Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXII Сем. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 260.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Желая выяснить свой взглядъ на цѣль и назначеніе «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики», новая редакція исходитъ изъ той мысли, что у извѣстной части русской публики существуетъ въ большей или меньшей степени интересъ къ точнымъ наукамъ. Поддержане и возможно большее распространеніе этого интереса и составляетъ цѣль нашего журнала. Тѣ средства, которыми журналъ располагаетъ, и, вообще, тѣ условія, при которыхъ онъ существуетъ, слѣдующимъ образомъ опредѣляютъ, по мнѣнію редакціи, его значеніе, соотвѣтственно вышеуказанной цѣли.

Лица, ознакомившіяся съ элементарною математикою и физикою въ объемѣ курсовъ среднихъ учебныхъ заведеній, должны находить въ этомъ журналѣ матеріалъ, служащій къ самостоятельному примѣненію, къ расширенію и болѣе глубокому усвоенію пріобрѣтенныхъ знаній. Для тѣхъ, кто съ успѣхомъ занимается самостоятельными изслѣдованіями въ областяхъ, входящихъ въ программу «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики», этотъ журналъ долженъ являться проводникомъ въ свѣтъ добытыхъ ими результатовъ. Наконецъ, преподающимъ математику и физику и вообще, лицамъ, которыя интересуются вопросами, относящимися къ преподаванію элементарной математики и физики, журналъ долженъ предоставлять свои страницы для возбужденія и обсужденія такихъ вопросовъ.

Понимая такимъ образомъ назначеніе журнала, редакція, во первыхъ, будетъ по прежнему помѣщать въ немъ задачи на разные отдѣлы элементарной математики и физики, при чемъ будетъ печатать имена приславшихъ правильныя рѣшенія; во вторыхъ имѣетъ въ виду печатать статьи оригинальныя и переводныя, способныя шире и глубже освѣтить вопросы элементарной математики и физики, а также статьи и замѣтки, содержащіе новые результаты изъ той же области начальной математики и физики; въ третьихъ, выдѣляетъ особый отдѣлъ, посвященный вопросамъ преподаванія математики и физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, и приглашаетъ лицъ, занимающихся и интересующихся дѣломъ преподаванія, содѣйствовать успѣху этого — надѣемся, полезнаго—отдѣла, какъ возбужденіемъ, такъ обсужденіемъ и рѣшеніемъ дидактическихъ вопросовъ.

Кромѣ того редакція имѣетъ въ виду сохранить слѣдующіе прежніе отдѣлы: обзоръ иностранныхъ журналовъ, научную хронику, отдѣлъ разныхъ извѣстій и математическихъ мелочей.

Считаемъ возможнымъ прибавить, что, стремясь къ болѣе успѣшному выполненію намѣченной программы, редакція заручилась содѣйствіемъ нѣкоторыхъ профессоровъ Новороссійскаго Университета.

Заявленіе прежней редакціи.

Съ разрѣшенія Главнаго Управленія по дѣламъ печати, изданіе основаннаго мною въ 1886 году «Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики» перешло къ бывшему помощнику моему Владиміру Александровичу Гернету, а редактированіе — къ приватъ-доценту Новороссійскаго университета Владиміру Акимовичу Циммерману.

De facto передача изданія состоялась раньше, ибо еще въ концѣ 1896 года, убѣдившись послѣ десятилѣтнихъ упорныхъ попытокъ въ невозможности вести изданіе журнала безъ непрерывной затраты личныхъ средствъ, я видѣлъ себя вынужденнымъ прекратить это изданіе вовсе, и не сдѣлалъ этого только потому, что В. А. Гернетъ согласился принять весь рискъ дальнѣйшаго веденія дѣла на себя, вслѣдствіе чего какъ вся переписка по дѣламъ конторы редакціи, такъ и вся подписная плата перешли съ того времени къ нему. Получивъ недавно, согласно возбужденному ходатайству, оффиціальное разрѣшеніе на передачу изданія г. Гернету, я счелъ нужнымъ сдѣлать настоящее заявленіе, чтобы отклонить отъ себя всякую отвѣтственность за недосланные подписчикамъ №№ журнала, начиная съ XXI-го семестра, т. е. съ № 241-го, ибо съ этого №, повторяю, не я уже распоряжался изданіемъ «Вѣстника». *)

*) Всѣ номера, недосланные подписчикамъ, будутъ разосланы въ настоящемъ году.—*В. Гернетъ.*

Отказавшись затѣмъ и отъ редактированія журнала, какъ по недостатку свободнаго времени, такъ и потому, что потерялъ вѣру въ свои силы и способности вслѣдствіе постигшей меня неудачи, — я смотрю нынѣ съ удовольствіемъ на переходъ редакціи въ болѣе компетентныя руки и льщу себя надеждою, что дѣло, которому я съ любовью посвящалъ свой посильный трудъ и время, разовьется правильнѣе и шире при обновленномъ составѣ редакціи.

Прощаясь съ моими благосклонными сотрудниками и читателями, не могу отказать себѣ въ удовольствіи выразить здѣсь первымъ мою почтительную признательность за безвозмездное поддерживаніе «Вѣстника» на уровнѣ серьезнаго учебнаго журнала присылкою своихъ статей и задачъ, и мою сердечную благодарность вторымъ, большинство которыхъ умѣло войти въ положеніе редактора-издателя журнала, не окупающагося подпиской, и не требовало отъ меня болѣе того, что я могъ давать. И тѣхъ и другихъ я еще разъ прошу принять увѣреніе, что, печатая различныя рецензіи и статьи полемическаго характера, я никогда не поддавался вліянію личныхъ симпатій или антипатій, или какихъ бы то ни было разсчетовъ, и стремился лишь къ установленію безпристрастной оцѣнки затронутыхъ вопросовъ, предоставляя спорящимъ сторонамъ одинаковое право высказываться. Прошу также какъ бывшихъ сотрудниковъ моихъ такъ и читателей простить мнѣ невольную неаккуратность въ корреспонденціи и выпускѣ №№ журнала, которые неоднократно запаздывали, но пусть будетъ принято ими во вниманіе, что большую часть времени со дня открытія журнала я велъ всѣ его дѣла рѣшительно одинъ, что такъ называемая «редакція» состояла только изъ меня лично и приглашаемаго на нѣсколько мѣсяцевъ въ году помощника—студента, которому поручалось разсматриваніе многочисленныхъ рѣшеній задачъ, присылаемыхъ учениками, что такъ называемая «контора редакціи» состояла только изъ меня и моей жены, что мнѣ самому приходилось быть и составителемъ статей, и корректоромъ, и переписываться съ авторами, и, разсылать конторскіе счета, и изготовлять чертежи, и бѣгать чуть не ежедневно то въ типографію, то на почту и пр. и — помимо всего этого — жить — пока я былъ въ Кіевѣ — частными уроками, а съ переѣздомъ въ Одессу — поступить на государственную службу.

Мнѣ кажется, что послѣ десяти съ лишнимъ лѣтъ такого донкихотства позволительно опомниться и, посчитавшись съ подорванными силами, сказать тѣмъ, кто дѣлалъ честь моему «Вѣстнику», признавая его органомъ печати не безполезнымъ въ Россіи: «Простите, господа, я усталъ».

Вся корреспонденція, поступающая хотя бы и на мое имя, но по адресу редакціи «Вѣстника Оп. Физики», будетъ передаваема въ контору новой редакціи. Письмами, лично ко мнѣ направленными, буду отнынѣ считать лишь тѣ, которыя будутъ адресованы: въ Одесское казенное реальное училище, преподавателю математики и физики.

Эр. Шпачинскій.

О разложенiи произведенiя 1. 2. 3... m на первоначальные множители.

1. Въ „Vorlesungen über Zahlentheorie“ v. Leujeune Dirichlet данъ слѣдующiй способъ для опредѣленiя высшей степени, въ которой входитъ данное простое число множителемъ въ факультетъ

$$m!. = 1 . 2 \dots m.$$

Пусть m' обозначаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ частномъ $\frac{m}{p}$, гдѣ p — нѣкоторое простое число. не большее m.

Тогда рядъ чиселъ

$$p,\ 2p, \dots\ m'p$$

представитъ собой всѣ числа, не большiя m, въ составъ которыхъ входитъ простое число p, а потому произведенiе

$$p . 2p \dots m'p,$$

равное

$$p^{m'} . 1 . 2 \dots m'$$

содержитъ p въ той же степени, какъ и $m!$ Поэтому, называя черезъ N показатель степени, въ которой простое число p входитъ въ факультетъ $m!$, получимъ:

$$N = m' + N' = E\frac{m}{p} + N', \qquad (1)$$

гдѣ N' означаетъ степень p, въ которой это простое число входитъ въ факультетъ $m'!$. Разсуждая относительно факультета $m'!$ такимъ же точно образомъ, какъ мы разсуждали относительно $m!$, мы найдемъ, что

$$N' = E\frac{m'}{p} + N'' = E\frac{E\frac{m}{p}}{p} + N'',$$

гдѣ N'' есть наибольшая степень простого числа p, на которую дѣлится факультетъ порядка $E\frac{m'}{p}$.

Но

$$E\frac{E\frac{m}{p}}{p} = E\frac{m}{p^2}\ {}^{*)};$$

а потому

$$N = E\frac{m}{p} + N' = E\frac{m}{p} + E\frac{m}{p^2} + N'' + \dots$$

*) См. зад. № 409, № 248 „Вѣстника“.

Продолжая подобнаго рода разсужденія, мы приходимъ къ формулѣ

$$N = E\frac{m}{p} + E\frac{m}{p^2} + E\frac{m}{p^3} + \ldots \qquad (2)$$

Строку, стоящую во второй части этой формулы, необходимо продолжить до перваго члена, обращающагося въ нуль.

2. Формула (2) даетъ упрощенный способъ разложенія факультета на первоначальные множители.

Пусть

$$p_1,\ p_2,\ p_3 \ldots p_n$$

рядъ простыхъ чиселъ, не большихъ числа m. Тогда, согласно съ уравненіемъ (2),

$$m! = p_1^{E\frac{m}{p_1} + E\frac{m}{p_1^2} + \cdots}\ p_2^{E\frac{m}{p_2} + E\frac{m}{p_2^2} + \cdots} \ldots\ p_n^{E\frac{m}{p_n} + E\frac{m}{p_n^2} + \cdots}$$

3. Выраженію, стоящему въ правой части формулы (2), можно дать нѣсколько иной видъ.

Напишемъ цѣлое число m по системѣ счисленія, за основаніе которой принято простое число p.

Пусть такимъ образомъ

$$m = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_l p^l + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0,$$

гдѣ n — цѣлое положительное число, а коэффиціенты

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_l, \ldots \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_0$$

суть цѣлыя числа, не большія $p-1$, и не меньшія нуля.

Тогда

$$E\frac{m}{p} = \alpha_n p^{n-1} + \alpha_{n-1} p^{n-2} + \ldots + \alpha_l p^{l-1} \ldots + \alpha_2 p + \alpha_1$$

$$E\frac{m}{p^2} = \alpha_n p^{n-2} + \alpha_{n-1} p^{n-3} + \ldots + \alpha_l p^{l-2} + \ldots + \alpha_2$$

$$E\frac{m}{p^3} = \alpha_n p^{n-3} + \alpha_{n-1} p^{n-4} + \ldots + \alpha_l p^{l-3} + \ldots$$

. . . .

$$E\frac{m}{p^n} = \alpha_n.$$

Складывая почленно эти равенства, получимъ, согласно съ уравненіемъ (2):

$$N = \alpha_n . \frac{p^n - 1}{p - 1} + \alpha_{n-1} . \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + \ldots + \alpha_2 . \frac{p^2 - 1}{p - 1} + \alpha_1 \qquad (3),$$

или

$$N = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p - (a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1)}{p-1} =$$

$$= \frac{m - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)}{p-1}.$$

Такимъ образомъ *высшая степень, въ которой данное простое число* p *входитъ въ произведенiе* m!, *равна частному, полученному отъ дѣленiя на* p—1 *разности между числомъ* m *и суммой его цифръ при изображенiи этого числа по системѣ счисленiя, основанiе которой равно* p.

4. Займемся теперь задачей, обратной задачѣ, приведенной въ § 1. Эта обратная задача выразится такъ:

Найти наименьшее цѣлое положительное значенiе m, *при которомъ* m! *дѣлится на* p^N, *гдѣ* p—*данное простое число, а* N — *данное цѣлое положительное число.*

Конечно, задачу эту можно рѣшить непосредственнымъ испытанiемъ, подставляя въ формулу (2) вмѣсто m послѣдовательно рядъ чиселъ

$$p,\ 2p,\ 3p\ldots,$$

вплоть до такого kp, при которомъ вторая часть этой формулы становится наконецъ не менѣе N.

Наша цѣль будетъ заключаться въ томъ, чтобы обойти этотъ прямой и неудобный на практикѣ путь. Поступимъ такъ: составимъ рядъ

$$p-1,\ p^2-1,\ p^3-1,\ \ldots\ p^k-1,\ \ldots$$

Раздѣлимъ произведенiе $N(p-1)$ на наибольшiй изъ членовъ этого ряда, не меньше котораго это произведенiе. Пусть такой членъ будетъ p^n-1.

Тогда имѣемъ:

$$N(p-1) = (p^n-1)a_n + r_n.$$

Въ этомъ выраженiи a_n отлично отъ нуля и не болѣе p, а r_n, какъ остатокъ, менѣе дѣлителя p^n-1. Дѣйствительно, по предположенiю

$$N(p-1) < p^{n+1}-1,$$

а $p^{n+1}-1$, по дѣленiи на p^n-1, даетъ въ частномъ p и въ остаткѣ $p-1$; поэтому частное a_n не можетъ быть болѣе p.

Остатокъ r_n раздѣлимъ на $p^{n-1}-1$ и получимъ въ частномъ нѣкоторое число a_{n-1}, опять не большее p (a_{n-1} можетъ уже равняться и нулю), и остатокъ меньшiй $p^{n-1}-1$; съ этимъ остаткомъ мы поступимъ подобнымъ же образомъ, т. е. раздѣлимъ его на $p^{n-2}-1$ и т. д...

Такимъ образомъ число $N(p-1)$ будетъ представлено въ видѣ:

$$N(p-1) = a_n(p^n-1) + a_{n-1}(p^{n-1}-1) + \ldots + a_{l+1}(p^{l+1}-1) +$$

$$+ a_l(p^l-1) + \ldots + a_2(p^2-1) + a_1(p-1) + r_0 \qquad (4),$$

гдѣ коэффиціенты α_n, $\alpha_{n-1}, \ldots \alpha_1$ суть числа цѣлыя, причемъ α_n отлично отъ нуля; что касается r_0, то оно равно нулю: дѣйствительно, такъ какъ лѣвая часть уравненія (4) дѣлится на $p-1$, а всѣ члены правой части, кромѣ r_0, также дѣлятся на $p-1$, то и r_0 дѣлится на $p-1$; но r_0 меньше $p-1$, а потому

$$r_0 = 0.$$

Поэтому

$$N(p-1) = \alpha_n(p^n-1) + \alpha_{n-1}(p^{n-1}-1) + \ldots + \alpha_{l+1}(p^{l+1}-1) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_2(p^2-1) + \alpha_1(p-1). \qquad (4\ \text{bis})$$

Если во второй части этой формулы одно изъ чиселъ

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}, \ldots \alpha_{l+1},\ \alpha_l,\ \alpha_{l-1}, \ldots \alpha_2,\ \alpha_1,$$

которыя всѣ, какъ было выше указано, не больше p, напр. α_l — равно p, то всѣ α съ низшими указателями равны нулю. Дѣйствительно, пусть α_l равно p.

Обозначая сумму всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за членомъ $\alpha_l(p^l-1)$, черезъ x, имѣемъ, согласно съ указаннымъ выше алгориѳмомъ разложенія числа $N(p-1)$ въ строку (4 bis):

$$\alpha_l(p^l-1) + x = p(p^l-1) + x < p^{l+1}-1,$$

или

$$p^{l+1} - p + x < p^{l+1} - 1,$$

откуда

$$x < p - 1.$$

Но такъ какъ число $N(p-1)$ и всѣ члены, предшествующіе x, дѣлятся на $p-1$, то и x дѣлится на $p-1$; поэтому, будучи меньше $p-1$, но не будучи числомъ отрицательнымъ, x непремѣнно равно нулю, что возможно лишь при

$$\alpha_{l-1} = \alpha_{l-2} = \ldots\ldots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0.$$

Итакъ при разложеніи $N(p-1)$ въ строку (4 bis) возможны лишь 2 случая:

1) Всѣ коэффиціенты

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}, \ldots\ldots \alpha_{l+1},\ \alpha_l, \ldots\ \alpha_2,\ \alpha_1$$

меньше p.

2) Одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ, напримѣръ α_l, равенъ p, предшествующіе коэффиціенты не болѣе p, а всѣ послѣдующіе равны нулю.

Разсмотримъ первый случай.

Итакъ пусть

$$N(p-1) = \alpha_n(p^n-1) + \alpha_{n-1}(p^{n-1}-1) + \ldots + \alpha_2(p^2-1) + \alpha_1(p-1) \qquad (5),$$

гдѣ каждый изъ коэффиціентовъ

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}, \ldots\ldots \alpha_2,\ \alpha_1$$

не болѣе $p-1$.

Данное цѣлое положительное число N можно представить поэтому въ видѣ

$$N=[\alpha_n.(p^n-1)+\alpha_{n-1}(p^{n-1}-1)+\ldots\ldots+\alpha_2(p^2-1)+\alpha_1(p-1)]:(p-1)=$$

$$=\alpha_n.\frac{p^n-1}{p-1}+\alpha_{n-1}.\frac{p^{n-1}-1}{p-1}+\ldots+\frac{\alpha_2.(p^2-1)}{p-1}+\alpha_1,$$

откуда, согласно съ уравненіемъ (3), слѣдуетъ, что цѣлое число

$$M=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\alpha^l+\ldots+\alpha_2 p^2+\alpha_1 p+\alpha_0,$$

гдѣ α_0 — произвольное цѣлое положительное число, не большее $p-1$ и не меньшее нуля, удовлетворяетъ требованіямъ задачи, т. е. M! содержитъ первоначальное число p въ данной степени N.

Полагая α_0 послѣдовательно равнымъ

$$p-1,\ p-2,\ldots 2,\ 1,\ 0,$$

получимъ p соотвѣтствующихъ значеній M, которыя мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$M_{p-1},\ M_{p-2},\ldots M_2,\ M_1,\ M_0.$$

Итакъ каждый изъ факультетовъ

$$M_{p-1}!,\ M_{p-2}!,\ldots M_2!,\ M_1!,\ M_0!$$

содержитъ первоначальное число p какъ разъ въ данной степени N.

Такъ какъ M_0 кратно p, то

$$(M_0-1)!$$

будетъ уже содержать p въ степени низшей N. Поэтому

$$m=M_0=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_l p^l+\ldots+\alpha_2 p^2+\alpha_1 p\ldots \text{(I)}$$

и есть искомое наименьшее значеніе m, при которомъ $m!$ дѣлится на p^N

Обратимся ко второму случаю, т. е. предположимъ, что

$$N(p-1)=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_{l+1}(p^{l+1}-1)+p(p_l-1)\quad (6),$$

гдѣ всякій изъ цѣлыхъ положительныхъ коэффиціентовъ

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1}\ldots\alpha_{l+1}$$

не болѣе $p-1$.

Разсмотримъ два факультета

$$M!\ \text{и}\ (M+p)!,$$

гдѣ

$$M=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_{l+1}p^{l+1}+(p-1)p^l+(p-1)p^{l-1}+\ldots$$

$$\ldots+(p-1)p^2+(p-1)p.$$

Словомъ, M есть число, которое по системѣ съ основаніемъ p изображается такъ, что начальныя его цифры суть

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ldots\alpha_{l+1},$$

а каждая изъ слѣдующихъ, за исключеніемъ послѣдней, равной нулю, равна $p-1$.

Показатель наивысшей степени, въ которой p входитъ въ факультетъ M, выразится (см. уравненіе 3) числомъ

$$N' = \alpha_n \cdot \frac{p^n - 1}{p-1} + \alpha_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} + \ldots + \alpha_{l+1} \cdot \frac{p^{l+1} - 1}{p-1} +$$

$$+ (p-1) \cdot \frac{p^l - 1 + p^{l-1} - 1 \ldots + p^2 - 1 + p - 1}{p-1},$$

или:

$$N' = \alpha_n \cdot \frac{p^n - 1}{p-1} + \alpha_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} + \ldots + \alpha_{l+1} \cdot \frac{p^{l+1} - 1}{p-1} + \frac{p(p^l - 1)}{p-1} - lp \quad (7)$$

Такъ какъ

$$M + p = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_{l+1} \cdot p^{l+1} + \frac{(p-1)(p^{l+1} - p)}{p-1} + p =$$

$$= \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + (\alpha_{l+1} + 1) p^{l+1},$$

то

$$E\left(\frac{M+p}{p}\right) = \alpha_n p^{n-1} + \alpha_{n-1} p^{n-2} + \ldots + (\alpha_{l+1} + 1) p^l$$

$$E\left(\frac{M+p}{p^2}\right) = \alpha_n p^{n-2} + \alpha_{n-1} p^{n-3} + \ldots + (\alpha_{l+1} + 1) p^{l-1}$$

. . . .

. . . .

$$E\left(\frac{M+p}{p^{l+1}}\right) = \alpha_n p^{n-l-1} + \alpha_{n-1} p^{n-l-2} + \ldots + (\alpha_{l+1} + 1)$$

$$E\left(\frac{M+p}{p^{l+2}}\right) \geqslant \alpha_n p^{n-l-2} + \alpha_{n-1} p^{n-l-3} + \ldots + \alpha_{l+2}$$

. . . .

$$E\left(\frac{M+p}{p^n}\right) \geqslant \alpha_n$$

Если сложимъ эти равенства и неравенства почленно, то, обозначая черезъ N'' показатель наивысшей степени, въ которой входитъ простое число p въ факультетъ $(M+p)!$, получимъ:

$$N'' \geqslant \alpha_n \cdot \frac{p^n - 1}{p-1} + \alpha_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} + \ldots + \frac{(\alpha_{l+1} + 1)(p^{l+1} - 1)}{p-1}.$$

Замѣчая, что

$$(\alpha_{l+1} + 1)(p^{l+1} - 1) = \alpha_{l+1} \cdot (p^{l+1} - 1) + p^{l+1} - 1 =$$

$$= \alpha_{l+1} (p^{l+1} - 1) + p(p^l - 1) + p - 1,$$

предыдущему неравенству можно дать видъ

$$N'' \geqslant \frac{\alpha_n(p^n-1)}{p-1}+\frac{\alpha_{n-1}(p^{n-1}-1)}{p-1}+\ldots+\frac{\alpha_{l+1}\cdot(p^{l+1}-1)}{p-1}+$$

$$+\frac{p(p^l-1)}{p-1}+1. \qquad (8)$$

Опредѣляя N изъ уравненія (6), получимъ:

$$N=\frac{\alpha_n(p^n-1)}{p-1}+\frac{\alpha_{n-1}(p^{n-1}-1)}{p-1}+\ldots\frac{\alpha_{l+1}(p^{l+1}-1)}{p-1}+\frac{p(p^l-1)}{p-1}.$$

Сопоставляя это равенство съ формулами (7) и (8), находимъ:

$$N''>N>N'.$$

Такъ какъ M кратно p, то факультеты

$$M!, (M+1)!, (M+2)!\ldots[M+(p-1)]!$$

заключаютъ p въ той же степени, какъ и первый изъ нихъ, т. е. въ степени N', меньшей N.

Поэтому число

$$m=M+p=\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+(\alpha_{l+1}+1)p^{l+1}\ldots \quad (II)$$

представляетъ собой наименьшее цѣлое положительное значеніе m, при которомъ $m!$ дѣлится на p^N.

5. Теперь легко указать пріемъ для рѣшенія болѣе общей задачи: *найти наименьшее цѣлое положительное значеніе* x, *при которомъ факультетъ*

$$1.2\ldots(x-1)x$$

дѣлится на данное цѣлое число A.

Разложимъ число A на первоначальные множители. Пусть

$$A=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$$

гдѣ $p_1, p_2\ldots p_n$ суть простыя числа, входящія въ составъ числа A, и $\alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_n$ — ихъ показатели.

Опредѣлимъ рядъ чиселъ

$$m_1, m_2, \ldots m_n \qquad (10),$$

равныхъ тѣмъ наименьшимъ значеніямъ x, при которыхъ $x!$ дѣлится соотвѣтственно на числа

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots p_n^{\alpha_n}.$$

Если всѣ числа ряда (10) равны между собою, то общее ихъ значеніе и есть искомое значеніе x; если же они не равны всѣ между собою, то наибольшее изъ нихъ есть искомое.

6. Примѣръ: *Найти наименьшее значеніе* x, *при которомъ* x! *дѣлится на* $2^{93}\,3^{82}$.

Найдемъ сперва наименьшее значеніе x, при которомъ x! дѣлится на 2^{93}.

Примѣняя пріемъ, указанный въ § 4, находимъ:

$$93\,.(2-1)=1.(2^6-1)+2(2^4-1),$$

откуда по формулѣ (II)

$$x=m_1=1.2^6+0+1=96.$$

Найдемъ теперь наименьшее значеніе x, при которомъ x! дѣлится на 3^{82}.

$$82.(3-1)=164=2(3^4-1)+2(3-1),$$

откуда (см. I).

$$x=m_2=2.3^4+2.3=168;$$

Такъ какъ

$$m_2>m_1,$$

то искомое значеніе x есть 168.

7. Согласно съ предложеніемъ, высказаннымъ въ § 3, мы, опредѣляя въ § 4 число m по числу N, указали пріемъ для рѣшенія задачи: *по частному, полученному отъ дѣленія на* p—1 *разности между числомъ, написаннымъ по системѣ счисленія, основаніе которой есть данное число* p, *и суммой его цифръ, найти число* — и опредѣлили условіе возможности этой задачи, заключающееся въ томъ, чтобы всѣ коэффиціенты a въ строкѣ (4 bis) были не болѣе $p-1$.

Въ случаѣ возможности задача имѣетъ p рѣшеній; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что методъ рѣшенія этой задачи уже не зависитъ отъ того, будетъ ли p число простое, или нѣтъ.

Е. Буницкій (Одесса).

О перемѣнѣ направленія вращенія мельнички въ радіометрѣ Крукса.

Замѣтка г. проф. Н. Гезехуса о прямомъ и обратномъ вращеніи радіометра Крукса подъ дѣйствіемъ катодныхъ лучей въ № 257, В. О. Ф. и Э. М. побуждаетъ меня сообщить съ своей стороны о наблюденіи, сдѣланномъ мною тоже годъ съ небольшимъ тому назадъ при производствѣ опытовъ съ катодными лучами и радіометромъ Крукса. Явленіе, поразившее меня въ радіометрѣ, находившемся въ моемъ распоряженіи, состояло въ томъ, что мельничка, начавъ вращаться въ направленіи, соотвѣтствовавшемъ реакціи катодныхъ лучей, послѣ нѣкотораго времени, какъ казалось, останавливалась, затѣмъ начинала вращаться въ противоположную сторону, затѣмъ послѣ нѣкотораго времени опять останавливалась, переходила въ движеніе въ первоначальномъ направленіи, и вообще такъ мѣняла направленіе движенія много разъ. Тотъ же результатъ получился у меня при повтореніи того же опыта теперь.

Я выше прибавилъ „какъ казалось" потому что, когда я при изученіи явленія останавливалъ дѣйствіе катушки Румкорфа въ моментъ, когда крылышки мельнички, повидимому, останавливались, то оказывалось, что мельничка не только не стояла, а вращалась въ первоначальномъ направленіи съ очень большой скоростью.

Для описаннаго явленія мнѣ кажется правильнымъ только одно объясненіе: все явленіе въ моемъ радіометрѣ было ничто иное, какъ оптическій обманъ, основанный на томъ, что крылышки мельнички свѣтятся не постояннымъ свѣтомъ, а съ перерывами.

Когда скорость вращенія мельнички увеличивается до такой степени, что въ промежутокъ времени отъ одного свѣченія крылышекъ до слѣдующаго они подвинутся впередъ какъ разъ на разстояніе одного крылышка отъ другого, то мельничка будетъ казаться остановившеюся. Если въ такое же время будетъ пройденъ путь большій вдвое или втрое и т. д., то повторится то же самое. Кажущееся ускореніе и замедленіе вращенія объясняется легко.

Считаю своимъ долгомъ прибавить, что свою замѣтку я написалъ вовсе не для того, чтобы выразить какія либо сомнѣнія относительно электростатическаго заряда радіометра, о которомъ говоритъ въ своей замѣткѣ г. Гезехусъ.

Многократную кажущуюся перемѣну направленія вращенія въ моемъ приборѣ я объясняю очень малымъ треніемъ въ оси мельнички и происходившимъ сравнительно сильнымъ излученіемъ катодныхъ лучей.

Г. Барховъ (Ревель).

Основная теорема о пропорціональности величинъ.

Двѣ величины пропорціональны, если 1) равнымъ значеніямъ одной соотвѣтствуютъ равныя значенія другой и 2) суммѣ нѣсколькихъ значеній одной соотвѣтствуетъ сумма соотвѣтствующихъ значеній другой.

Пусть A и B двѣ такія величины. Соотвѣтствующія значенія ихъ обозначимъ $a_i - b_i$, $a_k - b_k$, $a_m - b_m$, $a_n - b_n$ и т. д. По условію, если $a_i = a_k$, то и $b_i = b_k$ и наоборотъ; кромѣ того, если $a_n = a_i + a_k$, то и $b_n = b_i + b_k$. Нужно доказать, что $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$, гдѣ a_n и b_n, a_m и b_m — любыя пары соотвѣтствующихъ значеній величинъ A и B.

Здѣсь надо различать три случая: 1) отношеніе $\frac{a_n}{a_m}$ — цѣлое, 2) дробное и 3) ирраціональное, т. е. значенія a_n и a_m несоизмѣримы.

1. $\frac{a_n}{a_m} = k$, гдѣ k — цѣлое число. $a_n = k a_m$, т. е. a_n равно суммѣ k значеній, равныхъ каждое a_m; тогда, по свойству (2) величинъ

A и B, и b_n равно суммѣ k соотвѣтствующихъ значенiй величины B, которыя по свойству (1) равны каждое b_m; слѣд. $b_n = kb_m$, или $\frac{b_n}{b_m} = k$. Отсюда $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$ ч. и т. д.

Слѣдствiе. $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$, если $\frac{a_n}{a_m} = \frac{1}{k}$, гдѣ k — цѣлое число, п. ч. тогда $a_m = ka_n$, слѣд., по предыдущему и $b_m = kb_n$ и слѣд. $\frac{b_n}{b_m} = \frac{1}{k}$. Отсюда $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$ ч. и т. д.

2. $\frac{a_n}{a_m} = \frac{k}{p}$, гдѣ k и p цѣлыя числа. Обозначимъ черезъ a_r значенiе величины A, равное ka_m; соотвѣтствующее значенiе B обозначимъ b_r. Такъ какъ k — цѣлое, то, по предыдущему, $b_r = kb_m$ и $\frac{b_r}{b_m} = \frac{a_r}{a_m}$. Далѣе $a_n = \frac{ka_m}{p} = \frac{a_r}{p}$ и $\frac{a_n}{a_r} = \frac{1}{p}$, гдѣ p — цѣлое. Тогда на основанiи слѣдствiя случая (1) заключаемъ, что и $b_n = \frac{b_r}{p}$ и $\frac{b_n}{b_r} = \frac{a_n}{a_r}$. Перемножая пропорцiи $\frac{a_n}{a_r} = \frac{b_n}{b_r}$ и $\frac{a_r}{a_m} = \frac{b_r}{b_m}$, получимъ: $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$, ч. и т. д.

3. *a*) (Способъ предѣловъ). Раздѣлимъ a_m на p равныхъ частей и полученную часть, назовемъ ее α, будемъ прикладывать саму къ себѣ до тѣхъ поръ, пока не получимъ значенiе $a_r > a_n$. Пусть r обозначаетъ, сколько разъ мы взяли α, т. ч. $a_r = r\alpha$. Если бы мы взяли однимъ разомъ меньше, т. е. $r - 1$ разъ, то получили бы значенiе $a_{r-1} = \alpha\ (r - 1) < a_n$. Итакъ $a_r > a_n > a_{r-1}$. Но $a_r - a_{r-1} = \alpha$, значитъ $a_r - a_n < \alpha$; значенiя a_r и a_m соизмѣримы: $\frac{a_r}{a_m} = \frac{r}{p}$, гдѣ r и p — цѣлыя числа, а потому, на основанiи случая 2-го; $\frac{a_r}{a_m} = \frac{b_r}{b_m}$, гдѣ b_r — значенiе B, соотвѣтствующее a_r.

Если будемъ безпредѣльно увеличивать число p, то отношенiе $\frac{a_r}{a_m}$ будетъ безпредѣльно приближаться къ $\frac{a_n}{a_m}$ и будетъ имѣть его своимъ предѣломъ, потому что, по предыдущему, $a_r - a_n < \alpha = \frac{a_m}{p}$, откуда $\frac{a_r}{a_m} - \frac{a_n}{a_m} < \frac{1}{p}$, а слѣд. при безпредѣльномъ увеличенiи p можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ.

Если $a_r > a_n > a_{r-1}$, то и $b_r > b_n > b_{r-1}$, потому что, въ силу свойства 2-го величины B, она возрастаетъ съ возрастанiемъ A. Отсюда слѣдуетъ, что $b_r - b_n < b_r - b_{r-1}$. Но $\frac{a_r}{a_m} = \frac{b_r}{b_m}$ и $\frac{a_{r-1}}{a_m} = \frac{b_{r-1}}{b_m}$, слѣд. $\frac{a_r - a_{r-1}}{a_m} = \frac{b_r - b_{r-1}}{b_m} = \frac{1}{p}$. Отсюда $\frac{b_r}{b_m} - \frac{b_n}{b_m} < \frac{1}{p}$, а потому $\frac{b_r}{b_m}$ имѣетъ предѣломъ $\frac{b_n}{b_m}$.

Такъ какъ отношенія $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$, равны при какомъ угодно p, то и предѣлы ихъ равны, т. е. $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$ ч. и т. д.

b). (Способъ отъ противнаго). Нужно доказать, что $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$.

Предположимъ, что $\frac{a_n}{a_m} \gtrless \frac{b_n}{b_m}$.

1. Пусть $\frac{a_n}{a_m} > \frac{b_n}{b_m}$. Замѣнимъ a_m такимъ значеніемъ a_k чтобы $\frac{a_n}{a_k} = \frac{b_n}{b_m}$ . . . (1). Неравенство показываетъ, что a_k должно быть больше a_m. Раздѣлимъ a_n на такія части, чтобы каждая была меньше $a_k - a_m$; назовемъ ихъ α и будемъ прикладывать эту часть саму къ себѣ, пока не получимъ значеніе a_r, бо́льшее a_m и меньшее a_k. Такое значеніе должно быть по крайней мѣрѣ одно, потому что $\alpha < a_k - a_m$; a_r соизмѣримо съ a_n, а потому, на основаніи случая (2), $\frac{a_n}{a_r} = \frac{b_n}{b_r}$ . . (2) b_r — значеніе величины В, соотвѣтствующее a_r. Такъ какъ $a_r > a_m$, то и $b_r > b_m$, потому что изъ 2-го свойства величинъ А и В слѣдуетъ, что съ возрастаніемъ одной изъ нихъ возрастаетъ и другая. Раздѣлимъ пропорцію (1) на (2), получимъ $\frac{a_r}{a_k} = \frac{b_r}{b_m}$. Но $a_r < a_k$, а $b_r > b_m$, слѣд. пропорція не вѣрна. Это доказываетъ невѣрность посылки $\frac{a_n}{a_m} > \frac{b_n}{b_m}$.

2. Такъ же доказывается невозможность предположенія: $\frac{a_n}{a_m} < \frac{b_n}{b_m}$; а слѣд. вѣрно противное, что $\frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m}$, ч. и т. д.

Если эта теорема, быть можетъ, слишкомъ отвлеченна для учениковъ 5-го класса, то мы находимъ все же полезнымъ излагать ее при повтореніи математики въ 8 классѣ, такъ какъ она сокращаетъ дѣло, избавляя отъ необходимости повторять то же доказательство для всякаго рода величинъ, а главное, устраняетъ двойственность въ требованіяхъ, которыя предъявляются къ доказательству теоремъ о пропорціональности въ курсахъ Геометріи и Физики: въ первой теоремы доказываются со всею строгостью, во второй же авторы довольствуются доказательствомъ для цѣлыхъ отношеній. Это вноситъ не малую путаницу въ понятія.

Разъ доказана эта общая теорема, то для того, чтобы доказать со всею строгостью пропорціональность любыхъ двухъ величинъ, достаточно доказать, что эти величины удовлетворяютъ указаннымъ въ теоремѣ двумъ условіямъ: 1) равнымъ значеніямъ одной соотвѣтствуютъ равныя значенія другой (равнымъ отрѣзкамъ, отсѣкаемымъ параллельными линіями на одной сторонѣ угла,—равные отрѣзки на другой; равнымъ линейнымъ угламъ—равные двугранные углы; равнымъ силамъ—равныя скорости, или ускоренія и т. д. и 2) суммѣ нѣсколькихъ любыхъ значеній одной—сумма соотвѣтствующихъ значеній другой. Это второе условіе во всѣхъ случаяхъ или непосредственно усматривается, или доказывается очень просто. Напр. для силъ и скоростей, или ускореній это легко доказывается на основаніи закона относительнаго движенія.

Вмѣстѣ съ тѣмъ полезно замѣтить, что напр. хорды и дуги не пропорціональны, т. к. онѣ не удовлетворяютъ второму условію, хотя и удовлетворяютъ первому.

Одинъ изъ пріемовъ рѣшенія

системъ уравненій, приводимыхъ къ квадратнымъ

(Практическая замѣтка).

Извѣстно, какъ просто и скоро разрѣшается система двухъ ур-ій:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=m \\ xy=n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

гдѣ m и n суть нѣкоторыя свободныя отъ x и y количества; для опредѣленія всѣхъ корней такой системы достаточно опредѣлить корни квадратнаго ур—ія:

$$z^2-mz+n=0\,;$$

тогда для x и y получится по два попарно равныхъ между собою значенія, соотвѣтствующихъ указаннымъ корнямъ.

Многія системы ур-ій могутъ быть приведены къ системѣ (1), опредѣливъ заранѣе зависимость выраженій вида $x^p \pm y^p$ отъ $x+y=m$ и $xy=n$. Такая зависимость опредѣляется вообще говоря довольно просто. Такъ очевидно:

$$x-y=\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2-4xy}=\sqrt{m^2-4n},$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=m^2-2n$$

$$x^2-y^2=(x+y)\,(x-y)=m\sqrt{m^2-4n}$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=m(m^2-3n)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)=(m^2-n)\sqrt{m^2-4n},$$
и т. д., вообще
$$x^p-y^p=(x-y)(x^{p-1}+x^{p-2}y+x^{p-3}y^2+\ldots+x^2y^{p-3}+xy^{p-2}+y^{p-1})$$
$$=(x-y)[(x^{p-1}+y^{p-1})+xy(x^{p-3}+y^{p-3})+x^2y^2(x^{p-5}+y^{p-5})+\ldots],$$
откуда видно, что, имѣя выраженія черезъ m и n двучленовъ $x^{p-1}+y^{p-1}$, $x^{p-3}+y^{p-3}$,.. и прочихъ низшихъ степеней, всегда можно въ той же зависимости выразить и двучленъ x^p-y^p степени высшей. Подобнымъ же образомъ выразится черезъ m и n и двучленъ x^p+y^p.

Прилагая это выраженіе на практикѣ, иногда можно весьма упростить видъ и рѣшеніе данной системы.

Такъ напр., имѣя систему
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=47{,}25 \\ x+y+\sqrt{xy}=10{,}5 \end{cases}$$
и положивъ $x+y=m$, $xy=n$, вмѣсто данной получимъ систему
$$\begin{cases} m^2-n=47{,}25 \\ m+\sqrt{n}=10{,}5, \end{cases}$$
которая разрѣшается очень просто подстановкою. Опредѣляя изъ второго ур-ія n и подставляя въ первое, получимъ
$$m^2-110{,}25-m^2+21m=47{,}25,$$
откуда $m=7{,}5$; подставляя это значеніе m въ первое ур-іе, получимъ $n=9$. Рѣшивъ теперь систему
$$\begin{cases} x+y=7{,}5 \\ xy=9, \end{cases}$$
найдемъ $x_1=6$, $y_1=1{,}5$; $x_2=1{,}5$, $y_2=6$.

Еще примѣръ; имѣя систему:
$$\begin{cases} x+y=4 \\ \dfrac{x^3+y^3}{7}=\dfrac{40}{x^2+y^2} \end{cases}$$
и полагая $x+y=m$, $xy=n$, получимъ новую систему:
$$\begin{cases} m=4 \\ \dfrac{4(16-3n)}{7}=\dfrac{40}{16-2n}, \end{cases}$$
откуда $m=4$; $n_1=3$; $n_2=10^1/_3$. Затѣмъ, рѣшивъ системы
$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=4 \\ xy=10^1/_3, \end{cases}$$
опредѣлимъ и всѣ значенія x и y.

Н. С. (Муромъ).

Равносильность уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ.

Два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ называются *равносильными*, если у нихъ всѣ корни общіе, т. е. если всѣ корни одного изъ этихъ уравненій удовлетворяютъ другому уравненію, и въ то же время всѣ корни второго уравненія удовлетворяютъ первому уравненію. Уравненія равносильныя называются также еще *равнозначущими*, или *тождественными*, или *эквивалентными*.

Изложеніе равносильности уравненій въ нѣкоторыхъ учебникахъ алгебры отличается излишнею растянутостью. *Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія* предлагаетъ составителямъ учебниковъ алгебры излагать эту статью „короче“ такимъ образомъ:

„*Уравненія* (1) $P=0$, $PQ=0$ (2), *въ которыхъ* P *и* Q *суть выраженія, содержащія букву* x, *вообще не эквивалентны*“.

„Корень a уравненія (1) *можетъ* и не принадлежать уравненію (2), „ибо онъ *можетъ* обращать выраженіе Q въ ∞ или въ $\frac{0}{0}$, а слѣдовательно *можетъ* и не обращать произведенія PQ въ нуль. Итакъ, уравненіе (1), будучи замѣнено уравненіемъ (2), *можетъ* потерять рѣшенія. Эти потерянныя рѣшенія, если таковыя существуютъ, нужно искать въ рядѣ тѣхъ значеній буквы x, которыя обращаютъ введеннаго „сомножителя Q въ ∞ или въ $\frac{0}{0}$“.

„Далѣе, корень b уравненія (2) можетъ и не принадлежать уравненію (1), ибо то изъ значеній буквъ [1]) x, которое обращаетъ Q въ „нуль и не обращаетъ P ни въ ∞, ни въ $\frac{0}{0}$, непремѣнно обратитъ PQ „въ нуль, а между тѣмъ можетъ и не обращать P въ нуль. Итакъ, „уравненіе (1), будучи замѣнено уравненіемъ (2), *можетъ* пріобрѣсти „лишнія рѣшенія. Ихъ нужно искать въ рядѣ тѣхъ значеній буквъ [2]) „x, которыя обращаютъ Q въ нуль“[3]).

Приведенный изъ *Ж. М. Н. П.* образецъ изложенія теоріи уравненій

$$P=0 \tag{1}$$

и

$$PQ=0, \tag{2}$$

безукоризненъ въ отношеніи краткости, соединенной съ точностью и ясностью, и можетъ быть цѣликомъ помѣщенъ въ любой учебникъ алгебры; необходимо только, чтобы теоріи равносильности уравненій была предпослана теорія неопредѣленныхъ выраженій, какъ это сдѣлано, напримѣръ, въ „Курсѣ дополнительныхъ статей алгебры П. С. Флорова[4])“.

---

[1]) Вѣроятно опечатка, ибо слѣдовало бы сказать: „буквы“. *Примѣч. С. Гирмана.*

[2]) См предыдущее примѣчаніе. *Примѣч. С. Гирмана.*

[3]) *Ж. М. Н. П.* 1892, № 11, отд. 3, стран. 4.

[4]) П. С. Флоровъ. Курсъ дополнительныхъ статей алгебры. М. 1893. § 41, стран. 49–51.

Что же касается теоріи дробныхъ уравненій, то хотя *Ж. М. Н. П.* даетъ далѣе[5]) образецъ изложенія теоріи и такихъ уравненій, но такъ какъ въ томъ образцѣ ничего не говорится о безконечныхъ корняхъ, то я предполагаю теорію дробныхъ уравненій излагать нѣсколько подробнѣе, а именно слѣдующимъ образомъ:

Всякое алгебраическое раціональное дробное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x можетъ быть всегда приведено къ виду:

$$\frac{M}{N} = 0, \tag{3}$$

гдѣ M и N цѣлые относительно x многочлены. Освобождая уравненіе (3) отъ знаменателя, получаемъ уравненіе:

$$M = 0. \tag{4}$$

Чтобы узнать, какіе корни уравненія (3) теряются и какіе посторонніе корни входятъ при замѣнѣ уравненія (3) уравненіемъ (4), надо только въ приведенной выше теоріи уравненій (1) и (2) положить

$$P = \frac{M}{N} \tag{5}$$

и

$$Q = N, \tag{6}$$

тогда

$$PQ = M, \tag{7}$$

Слѣдовательно потерянные корни уравненія (3) надо искать между значеніями x, обращающими множителя Q, т. е. знаменателя N въ ∞ или въ $\frac{0}{0}$. Но такъ какъ N есть цѣлый относительно x многочленъ, то $N = \infty$ только при $x = \infty$, и $N = \frac{0}{0}$ только при $x = \frac{0}{0}$. Такъ какъ $x = \infty$ вообще не удовлетворяетъ уравненію (4), то уравненіе (3) при освобожденіи отъ знаменателя вообще потеряетъ корень $x = \infty$, если таковой имѣетъ; имѣетъ же оно корень $x = \infty$ только, если степень числителя M ниже степени знаменателя N[6]). Что же касается корня $x = \frac{0}{0}$, то, какъ извѣстно, такой корень служитъ признакомъ того, что данное уравненіе есть на самомъ дѣлѣ тождество. Потому, если уравненіе (3) не есть тождество, то оно корня $x = \frac{0}{0}$ не имѣетъ, а слѣдовательно и потерять такого корня при освобожденіи отъ знаменателя не можетъ.

Такъ какъ при освобожденіи уравненія (3) отъ знаменателя ни одинъ изъ конечныхъ и нулевыхъ корней не теряется, то, рѣшая уравненіе (4), получимъ всѣ конечные и нулевые корни уравненія (3), и

---

[5]) *Ж. М. Н. П.* 1892. № 11, отд. 3, стран. 5.

[6]) См. мою статью: „О символѣ: $\frac{\infty}{\infty}$". В. О. Ф. и Э. М. № 235. Стран. 183—185.

кромѣ того могутъ получиться еще посторонніе корни. Ихъ нужно искать между значеніями x, обращающими множителя Q, т. е. знаменателя N въ нуль. Слѣдовательно посторонними корнями будутъ тѣ корни уравненія (4), которые удовлетворяютъ также уравненію:

$$N=0, \tag{8}$$

но уравненію (3) не удовлетворяютъ. Пусть $x=b$ будетъ корень уравненія (4), удовлетворяющій также уравненію (8). Въ такомъ случаѣ при $x=b$ получимъ: $\frac{M}{N}=\frac{0}{0}$. Ищемъ истинное значеніе этой неопредѣленности, сокращая дробь $\frac{M}{N}$ на $x-b$ и затѣмъ полагая $x=b$. Если снова получается $\frac{0}{0}$, то сокращаемъ дробь еще разъ на $x-b$ и продолжаемъ такое сокращеніе до тѣхъ поръ, пока не получимъ наконецъ дроби, которая при $x=b$ обратится въ нуль или въ величину конечную или въ ∞. Нуль укажетъ, что корень $x=b$ надо пріобщить къ искомымъ корнямъ уравненія (3), а величина конечная и ∞ послужатъ признаками того, что коренъ $x=b$ надо отбросить, какъ посторонній.

С. Гирманъ (Варшава).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Еще объ искусственномъ приготовленіи алмазовъ (*Q. Majorana.* Rendiconti Reale Acc. dei Lincei. VI, 141).—Какъ извѣстно уже нашимъ читателямъ*) искусственные алмазы были впервые приготовлены *Moissan*'омъ, который растворялъ уголь въ желѣзѣ при высокой температурѣ и затѣмъ быстро охлаждалъ полученный чугунъ. Подъ вліяніемъ высокой температуры и сильнаго давленія часть угля переходила въ алмазъ. При употребленіи способа Moissan'a неизбѣжно употребленіе желѣза, а потому вопросъ о томъ, достаточно ли высокой температуры и давленія для перехода угля въ алмазъ, остается открытымъ. *Q. Majorana* занялся рѣшеніемъ этого вопроса и послѣ многихъ безплодныхъ попытокъ ему удалось получить непосредственно алмазы изъ угля, не растворяя угля въ желѣзѣ.

Внутри куска стали, стянутаго для большей прочности желѣзными обручами, было сдѣлано цилиндрическое отверстіе, герметически закрывавшееся сверху кускомъ желѣза. Въ цилиндрическомъ пространствѣ двигался вверхъ и внизъ родъ поршня, снабженнаго снизу цилиндрическимъ стальнымъ придаткомъ, къ которому прикрѣплялся кусокъ угля вѣсомъ около 2 g. Надъ поршнемъ помѣщался зарядъ пороха (около 70 g). Непосредственно подъ углемъ находился металлическій кусокъ съ неглубокимъ центральнымъ углубленіемъ, въ которое вдавливался уголь. Всѣ части прибора скрѣплялись зажимами.

*) См. *Р. Прендель.* Искусственные алмазы „В. О. Ф." № 161, стр. 97—*В. Гернетъ.* Искусственные алмазы. „В. О. Ф." № 238, стр. 253.

Сперва при помощи двухъ вольтовыхъ дугъ (токъ въ 100 вольтъ и 23 амперъ) кусокъ угля нагрѣвался до 3000°—4000°; затѣмъ электрической искрой воспламеняли порохъ. Внутри прибора происходилъ взрывъ и разогрѣтый уголь вдавливался въ углубленіе, о которымъ мы говорили, причемъ на каждый cm^2 давила сила въ 50 тоннъ.

Опыты дали хорошіе результаты только съ палочками угля, употребляемыми въ дуговыхъ лампахъ. Чистые сорта угля оказались непримѣнимыми потому, что они очень быстро сгорали. Уголь, имѣвшій до опыта удѣльный вѣсъ 1,52, послѣ опыта удѣльно тяжелѣлъ (2,28). Послѣ обработки его кислотами получались такіе же алмазы, какъ и у Moissan'a.

В. Г.

Аргентаврумъ. По всей вѣроятности читателямъ „Вѣстника" приходилось встрѣчать въ газетахъ свѣдѣнія о томъ, что д-ръ Эммеисъ въ Америкѣ открылъ способъ превращать серебро въ золото и что такимъ образомъ въ нашъ вѣкъ рѣшена, наконецъ, задача, занимавшая алхимиковъ и вмѣстѣ съ задачей о жизненномъ элексирѣ, дающемъ безсмертіе, руководившая ихъ работами.

Свѣдѣнія эти вѣрны лишь отчасти: д-ру Эммеису удалось, вѣроятно, получить особое аллотропическое видоизмѣненіе серебра, приближающееся по своимъ свойствамъ къ золоту, поддающееся ковкѣ и весьма пригодное для различныхъ издѣлій. Послѣ работъ Кэри-Ли, получившаго рядъ аллотропическихъ видоизмѣненій серебра, въ томъ числѣ и золотое серебро, правда очень неустойчивое, при нагрѣваніи переходящее въ обыкновенное серебро, а также и серебро, растворимое въ водѣ,—открытіе Эммеиса не кажется удивительнымъ: если работы Кэри-Ли не привлекли къ себѣ вниманія общей прессы, то причина этого заключается въ томъ, что работы Кэри-Ли пока не имѣютъ никакого практическаго значенія.

Самый способъ полученія „аргентаврума" не опубликованъ д-ромъ Эммеисомъ. Намъ кажется несомнѣннымъ, что его способъ долженъ быть аналогиченъ тѣмъ пріемамъ, которыми пользовался Кэри-Ли для полученія открытыхъ имъ видоизмѣненій серебра. Сущность этихъ пріемовъ заключается въ томъ, что серебро тѣмъ или инымъ способомъ приводится въ весьма раздробленное состояніе; этого можно напримѣръ достигнуть, дѣйствуя на растворъ серебряной соли, напр. ляписа, веществами возстановляющими, подъ дѣйствіемъ которыхъ металлическое серебро выдѣляется въ свободномъ видѣ въ весьма раздробленномъ состояніи. При высушиваніи этого серебра атомы его группируются въ молекулы „золотого серебра" Кэри-Ли. Эммеису, повидимому, удалось получить какое-то весьма устойчивое видоизмѣненіе серебра, быть можетъ сплавъ аллотропическаго видоизмѣненія серебра съ золотомъ. Во всякомъ случаѣ свойства „аргентаврума" близки какъ къ свойствамъ золота, такъ и къ свойствамъ серебра, чѣмъ и объясняется названіе этого вещества. Къ золоту оно настолько близко, что правительство Соединенныхъ Штатовъ принимаетъ его въ уплату наравнѣ съ обыкновеннымъ золотомъ. Къ сожалѣнію въ извѣстныхъ намъ статьяхъ объ „аргентаврумѣ" нѣтъ точныхъ свѣдѣній о свойствахъ этого вещества. Повидимому больше интересуются цѣною новаго продукта, чѣмъ научнымъ его изученіемъ. Слитокъ вѣсомъ въ 7,06 унцовъ (1 унцъ

= 31,103496 гр.), содержащій 65.8% золота и 26% серебра (относительно остальныхъ 8,2% свѣдѣній нѣтъ) обшелся въ 67 долларовъ. Для эксплуатаціи этого открытія образовался уже особый синдикатъ.

Д-ръ Стефанъ Эмменсъ—химикъ, хорошо извѣстный и за предѣлами Нью-Іорка. Онъ членъ Американскаго химическаго общества, членъ международнаго общества электриковъ, изобрѣтатель „эммensита"—сильнаго взрывчатаго вещества и авторъ многихъ научныхъ статей по химіи. Втеченіе уже 19-ти лѣтъ онъ разбитъ параличемъ, не владѣетъ нижними конечностями и передвигается по своей лабораторіи, сидя въ креслѣ на колесахъ. *В. Г.*

Стекло, не проводящее теплоты.—По словамъ „La Nature" стекло, приготовленное изъ 70 частей песку, 25—каолина и 35—соды, является очень плохимъ проводникомъ теплоты: пластинка, толщиною въ 7,6 мм пропускаетъ всего 11—12% тепловыхъ лучей, испускаемыхъ бунзеновской горѣлкой. Анализъ этого стекла показалъ, что оно содержитъ:

Кремневой кислоты	74,6%
Глинозема	8,4
Окиси натрія	15,4
Извести.	0,9
Окиси желѣза	слѣды.

В. Г.

Электрическія явленія въ Сахарѣ.—Во время бурь и сирокко въ Сахарѣ наблюдаются очень рѣзкія электрическія явленія. Если поднять палку вверхъ, то съ конца ея, какъ съ острія, истекаетъ электричество. Если палку замѣнить металлическимъ предметомъ, то замѣтенъ фіолетовый свѣтъ. Съ шерстяныхъ бурнусовъ сыплятся искры, если провесть по нимъ рукой. То же явленіе наблюдается и надъ покрытыми шерстью животными. Запахъ озона слышенъ во все время, пока продолжается сирокко. Подобныя явленія наблюдаются зимою въ нѣкоторыхъ мѣстностяхъ Сѣверной Америки. *Е. Е.*

Кометы въ 1897 году.—Въ прошломъ году наблюдались только двѣ кометы. Обѣ были замѣчены американскимъ астрономомъ *Perrine'омъ* въ обсерваторіи Лика. Первая изъ нихъ, замѣченная 28 іюня (н. с.) оказалась кометой *Arrest'а*, вторая — новая. Въ достаточно сильные телескопы можно было видѣть, что она состоитъ изъ ядра, окруженнаго туманностью, и хвоста. Она находилась сперва въ созвѣздіи Жирафа, затѣмъ прошла черезъ созвѣздія Кассіопеи, Цефея и Дракона. *А.*

Малыя планеты въ 1897 году.—За прошлый годъ открыты всего 8 новыхъ астероидовъ, такъ что число ихъ достигло 433. Вотъ перечень новыхъ малыхъ планетъ:

Обозначеніе		Наблюдатель	Мѣсто и время открытія	
DH	426	Charlois	Ница	25 августа
DI	427	Charlois	Ница	25 августа
DJ	428	Charlois	Ница	25 августа
DK	429	Villiger	Мюнхенъ	19 ноября
DL	430	Charlois	Ница	23 ноября
DM	431	Charlois	Ница	18 декабря
DN	432	Charlois	Ница	18 декабря
DO	433	Charlois	Ница	18 декабря

Изъ 433 малыхъ планетъ 94 были открыты Charlois, 83—австрійскимъ астрономомъ Palisa, 48—американцемъ Peters'омъ, 40—Max'омъ Wolf'омъ въ Гейдельбергѣ. *А.*

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Расширеніе стекла при нагрѣваніи.—*А. Campbell* демонстрировалъ недавно въ Лондонскомъ Физическомъ Обществѣ слѣдующій весьма простой опытъ, доказывающій одновременно и расширеніе стекла при нагрѣваніи, и плохую теплопроводность стекла. Длинная стеклянная трубка укрѣпляется снизу въ вертикальномъ положеніи и затѣмъ нагрѣвается пламенемъ бунзеновской горѣлки вблизи основанія. Тотчасъ же она искривляется въ сторону, противоположную той, гдѣ она нагрѣвалась вслѣдствіе расширенія нагрѣтой стѣнки. Если удалить горѣлку, то трубка быстро возвращается къ первоначальному положенію

В. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ 1897 году исполнилось 100 лѣтъ со времени постройки перваго хронометра: онъ былъ сдѣланъ часовщикомъ *Thomas'омъ Earshaw'емъ* и мало отличался отъ употребляемыхъ теперь

Г. *Mac Cleam* пожертвовалъ Капштадтской Обсерваторіи 35000 франковъ на установку новаго большого телескопа, пользуясь которымъ онъ намѣренъ продолжать спектроскопическія изслѣдованія, начатыя имъ въ своей частной обсерваторіи. Телескопъ скоро прибудетъ въ Капштадъ

Недавно открыто телефонное сообщеніе между Берлиномъ и Буда-Пештомъ.

Для физическаго кабинета Гарвардскаго Университста (С. А. Соединенные Штаты) построена баттарея изъ 10000 аккумуляторовъ. Она даетъ токъ въ 8 амперъ при 20000 вольтъ.

Послѣднее солнечное затменіе 10 января наблюдалось во многихъ мѣстахъ при весьма благопріятныхъ обстоятельствахъ Въ Калькуттѣ во время середины полнаго затменія темнота была такою, какъ ночью при полнолуніи.

Двумъ американскимъ офицерамъ удалось недавно воспользоваться ночью бумажными змѣями для передачи сигналовъ на разстояніе 13 километровъ. Для этого къ шнурамъ змѣевъ прикрѣплялись цвѣтные фонари и поднимались на высоту 150 метровъ. Особые шнурки давали возможность упраглять фонарями.

На всей землѣ, если вѣрить „La Nature", насчитываютъ 1400000 телефонныхъ абонентовъ, распредѣленныхъ по различнымъ странамъ слѣдующимъ образомъ: Англія 75000, Ангола 200, Австралія 2000, Австрія 20000, Баварія 15000, Бельгія 11000, Болгарія 300, Венгрія 10000, Вюртембергъ 7000, Германія 140000, Голландія 12000, Испанія 12000, Италія 14000, Кохинхина 200, Куба 2500, Люксембургъ 2000, Мысъ Доброй Надежды 600, Норвегія 16000, Португалія 2000, Россія съ Финляндіей 24000, Румынія 400, Сенегалъ 100 Соединенные Штаты 900000, Тунисъ 300, Франція 35000. Швейцарія 50000, Японія 3500 Почему то въ списокъ не вошла Швеція, гдѣ телефонное сообщеніе весьма распространено.

За январь мѣсяцъ въ Парижѣ выпало всего 5 мм. атмосферныхъ осадковъ. За послѣдніе 209 лѣтъ 6 разъ наблюдалась въ январѣ большая засуха въ Парижѣ: въ 1691, 1779, 1795, 1810 гг. осадковъ вовсе не было, въ 1730 ихъ выпало 1, 5 мм., а въ 1694—3 мм.

Въ теченіи послѣднихъ мѣсяцевъ во многихъ мѣстахъ произошли землетрясенія. Перечисляемъ главнѣйшія изъ нихъ.

Въ ночь со 2-го на 3-е ноября прошлаго года (н. с.) наблюдалось землетрясеніе на всемъ Мадагаскарѣ. Первый толчекъ произошелъ въ Тананаривѣ въ 1 ч. 35 м., за нимъ слѣдовали 4 толчка до 3 ч. 55 м. Толчки продолжались и на слѣдующій день.

18 декабря въ 8 ч. 30 м. утра сильное землетрясеніе произошло въ Читта-

динестелло и въ Перузѣ въ Италіи. Стѣны многихъ домовъ потрескались, дымовыя трубы разрушились, колокола звонили. Землетрясеніе это было отмѣчено сейсмографами въ Римѣ и нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ.

6 января городъ Амбоинъ на осторовѣ того же имени, принадлежащемъ къ группѣ Молукскихъ островов, былъ совершенно разрушенъ сильнымъ землетрясеніемъ 50 человѣкъ были убиты и 200 ранено.

22 января въ Дарданелахъ чувствовались три сильныхъ подземныхъ толчка. Колебанія почвы шли съ сѣвера на югъ.

26 января и 1 февраля произошли землетрясенія въ нѣкоторыхъ мѣстностяхъ Вандеи. Землетрясенія эти вызвали панику населенія.

8 февраля сильнымъ землетрясеніемъ были произведены опустошенія въ Аргентинѣ.

9 февраля въ 11 час. вечера въ Гельмѣ (Алжиръ) чувствовалось сильное сотрясеніе почвы, продолжавшееся 12 секундъ.

5 февраля (н. с.) скончался въ Парижѣ 69 лѣтъ отъ роду основатель извѣстной издательской фирмы *Gauthier-Villars et fils—Jean-Albert Gauthier Villars*. Онъ родился въ Lons-le-Saunier (Jura) и былъ сыномъ типографа въ этомъ городѣ. Въ 1850 году онъ окончилъ Политехническую Школу со званіемъ инженера телеграфовъ. Онъ участвовалъ въ Крымской и Итальянской кампаніяхъ, устраивая походные телеграфы. Послѣ битвы при Новарѣ въ 1859 году онъ получилъ крестъ почетнаго легіона. Въ 1864 году онъ сталъ владѣльцемъ издательской фирмы Mallet-Bachelier и съ тѣхъ поръ неустанно совершенствовалъ и развивалъ дѣятельность своей типографіи. Онъ отличался рѣдкой пунктуальностью: еженедѣльные отчеты Парижской Академіи Наукъ, печатающіеся у Gauthier-Villars, ни разу не запоздали ни на часъ выходомъ въ свѣтъ, не смотря ни на бунты, ни на стачки, ни на осаду Парижа. Въ его же типографіи были отпечатаны 14 томовъ сочиненій Лагранжа, 13—Лапласа, 28—Коши, 2—Фурье, 3—Фермата и т. д.

ЗАДАЧИ.

№ 481. Рѣшить уравненіе:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 482. Положивъ

$$S_1=1+2+3+\ldots+n,$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2,$$

найти предѣлъ отношенія $\frac{S_2{}^2}{S_1{}^3}$ при $n=\infty$.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 483. Найти два числа, зная, что сумма частныхъ, полученныхъ отъ дѣленія каждаго изъ нихъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, равна 18, и что ихъ наименьшее кратное равно 975.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 484. Пусть $f(x)$ есть цѣлый относительно x многочленъ съ цѣлыми коэффиціентами.

Доказать, что $f(5)$ дѣлится безъ остатка на 6, если $f(2)$ и $f(3)$ дѣлятся безъ остатка на 6.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 485. Двѣ равныя окружности пересѣкаются въ точкѣ M такъ, что касательныя къ нимъ въ этой точкѣ перпендикулярны. Черезъ точку M провести прямую AB, пересѣкающую окружности въ точкахъ A и B такъ, чтобы хорды AM и MB удовлетворяли уравненію

$$\frac{1}{MA^2}-\frac{1}{MB^2}=\frac{1}{l^2},$$

гдѣ l есть данный отрѣзокъ.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 486. Каково должно быть внѣшнее сопротивленіе x цѣпи, чтобы можно было безразлично соединять n элементовъ, послѣдовательно или параллельно? Внутреннее сопротивленіе элемента $=r$.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 374 (3 сер.). На прямой данъ рядъ точекъ $A, B, C, D, \ldots$ на произвольныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга и дана точка S внѣ прямой. Точку S соединяемъ съ $A, B, C, D\ldots$ прямыми и откладываемъ равные углы $SAA', SBB', SCC', SDD', \ldots$ въ одну и ту же сторону. Наконецъ, откладываемъ отрѣзки $AA', BB', CC', DD', \ldots$, соотвѣтственно пропорціональные отрѣзкамъ $SA, SB, SC, SD, \ldots$ Показать, что

1) точки $A', B', C' D'$ лежатъ на одной прямой;

2) отрѣзки $A'B', B'C', C'D', \ldots$ соотвѣтственно пропорціональны отрѣзкамъ $AB, BC, CD, \ldots$.

1) Проведемъ черезъ точку S прямую, образующую съ данной прямой уголъ, равный общей величинѣ угловъ $SAA', SBB', \ldots$. Назовемъ этотъ уголъ черезъ SMM', и пусть отрѣзокъ данной прямой MM удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{MM'}{SM}=\frac{AA'}{SA}=\frac{BB'}{SB}=\ldots\ldots \qquad (1)$$

Изъ равенства угловъ SMM' и SAA' въ связи съ первымъ изъ равенствъ (1) вытекаетъ подобіе треугольниковъ SMM' и SAA', а изъ ихъ подобія заключаемъ о равенствѣ угловъ MSM' и ASA'; изъ равенства же этихъ угловъ слѣдуетъ, что $\angle MSA=\angle M'SA'$. Такъ какъ, кромѣ того, изъ подобія треугольниковъ MSM' и ASA' слѣдуетъ, что

$$\frac{MS}{M'S}=\frac{AS}{A'S},$$

то и треугольникии MSA и $M'SA'$ подобны. Изъ ихъ подобія слѣдуетъ, что $\angle SMA'$ равенъ углу SMM', откуда видно, что точка A', лежитъ на прямой, проходящей черезъ точку M' подъ угломъ, равнымъ углу SMM'; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и точки $C', D'\ldots$ лежатъ на одной прямой.

2) Изъ подобія тѣхъ же треугольниковъ MSA и $M'SA'$ находимъ:

$$\frac{M'A'}{MA}=\frac{SM'}{SM}$$

и такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{SM'}{SM}=\frac{M'B'}{MB}=\frac{M'C'}{MB}=\frac{M'D'}{MD}\ldots,$$

такъ что

$$\frac{SM'}{SM}=\frac{M'A'}{MA}=\frac{M'B'}{MB}=\frac{M'C'}{MC}=\ldots,$$

откуда

$$\frac{SM'}{SM}=\frac{M'B'-MB}{M'A'-MA}=\frac{M'C'-M'B'}{MC-MB}=\ldots, \text{ т. е.}$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\ldots=\frac{SM'}{SM}.$$

М. Огородовъ (Сарапуль); *М. Зиминъ* (Орелъ); *П. Соловьевъ* (Нижній-Новгородъ).

№ 380 (3 сер.). Двѣ равныя окружности съ центрами A и B касаются другъ друга въ точкѣ C, черезъ которую проведена къ нимъ общая касательная MN. На обѣихъ окружностяхъ отъ точки C симметрично прямой MN отложены дуги CD и CE, равныя каждая 120^0. Затѣмъ проведены еще двѣ окружности, изъ которыхъ первая касается окружности A въ точкѣ D и прямой MN въ нѣкоторой точкѣ H, а вторая симметрична съ первой относительно прямой MN. Показать, что площадь криволинейной фигуры $HDCE$, ограниченной дугами четырехъ окружностей, равна

$$\frac{r^2}{3}\left(24\sqrt{3}-11\pi\right),$$

гдѣ r есть радіусъ каждой изъ окружностей, имѣющихъ центры въ точкахъ A и B.

Пусть O будетъ центръ окружности, касающейся окружности A въ точкѣ D и прямой MN въ точкѣ H; радіусъ окружности O обозначимъ черезъ R. Опустивъ перпендикуляръ AP на радіусъ OH, найдемъ, принимая во вниманіе, что $\angle OAP=30^0$:

$$OP=\frac{OA}{2}=\frac{R+r}{2}=OH-PH=R-r,$$

откуда

$$R=3r.$$

Изъ треугольника OAP найдемъ:

$$AP=\frac{OA\sqrt{3}}{2}=\frac{(R+r)\sqrt{3}}{2}=2r\sqrt{3}=CH. \text{ Далѣе безъ труда получимъ:}$$

$$\text{площадь трапеціи } ACHO = 4r^2\sqrt{3},$$

$$\text{площадь сектора } DAC = \frac{\pi r^2}{3},$$

$$\text{площадь сектора } DOH = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{9\pi r^2}{6}.$$

Слѣдовательно площадь, ограниченная дугами DH, DC и отрѣзкомъ HC, равна

$$4r^2\sqrt{3} - \left(\frac{\pi r^2}{3} + \frac{9\pi r^2}{6}\right) = 4r^2\sqrt{3} - \frac{11\pi r^2}{6}.$$

Площадь же криволинейной фигуры $HDCE$ равна

$$2\left(4r^2\sqrt{3} - \frac{11\pi r^2}{6}\right) = \frac{r^2}{3}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right).$$

А. Шверцель (Курскъ); *А. Игнатовъ* (Тула); *С. Фотіевъ* (Тула); *С. Фридрихъ* (Ковно); *П. Соловьевъ* (Н.-Новгородъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 448 (3 сер.). Показать, что отношеніе отрѣзка MX, соединяющаго произвольную точку X окружности съ серединой M стороны квадрата, вписаннаго въ ту же окружность, къ отрѣзку, соединяющему M съ серединой N радіуса, проведеннаго въ точку X, равно $\sqrt{2}$.

Пусть O—центръ окружности. Изъ треугольника OMX имѣемъ:

$$MX^2 + OM^2 = 2MN^2 + 2NX^2.$$

Но, такъ какъ

$$OM^2 = \left(\frac{OX}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = (NX\sqrt{2})^2 = 2NX^2,$$

то

$$MX^2 = 2MN^2,$$

откуда

$$\frac{MX}{MN} = \sqrt{2}.$$

И. Поповскій (Умань); *Е. Ивановъ* (Новочеркасскъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *Евдокимовъ*; *В. Шатуновъ* (Полтава); *Н. Крыловъ* (д. Плахтянка); *А. Евлаховъ* (Владикавказъ); *Сибирякъ* (Томскъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

1897. — № 5.

Assemblée générale annuelle de la Société Astronomique de France. Discours de M. Janssen.

Progrès et travaux de la Société. *M. Flammarion.* Труды членовъ Астрономическаго Общества помѣщались на страницахъ Bulletin'я и были слѣд. реферированы.

За истекшій 1896 г. число членовъ Общества возрасло съ 1133 до 1305, а ко дню годичнаго отчета (7 апр.) до 1640. Въ истекшемъ году Общество признанно общеполезнымъ и какъ таковое получило нѣкоторыя права, напр. получать завѣщанныя имущества, дары и т. д. По иниціативѣ m-me Фламмаріонъ устроена подписка; на % съ собраннаго капитала ежегодно будетъ выдаваться «дамская премія»; первая такая премія въ видѣ позолоченной медали присуждена m-lle Klumpke, доктору математическихъ наукъ, завѣдующей фотографическими измѣреніями въ Парижской Обсерваторіи.

L' observatoire de l'Etna par M. N. Faye. Обсерваторія, построенная на Этнѣ проф. Таччини и пострадавшая отъ изверженія 1886 г., реставрирована въ 1891 г. Въ настоящее время она снабжена экваторіаломъ въ 5,5 метра фокуснаго разстоянія и разными метеорологическими приборами; наблюденія ведутся правильно за исключеніемъ зимы. Обсерваторія помѣщается на высотѣ въ 2942 метра надъ уровнемъ моря, въ 4-хъ килом. отъ главнаго кратера. Средняя годичная темп. $0,^{0}4$, средняя для лѣта $+7,^{0}3$, для зимы $-6,^{0}6$. Замѣчательно, что Обсерваторія ни разу не пострадала отъ молніи, хотя она не имѣетъ громоотвода, куполъ же и крыша у нея металлическіе. По мнѣнію Фая, защитой служитъ столбъ дыма и пара надъ главнымъ кратеромъ, играющій роль громоотвода.

Observations sur la planète Mars. *Perrotin.* На основаніи наблюденій надъ Марсомъ, произведенныхъ въ Медонской Обсерваторіи съ 7 декабря по 10 января при помощи экваторіала съ объективомъ въ 0,83 м. и фок. разст. 16 м. и сопоставленія ихъ съ предыдущими за 10 лѣтъ Perrotin приходитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

1) Всю поверхность Марса по особенностямъ внѣшняго вида можно раздѣлить на 4 неодинаковой величины почти параллельныхъ экватору пояса: первый, шириною $60^{0}-80^{0}$, большей частью лежитъ въ С. полушаріи; это поясъ каналовъ, открытыхъ Скіапарелли; цвѣтъ его красноватый; второй, шириною $40^{0}-45^{0}$, почти весь расположенъ въ Ю. полушаріи; въ немъ находится большая часть т. наз. морей; цвѣтъ его сѣроватый; материки красноватаго цвѣта, но гораздо свѣтлѣе, чѣмъ въ первомъ поясѣ; третій и четвертый поясы примыкаютъ къ полюсамъ обоихъ полушарій; цвѣтъ материковъ бѣлый, вблизи морей сѣроватый.

2) На одинаковомъ разстояніи отъ центра диска детали не одинаково отчетливо видны въ различныхъ поясахъ: каналы отчетливѣе всего видны близъ середины диска, детали морей хорошо видны и на большомъ разстояніи отъ центра, но наилучшія условія видимости—близъ полюсовъ.

3) За исключеніемъ тѣхъ измѣненій, которыя обусловливаются временами года, конфигурація Марса остается въ общихъ чертахъ постоянной; временныя измѣненія замѣчаются чаще всего въ первыхъ двухъ поясахъ, особенно въ мѣстахъ, центрами коихъ служатъ Либія и Lacus Solis.

4) Пятиугольный Elysium, расположенный въ первомъ поясѣ, кажется всегда свѣтлѣе окружающей мѣстности и какъ будто выпуклымъ. Къ загадочнымъ явленіяыъ относится случай, замѣченный 10 янв.: два моря пересѣкаются, но сохраняютъ и послѣ пересѣченія ту окраску, которую каждое изъ нихъ имѣло до пересѣченія.

Remarques sur la communication précédente *par M. J. Janssen.* То обстоятельство, что съ приближеніемъ къ полюсамъ видимость деталей усиливается, по мнѣнію Жансена, служитъ косвеннымъ подтвержденіемъ доказаннаго имъ при помощи спектральнаго анализа присутствія въ атмосферѣ Марса водяныхъ паровъ, которые, осаждаясь съ пониженіемъ температуры; усиливаютъ прозрачность атмосферы.

Hauteurs annuelles de pluie à Paris. *C. F.* Изъ сопоставленія плювіометрическихъ наблюденій въ Парижѣ съ 1689 г. по сіе время (было три промежутка безъ наблюденій) можно вывести заключеніе, что количество выпадающаго дождя увеличивается

Rapport sur un ouvrage de M. le colonel du Ligondès intitulé: „Formation mécanique du système du Monde“ *par. M. Maurice Fouché.* Космогоническія теоріи Канта и Лапласа по мѣрѣ роста науки становились все болѣе и болѣе недостаточными, не будучи въ состояніи объяснить всѣхъ вновь открытыхъ явленій, поэтому Фай видоизмѣнилъ ихъ съ цѣлью объяснить большее число явленій, но всетаки наклоненіе осей вращенія планетъ, происхожденіе первоначальныхъ кругообразныхъ движеній и законъ Боде оставались необъясненными. Лижонде снова взялся за гипотезу Канта и видоизмѣнилъ ее, что и составляетъ содержаніе вышеуказаннаго сочиненія (Paris, Gauthier-Villars, 1897, pr. 5 fr.). Суть гипотезы Лижонде, согласно Фуше, въ слѣдующемъ.

Въ первичномъ приблизительно шарообразномъ клочкѣ туманности, послужившей для образованія солнечной системы, частицы двигались по всевозможнымъ направленіямъ; вслѣдствіе недостатка симметріи и вслѣдствіе столкновеній туманность мало по малу приняла видъ сплюстнутаго диска; изъ различныхъ движеній мало по малу удержались только круговыя, такъ какъ при другихъ частицы чаще сталкивались и падали къ центру притяженія; изъ двухъ круговыхъ движеній въ прямо противоположныхъ направленіяхъ опять-же вслѣдствіе столкновеній—удержалось въ концѣ концовъ одно преобладающее.

Неравномѣрное распредѣленіе плотности, существованіе maximum'овъ въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, повело къ разложенію диска на отдѣльныя кольца, каждое изъ которыхъ послужило матеріаломъ для образованія планеты съ ея спутниками. Старѣйшими планетами оказываются Юпитеръ и Нептунъ; послѣднимъ образовалось солнце.

Направленіе вращенія и положеніе оси планеты зависитъ отъ того, каково было притяженіе во время и въ мѣстѣ образованія ея: въ первоначальной туманности притяженіе было прямо пропорціонально разстоянію отъ центра и потому, будучи нулемъ въ центрѣ, оно увеличивалось съ удаленіемъ отъ него, достигало нѣкотораго maximum, а далѣе снова уменьшалось; планеты, образовавшіяся по разныя стороны этого пояса maximum'а, должны вращаться въ противоположныя стороны. По мѣрѣ сгущенія поясъ maximum'а приближался къ центру и потому возможно, что начало образованія какой-нибудь планеты происходило при одномъ направленіи вращенія, конецъ же при другомъ; въ результатѣ получалось измѣненіе какъ продолжительности вращенія, такъ и положенія оси.

Запасъ всей тепловой энергіи, который можно располагать, слагается не только изъ работы тяготѣнія но и изъ превращенія живой силы сталкивающихся частицъ въ теплоту.

Работа Лижонде далеко не рѣшаетъ всѣхъ вопросовъ и самимъ авторомъ считается только очеркомъ, но, не смотря на то, она содержитъ немало новыхъ и плодотворныхъ мыслей и можетъ служить хорошимъ пособіемъ для лицъ, интересующихся этимъ вопросомъ.

Nouvelles de la Science. Variétés.
Le ciel du 8 Mai au 15 Juin.

К. С. (Умань).

Присланы въ редакцію книги и брошюры:

62. Д-ръ мед. *Р. Кацъ*. **Очки, ихъ польза и вредъ.** Съ 7 рис. въ текстѣ. СПБ. 1897. Цѣна 50 к.

63. **Slavnost pořádaná na pamět třistaletých narozenin Renéa Descartesa v Praze dne 6 prosince 1896.** V Praze. Nákladem Jednoty česk. mathematikû. 1897. (3 экз.).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Р. Рейна* (Поневѣжъ) 446, 468 (3 сер.); *С. Адамовича* (Двинскъ) 441. 442, 452, 456, 462, 464, 468, 470, 472, 473 (3 сер.); *К. Зновицкаго* (Кіевъ) 440, 441, 442, 468 (3 сер.); *М. Огородова* (Сарапулъ) 416, 418, 464 (3 сер.); *А. Евлахова* (Владикавказъ) 378, 416, 441, 448, 465, 472 (3 сер); *Н. Крылова* (д. Плахтянка) 444, 448, 453, 455, 462, 464 (3 сер); *В. Шатунова* (Полтава) 416 (3 сер.); *Я. Теплякова* (Кіевъ) 416 (3 сер.); *С. Розенблата* (Житоміръ) 464 (3 сер.); *Б. Маллачи-Хана* (Т.-Х.-Шура) 415 (3 сер.); *В. Аврамова* (Житоміръ) 440, 441 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 365, 524 (1 сер.); 68 (2 сер.); 111, 468, 469, 472, 473 (3 сер.); *Л. Магазаника* (Бердичевъ) 469, 470, 473, 474 (3 сер.); *Сибиряка* (Томскъ) 448, 455, 472, 474 (3 сер).; *Л. Гринберга* (Юрьевъ) 400 (3 сер.); *Юргенсона* (Юрьевъ) 440, 441, 442 (3 сер.).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою. Одесса, 23-го Февраля 1898 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется