Обложка
пщется

Обложка
пщется

XIX Сем. 1-го сентября 1895 г. № 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 218.

СОХРАНЕНІЕ и ПРЕВРАТИМОСТЬ ЭНЕРГІИ.

(Продолженіе).*

§ 13. *Воротъ.* При равновѣсіи силъ на воротѣ $q:Q = R:r$, гдѣ R и r радіусы вала и колеса. При каждомъ оборотѣ ворота на валъ наматывается кусокъ веревки, равный окружности вала, т. е. $2\pi R$, а съ колеса сматывается кусокъ веревки, равный окружности колеса $2\pi r$. Слѣд. въ то время, когда грузъ Q подымается на высоту $2\pi R$, грузъ q опускается на высоту $2\pi r$. Итакъ $H:h = 2\pi R:2\pi r = R:r$. Сравнивая эту пропорцію съ предыдущей, найдемъ: $q:Q = H:h$, откуда $QH = qh$.

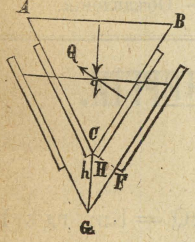
§ 14. *Зубчатое колесо.* При равновѣсіи силъ на зубчатомъ колесѣ $q:Q = RR_1:rr_1$ (R и R_1 радіусы вала и шестерни, r и r_1 радіусы большихъ колесъ). Въ то время, какъ валъ дѣлаетъ одинъ оборотъ, каждая точка его поверхности описываетъ путь, равный окружности сѣченія вала, т. е. $2\pi R$. Каждая точка окружности зубчатаго колеса описываетъ въ это время путь, равный окружности колеса $2\pi r$. Каждая точка окружности шестерни описываетъ такой же путь, какъ и каждая точка окружности зубчатаго колеса, слѣд. тоже $2\pi r$. Каждая точка гладкаго колеса описываетъ путь, большій, чѣмъ каждая точка окружности шестерни, во столько разъ, во сколько радіусъ гладкаго колеса r больше радіуса шестерни R_1, т. е. $x:2\pi r = r_1:R_1$, $x = \frac{2\pi rr_1}{R_1}$. Поэтому въ то время, какъ на валъ намотается кусокъ веревки $2\pi R$, съ гладкаго колеса смо-

*) См. „В. О. Ф.“ № 217.

тается кусокъ веревки $\frac{2\pi rr_1}{R_1}$. Слѣд. $H:h = 2\pi R: \frac{2\pi rr_1}{R_1} = RR_1:rr_1$. Сравнивая эту пропорцію съ первой, найдемъ $q:Q = H:h$ и $qh = QH$.

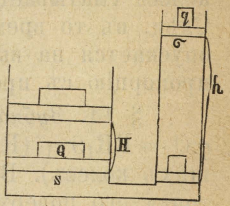
§ 15. *Винтъ*. На винтѣ $q:Q = h:c$, гдѣ h высота винтового хода, а c—окружность винта. Во время одного оборота винта грузъ Q подымется на высоту h. Точка приложенія силы q опишетъ путь c. Какую работу произведетъ эта сила? Направленіе этой силы мѣняется въ каждый моментъ, но она всегда остается направленной по касательной къ окружности винта и слѣд. всегда совпадаетъ съ направленіемъ, по которому движется въ этотъ моментъ точка приложенія ея. Мы имѣемъ, слѣдовательно, случай работы силы, совпадающей съ направленіемъ пути; работа ея равна qc. Изъ написанной выше пропорціи имѣемъ прямо $qc = Qh$.

§ 16. *Клинъ*. Предположимъ, что работа клина состоитъ въ раздвиганіи двухъ досокъ, которыя расположены симметрично и съ постоянной силой Q прижимаются къ его бокамъ. Клинъ расположенъ такъ, что бока его одинаково наклонены къ вертикальной плоскости (фиг. 9). На него положенъ грузъ q, который продвигаетъ клинъ внизъ на разстояніе h, раздвигая доски на разстояніе H, считая по направленіямъ, перпендикулярнымъ къ бокамъ клина. Сила q производитъ работу qh. Каждая изъ силъ Q производитъ отрицательную работу—QH, обѣ—2QH. По закону клина $q:Q = AB:BC$. Изъ подобія треугольниковъ BDC и CFG $BD:BC = CF:GC = H:h$; но $AB = 2BD$, слѣд. $AB:BC = 2H:h$. Сравнивая эту пропорцію съ первой, найдемъ что $q:Q = 2H:h$ и $qh = 2QH$.



Фиг. 9.

§ 17. *Гидравлическій прессъ*. По закону гидравлическаго пресса $q:Q = \sigma:s$ (σ и s площади малаго и большого поршней). Когда поршень съ грузомъ опускается на высоту h (фиг. 10), онъ вытѣсняетъ изъ праваго колѣна объемъ воды σh. Эта вода переходитъ въ лѣвое колѣно и подымаетъ поршень съ грузомъ Q. Лѣвый поршень подымется на такую высоту H, чтобы объемъ воды, который подъ нимъ освободится, равнялся σh. Слѣд. $sH = \sigma h$, или $\sigma:s = H:h$. Сравнивая эту пропорцію съ первой, найдемъ $q:Q = H:h$ и $qh = QH$.



Фиг. 10.

§ 18. Итакъ, ни одна простая машина не можетъ измѣнить величины работы, и работа двигателя всегда равна по абсолютной величинѣ работѣ сопротивленія. Въ такомъ случаѣ и сложная машина не можетъ измѣнить величины работы, такъ какъ состоитъ изъ частей, которыя не измѣняютъ ея. Для примѣра разсмотримъ зубчатое колесо, какъ сложную машину. Она состоитъ изъ двухъ воротовъ: одинъ воротъ составляютъ валъ съ зубчатымъ колесомъ; на валъ дѣйствуетъ грузъ Q и на зубчатое колесо давленіе шестерни p; другой воротъ состоитъ изъ шестерни и гладкаго колеса; на шестерню дѣйствуетъ давленіе зубчатаго колеса p_1 и на гладкое колесо грузъ q. Сила p служитъ двигателемъ въ первомъ воротѣ, сила p_1 — сопротивленіемъ во второмъ. Для того, чтобы сложная машина была въ равновѣсіи, нужно, чтобы каждый воротъ отдѣльно былъ въ равновѣсіи и чтобы силы, дѣйствующія въ точкахъ сцѣпленія p и p_1, были равны.

Такъ какъ силы Q и p уравновѣшиваются на воротѣ, то

$$T_Q = T_p.$$

Такъ какъ силы p и p_1 равны, то

$$T_p = T_{p_1}.$$

Такъ какъ силы p_1 и q уравновѣшены на воротѣ, то

$$T_{p_1} = T_q.$$

Отсюда

$$T_Q = T_q.$$

Какую бы сложную машину мы ни взяли, разсматривая ее подобнымъ образомъ, всегда прійдемъ къ такому ряду равенствъ, который даетъ намъ равенство между крайними членами.

III. Уравненіе живыхъ силъ.

§ 19. Инерція движущагося тѣла проявляется какъ сила, лишь только тѣло встрѣчаетъ сопротивленіе своему движенію. Такъ пуля пробиваетъ доску и преодолѣваетъ при этомъ сцѣпленіе частицъ доски. Движущіяся частицы воздуха вращаютъ крылья вѣтряной мельницы, преодолѣвая сопротивленіе тренія жернововъ и зеренъ и частей механизма. Сила инерціи движущагося тѣла вычисляется по массѣ его и ускоренію (которое отрицательно, такъ какъ скорость уменьшается): $p = am$. Не трудно такъ же вычислить работу, производимую этой силой, если a, а слѣд. и преодолѣваемое сопротивленіе, постоянны. Въ этомъ случаѣ движеніе тѣла будетъ равномѣрно-замедленное. Пусть будетъ v_0 начальная скорость тѣла, v—конечная скорость,—a—ускореніе, t—время, s—разстояніе и T—работа силы инерціи. Тогда $T = ps$; $p = am$; $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$; $v = v_0 - at$. Изъ послѣдняго уравненія $t = \frac{v_0 - v}{a}\cdot$ Подставляя въ формулу для s, получимъ

$$s = \frac{v_0^2 - v_0 v}{a} - \frac{a(v_0 - v)^2}{2a^2} = \frac{2v_0^2 - 2v_0 v - v_0^2 + 2v_0 v - v^2}{2a} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$$

$$T = am\frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}.$$

Итакъ, окончательное выраженіе работы силы инерціи движущагося тѣла такое:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \quad \text{. . . . . (3)}$$

Сила инерціи можетъ производить работу до тѣхъ поръ, пока тѣло не остановится. Тогда $v = 0$ и $T = \frac{mv_0^2}{2}\cdot$ Значитъ $\frac{mv_0^2}{2}$ представляетъ наибольшую работу, какую способна произвести сила инерціи тѣла, движущагося со скоростью v_0. Эта работа называется живой силой движущагося тѣла; $\frac{mv^2}{2}$ выражаетъ, очевидно, живую силу, какая остается еще въ тѣлѣ, когда оно имѣетъ скорость v. Уравненіе (3) показываетъ, что *работа, производимая силой инерціи движущагося тѣла, равна убыли живой силы*. Оно называется *уравненіемъ живыхъ силъ*.

§ 20. Если перемѣнимъ знаки въ уравненіи (3), получимъ:

$$-T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = T_1.$$

T_1 представляетъ здѣсь работу силы, противодѣйствующей силѣ инерціи, т. к. эта сила должна быть равна и противоположна силѣ инерціи. Слѣд. работа внѣшней силы равна приращенію живой силы.

Если тяжелое тѣло брошено вертикально вверхъ, сила тяжести его производитъ отрицательную работу ($T_1 < 0$), а сила инерціи—положительную ($T > 0$); живая сила уменьшается и уменьшеніе ея равно производимой работѣ. Если тѣло свободно падаетъ, сила тяжести производитъ положительную работу, а сила инерціи отрицательную; живая сила увеличивается и приращеніе ея равно работѣ, производимой силой тяжести.

B. Кинетическая и вѣсовая энергіи.

I. Понятіе объ энергіи.

§ 21. Положимъ, что тѣло, котораго масса m килогр., брошено вертикально вверхъ со скоростъю v_0 метровъ въ секунду. Въ тотъ моментъ, когда было брошено, тѣло обладало живой силой $\frac{mv_0^2}{2}$. Остановившись на высотѣ h, тѣло потеряло всю свою живую силу на преодолѣваніе своего вѣса; утратило ли оно свою способность производить работу?—Мы знаемъ, что всякое поднятое тѣло, дѣйствуя на какую либо машину: на плечо рычага, веревку блока, ворота, зубчатаго колеса и др., можетъ подъ дѣйствіемъ своего вѣса произвести работу, которая всегда равна произведенію вѣса тѣла на высоту, т. е. mgh, что по уравненію живыхъ силъ равно $\frac{mv_0^2}{2}$. Итакъ, поднятое тѣло способно производить работу подобно движущемуся тѣлу; но способность эта зависитъ не отъ движенія его, а отъ особаго положенія относительно земли: оно можетъ падать и преодолѣвать препятствія паденію. Способность производить работу, отъ чего бы она ни зависѣла, отъ движенія, или отъ особаго положенія, называется *энергіей*. Энергія 1-го рода называется энергіей движенія, или *кинетической энергіей*; энергія 2-го рода—энергіей положенія, или *потенціальной энергіей*. Потенціальныя энергіи различаются по роду силы, отъ которой зависятъ. Энергія поднятаго тѣла называется *вѣсовой энергіей*. Энергія, какъ величина, представляетъ всю работу, которую тѣло способно произвести.

Поэтому кинетическая энергія измѣряется живой силой, вѣсовая энергія поднятаго тѣла—произведеніемъ вѣса тѣла на высоту.

II. Передача энергіи.

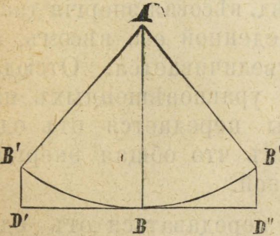
§ 22. При изученіи работы машинъ мы видѣли, что положительная работа двигателя и отрицательная работа сопротивленія равны между собой по абсолютной величинѣ. Но если грузъ q, служащій двигателемъ, произвелъ положительную работу qh, опустившись на h метровъ, то вѣсовая энергія его уменьшилась на qh килограммометровъ, потому что вѣсовая энергія измѣряется произведеніемъ вѣса тѣла на высоту. Если грузъ Q, служащій сопротивленіемъ, поднялся на H метровъ, вѣсовая энергія его возраслана QH килограммом. Слѣд. вѣсовая энергія двигателя уменьшается на величину работы, произведенной его вѣсомъ, а вѣсовая энергія сопротивленія на столько же увеличивается. Отсюда заключаемъ, что при всякомъ движеніи грузовъ, уравновѣшенныхъ на одной изъ машинъ, вѣсовая энергія ихъ какъ бы передается отъ одного къ другому, не измѣняясь въ величинѣ, такъ что общая энергія двигателя и сопротивленія сохраняется неизмѣнной.

§ 23. Кинетическая энергія также можетъ передаваться отъ одного тѣла къ другому. Частицы воздуха, образующія вѣтеръ, ударяютъ въ крылья вѣтряной мельницы и сообщаютъ имъ извѣстную скорость, а слѣд. и живую силу: вмѣстѣ съ тѣмъ сами онѣ теряютъ часть своей живой силы, такъ какъ скорость ихъ уменьшается. Палка, ударяющая мячъ, сообщаетъ ему живую силу, а сама теряетъ часть своей живой силы. При этомъ удовлетворяется тотъ же законъ сохраненія энергіи, который мы вывели относительно передачи вѣсовой энергіи, что сколько энергіи пріобрѣтаетъ сопротивленіе, столько теряетъ двигатель. Мы провѣримъ это на самомъ простомъ случаѣ передачи кинетической энергіи, на ударѣ двухъ равныхъ по вѣсу упругихъ шаровъ, если ударъ направленъ по линіи центровъ. Въ этомъ случаѣ, какъ не трудно убѣдиться изъ простыхъ опытовъ, если ударяемый шаръ былъ раньше въ покоѣ, послѣ удара онъ пріобрѣтаетъ скорость, какую раньше имѣлъ ударяющій шаръ, а послѣдній останавливается. Здѣсь вся кинетическая энергія двигателя перешла къ сопротивленію, общее количество ея не измѣнилось. Если же оба шара были раньше въ движеніи, то послѣ удара они обмѣниваются скоростями; слѣд. сколько энергіи теряетъ одинъ, столько пріобрѣтаетъ другой и общее количество ея сохраняется неизмѣннымъ.

III. Превращенія энергіи.

§ 24. Выше мы видѣли, что когда брошенное вверхъ тѣло останавливается и теряетъ всю свою живую силу, энергія его не уменьшается, а только измѣняетъ свою форму. Оно обладаетъ потенціальной вѣсовой энергіей въ количествѣ, равномъ потраченной на подъемъ кинетической энергіи. Наоборотъ, когда тѣло падаетъ, его вѣсовая энергія убываетъ и наконецъ совсѣмъ истрачивается, но вмѣсто того тѣло пріобрѣтаетъ скорость, равную той, съ какой оно было брошено вверхъ, т. е. живая сила его возстановляется. Исчезновеніе энергіи одного рода и появленіе вмѣсто нея энергіи другого рода называется *превращеніемъ энергіи.* Изъ предыдущаго видно, что кинетическая энергія превращается въ такое количество вѣсовой энергіи, которое, при обратномъ превращеніи, способно возстановить потраченное количество кинетической энергіи. Если бы оба эти количества энергіи были потрачены на какую нибудь другую работу, они дали бы одинаковое количество работы. Такія два количества различныхъ родовъ энергіи называются *эквивалентными количествами.* Мы можемъ теперь выразить законъ превращеній энергіи слѣдующимъ образомъ: *энергіи кинетическая и вѣсовая превращаются одна въ другую въ эквивалентныхъ количествахъ.*

§ 25. Колебанія маятника представляютъ другой примѣръ превращенія вѣсовой энергіи въ кинетическую и обратно. Въ положеніи B′ (фиг. 11) маятникъ обладаетъ вѣсовой энергіей q.B′D′ (q — вѣсъ маятника). Переходя въ положеніе B, онъ теряетъ вѣсовую энергію, но пріобрѣтаетъ кинетическую, въ силу которой переходитъ за положеніе B въ положеніе B″, причемъ B″D″ = B′D′, слѣд. вѣсовая энергія его возстановляется. Отсюда видно, что первоначальная вѣсовая энергія маятника превратилась въ такое количество кинетической энергіи, которое при обратномъ превращеніи снова возстановляетъ прежнее количество вѣсовой энергіи.



Фиг. 11.

§ 26. Итакъ, если въ явленіи участвуютъ только сила тяжести и инерція тѣлъ, то въ такой системѣ измѣненія могутъ состоять только въ передачѣ вѣсовой энергіи, или кинетической, или въ превращеніи вѣсовой энергіи въ кинетическую, или обратно въ эквивалентныхъ количествахъ, но при этомъ общее количество энергіи всей системы остается неизмѣннымъ.

Дальше мы увидимъ, что если въ явленіи участвуютъ еще другія силы, то можетъ оказаться убыль въ общемъ количествѣ вѣсовой и кинетической энергій; но тогда всегда окажется эквивалентная прибыль энергіи другихъ силъ, такъ что *сумма энергій всѣхъ силъ сохраняется неизмѣнной.* Этотъ законъ называется *закономъ сохраненія энергіи.*

Въ превращеніяхъ энергіи слѣдуетъ искать объясненія всѣмъ кажущимся отступленіямъ отъ закона сохраненія. Если мы открываемъ убыль или прибыль въ общемъ количествѣ энергіи, то при болѣе внимательномъ изученіи явленія всегда откроемъ, что упустили изъ виду какое нибудь превращеніе. Разсмотримъ для примѣра движеніе двухъ грузовъ, не уравновѣшенныхъ на наклонной плоскости. Положимъ, что грузъ Q втягивается по наклонной плоскости веревкой, которая перекинута черезъ блокъ и натягивается параллельно длинѣ грузомъ $q+p$, привѣшеннымъ къ другому концу веревки. Здѣсь q означаетъ грузъ, уравновѣшивающій грузъ Q, такъ что q:Q $= h:l$; p — прибавочный грузъ. Когда грузъ Q пройдетъ всю длину наклонной плоскости, онъ подымется на высоту h и пріобрѣтетъ вѣсовую энергію Qh. Грузъ $p+q$ въ это время опустится по вертикальному направленію на такое разстояніе, какое проходитъ грузъ Q, т. е. на высоту l, и потеряетъ вѣсовой энергіи

$(q+p)l = ql + pl$. Но такъ какъ $Qh = ql$, то потеря вѣсовой энергіи двигателя больше пріобрѣтенной сопротивленіемъ на pl. Эта вѣсовая энергія превратилась въ кинетическую. Въ самомъ дѣлѣ, грузы q и Q уравновѣшиваются, а сила p сообщаетъ всей системѣ равноускоренное движеніе, а слѣдовательно и живую силу. Найдемъ ее по даннымъ величинамъ. Обозначимъ живую силу всей системы черезъ E, скорость, пріобрѣтенную въ концѣ движенія, черезъ v (всѣ тѣла получаютъ одинаковую скорость), массы тѣлъ Q, q и p соотвѣтственно черезъ M, m и m_1, ускореніе, сообщаемое силой p, буквой a.

$$1)\ E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}(M+m+m_1)v^2.$$

$$2)\ v = at,\ v^2 = a^2t^2.$$

$$3)\ l = \frac{at^2}{2};$$

умножая обѣ части послѣдняго равенства на $2a$, получимъ:

$$2al = a^2t^2 = v^2.$$

$$4)\ p = (M+m+m_1)a,\ a = \frac{p}{M+m+m_1}.$$

5) Изъ 3 и 4 $v^2 = 2al = \dfrac{2pl}{M+m+m_1}$. Изъ 1 и 5

$$E = \frac{1}{2}(M+m+m_1)v^2 = \frac{2pl(M+m+m_1)}{(M+m+m_1)2} = pl.$$

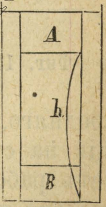
Пріобрѣтенная системой живая сила равна потраченной вѣсовой энергіи, ч. и т. д.

Для другихъ машинъ подобный разсчетъ сдѣлать труднѣе (кромѣ блока 1-го рода), потому что тамъ двигатель и сопротивленіе пріобрѣтаютъ неодинаковыя скорости. Но если правильно опредѣлимъ пріобрѣтенныя обоими тѣлами скорости и живыя силы, то всегда убѣдимся въ справедливости высказаннаго положенія.

IV. Приложенія.

§ 27. *Законъ Архимеда.* Положимъ, что тѣло, вѣсящее q килогр., опускается изъ положенія A (фиг. 12) въ положеніе B на h метровъ.

Вѣсовая энергія его уменьшается на qh килограммометровъ. Когда тѣло опускается, жидкость изъ подъ него переходитъ наверхъ, и энергія ея увеличивается; все происходитъ такъ, какъ будто бы объемъ жидкости, равный объему даннаго тѣла, поднялся изъ положенія B въ положеніе A, пріобрѣтя ph килограммометровъ вѣсовой энергіи, гдѣ p— вѣсъ этого объема жидкости. Если $q = p$, то тѣло было въ равновѣсіи внутри жидкости; тогда $ph = qh$, т. е. вѣсовая энергія, потерянная тѣломъ, передана жидкости, и общая вѣсовая энергія всей системы не измѣнилась. Если же $q > p$, то тѣло

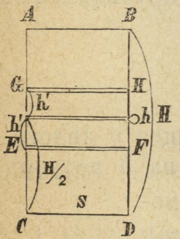


Фиг. 12.

потеряло вѣсовой энергіи больше, чѣмъ пріобрѣла жидкость, и общее количество вѣсовой энергіи уменьшилось на $(q-p)h$ килограммометровъ. Эта вѣсовая энергія превратилась въ кинетическую. Тѣло q испытывало противодѣйствіе своему вѣсу въ p килогр. (законъ Архимеда) и слѣд. устремлялось внизъ съ силой $q-p$ килограммометровъ. Назовемъ буквой E живую силу, пріобрѣтенную тѣломъ въ концѣ паденія, m—массу тѣла, v—конечную скорость, a—ускореніе и t—время паденія. Тогда $E=\frac{mv^2}{2}=\frac{ma^2t^2}{2}=ma\frac{at^2}{2}$. Но ma равно движущей силѣ $q-p$, $\frac{at^2}{2}$ равно пройденному пространству h. Слѣд. $E=$ $=(q-p)h$, ч. и т. д.

§ 28. *Пневматическая машина.* При выкачиваніи воздуха пневматической машиной производится работа, и слѣд. тратится энергія. Куда она дѣвается? Какая энергія создается вмѣсто нея? Работа идетъ на преодолѣваніе атмосфернаго давленія на поршень. Слѣд. это послѣднее производитъ отрицательную работу, и должна увеличиваться вѣсовая энергія атмосферы. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ такое устройство пневматической машины: вмѣсто обыкновеннаго колокола вообразимъ цилиндръ, въ который плотно входитъ поршень. Нижній край цилиндра притертъ къ тарелкѣ пневматической машины. Если поршень поднять до верху и удерживать его тамъ, выкачивая воздухъ, то нашъ цилиндръ не будетъ отличаться отъ обыкновеннаго колокола. Но мы могли бы достигнуть того же, если бы, опустивъ поршень до низу, подняли его вверхъ, не дѣйствуя обычнымъ способомъ. Но тогда, очевидно, мы подняли бы столбъ воздуха надъ поршнемъ и увеличили бы его вѣсовую энергію. При обыкновенномъ способѣ выкачиванія явленіе сложнѣе, но результатъ тотъ же.

§ 29. *Вѣсовая энергія цилиндрическаго столба жидкости.* Вычислимъ работу, которую можетъ произвести вѣсъ воды, заключенной въ цилиндрическомъ столбѣ ABCD (фиг. 13), когда она разольется по горизонтальной плоскости, въ которой лежитъ дно сосуда. Разобьемъ весь столбъ на тонкіе горизонтальные слои равной толщины, такъ чтобы толщина каждаго слоя была незначительна сравнительно съ высотой столба. Обозначимъ площадь основанія столба s, высоту — H, толщину каждаго слоя—h, плотность жидкости d. Вѣсъ каждаго слоя равенъ dsh, вѣсъ всего столба dsH. Средній слой, лежащій на высотѣ $\frac{H}{2}$, опускаясь съ этой высоты, произведетъ работу $dsh\frac{H}{2}$. Каждому слою EF, который лежитъ ниже



Фиг. 13.

средняго, положимъ на h' метр., будетъ соотвѣтствовать слой GH, лежащій на столько же выше средняго; первый при своемъ паденіи произведетъ работы меньше средняго на $dshh'$ килограммометр. второй — на столько же больше. Слѣд. оба слоя вмѣстѣ произведутъ такую работу, какъ если бы они оба были на высотѣ $\frac{H}{2}$. Вся жидкость разобьется на такія пары слоевъ; поэтому вся работа будетъ такая же, какъ если бы всѣ слои, т. е. вся масса жидкости была раньше на высотѣ $\frac{H}{2}\cdot$ Эта работа равна $dsH\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{2}dsH^2=\frac{1}{2}$ PH (черезъ P обозначаемъ вѣсъ жидкости). Эта работа и представляетъ вѣсовую энергію столба жидкости.

Задача. Вычислить работу силы тяжести при переливаніи жидкости изъ сосуда A въ B (посредствомъ сифона, или соединительной трубки) по даннымъ основаніямъ сосудовъ s и s_1 и высотамъ жидкости h и h_1 (основанія въ одной плоскости, или на данномъ разстояніи H).

§ 30. *Движенія планетъ.* Вѣсовая энергія тѣлъ, поднятыхъ надъ землей, представляетъ частный случай энергіи всемірнаго тяготѣнія, которой обладаютъ всякія два тѣла, удаленныя на нѣкоторое разстояніе другъ отъ друга. Такъ всѣ планеты обладаютъ энергіей тяготѣнія къ солнцу. Эту энергію нельзя измѣрять такъ, какъ мы измѣряемъ вѣсовую энергію, если не захотимъ ограничиться только такими приближеніями и удаленіями планетъ относительно солнца, которыя можно было бы принять за безконечно малыя сравнительно съ разстояніями ихъ отъ солнца. Сила тяготѣнія не постоянная сила, какъ то допускается нами относительно вѣса тѣлъ, а измѣняется обратно пропорціонально квадратамъ разстояній. Вывести способъ измѣренія работы такой силы гораздо труднѣе, чѣмъ способъ измѣренія постоянной силы, но не трудно составить себѣ общее понятіе объ измѣненіи ея энергіи. Такъ какъ сила тяготѣнія, дѣйствующая на планету, направлена къ солнцу, то при приближеніи планеты къ солнцу эта сила производитъ положительную работу, а слѣд. энергія ея уменьшается; при удаленіи планеты, сила тяготѣнія производитъ отрицательную работу, и энергія ея увеличивается.

Планеты движутся вокругъ солнца по элипсисамъ, въ которыхъ солнце занимаетъ одинъ изъ фокусовъ. Поэтому планеты то удаляются отъ солнца, то приближаются. Когда планета удаляется отъ солнца, энергія тяготѣнія ея увеличивается; это происходитъ на счетъ кинетической энергіи планеты: скорость ея уменьшается и достигаетъ наименьшей величины въ афеліи. При движеніи отъ перигелія до афелія происходитъ превращеніе кинетической энергіи въ энергію тяготѣнія. Затѣмъ планета приближается къ солнцу и скорость ея возрастаетъ. Энергія тяготѣнія уменьшается, а кинетическая возрастаетъ. Первая достигаетъ наименьшей, а вторая наибольшей величины въ перигеліи. При движеніи отъ афелія до перигелія происходитъ превращеніе энергіи тяготѣнія въ кинетическую. Такъ какъ, возвращаясь въ перигелій или афелій, планета получаетъ ту же скорость, какую имѣла раньше въ этой точкѣ, то всѣ превращенія энергій здѣсь эквивалентны: при движеніи отъ перигелія до афелія теряемая кинетическая энергія превращается въ такое количество энергіи тяготѣнія, которое при движеніи отъ афелія къ перигелію возстановляетъ прежнее количество кинетической энергіи.

Если тѣло движется по кругу подъ дѣйствіемъ одной центральной силы, то движеніе его должно быть равномѣрнымъ, потому что энергія центральной силы не измѣняется, разъ разстояніе остается неизмѣннымъ, а потому, если бы скорость тѣла увеличивалась или уменьшалась, этимъ измѣненіямъ кинетической энергіи не было бы никакихъ эквивалентовъ, что невозможно.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ О МНОГОГРАННИКАХЪ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.

А. БРАВЭ.

(*Переводъ съ французскаго*).

(Продолженіе).*

§ III.—Симметрическіе многогранники съ главною осью.

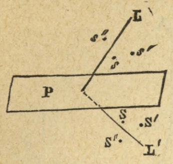
Теорема VII.—*Если въ многогранникѣ имѣются двѣ плоскости симметріи* P *и* p, *не перпендикулярныя другъ къ другу, то существуетъ третья* P′, *гомологичная* P *по отношенію къ плоскости* p *и такого же рода, какъ* P.

Пусть CP и C*p*, фиг. 16, слѣды двухъ плоскостей P и *p* на плоскости, перпендикулярной къ ихъ общей линіи пересѣченія, и *s*′—нѣкоторый уголъ, расположенный на этой же плоскости. Пусть далѣе CP′—слѣдъ плоскости P′, гомологичной P по отношенію къ находящейся между ними плоскости C*p*. Углу *s*′ будетъ гомологиченъ S по отношенію къ C*p*; углу S будетъ гомологиченъ *s*, находящійся по другую сторону CP. Точно такъ же углу *s* будетъ гомологиченъ уголъ S′ по отношенію къ плоскости C*p*; легко убѣдиться, что S′ гомологиченъ *s*′ по отношенію къ плоскости CP′. Этимъ путемъ можно показать, что каждому углу соотвѣтствуетъ другой уголъ, гомологичный по отношенію къ послѣдней плоскости; такимъ образомъ P′ есть также плоскость симметріи и, какъ очевидно, такого же рода какъ P.

Теорема VIII.—*Если въ многогранникѣ имѣются плоскость симметріи* P *и наклонно къ ней расположенная ось симметріи* L, *то прямая* L′, *гомологичная* L *по отношенію къ указанной плоскости, есть также ось симметріи.*

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 214 и 215.

Пусть S, фиг. 14, нѣкоторый уголъ, которому гомологиченъ s по отношенію къ плоскости P, и s, s', s'', и т. д. система угловъ, гомологичныхъ s по отношенію къ оси L. Пусть S, S′, S″ и т. д. гомологичны s, s', s'' и т. д. по отношенію къ плоскости P. Расположеніе S, S′, S″ и т. д. вокругъ L′, таково же, какъ и s, s', s'' и т. д. вокругъ L, слѣдовательно L′ есть также ось симметріи и такого же рода, какъ L.



Фиг. 14.

Добавленіе.—Каждая плоскость симметріи обусловливаетъ повтореніе по другую сторону ея не только всякаго угла, но также всякой плоскости или оси симметріи многогранника. Появляющіяся такимъ образомъ плоскости и оси такого же рода, какъ первоначальныя, и обратно расположены.

Теорема IX.—*Если въ любомъ многогранникѣ имѣется ось* L *порядка* q, *то каждой наклонно расположенной по отношенію къ этой оси плоскости симметріи соотвѣтствуютъ* q—1 *другихъ плоскостей симметріи такого же рода.*

Эта теорема доказывается точно такъ же, какъ и теоремы VII и VIII.

Можно ограничиться также слѣдующимъ разсужденіемъ. При вращеніи многогранника вокругъ оси L^q, плоскость симметріи будетъ тоже принимать участіе въ этомъ вращеніи, не переставая въ это же время быть плоскостью симметріи, что будетъ имѣть мѣсто и при поворотѣ на $\frac{360^0}{q}$.

Теорема X.—*Если въ многогранникѣ имѣется ось* L *порядка* q, *то каждой оси симметріи* L′, *наклонно расположенной по отношенію къ первой, соотвѣтствуютъ* q—1 *другихъ осей такого же порядка и такого же рода, какъ ось* L′.

Эта теорема доказывается такъ же, какъ и предыдущая. При поворотѣ многогранника на $\frac{360^0}{q}$ вокругъ L^q, ось L′ остается осью симметріи подвижного многогранника.

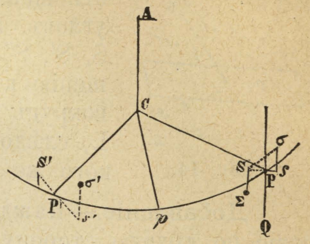
Добавленіе. — Каждая ось симметріи порядка q обусловливаетъ сосуществованіе всѣхъ осей или плоскостей симметріи, которыя по отношенію къ оси порядка q гомологичны данной оси или плоскости. Полученныя такимъ образомъ гомологичныя плоскости или оси—одного и того же рода и одинаково расположены.

Теорема XI.—*Если всего имѣется* q *плоскостей симметріи, которыя пересѣкаются по одной и той же прямой, то эта прямая есть ось симметріи порядка* q *или кратнаго* q.

Эти плоскости должны необходимо пересѣкаться подъ одинаковыми углами, потому что въ противномъ случаѣ онѣ должны были бы симметрически повторяться по отношенію другъ къ другу (теорема VII), и число ихъ превысило бы q.

Пусть CPA и CpA, фиг. 15, двѣ сосѣднія плоскости симметріи; очевидно тогда

$$Pcp = \frac{180^0}{q}.$$



Фиг. 15.

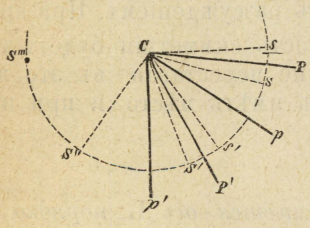
Если точка σ гомологична S по отношенію къ плоскости PCA, и S' гомологична σ по отношенію къ плоскости pCA, то для совпаденія S съ S', вращая многогранникъ вокругъ CA, необходимо поворотить его, согласно теоремѣ Ѵ, на уголъ

$$PCP' = 2PCp = \frac{360^0}{q}.$$

Такимъ образомъ CA будетъ осью симметріи порядка q или кратнаго q.

Теорема XII.—*Если имѣются двѣ двойныя оси симметріи, то перпендикуляръ къ ихъ плоскости, проходящій черезъ точку ихъ пересѣченія, есть также ось симметріи многогранника.*

Пусть CP и Cp, фиг. 16, двѣ двойныя оси, и S нѣкоторый уголъ многогранника. Примемъ, что S находится на высотѣ Δ надъ плоскостью PCp, плоскостью чертежа, и ортогонально проэктированъ въ S; тогда точка, гомологичная S по отношенію къ оси CP, будетъ s, находящаяся на разстояніи Δ подъ плоскостью чертежа, и соотношенія между проэкціями S и s выразятся



Фиг. 16.

$$\text{угломъ } SCs = 2 \text{ угламъ } SCP \text{ и } Cs = CS.$$

Такимъ же образомъ получится S', гомологичный s по отношенію къ оси Cp, причемъ

$$\text{уголъ } S'Cs = 2sCp \text{ и } CS' = Cs.$$

Если мы повторимъ такое же построеніе съ S', то получится S'' и затѣмъ S'''. Всѣ эти точки образуютъ вершины угловъ многоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса CS, и являются гомологичными S по отношенію къ перпендикуляру къ этой плоскости. Такимъ образомъ этотъ перпендикуляръ будетъ осью симметріи, порядокъ которой q зависитъ отъ величины PCp.

Теорема XIII. *Если на одной плоскости имѣются всего* q *двойныхъ осей, то перпендикуляръ къ этой плоскости есть ось симметріи порядка* q *или кратнаго* q.

Необходимо, чтобы эти оси пересѣкались подъ одинаковыми углами; такъ какъ въ противномъ случаѣ онѣ взаимно повторяли бы другъ друга (теорема X, добавленіе), и число ихъ превысило бы q.

Пусть CP и Cp двѣ сосѣднія двойныя оси, фиг. 15, и CA перпендикуляръ къ ихъ плоскости, тогда очевидно

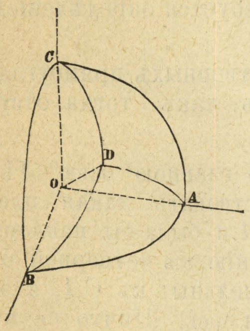
$$PCp = \frac{180^0}{q}.$$

Если s гомологиченъ S по отношенію къ оси CP, и S′ гомологиченъ s по отношенію къ оси Cp, то для совпаденія S съ S′ необходимо поворотить многогранникъ вокругъ CA, согласно доказательству предыдущей теоремы, на

$$\text{уголъ } PCP' = 2.PCp = \frac{360^0}{q}.$$

Такимъ образомъ прямая CA есть ось симметріи порядка q или кратнаго q.

Теорема XIV. — *Если имѣются три перпендикулярныя другъ къ другу четверныя оси, то одновременно существуютъ четыре тройныя оси, расположенныя внѣ плоскостей, соединяющихъ попарно четверныя оси.*



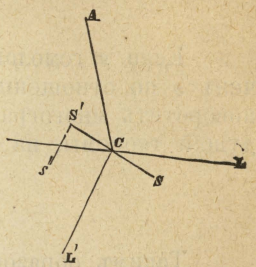
Фиг. 17.

Пусть OA, OB и OC, фиг. 17, три четверныя оси, которыя пересѣкаются въ O, центрѣ формы многогранника. Поворотимъ многогранникъ на четверть окружности вокругъ OA по направленію отъ B къ C. Положеніе угловъ останется однимъ и тѣмъ же, и ось OB перейдетъ въ OC. Поворотимъ многогранникъ вторично на четверть окружности вокругъ вертикали OC, по направленію отъ A къ B. Положеніе угловъ не измѣнится, ось OB останется въ OC, и ось OA перейдетъ въ OB. Результатомъ этого двойного вращенія будетъ то, что система неразрывно связанныхъ съ многогранникомъ и движущихся вмѣстѣ съ нимъ осей OA и OB перейдетъ въ систему неразрывно связанныхъ прямыхъ OB и OC. Очевидно, что такое же перемѣщеніе произведетъ одно вращеніе на 120° вокругъ прямой OD, соединяющей центръ формы O съ центромъ D сферическаго треугольника, заключающаго три прямыхъ угла. Отсюда видно, что линія OD есть тройная ось многогранника; а такъ какъ имѣется восемь треугольниковъ съ тремя прямыми углами, центры которыхъ попарно противолежатъ другъ другу, то такихъ тройныхъ осей—четыре, при чемъ всѣ онѣ расположены внѣ плоскостей AOB, AOC и BOC.

Добавленіе.—Многогранникъ съ тремя перпендикулярными другъ къ другу четверными осями не можетъ имѣть главной оси, такъ какъ въ каждомъ многогранникѣ, имѣющемъ главную ось, согласно опредѣленію главной оси, должны быть прямыми по крайней мѣрѣ два угла изъ трехъ, подъ которыми пересѣкаются какія нибудь три оси L, L′ и L″, не лежащія въ одной плоскости. Этому условію не удовлетворяетъ система трехъ осей OA, OB и OD.

Теорема XV. — *Если въ многогранникѣ, содержащемъ главную ось Λ^q, имѣется другая ось симметріи, то эта послѣдняя ось, необходимо расположенная въ плоскости, перпендикулярной къ Λ^q, можетъ быть осью симметріи только второго порядка.*

Пусть $C\Lambda$, фиг. 18,—ось Λ^q, CL — другая ось неизвѣстнаго порядка симметріи x. Очевидно, что эта ось расположена въ плоскости, перпендикулярной къ Λ^q; покажемъ, что $x = 2$.



Фиг. 18.

Дѣйствительно, оси, гомологичныя Λ^q по отношенію къ L^x (теорема X, добавленіе), согласно опредѣленію главной оси, должны быть перпендикулярны къ Λ^q или совпасть съ ней. Такимъ образомъ можетъ быть только $x = 2$ или $x = 4$, что указываетъ въ первомъ случаѣ на половину, во второмъ случаѣ на четверть оборота вокругъ L^x.

Если $x = 4$, то CL—четверная ось, и тогда въ CL′ должна быть ось, гомологичная $C\Lambda$ (теорема X), проходящая черезъ C и лежащая въ плоскости, перпендикулярной къ $C\Lambda$. Такимъ образомъ CL′ будетъ также осью порядка q, и чтобы оси, гомологичныя CL, по отношенію къ CL′ не выступили изъ плоскости LCL′, что требуется опредѣленіемъ главной оси, q должно равняться 4 или 2.

Если $q = 4$, то получается случай трехъ четверныхъ прямоугольныхъ осей, а онъ долженъ быть исключенъ, такъ какъ тогда отсутствуетъ главная ось (теорема XIV, добавленіе).

Если $q = 2$, то ось CL окажется настоящею главною осью. Дѣйствительно, легко показать, что не можетъ существовать такая плоскость симметріи, которая бы проходила черезъ $C\Lambda$ и была бы наклонна къ CL, такъ какъ первые ея гомологи по отношенію къ четверной оси CL не были бы ни перпендикулярны, ни параллельны къ $C\Lambda$, а это противорѣчило бы положенію, что $C\Lambda$ — главная ось. Ничто не мѣшаетъ, значитъ, разсматривать теперь CL, какъ главную ось, и мы должны это сдѣлать, такъ какъ ея порядокъ симметріи выше порядка симметріи $C\Lambda$. Слѣдовательно, если $C\Lambda$ дѣйствительно главная ось, x никогда не можетъ равняться 4.

Такимъ образомъ остается только принять, что $x = 2$, т. е. что другая ось симметріи будетъ осью второго порядка.

Теорема XVI. — *Въ каждомъ многогранникѣ съ главною осью существуютъ* q *двойныхъ осей, расположенныхъ въ плоскости, перпендикулярной къ главной оси, пересѣкающихся подъ одинаковыми углами и попеременно принадлежащихъ къ осямъ одного и того же рода.*

Пусть CP и Cp, фиг. 16, двѣ сосѣднія двойныя оси, тогда двойная ось Cp заставитъ ось CP повториться по другую сторону въ CP′ (теорема X, добавленіе). CP′ въ свою очередь обусловитъ существованіе Cp' и т. д. Отсюда очевидно, что q угловъ PCp, pCP', $P'Cp'$ и т. д. должны быть равны между собой и $= \frac{180^0}{q}$.

Оси CP и CP′—одного и того же рода и одинаково расположены по отношенію къ лежащей между ними оси Cp. Точно такъ же Cp и Cp'—одного и того же рода и одинаково расположены по отношенію къ оси CP′, слѣдовательно и т. д.

Теорема XVII.—*Если въ многогранникѣ имѣются ось $Л^q$, далѣе* q *плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ эту ось, и плоскость симметріи П, перпендикулярная къ главной оси, то одновременно существуютъ* q *двойныхъ осей въ линіяхъ пересѣченія этихъ* q *плоскостей съ плоскостью П.*

Пересѣченіе двухъ плоскостей симметріи есть постоянно ось симметріи (теорема V); здѣсь эта ось можетъ быть только осью второго порядка (теорема XV), слѣдовательно и т. д.

Для доказательства этой теоремы, можно обратиться также къ фигурѣ 15, гдѣ CPQ, скажемъ, одна изъ q плоскостей проходящихъ черезъ ось $Л^q$, и CPP′—плоскость *П*.

Пусть Σ гомологиченъ углу S по отношенію къ плоскости *П*, далѣе s гомологиченъ Σ по отношенію къ плоскости CPQ. Очевидно, что S и s гомологичны другъ къ другу по отношенію къ CP, которая является такимъ образомъ двойною осью многогранника.

Теорема XVIII.—*Если въ многогранникѣ имѣются ось $Л^q$, далѣе* q *двойныхъ, перпендикулярныхъ къ $Л^q$ осей и плоскость симметріи П, перпендикулярная къ $Л^q$, то существуютъ также* q *плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ ось $Л^q$ и каждую изъ двойныхъ осей.*

Пусть CP, фиг. 15, одна изъ двойныхъ осей и CPP′ — плоскость *П*, перпендикулярная къ главной оси CA. Углу S будетъ гомологиченъ s, находящійся по другую сторону двойной оси CP; углу s будетъ гомологиченъ σ—по другую сторону плоскости *П*; точки S и σ будутъ гомологичны другъ къ другу по отношенію къ плоскости CPQ; слѣдовательно послѣдняя есть плоскость симметріи многогранника.

Теорема XIX.—*Если въ многогранникѣ имѣются главная ось $Л^q$, далѣе* q *плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ эту ось, и центръ симметріи, то одновременно существуютъ* q *двойныхъ осей, идущихъ черезъ центръ перпендикулярно къ каждой изъ этихъ плоскостей.*

Эта теорема есть слѣдствіе теоремъ IV и XV.

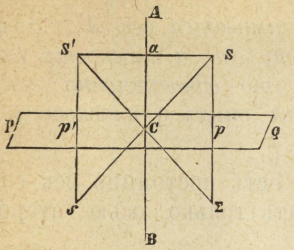
Теорема XX.—*Если въ многогранникѣ имѣются ось $Л^q$, далѣе* q *двойныхъ осей, перпендикулярныхъ къ $Л^q$, и центръ симметріи, то существуютъ одновременно* q *плоскостей симметріи, которыя перпендикулярны къ этимъ двойнымъ осямъ.*

Это слѣдуетъ изъ теоремы XXI, доказательство которой помѣщено ниже.

Многогранники съ главною осью четнаго порядка.

Теорема XXI.—*Если многогранникъ имѣетъ ось четнаго порядка и центръ симметріи, то онъ заключаетъ также плоскость симметріи, проходящую черезъ центръ и перпендикулярную къ этой оси.*

Пусть CA, фиг. 19, ось симметріи порядка $2q$, C — центръ симметріи PQ—плоскость, перпендикулярная къ CA. Уголъ S имѣетъ $2q$—1 гомологичныхъ по отношенію къ оси CA; если мы опустимъ пер-



Фиг. 19.

пендикуляръ Sa на CA и продолжимъ его на $aS' = aS$, то S' будетъ однимъ изъ этихъ гомологичныхъ угловъ. Соединимъ S' съ центромъ C и продолжимъ до $C\Sigma = CS'$, тогда получимъ уголъ Σ гомологичный S' по отношенію къ центру C. Очевидно, S и Σ гомологичны другъ къ другу по отношенію къ плоскости PQ; такимъ образомъ эта плоскость есть плоскость симметріи многогранника.

Теорема XXII. — *Каждый многогранникъ, въ которомъ имѣется ось четнаго порядка и плоскость симметріи, перпендикулярная къ этой оси, обладаетъ центромъ симметріи, находящимся въ точкѣ пересѣченія оси съ плоскостью.*

Пусть S'—уголъ, гомологичный S по отношенію къ оси CA (фиг. 19); s—гомологиченъ S' по отношенію къ плоскости PQ, перпендикулярной къ оси CA. Оба угла, S и s, будутъ гомологичны другъ къ другу по отношенію къ точкѣ C, въ которой ось пересѣкаетъ плоскость; слѣдовательно эта точка должна быть центромъ симметріи многогранника.

Теорема XXIII.—*Если въ многогранникѣ имѣется ось четнаго порядка и плоскость симметріи, проходящая черезъ эту ось, то существуетъ также и вторая плоскость симметріи, проходящая черезъ ось и перпендикулярная къ первой плоскости.*

Пусть $C\Lambda$, фиг. 18, ось четнаго порядка, $LC\Lambda$—данная плоскость симметріи, S—нѣкоторый уголъ многогранника, тогда S' будетъ гомологиченъ S по отношенію къ $C\Lambda$, и s' гомологиченъ S' по отношенію къ плоскости $LC\Lambda$. S и s' будутъ гомологичны по отношенію къ плоскости $\Lambda CL'$ которая проходитъ черезъ $C\Lambda$ и перпендикулярна къ предыдущей; слѣдовательно и т. д.

Теорема XXIV.—*Если въ многогранникѣ имѣются ось* L^{2q} *и двойныя перпендикулярныя къ* L^{2q} *оси, то общее число этихъ послѣднихъ равно* 2q: q *осей одного рода и* q *осей другого рода, чередующихся съ осями перваго рода.*

Пусть CP, фиг. 15, двойная ось, перпендикулярная къ оси $2q$ порядка—CA; въ плоскости PCP', перпендикулярной къ CA, будетъ находиться прямая CP', пересѣкающаяся съ CP подъ угломъ

$$PCP' = \frac{360^0}{2q} = \frac{180^0}{q}.$$

Прямая CP' будетъ двойною осью такого же рода, какъ и CP, въ силу симметріи, присущей оси CA (теорема X, добавленіе). Число полученныхъ такимъ образомъ осей будетъ равняться q; каждая изъ нихъ можетъ быть выведена изъ CP путемъ вращенія многогранника на

$$0^0, \frac{180^0}{q}, 2\,\frac{180^0}{q}, \ldots, (q-1)\,\frac{180^0}{q};$$

оси, соотвѣтствующія повороту, на

$$q\frac{180^0}{q},\ (q+1)\frac{180^0}{q},\ \cdots,\ (2q-1)\frac{180^0}{q}$$

совпадутъ съ предыдущими.

Если мы раздѣлимъ теперь PCP' на двѣ равныя части биссектрисой Cp, то Cp будетъ также осью второго порядка. Пусть s гомологиченъ S по отношенію къ CP, и s' гомологиченъ s по отношенію къ оси CA, тогда углы S и s' будутъ гомологичны другъ къ другу по отношенію къ Cp, разсматриваемой, какъ ось второго порядка; при этомъ для совпаденія s съ s' необходимо будетъ поворотить многогранникъ на

$$\frac{360^0}{2q} = PCP'.$$

Такимъ образомъ эти q биссектрисъ будутъ двойными осями, но другого рода.

Итакъ, имѣются $2q$ двойныхъ осей; число ихъ не можетъ быть больше, такъ какъ если бы было Q двойныхъ осей, причемъ $Q > 2q$, то тогда порядокъ симметріи оси, перпендикулярной къ плоскости двойныхъ осей, былъ бы Q или mQ (теорема XIII), что противорѣчитъ положенію.

Добавленіе I.—Число осей второго порядка, перпендикулярныхъ къ главной оси Λ^{2q}, будетъ постоянно $=0$ или $2q$.

Добавленіе II.—Двойныя, перпендикулярныя къ Λ^{2q} оси попарно перпендикулярны другъ къ другу.

Теорема XXV.—*Если въ многогранникѣ имѣются ось* L^{2q} *и плоскости симметріи, проходящія черезъ эту ось, то общее число ихъ будетъ* 2q: q *плоскостей одного рода и* q *плоскостей другого рода, чередующихся съ первыми.*

Пусть ACP, ACP' фиг. 15, двѣ плоскости симметріи, пересѣкающіяся подъ угломъ

$$PCP' = \frac{360^0}{2q} = \frac{180^0}{q}.$$

Получится система плоскостей, состоящая изъ q плоскостей симметріи одного и того же рода и одинаково расположенныхъ. Кромѣ того лежащія между ними плоскости, которыя дѣлятъ пополамъ двугранные углы (ACP, ACP'), суть также плоскости симметріи.

Пусть ACp—одна изъ такихъ промежуточныхъ плоскостей; σ гомологиченъ нѣкоторому углу S по отношенію къ плоскости ACP; σ' гомологиченъ σ по отношенію къ оси CA. Такъ какъ для перемѣщенія σ въ σ' необходимо поворотить многогранникъ на

$$\frac{360^0}{2q} = PCP',$$

то очевидно, что S и σ' расположены симметрично по отношенію къ плоскости ACp; такимъ образомъ эта плоскость есть плоскость симметріи другого рода, чѣмъ ACP; общее число ихъ q, и всѣ онѣ расположены одинаково съ ACp.

Итакъ, существуютъ $2q$ плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ L^{2q}; число ихъ не можетъ быть больше, такъ какъ, если бы ихъ было $Q > 2q$, то ось симметріи, представляющая общую линію ихъ пересѣченія, была бы порядка Q или mQ (теорема XI), что противорѣчитъ положенію.

Добавленіе I.—Число плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ главную ось Λ^{2q}, постоянно равно 0 или $2q$, и не можетъ быть больше этого послѣдняго числа.

Добавленіе II. — Эти плоскости симметріи попарно перпендикулярны другъ къ другу.

Теорема XXVI.—*Многогранники съ главною осью Λ^{2q}, не имѣющіе ни плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ эту ось, ни двойныхъ осей, обладаютъ двумя различными родами симметріи, смотря по тому, представляетъ ли плоскость, перпендикулярная къ главной оси, плоскость симметріи или нѣтъ.*

Число осей симметріи опредѣлено содержаніемъ теоремы; точно такъ же и число плоскостей симметріи, если извѣстно, представляетъ ли перпендикулярная къ главной оси плоскость—плоскость симметріи или нѣтъ. Что касается центра симметріи, то его присутствіе зависитъ отъ существованія плоскости симметріи, перпендикулярной къ главной оси (теоремы XXI и XXII).

Такимъ образомъ символы этихъ обоихъ родовъ симметріи слѣдующіе:

$$[\Lambda^{2q}, \quad 0L^2, \quad 0C, \quad 0P]$$

$$\text{и } [\Lambda^{2q}, \quad 0L^2, \quad C, \quad \Pi]$$

Теорема XXVII.—*Многогранники съ главною осью Λ^{2q}, содержащіе или только $2q$ плоскостей симметріи или только $2q$ двойныхъ осей, въ соотвѣтствіи съ главною осью, не могутъ имѣть ни плоскости симметріи, перпендикулярной къ главной оси, ни центра симметріи.*

Это положеніе есть очевидное простое слѣдствіе теоремъ XVII, XVIII, XIX и XX.

Группа многогранниковъ, которые охватываются содержаніемъ разсматриваемой теоремы, распадается на два класса различной симметріи, въ зависимости отъ отсутствія плоскостей симметріи или двойныхъ осей. Такъ какъ двойныя оси здѣсь двухъ различныхъ родовъ (теорема XXIV), то мы обозначимъ оси перваго рода L^2 и оси второго рода L'^2. Точно такъ же плоскости симметріи перваго рода будутъ обозначаться P, — второго рода P′. Согласно этому, слѣдующіе символы представятъ оба класса многогранниковъ.

$$[\Lambda^{2q}, \quad qL^2, \quad qL'^2, \quad 0C, \quad 0P]$$

$$\text{и } [\Lambda^{2q}, \quad 0L^2, \quad 0C, \quad qP, \quad qP'].$$

Теорема XXVIII.—*Въ многогранникахъ, имѣющихъ главную ось Λ^{2q}, далѣе $2q$ двойныхъ осей и $2q$ плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ главную ось, двойныя оси могутъ или находиться въ плоскостяхъ симметріи или чередоваться съ ними, т. е. совпадать съ линіями, дѣ-*

лящими пополамъ углы между плоскостями симметріи. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ имѣются два различныхъ рода симметріи.

Если взаимное положеніе осей и плоскостей будетъ иное, то двойныя оси, вызвавши посредствомъ поворота на 180^0 существованіе $2q$ плоскостей симметріи (теорема X, добавленіе), удвоятъ такимъ образомъ число этихъ послѣднихъ; точно такъ же удвоится число двойныхъ осей, если онѣ будутъ повторены по другую сторону плоскостей въ гомологическомъ положеніи (теорема VIII, добавленіе), а это противорѣчитъ добавленіямъ XXIV и XXV теоремъ; слѣдовательно и т. д.

Як. Самойловъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Присутствіе аргона и гелія въ нѣкоторыхъ минеральныхъ водахъ. *Ch. Bouchard.* (C. R. CXXI, 392).—Было уже давно извѣстно, что нѣкоторыя сѣрнистыя пиренейскія минеральныя воды выдѣляютъ мелкіе пузырьки газа; выдѣленіе это происходитъ вскорѣ послѣ того, какъ вода берется изъ источника, и продолжается различное время, смотря по источнику,—иногда нѣсколько часовъ. Такъ какъ газъ выдѣляется и изъ воды, подщелоченной сѣрнистымъ и кремнекислымъ натріемъ, то онъ не можетъ быть ни кислородомъ, ни углекислотой. Допускали, что газъ этотъ—азотъ. Испанскіе доктора называютъ эти воды *азоадами* (azoades).

Во время своего пребыванія на Пиренеяхъ авторъ собралъ на мѣстѣ значительныя количества газовъ изъ различныхъ источниковъ. Газы эти были изслѣдованы авторомъ вмѣсѣ съ L. Troost'омъ. Если тщательно высушить газъ надъ ѣдкимъ кали и фосфорнымъ ангидридомъ и затѣмъ нагрѣвать его впродолженіи 48-и часовъ вмѣстѣ съ магніевыми проволоками, то объемъ газа уменьшается, а проволока покрывается желтымъ слоемъ азотистаго магнія, который бѣлѣетъ на воздухѣ, выдѣляя амміакъ. Оставшійся газъ освобождался отъ всякихъ слѣдовъ азота въ Plücker'овскихъ трубкахъ съ магніевыми электродами. Спектръ азота совершенно исчезалъ, а остававшіеся газы давали различные спектры, смотря по мѣсту своего происхожденія.

Газы изъ источника Raillère давали характерные спектры аргона и гелія.

Газы изъ источниковъ du Bois дали спектръ гелія. Одинъ изъ источниковъ du Bois (температура его воды ниже остальныхъ) далъ кромѣ характерныхъ линій гелія еще линіи въ красной части спектра и на границѣ между красной и оранжевой. Это даетъ основаніе думать, что здѣсь вмѣстѣ съ геліемъ содержится еще какой то элементъ.

Вопросъ о происхожденіи этихъ газовъ въ минеральныхъ водахъ остается пока совершенно открытымъ. Если признать, что аргонъ, а быть можетъ и гелій, попали въ воду изъ атмосферы, то это не объясняетъ, почему одна вода содержитъ аргонъ и гелій, другая — только гелій, третья—гелій и еще какой то элементъ. Весьма вѣроятно, поэтому, что вода насыщается этими газами въ нѣдрахъ земныхъ. Авторъ занимается въ настоящее время изученіемъ газовъ, которые содержатся въ водахъ, находящихся на земной поверхности.

В. Г.

О соединеніи магнія съ аргономъ и геліемъ. *L. Troost* и *L. Ouvrard.* (C. R. CXXI, 394). — При рѣшеніи вопроса, заключаются ли аргонъ и гелій въ азотѣ, можно обойтись и безъ пропусканія азота надъ раскаленнымъ магніемъ или литіемъ, если употреблять трубки Plücker'а съ магніевой проволокой и бобину Румкорфа съ прерывателемъ Marcel'я Deprez'а. Сухіе газы вводятся въ Plücker'овскую трубку, черезъ которую пропускаются сильные разряды. Сперва поглощеніе азота идетъ медленно, но когда давленіе газовъ внутри трубки уменьшится, магніевыя проволоки нагрѣваются, магній испаряется и отлагается въ видѣ зеркала на стѣнкахъ трубки, вокругъ проволокъ. Тогда соединеніе азота съ парами магнія происходитъ весьма быстро и спектръ азота исчезаетъ, а взамѣнъ его появляются линіи азота и гелія. Яркость этихъ линій можно увеличить, вводя въ нѣсколько пріемовъ новыя количества газовъ въ трубку и снова пропуская сквозь нее сильные разряды.

Пропуская нѣсколько часовъ сильный токъ черезъ трубку, содержащую только аргонъ и гелій, замѣчаютъ, что яркость линій аргона и гелія постепенно уменьшается и въ трубкѣ образуется совершенная пустота. Такимъ образомъ аргонъ и гелій соединяются съ магніемъ, или, точнѣе,—съ парами магнія при продолжительномъ дѣйствіи сильныхъ разрядовъ.

Подобныя же явленія замѣчаются по отношенію къ аргону при употребленіи платиновыхъ электродовъ.

В. Г.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18$^{94}/_{95}$ Г.

Кіевскій учебный округъ.

Въ гимназіяхъ г. Кіева.

По геометріи. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ прямоугольника ABCD около оси, проходящей черезъ вершину B и перпендикулярной къ діагонали BD, если длина діагонали $BD = a = 5{,}3465$ дюйма и уголъ $DBA = \alpha = 62^\circ 47' 43''$.

По алгебрѣ. Число, равное истинному значенію дроби

$$\frac{n^2 - 22n + 57}{n^2 - 8n + 15}$$

при $n = 3$, раздѣлено на два такихъ слагаемыхъ, сумма кубовъ которыхъ равна наименьшему числу, кратному 19 и при дѣленіи на 24 дающему остатокъ 8. Найти оба слагаемыя.

Сообщ. *К. Зновицкій* (Кіевъ).

ЗАДАЧИ.

№ 230. Даны двѣ точки, A и B, и двѣ параллели. Провести черезъ A и B окружность, встрѣчающую параллели въ X и $У$ такъ, что $XУ = AB$.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 231. Даны двѣ точки, A и B, и двѣ параллели. Черезъ A и B провести окружность, встрѣчающую параллели въ X и $У$ такъ, что отрѣзокъ $XУ$ имѣетъ данную длину.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 232. Внутри треугольника ABC построить такія точки M и M', чтобы углы MAB, MBC и MCA, $M'AC$, $M'CB$ и $M'BA$ были равны между собою.

NB. Эти точки называются точками Брокара.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 233. Найти суммы рядовъ:

$$\frac{1}{\sin x.\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2x.\sin 3x}+\ldots+\frac{1}{\sin(n-1)x.\sin nx},$$

$$\frac{1}{\cos x.\cos 3x}+\frac{1}{\cos 3x.\cos 5x}+\ldots+\frac{1}{\cos(2n-1)x.\cos(2n+1)x}.$$

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 234. Вписать въ данныя двѣ концентрическія окружности четыреугольникъ $ABCD$ такъ, чтобы вершины его A и D лежали на меньшей, а B и C на большей окружности, если даны отношенія $AB{:}AD = m{:}n$ и $BC{:}CD = p{:}q$ и уголъ $DAB = \alpha$ и если извѣстно, что сторона AD проходитъ черезъ данную точку M.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

№ 235. Показать, что если n есть цѣлое не кратное пяти число, то выраженіе

$$(11^{2n}-2^{6n})(n^4-1)$$

дѣлится на 285 безъ остатка.

(Заимств.). *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 170 (3 сер.). Показать, что

$$\operatorname{tg}a = a + \operatorname{tg}a.\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2} + 2^2\operatorname{tg}\frac{a}{2^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^3} + \cdots$$

Изъ формулы

$$\operatorname{tg}2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2a},$$

которую можно представить въ видѣ

$$\operatorname{tg}2a - 2\operatorname{tg}a = \operatorname{tg}2a.\operatorname{tg}^2a,$$

получимъ:

$$\operatorname{tg}a - 2\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}a.\operatorname{tg}^2\frac{a}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{a}{2^2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2^{n-1}} - 2\operatorname{tg}\frac{a}{2^n} = \operatorname{tg}\frac{a}{2^{n-1}}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^n}.$$

Умноживъ эти равенства соотвѣтственно на $2^0, 2^1, 2^2, \ldots 2^{n-1}$ и сложивъ ихъ почленно, получимъ:

$$\operatorname{tg}a - 2^n\operatorname{tg}\frac{a}{2^n} = \operatorname{tg}a.\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2} + 2^2\operatorname{tg}\frac{a}{2^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^3} + \cdots$$
$$\cdots + 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{a}{2^{n-1}}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^n}.$$

Такъ какъ при n безконечно большомъ

$$\lim\left[2^n\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}\right] = \lim\left[a\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right] = a,$$

то

$$\operatorname{tg}a = a + \operatorname{tg}a.\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2} + \cdots$$

П. Бѣловъ (с. Знаменка).

№ 171 (3 сер.). Рѣшить систему:

$$x^6+y^6=65,$$
$$x^4+y^4=17.$$

Пусть $x^2+y^2=u$, $x^2y^2=v$; тогда данную систему можно представить такъ:

$$u(17-v)=65,$$
$$17+2v=u^2.$$

Исключивъ v изъ этихъ уравненій, получимъ:

$$u^3-51u+130=0,$$

или

$$(u-5)(u^2+5u-26)=0,$$

откуда

$$u_1=5,\ u_2=\frac{-5+\sqrt{129}}{2},\ u_3=\frac{-5-\sqrt{129}}{2};$$

тогда

$$v_1=4,\ v_2=\frac{86-10\sqrt{129}}{8},\ v_3=\frac{86+10\sqrt{129}}{8}.$$

Зная u и v, легко опредѣлимъ x и y.

L. (Тамбовъ); *А. Бачинскій* (с. Любень); *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *А. П.* (Ломжа); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*

№ 172 (3 сер.). Данъ треугольникъ ABC. Вычислить безъ помощи тригонометріи стороны другого треугольника, площадь котораго равна площади ABC и два угла равны угламъ, которые двѣ медіаны двухъ сторонъ треугольника ABC составляютъ съ третьей его стороной.

Пусть медіаны сторонъ AC и BC треугольника ABC пересѣкаются въ точкѣ G. Тогда треугольникъ AGB подобенъ искомому треугольнику. Площадь треугольника $AGB = {}^1/_3$ пл. ABC, а площадь треугольника, стороны котораго требуется вычислить, должна быть равна пл. $ABC = 3$ пл. AGB. Поэтому отношеніе сходственныхъ сторонъ подобныхъ треугольниковъ $=\sqrt{3}$, т. е. искомыя стороны суть $AG.\sqrt{3}$, $BG.\sqrt{3}$ и $AB\sqrt{3}$. Но такъ какъ

$$AG=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3},\ BO=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3},\ AB=c,$$

гдѣ a, b, c суть стороны треугольника ABC, то

$$AG=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3}},\ BO=\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3}},\ AB=c\sqrt{3}.$$

Г. Березниковъ (с. Знаменка); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*; *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *L.* (Тамбовъ).

№ 173 (3 сер.). Данъ треугольникъ ABC. Вычислить безъ помощи тригонометріи стороны другого треугольника, площадь котораго равна площади ABC и два угла равны угламъ, которые двѣ высоты, опущенныя на двѣ стороны треугольника ABC, составляютъ съ третьей его стороной.

Такъ какъ разстояніе ортоцентра треугольника отъ каждой изъ его вершинъ равно удвоенному разстоянію центра описаннаго около треугольника круга отъ противоположной стороны (зад. 156-я 3-й сер.), то, обозначивъ черезъ H ортоцентръ треугольника ABC, а черезъ a, b, c, $\triangle$ его стороны и площадь, получимъ:

$$BH = 2\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{16\triangle^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\triangle}\sqrt{b^2c^2 - 4\triangle^2} = \frac{(b^2+c^2-a^2)a}{4\triangle},$$

$$BH = \frac{(a^2+c^2-b^2)b}{4\triangle},\ HC = \frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4\triangle}.$$

Высота HP треугольника AHB равна:

$$HP = CP - HC = \frac{2\triangle}{c} - \frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4\triangle} = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8\triangle c},$$

и

$$\text{пл. } AHB = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{16\triangle}.$$

Такъ какъ площадь треугольника, стороны котораго надо опредѣлить и который, очевидно, подобенъ треугольнику AHB, равна $\triangle$, то отношеніе сторонъ подобныхъ треугольниковъ равно

$$\frac{4\triangle}{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}},$$

а искомыя стороны суть

$$a\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}},\ b\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}} \text{ и } \frac{4\triangle c}{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}}.$$

П. Хлѣбниковъ (Тула); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 18-го Сентября 1895 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

кахъ A и M возставимъ $\perp$-ры къ хордѣ AM, пересѣкающіе въ B и C касательную къ окружности въ срединѣ D дуги x; пусть E—средина хорды AM. Такъ какъ сегментъ ADM $<$ прямоугольника ABCM,

$$x - \sin x < 2AM.ED;$$

но

$$2AM.ED = 2.2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 8.\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4} < 8\,\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{16};\ \text{слѣд. } x-\sin x < {}^1/_4 x^3.$$

8. *Sur une conique du plan d'un triangle* ABC.

Solutions de questions proposées. №№ 878, 879, 925, 927, CCCXII. Послѣдняя изъ этихъ рѣшенныхъ задачъ представляетъ теорему: *Если число* $8q+7$ *первоначальное, то* $2^{4q+3}-1$ *число составное.* (E. Lucas).

Questions d'examen. №№ 687—688.

Questions proposées. №№ 1019—1022. *Д. Е.*

1895. — № 6.

Propriétés des cercles de Chasles. Par M. *E. N. Barisien.* При отысканіи осей эллипса E по двумъ сопряженнымъ діаметрамъ его, методъ Chasles'а приводитъ къ двумъ окружностямъ Σ, Σ' концентрическимъ съ эллипсомъ и имѣющимъ радіусами $a+b$ и $a-b$, гдѣ a и b—полуоси эллипса. M. Barisien предлагаетъ называть эти окружности—*окружностями Chasles'я* и перечисляетъ найденныя до сихъ поръ свойства ихъ, изъ которыхъ мы приведемъ здѣсь простѣйшія.

Пусть O, F, F', A, A', B, B' суть центръ, фокусы и вершины эллипса E; окружности, имѣющія діаметрами AA' и BB', наз. *главною* и *второю*.

Обозначимъ: черезъ M, M_1 точки элл. E, симметричныя относительно AA';
„ M', M'_1 „ главн. окружн., лежащія на прямой MM_1;
„ φ аномалію M'OA точки M;
„ N, N', точки пересѣч. нормали въ M съ радіусами OM', OM'_1;
„ I, I' пересѣченія нормали MN съ осями Ox, Oy;
„ T, T' пересѣченія касательной въ M съ осями;
„ D, D'—длины сопряженн. полудіаметровъ OM и Om.

1) Окружности Σ, Σ' суть геометрическія мѣста точекъ N и N'.

2) Если на нормали къ элл. E въ точкѣ M отложить отрѣзки $=$ D', то геометрическія мѣста полученныхъ точекъ суть окружн. Σ и Σ'.

3) Если N_1 и N'_1 суть проэкціи N и N' на большую ось элл. E, то

$$MN' = M'_1N_1,\ MN_1 = M'_1N'.$$

4) Если S $=$ пл. MM'N, S' $=$ пл. MM'_1N', $\sigma =$ пл. ONN', то

$$\frac{S}{\sigma}=\frac{b}{2(a+b)},\ \frac{S'}{\sigma}=\frac{b}{2(a-b)},\ \frac{S}{S'}=\frac{a-b}{a+b},\ \frac{1}{S}-\frac{1}{S'}=\frac{4}{\sigma}.$$

5) Если G, C, H суть центръ тяжести, центръ описаннаго круга и ортоцентръ тр-ка MM'N, а G, C', H'—аналогичныя точки тр-ка MM'_1N', то прямая CC' параллельна нормали въ M и равна OM.

8) Прямыя CN, C'N' и касательная въ M къ E пересѣкаются въ T на AA'.

9) Прямая Эйлера CGH тр-ка MM'N пересѣкаетъ AA' въ такой точкѣ N'_2, $TN'_2 = TN'_1$; C есть средина HN'_2. Подобнымъ же образомъ, прямая C'G'H' пересѣкаетъ AA' въ такой точкѣ N_2, что $TN_2 = TN_1$; C' есть средина $H'N_2$.

10) Ортоцентры тр-въ MM'N, MM'_1N' и ONN' находятся на одномъ перпендикулярѣ къ AA'.

11) Окружность, имѣющая діаметромъ TT' проходитъ черезъ N и N'.

Sur deux séries trigonométriques. Par M. *E. Barbette.* *Каждый изъ тригонометрическихъ рядовъ*

$$P = \sum_{p=0}^{p=\infty} 2^p\left(1-\cos\frac{x}{2^{p+1}}\right)\sin\frac{x}{2^{p+1}} \quad \text{и}$$

$$Q = \sum_{p=0}^{p=\infty} 3^p\left(\sin\frac{x}{2.3^{p+1}}+\sin\frac{x}{2.3^p}\right)\left(\cos\frac{x}{2.3^{p+1}}-\cos\frac{x}{2.3^p}\right)$$

имѣетъ предѣломъ площадь сегмента, ограниченнаго дугой x *и соотвѣтствующей хордой.*

M. Barbette доказываетъ это аналитически и геометрически. Первое доказательство основано на томъ, что суммы $p+1$ членовъ каждаго ряда суть:

$$P_{p+1} = -\frac{1}{2}\sin x + 2^p \sin\frac{x}{2^{p+1}} \quad \text{и}$$

$$Q_{p+1} = \frac{1}{2}\left(-\sin x + 3^{p+1}\sin\frac{x}{3^{p+1}}\right)$$

и что при $p=\infty$:

$$\lim 2^p \sin\frac{x}{2^{p+1}} = \lim\frac{\sin\frac{x}{2^{p+1}}}{\frac{x}{2^{p+1}}}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

$$\lim 3^{p+1}\sin\frac{x}{3^{p+1}} = \lim\frac{\sin\frac{x}{3^{p+1}}}{\frac{x}{3^{p+1}}}\cdot x = x.$$

Геометрич. доказательство основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Если дугу $x = AB$ раздѣлить на 2 равныя части $BC = CA$, потомъ на 2^2 равныя части $BC_1 = C_1C = \ldots$, вообше на 2^k равныхъ частей, точки дѣленія соединить съ центромъ O и обозначить пересѣченіе OC съ AB черезъ M, OC_1 съ BC черезъ M_1, и т. д., то площадь сегмента ABC есть предѣлъ суммы тр-въ $2BCM + 4BC_1M_1 + 8BC_2M_2 + \ldots$ при $k=\infty$.

Подобнымъ образомъ, если дугу AB раздѣлить 2.3 равныхъ частей, затѣмъ на 2.3^2 равныхъ частей, ...; вообще на 2.3^k равныхъ частей, и точки дѣленія соединить по двѣ, такъ что $BA_1 = A_1B_1 = B_1A_1$, $BA_2 = A_2B_2 = B_2A_1$, $BA_3 = A_3B_3 = B_3A_2, \ldots$, то сегментъ ABC есть предѣлъ суммы трапецій $BA_1B_1A + 3BA_2B_2A_1 + 9BA_3B_3A_2 + \ldots$ при $k = \infty$.

Статья заключается выводомъ неравенства

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6} \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ecole Polytechnique de Paris. Concours de 1895.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique.

1. *Sur la géometrie de la sphère.* 2. *Un probléme d'Arithmétique.*

„Correspondance mathématique et physique“ издавался въ Бельгіи профес. Garnier и Quetelet съ 1825—1839 г. Взятыя изъ него выдержки въ настоящее время имѣютъ только историческій интересъ.

Bibliographie. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Von *Gundelfinger*. Leipzig. 1895. Prix: 12 marcs.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Von *G. Holzmüller*. Leipzig. 1895. Prix: 2.80 marcs.

Solutions de questions proposées. №№ 848, 928, 930, 933.

Въ рѣшеніи задачи № 933 доказано, что

1) Число $4n^4$ есть сумма четырехъ треугольныхъ чиселъ.

2) Каждое изъ чиселъ:

$$6n^4,\ 6n^4+1,\ 6n^4+2n^2+1,\ 6n^4-4n^2+1,\ 6n^4+6n^2+1$$

есть сумма трехъ треугольныхъ чиселъ. (De Rocquigny).

Questions d'examen. №№ 689—691.

Questions proposées. №№ 1023—1026.

Приложенія.

1) Notice sur les recherches de M. de-Tilly en métagéométrie. Par *P. Mansion*. Критико-историческій очеркъ развитія основныхъ принциповъ геометріи и разборъ работъ Tilly по не-евклидовой геометріи. Статья сопровождается подробнымъ библіографическимъ указателемъ.

2) Synopsis der höheren Mathematik, von G. Hagen. Рецензія *J. Neuberg'a*.

Д. Е.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

Juin 1895.

La circulation de l'eau dans l'atmosphère de Mars. *C. Flammarion.* Круговоротъ воды на Марсѣ долженъ происходить не такъ, какъ на землѣ, вслѣдствіе того, что тамъ имѣются совершенно другія условія. Водою тамъ покрыто не болѣе половины поверхности (на землѣ 3/4); такъ какъ напряженіе тяжести на Марсѣ = = 0,376 земного, то атмосферное давленіе должно быть меньше чѣмъ на землѣ, даже если бы каждая кв. ед. поверхности поддерживала такой же столбъ атмосферы, какъ на землѣ; но все заставляетъ думать, что тамъ атмосфера (физически и химически разнящаяся отъ нашей) гораздо рѣже, а потому испареніе дожно совершаться скорѣе и легче (точка кипѣнія воды вѣроятно около 46°); *невидимые* водяные пары задерживаютъ лучеиспусканіе, препятствуютъ поверхности охлаждаться, результатомъ чего должна быть средняя температура болѣе земной (хотя Марсъ въ 1½ раза дальше отъ солнца, чѣмъ земля, и поэтому каждая кв. ед. получаетъ 0,43 того количества тепла, какое получаетъ на землѣ, но за то годъ въ 1,88 раза длиннѣе, такъ что эти два обстоятельства почти уравновѣшиваютъ другъ друга); въ столь разрѣженной атмосферѣ густыя облака могутъ образоваться крайне рѣдко (что и оправдывается наблюденіями) и сильныхъ вѣтровъ быть не можетъ; то обстоятельство, что каналы всюду соединяютъ водные бассейны и никогда не начинаются и не кончаются на материкѣ, говоритъ въ пользу того, что дождей нѣтъ, что поверхность планеты представляетъ равнину. Вѣроятно круговоротъ воды таковъ: отъ таянія полярныхъ снѣговъ происходитъ сильное наводненіе сосѣднихъ мѣстъ, затопляются острова, полуострова и часть материка; избытокъ воды по каналамъ (вѣроятно естественнымъ оврагамъ) стекаетъ и распредѣляется болѣе равномѣрно по планетѣ; затѣмъ вода эта испаряется и въ видѣ невидимаго пара постепенно переносится къ полюсамъ, гдѣ и осаждается въ видѣ снѣга.

Société astronomique de France. *Séances du 15 avril et du 1 mai.*

Les taches polaires de Mars d'après les observations faites á l'Observatoire Manora. *Leo Brenner.* По наблюденіямъ Бреннера южные полярные снѣга на Марсѣ исчезли не ранѣе 14 февраля и вновь появились въ концѣ марта. Въ теченіе первой половины апрѣля снѣга были видны на обоихъ полюсахъ.

La plus grande altitude atteinte par l'homme en ballon. 4-го декабря Berson поднялся на аэростатѣ на такую высоту, какой раньше никто не достигалъ, оставаясь все время въ сознательномъ состояніи. Вотъ данныя, характеризующія поднятіе:

10 ч. 28 м. утра	начало поднятія				
	высота	1500	метровъ	темп.	+ 5°
	„	5000	„	„	— 18°
11 ч. 49 м.	„	6000	„	„	— 25,5° (сердцебіеніе)
12 „ — „	„	6750	„	„	— 29° (1-е вдыханіе кислорода)
12 „ 25 „	„	8000	„	„	— 39°
12 „ 49 „	„	9150	„	„	— 47,9°

Всѣ высоты вычислены, принимая во вниманіе вертикальное распредѣленіе температуръ. Дальнѣйшему поднятію помѣшало отсутствіе балласта. Въ 5 ч. 17 м. аэростатъ прошелъ 310 кил.

Table pour trouver les éclipses passées et futures. *M. Cazeneuve.*

I. Годы столѣтій

1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18
19	**20**	21	22	23	**24**	25	26	27	**28**	29	30	31	**32**	33	34	35	**36**
37	38	39	**40**	41	42	43	**44**	45	46	47	**48**	49	50	51	**52**	53	54
55	**56**	57	58	59	**60**	61	62	63	**64**	65	66	67	**68**	69	70	71	**72**
73	74	75	**76**	77	78	79	**80**	81	82	83	**84**	85	86	87	**88**	89	90
91	**92**	93	94	95	**96**	97	98	99	**100**	1	2	3	**4**	5	6	7	**8**
9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18								

II. Числа мѣсяца

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11		

III. Часы дня и ночи

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	полдень	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	полночь
8	9	10	11	полдень	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	полночь	1	2	3	4	5	6	7

Затменіе повторяется черезъ 223 лун. мѣсяца или 6585 дней или 18 лѣтъ 11 дней и 7 или 8 часовъ.

Чтобы узнать, когда повторится затменіе, бывшее напр. 7-го августа 1887 г., нужно въ табл. I взять число, стоящее *подъ* 87,—получимъ 1905; чтобы найти число мѣсяца, ищемъ въ табл. II *подъ* 7—получаемъ 18 августа; такимъ же образомъ опредѣлится и часъ.

Чтобы узнать бывшія затменія нужно поступать обратно т. е. брать число, написанное *надъ* цифрой года, числа и часа. Слѣдуетъ принимать во вниманіе високосные годы напечатанные жирнымъ шрифтомъ.

Въ таблицѣ III часы отъ полуночи до полудня напечатаны обыкновеннымъ шрифтомъ, отъ полудня до полуночи — курсивомъ.

Nouveau pied à inclinaison variable pour lunettes d'amateurs. *R. Mailhat.* Будетъ помѣщено въ слѣд. № „Вѣстника".

Nouvelles de la science. Variétés.

Observations à faire en Juin.

К. Смоличъ (Умань).

Juillet 1895.

Les catalogues stellaires. *Dorothea Klumpke.* Звѣздные каталоги пережили три періода, характеризующихся способомъ опредѣленія положенія свѣтилъ. Первый періодъ отъ Гиппарха до Гевелія. Для опредѣленія положенія свѣтилъ служили раздѣленные круги съ алидадой и діоптрами, дающіе прямо зенитное раз-

Обложка
ищется

Обложка
ищется