 VУ + qM,\ n = n_1 VУ + pM \ldots\ldots (\varepsilon)$$
$$x = y - nv,\ z = t + mv, \ldots\ldots\ldots (\zeta)$$

ибо 1) умноживъ уравненія (ζ) соотвѣтственно на m и n и складывая ихъ, получимъ

$$mx + nz = my + nt.$$

2)

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = 1 - \frac{nv}{y} + 1 + \frac{mv}{t}\ (\text{см. } \zeta) = 2 + \left(\frac{m}{t} - \frac{n}{y}\right) v = 2 +$$

$$\left(\frac{m}{q} - \frac{n}{p}\right)\frac{v}{rsУ}\ (\text{см. } \delta) = 2 + \frac{(mp - ng)v}{pqrsУ} = 2 + \frac{(mp - nq)v}{bУ}\ (\text{см. } \beta) = 2 +$$

$$+ \frac{(m_1 p - n_1 q) VУv}{bУ} = 2 + \frac{Vv}{b}\ (\text{см. } \gamma) = 2 + \frac{a - 2b}{b}\ (\text{см. } \alpha) = \frac{a}{b}.$$

С. Шатуновскій (Одесса).

№ 403 (3 сер.). *Въ урнѣ находится 5000 шаровъ, перенумерованныхъ числами отъ 1 до 5000. Какъ велика вѣроятность событія что вынутый изъ урны шаръ будетъ имѣть номеръ, кратный какого либо изъ чиселъ 14, 21, 10?*

Среди чиселъ отъ 1 до 5000 есть

$$E\left(\frac{5000}{14}\right) = 357$$

чиселъ, кратныхъ 14.

Среди тѣхъ же чиселъ кратныхъ 21 будетъ

$$E\left(\frac{5000}{21}\right) = 238.$$

Кратныхъ одновременно 14 и 21 будетъ столько, сколько чиселъ кратныхъ 42, т. е.

$$E\left(\frac{5000}{42}\right) = 119.$$

Слѣдовательно среди чиселъ отъ 1 до 5000 кратныхъ 21 и въ то же время не кратныхъ 14 будетъ

$$238 - 119 = 119.$$

Среди всѣхъ разсматриваемыхъ чиселъ 500 кратны 10. Среди нихъ есть

$$E\left(\frac{5000}{70}\right) = 71$$

кратныхъ 14 и 10 одновременно; среди этихъ же 71 чиселъ посчитаны вами и всѣ числа, кратныя 10 и 21, такъ какъ такія числа, будучи кратны 210, кратны 70.

Итакъ число кратныхъ 10, но не кратныхъ ни 14 ни 21, среди всѣхъ 5000 чиселъ равно

$$500 - 71 = 429.$$

Слѣдовательно число всѣхъ отдѣльныхъ благопріятныхъ случаевъ есть

$$357 + 119 + 429 = 905,$$

а потому искомая вѣроятность равна

$$\frac{905}{5000} = 0{,}181.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

№ 409 (3 сер.). *Обозначимъ черезъ $E\,(p)$ наибольшее цѣлое положительное число, содержащееся въ p, такъ что*

$$1 + E(p) > p \geqslant E(p).$$

Доказать, что

$$E\left[\frac{1}{\alpha} E\left(\frac{N}{\beta}\right)\right] = E\left(\frac{N}{\alpha\beta}\right)$$

гдѣ N, α и β суть цѣлыя положительныя числа.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} N &= \beta N_1 + r \\ N_1 &= \alpha N_2 + r_1 \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

гдѣ

$$r \leqslant \beta - 1,\ r_1 \leqslant \alpha - 1 \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) имѣемъ:

$$N = N_2\alpha\beta + \beta r_1 + r \qquad (3)$$

На основаніи неравенствъ (2)

$$\beta r_1 + r \leqslant (\alpha - 1)\,\beta + \beta - 1,$$

т. е.

$$\beta r_1 + r \leqslant \alpha\beta - 1.$$

Слѣдовательно изъ равенства (3) находимъ:

$$E\left(\frac{N}{\alpha\beta}\right)=N_2,$$

а равенства (1) даютъ:

$$N_2=E\left[\frac{1}{\alpha}E\left(\frac{N}{\alpha\beta}\right)\right].$$

И. Поповскій (Умань); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 435 (3 сер.). *Показать что во всякомъ треугольникѣ*

$$\frac{(a+1)\sin A+(b+1)\sin B+(c+1)\sin C}{a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}.$$

Пользуясь формулами

$$a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B,\ \ c=2R\sin C,$$

найдемъ:

$$\frac{a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)}{(a+1)\dfrac{a}{2R}+(b+1)\dfrac{b}{2R}+(c+1)\dfrac{c}{2R}}=2R.$$

Точно также

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=\frac{4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{2R(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}=2R.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка); *А. Гвоздевъ* (Курскъ); *В. Морозовъ* (Тамбовъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *В. Шидловскій* и *В. Гартіеръ* (Полоцкъ).

№ 438 (3 сер.). *Упростить выраженіе*

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

Возьмемъ въ первомъ корнѣ $\sqrt[3]{a^4}$ и во второмъ $\sqrt[3]{b^4}$ за скобки, тогда данное выраженіе приметъ видъ:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^4}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}+\sqrt{\sqrt[3]{b^4}\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right).$$

Подведемъ второй сомножитель подъ знакъ радикала; тогда получимъ упрощенное выраженіе

$$\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3}=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^{3/2}.$$

В. Морозовъ (Тамбовъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *С. Адамовичъ* (Двинскъ), *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 450 (3 сер.). Показать, что при n цѣломъ

$$\begin{array}{llll} (2n+1)^5 - 2n - 1 & \text{дѣлится на} & 240, \\ 3^{2n+2} - 8n - 9 & „ \quad „ & 64 \\ 3^{2n+3} + 40n - 27 & „ \quad „ & 64 \\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} & „ \quad „ & 7 \\ 3^{2n+2} + 2^{6n+1} & „ \quad „ & 11 \\ 3^{4n+4} - 4^{3n+3} & „ \quad „ & 17 \\ 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} & „ \quad „ & 17. \end{array}$$

1. Такъ какъ

$$(2n+1)^5 - 2n - 1 = (2n+1)\,[(2n+1)^4 - 1] =$$
$$= (2n+1)\,[(2n+1)^2 - 1]\,[(2n+1)^2 + 1] =$$
$$= 8n\,(n+1)\,(2n+1)\,(2n^2 + 2n + 1),$$

то предложенное выраженіе дѣлится на 16, на 3 и на 5. Дѣйствительно, данное выраженіе дѣлится на $8n(n+1)$, а это произведеніе кратное 16, такъ какъ произведеніе $n(n+1)$ всегда кратно 2. Если $2n+1$ кратно 3, то и все данное выраженіе кратно 3; если же $2n+1$ не кратно 3, то

$$(2n+1)^2 - 1$$

кратно 3 по теоремѣ Фермата. Точно также, разсматривая произведеніе

$$(2n+1)\,[(2n+1)^4 - 1]$$

и пользуясь теоремой Фермата, найдемъ, что предложенное выраженіе дѣлится на 5 при n цѣломъ. Дѣлясь на 16, 3, 5 наше выраженіе дѣлится на

$$16 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

2. Выраженіе

$$3^{2n+2} - 8n - 9$$

равно

$$(3^2)^{n+1} - 8n - 9 = (8+1)^{n+1} - 8n - 9.$$

Разлагая $(8+1)^{n+1}$ по биному Ньютона, найдемъ, что всѣ члены этого бинома кромѣ послѣднихъ двухъ содержатъ множителемъ

$$8^2 = 64.$$

Послѣдніе же два члена даютъ въ суммѣ

$$8\,(n+1) + 1 = 8n + 9.$$

и уничтожаются взаимно съ членами

$$-\,8n - 9.$$

Мы полагали n цѣлымъ положительнымъ; теорема имѣетъ мѣсто и при

$$n = 0, -1.$$

3. Такъ какъ

$$3^{2n+3}+40n-27=3(8+1)^{n+1}+40n-27$$

и такъ какъ, по раскрытіи скобокъ, не кратные 64 члены даютъ

$$3.8(n+1)+3+40n-27=64n,$$

то теорема имѣетъ мѣсто при n цѣломъ, положительномъ; она имѣетъ мѣсто и при $n=0,-1$.

4. $$3^{2n+1}+2^{n+2}=9^n.3+2^{n+2}-2^n.3+2^n.3=$$

$$=(9^n-2^n).3+2^n(2^2+3)=(9^n-2^n).3+2^n.7.$$

Разность 9^n-2^n дѣлится при n цѣломъ положительномъ на

$$9-2=7$$

и обращается въ нуль при $n=0$.

5. $$3^{2n+2}+2^{6n+1}=3^{2n}.3^2+2^{6n+1}+3^2.2^{6n}-3^2.2^{6n}=$$

$$=3.2[(3)^{2n}-(2^3)^{2n}]+2^{6n}.(2+3^2)=$$

$$=3^2[(3)^{2n}-(2^3)^{2n}]+2^{6n}.11.$$

Разность

$$(3)^{2n}-(2^3)^{2n}$$

дѣлится на

$$3+2^3=11$$

при n цѣломъ положительномъ и равна нулю при $n=0$.

6. $$3^{4n+4}-4^{3n+3}=(3^4)^{n+1}-(4^3)^{n+1}.$$

Разность

$$(3^4)^{n+1}-(4^3)^{n+1}$$

равна нулю при

$$n=-1,$$

а при цѣломъ n, равномъ нулю или положительномъ, дѣлится на

$$3^4-4^3=17.$$

7. $$3.5^{2n+1}+2^{3n+1}=15.5^{2n}+2^{3n+1}-15.2^{3n}+15.2^{3n}=$$

$$=15[(5^2)^n-(2^3)^n]+2^{3n}.(2+15)=$$

$$=15[(5^2)^n-(2^3)^n]+2^{3n}.17.$$

Разность

$$(5^2)^n-(2^3)^n$$

равна нулю при n, равномъ нулю, и дѣлится на

$$5^2-2^3=17$$

при n цѣломъ положительномъ.

М. Зиминъ (Орелъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *Черникъ* (Николаевъ); кромѣ того получено одно очень хорошее рѣшеніе отъ неизвѣстнаго лица.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

№ 1—1898.

Statuts.

Soc. Astr. de France. Séance du 1 Dec.

Etude de la constante solaire au sommet du Mont-Blanc. *I. Jansen.* Уже давно ученые пытались определить величину солнечной постоянной т. е. количество тепла, падающаго въ минуту по перпендикулярному направленію на кв. сант. поверхности, лежащей на границѣ атмосферы. Пулье при помощи своего пиргеліометра нашелъ цифру 1.763 кал., которая должна быть ниже истинной, такъ какъ величина поглощенія земной атмосферой вычислена въ предположеніи, что каждый слой ея поглощаетъ одинаковую долю падающей на него теплоты, между тѣмъ какъ это не такъ: различные простые лучи, входящіе въ составъ сложнаго солнечнаго луча поглощаются не въ одинаковой степени; сложный лучъ, освобождаясь постепенно отъ лучей сильнѣе поглощаемыхъ атмосферой, пріобрѣтаетъ все большую способность проходитъ чрезъ слѣдующіе слои. Методъ Пулье былъ усовершенствованъ Крова. Віоль въ 1875 г. на Монбланѣ нашелъ для солнечной постоянной 2.54 кал. Наконецъ одесскій астрономъ Ганскій вмѣстѣ съ Крова нашелъ въ прошломъ году для величины этой постоянной 3,4 кал.

Если, принимая эту цифру, вычислить, сколько тепла посылаетъ солнце въ годъ на всю землю, то получится 2300 секстильоновъ кал. Чтобы нагляднѣе представить эту цифру, Жансенъ дѣлаетъ такое вычисленіе: на земномъ шарѣ въ годъ добывается около 580 миліоновъ тоннъ угля въ разныхъ видахъ, которыя при горѣніи развиваютъ 3600 квадр. кал; сравнивая эту цифру съ цифрой солнечной радіаціи, посылаемой на землю за годъ, находимъ, что потребовалось-бы сжечь количество угля, добываемое на землѣ въ 600000 лѣтъ, чтобъ получить количество тепла, излучаемаго солнцемъ на землю въ годъ.

Непосредственная утилизація этой громадной энергіи и должна составлять одну изъ важнѣйшихъ задачъ прикладной науки нашего времени.

Les observations actinométriques au sommet du Mont-Blanc. *A. Hansky.* Большая часть статьи посвящена очень интереснымъ описаніямъ восхожденія на Монбланъ, вершины котораго удалось Ганскому достичь 28 Сент. 1897 г. Наблюденія производились при помощи актинографа Крова. Приборъ этотъ состоитъ изъ термоэлектрическаго столбика, одинъ изъ концовъ котораго при помощи часового механизма постоянно направленъ къ солнцу; столбикъ соединенъ съ гальванометромъ, стрѣлка котораго непрерывно записываетъ свои показанія; сравнивая одновременно показанія актинографа и актинометра, можно показанія перваго перевести въ калоріи; наблюденія производились цѣлый день, что даетъ возможность, зная величину радіаціи при различной высотѣ солнца и слѣд. при различной толщинѣ поглощающаго слоя атмосферы, найти величину радіаціи безъ поглощенія. Въ день наблюденія (29 Сент.) актинометръ показывалъ 1,68, актинографъ же давалъ maximum 1,9, что для предѣловъ атмосферы дастъ 3—3.4. Давленіе было 426 mm., а упругость водяныхъ паровъ 0,5 mm.

Le mouvement de la rotation de la terre représenté par le cinématographe. *C. Flammarion.* Фламмаріону пришла мысль воспользоваться кинематографомъ для демонстраціи нѣкоторыхъ астрономическихъ явленій. Въ засѣданіи франц. Астр. Общ. 1 Дек. 1897 г. онъ демонстрировалъ вращательное движеніе земного шара, какимъ оно кажется издали. Въ недалекомъ будущемъ онъ надѣется изобразить вращеніе солнца, Марса, Юпитера съ подробностями, замѣчаемыми на ихъ поверхностяхъ.

Observations des Léonides à Paris 1897. *H. Tarry.* Въ Обсер. Фр. Астр. Общ. въ 12—13 Н. было замѣчено 10 метеоровъ, изъ коихъ 8—Леониды; въ ночь 13—14 Н. - 7 мет., изъ коихъ 5 Леон., 14—15 Н. разные наблюдатели видѣли 8, 4, 5. Радіанта точно опредѣлить не удалось.

Observations des étoiles filantes faites à l'observatoire de Lyon en

Novembre 1897. *I. Guillaume.* Въ ночь 15–16 Н. было видно 10 Леон. въ продолженіи $1^3/4$ ч. Для радіанта получились: $AR = 137^0$ и $D = + 15^0$.

Въ ночь 27 Н. видно было среднимъ числомъ $11^1/4$ андромедидовъ въ часъ. Главный радіантъ около α Андромеды.

Les étoiles filantes de Nov. 1897. *L. Rudaux.*

Nouvelles de la Science. *Variétés.*

Аббатъ Море 6 Дек. наблюдалъ интересную группу пятенъ на солнцѣ; вся группа занимала около $^1/_7$ солнечнаго діаметра т. е. около 200000 кил. Приложенный рисунокъ изображаетъ группу, въ главныхъ пятнахъ которой явственно виденъ процессъ сегментаціи

Letre de Arthur Mee.

Le ciel du 15 Janv. au 15 Fevr.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ.

118. **Отчетъ и протоколы Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра** за 1896 годъ. Кіевъ 1897.

119.—за 1897 годъ. Кіевъ 1898.

120. *П. К. Энгельмейеръ.* **Техническій итогъ XIX-го вѣка.** Москва 1898. Ц. 80 к., съ перес. 1 р.

121. **Сборникъ статей въ помощь самообразованію по математикѣ, физикѣ, химіи и астрономіи, составленныхъ кружкомъ преподавателей.** Вып. III (съ 7 портретами и 57 чертежами). Москва. 1898. Ц. 1. р. 20 к.

122. *Куль. П. Ю.* **Провинціальныя собранія у римлянъ.** Ихъ организація и функціи въ вѣкъ принципата. Приложеніе къ Запискамъ Императорскаго Харьковскаго Университета 1898 г. Харьковъ 1898.

123 Проф. *П. М. Покровскій,* **Теорема Абеля въ новой формѣ.** Кіевъ 1898. Ц. 25 к

124. **Новый почетный членъ университета Св. Владиміра.** Кіевъ. 1898.

125. Проф. *П. М. Покровскій.* **Памяти Карла Вейерштрасса.** Prof. *Peter Pokrowsky.* **Gedächtnissrede auf Karl Weierstrass.** Кіевъ. 1898.

126. *А. В. Цингеръ.* **Сборникъ задачъ по электричеству и магнитизму.** М. 1898. Ц 75 к.

127. **Списокъ жертвователей на памятникъ французскому ученому Лавуазье** СПБ 1898.

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Я. Ш-скаго* (Вознесенскъ) 517, 519 (3 сер.); *Кязымбека Годжаманбекова* (Баку) 515, 517, 521 (3 сер.); *А. Гвоздева* (Курскъ) 515 (3 сер.); *П Лисевича* (Курскъ) 519, 521 (3 сер.); *Н. Дьякова* (Новочеркасскъ) 519, 521 (3 сер.); *К. П.* (Лубны) 515, 521 (3 сер.); *Л. Зильберберга* (Москва) 519 (3 сер.); *В. Никанорова* (Москва) 519, 521 (3 сер.); *Кязымбека Годжаманбекова* (Баку) 512, 514, 522 (3 сер.); *Л. Магазаника* (Бердичевъ) 438, 501, 505, 508, 527 (3 сер.); *Я. Теплякова* (Кіевъ) 519, 521, 522, 523, 525 527 (3 сер.); *Е. Григорьева* (Казань) 457 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 525 526, 528 (3 сер.).

Редакторъ В. А. Циммерманъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою. Одесса, 1-го Декабря 1898 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА на 1898 годъ

НА

„ШАХМАТНЫЙ ЖУРНАЛЪ"

VIII-й годъ изданія.

Удостоенный диплома II степени на Всероссійской Художественно-промышленной Нижегородской выставкѣ 1896 года (по издательскому дѣлу)

Подъ редакціею Э. С. Шифферса.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ.

На годъ съ доставкою и пересылкою въ Россіи и заграницу . . . . 6 р. — к.

На полгода . . . . 3 » 50 »

При раз рочкѣ вносится 2 руб. къ 1 января, 2 руб. къ 2 февраля и 2 руб. къ 1 апрѣля; для студентовъ и воспитанниковъ учебныхъ заведеній по 1 руб. въ мѣсяцъ (къ 1 января, къ 1 февраля и т. д.). Подписавшіеся позже уплачиваютъ пропущенные сроки.

Цѣна отдѣльнаго номера . . . . — » 75 »

На слоновой бумагѣ, безъ разсрочки и только на годъ . . . . 10 » — ».

Полный экземпляръ „Шахматнаго Журнала" съ пересылкою и доставкою за прошедшіе годы продается по **5** рублей. Въ переплетѣ на **60** коп. дороже. Для библіотекъ учебныхъ заведеній и общественныхъ читаленъ скидка въ 10% съ 5-ти рублей.

Подписка принимается въ книжныхъ магазинахъ
Н. П. КАРБАСНИКОВА.

1) Петербургъ, Литейный, 46.
2) Москва, Моховая, д. Нееловой. прот. Университ.
3) Варшава, Новый Свѣтъ, 69 и въ другихъ книжныхъ магазинахъ.

Редакція принимаетъ на себя всевозможныя порученія по выпискѣ изъ заграницы шахматныхъ книгъ, подпискѣ на шахматные журналы и покупкѣ шахматныхъ игръ, досокъ, гутаперчевыхъ штемпелей для оттисковъ діаграммъ, фотографій и прочее.

Редакторъ **Э. С. Шифферсъ.** Издатель-редакторъ **А. К. Макаровъ.**

3—2

Обложка
ищется

Обложка
пщется