Обложка
ищется

Обложка
ищется

XVIII Сем. 25-го марта 1895 г. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 212.

КЪ ИЗУЧЕНІЮ ЛУЧЕДѢЯТЕЛЬНОСТИ ВЪ ПРИРОДѢ.

ГЛАВА II.

Принципъ пассивности взаимодѣйствія *).

*(Продолженіе**).*

Въ предыдущей статьѣ было, между прочимъ, замѣчено, что наши понятія о веществѣ и объ энергіи настолько аналогичны, что, приписывая первому изъ нихъ однозначность, мы бы должны, послѣдовательности ради, приписать такую же однозначность и понятію объ энергіи, и что дѣленіе энергіи на *потенціальную* и *кинетическую*, имѣя характеръ чисто условный, становится излишнимъ по существу, подобно тому какъ было бы излишнимъ дѣленіе вещества на вещество, существующее въ дѣйствительности и—существующее только въ возможности.

Вопросъ этотъ настолько важенъ, что я позволю себѣ посвятить ему еще нѣсколько страницъ.

---

*) Въ одномъ изъ частныхъ писемъ, вызванныхъ появленіемъ начала настоящей главы, мнѣ былъ сдѣланъ (проф. Любимовымъ) вполнѣ основательный упрекъ касательно противорѣчія, заключающагося въ самомъ терминѣ „пассивное взаимодѣйствіе"; одно изъ двухъ: либо „дѣйствіе", либо „пассивность". Это совершенне вѣрно. Но я настаиваю не на терминѣ (который не трудно замѣнить другимъ болѣе удачнымъ), а только на необходимости ввести *явно* въ элементы физики принципъ пассивности вѣсомой матеріи.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 200.

Должно признаться, что въ опредѣленіяхъ основныхъ физическихъ понятій, даваемыхъ нашими учебниками, замѣчается такая небрежность и такія разногласія, что употребленіе какого нибудь термина, безъ предварительнаго и точнаго указанія его значенія, легко можетъ привесть къ недоразумѣніямъ. Во избѣжаніе такихъ недоразумѣній, мнѣ необходимо разъяснить въ какомъ смыслѣ употребляются въ настоящей статьѣ термины: „вещество", „явленіе", „энергія" и пр.

Начну съ того, что *физическимъ тѣломъ* слѣдовало бы, по моему мнѣнію, называть отнюдь *не всякій*, существующій въ природѣ *предметъ* (какъ это опредѣляютъ многие учебники *), а только *такой*, *въ реальномъ существованіи котораго мы убѣждены*, по тѣмъ либо другимъ причинамъ. Это большая разница, ибо въ природѣ могутъ существовать и такіе объекты, которые не оказываютъ никакого воздѣйствія на наши органы чувствъ. Не зная каковы они, сколько ихъ, не зная даже существуютъ ли они на самомъ дѣлѣ,—имѣемъ ли мы право называть такіе объекты „физическими тѣлами" и, тѣмъ самымъ, включать ихъ въ область физики? Напротивъ, было время, когда въ эту область включались такіе, въ дѣйствительности несуществующіе, объекты, какъ напримѣръ „флогистонъ", „теплородъ" и пр., и такое включеніе было не только естественно, но и вполнѣ основательно, такъ какъ убѣжденіе въ существованіи подобныхъ объектовъ давало химикамъ и физикамъ той эпохи полное право отнести ихъ къ нѣкоторому разряду физическихъ тѣлъ, подлежащему изслѣдованію наравнѣ съ прочими. Такъ и въ наше, напримѣръ, время, если спириты почему бы то ни было убѣждены въ реальномъ существованіи какихъ нибудь тамъ астральныхъ матерій, призраковъ и пр., то эти объекты для нихъ — физическія тѣла (хотя бы и съ особенными свойствами), и они правы, съ своей точки зрѣнія, требуя для этихъ тѣлъ равноправности научнаго изслѣдованія. Да и вообще, развѣ мы можемъ имѣть, кромѣ субъективной *вѣры* въ реальность нѣкотораго объекта, какой бы то ни было объективный критерій этой реальности?

Какова бы ни была область постигаемыхъ нами физическихъ тѣлъ, мы знаемъ нынѣ, на основаніи вѣковыхъ наблюденій и опытовъ, что въ нѣкоторыхъ изъ нихъ есть *нѣчто, не подлежащее ни уничтоженію, ни возсозданію*. Эту то составную часть тѣлъ, (подчиняющуюся закону Лявуазье) мы и называемъ *веществомъ*. А такъ какъ количественная неизмѣнность существованія представляетъ намъ единственный признакъ, по которому мы только и можемъ отличить вещественное въ при-

*) Иные учебники физики поступаютъ еще хуже, ограничивая понятіе о физическомъ тѣлѣ введеніемъ условія объ его *вещественности*. Изъ двухъ понятій о физическомъ тѣлѣ и о веществѣ, первое элементарнѣе и потому не должно основываться на второмъ (а то можетъ случиться, какъ у Краевича, такой circulus viciosus: „то изъ чего *тѣла* состоятъ называется *матеріею*"... „всякій *вещественный* (т. е. состоящій изъ матеріи) предметъ называется *физическимъ тѣломъ*"). У другихъ авторовъ (Гано, Кошельковъ и пр.) понятіе о физическомъ тѣлѣ суживается еще, безъ всякой надобности, условіемъ опредѣленности занимаемаго имъ объема; при такомъ опредѣленіи эѳиръ, напримѣръ, не могъ бы быть названъ физическимъ тѣломъ. Куда же его отнести? Неужели къ тѣламъ *воображаемымъ*?

родѣ отъ невещественнаго*), то я считаю себя въ правѣ утверждать, что законъ сохраненія вещества заключается неявно въ нашемъ понятіи о веществѣ, которое въ противномъ случаѣ не было бы понятіемъ опредѣленнымъ, и что этотъ законъ, хотя научно установленный не болѣе столѣтія тому назадъ, зарождался безчисленное число разъ въ умахъ мыслителей, задававшихся когда либо вопросомъ: что такое вещество?**) Мало того: всѣ наши понятія о величинѣ, количествѣ, равенствѣ и неравенствѣ, наши математическія аксіомы, отчасти даже наши религіозныя вѣрованія и пр. основаны въ сущности на томъ же эмпирическомъ законѣ сохраненія вещества. Химія, а также и физика, нуждались въ опытной повѣркѣ этого закона для тѣхъ случаевъ превращеній, въ которыхъ сохраняемость вещества переставала быть очевидной, и такой повѣрки, какъ извѣстно, пришлось ожидать весьма долго; но вся область умозрѣнія, повидимому, никогда въ справедливости этого закона не сомнѣвалась и въ своихъ умозаключеніяхъ принимала его неявно какъ одну изъ логическихъ посылокъ.

Итакъ, *веществомъ* (или матеріею) *мы называемъ въ природѣ только то, что не подлежитъ въ ней ни уничтоженію ни созданію.* Но кромѣ такой вещественной (или *вѣсомой*) составной части физическихъ тѣлъ, которою обусловливается ихъ *масса* (и *плотность*), въ нихъ есть, какъ намъ извѣстно, еще нѣчто иное, невещественное (невѣсомое); это та именно составная часть физическихъ тѣлъ, которою обусловливается ихъ *состояніе* (тепловое, свѣтовое, магнитное, электрическое, механическое, химическое). Не имѣя права игнорировать ее съ одной стороны, и не имѣя возможности изучить ее—съ другой, мы назвали эту составную часть тѣлъ *эѳиромъ* вообще для всѣхъ тѣлъ (т. е. сдѣлали допущеніе, что невѣсомая часть тѣлъ тождественна по своей сущности во *всѣхъ* тѣлахъ) и предположили, что тѣмъ же эѳиромъ выполнены и всѣ части пространства, свободныя отъ вещества (вѣсомаго). Въ такомъ смыслѣ эѳиръ принимается за нѣкоторую универсальную *среду*, связующую всѣ вещественныя тѣла между собою.—Принявъ такую гипотезу, физика не должна бы называть этой среды (или эѳира) *веществомъ* за отсутствіемъ всякихъ къ тому основаній. Мы бы тогда только имѣли право причислить эѳиръ къ тѣламъ вещественнымъ, когда бы намъ удалось установить для него тотъ же самый принципъ количественной неизмѣнности существованія, какой установленъ для того объекта, который названъ нами веществомъ. Но такой принципъ, какъ извѣстно,

---

*) *Протяженность* не можетъ быть названа отличительнымъ признакомъ вещества, ибо она представляетъ *общее* (и единственно — общее) свойство всѣхъ физическихъ тѣлъ, т. е. не только вещественныхъ, но и всѣхъ прочихъ. *Непроницаемость* (которая иногда принимается за такой отличительный признакъ вещества, см. напр. учебникъ Фролова, гдѣ вмѣсто „непроницаемость" употребленъ терминъ „несовмѣстимость") не можетъ быть принята за *основной* отличительный признакъ вещества, будучи лишь прямымъ слѣдствіемъ принципа сохраненія вещества, т. е. совмѣщеніемъ двухъ основныхъ понятій—протяженности и неизмѣнности существованія.

**) Уже за 450 л. до Р. Х. Анаксагоръ былъ убѣжденъ, что, „ничто не возникаетъ вновь и ничто не уничтожается; все сводится къ сочетанію и перестановкѣ вещей, существовавшихъ отъ вѣка".

не установленъ, и мы не можемъ утверждать, будто всякій мысленно выдѣленный нами элементъ эѳирной среды долженъ существовать вѣчно въ томъ же видѣ. Мы не знаемъ пока, можетъ ли или нѣтъ такой элементъ эѳира подвергаться такимъ эволюціямъ, послѣ которыхъ онъ потерялъ бы всѣ свои отличительныя свойства и пересталъ бы быть для насъ тѣмъ, что мы назвали эѳиромъ, и наоборотъ—возможны ли или нѣтъ такія эволюціи въ природѣ, результатомъ которыхъ было бы новообразованіе эѳира. Мы не знаемъ даже возможенъ ли въ природѣ процессъ превращенія эѳира въ вещество (вѣсомое) и обратно, и всякія гипотезы, основанныя на такомъ превращеніи слишкомъ фантастичны, чтобы имѣть въ наше время право на названіе „научныхъ“ *). Поэтому было бы неосновательно распространять (совершенно произвольно) законъ Лявуазье также и на эѳирную среду, которой такимъ образомъ было бы приписано отличительное свойство вещества.

Отмѣтимъ еще, для устраненія недоразумѣній, что, говоря о *пассивности вещества*, я вовсе не отношу этой пассивности и къ эѳирной средѣ, ибо не считаю себя въ правѣ причислять таковую къ тѣламъ вещественнымъ.—Мнѣ кажется даже, что физика осталась бы не въ проигрышѣ, а въ выигрышѣ, если бы отказалась отъ ни на чемъ неосновайной гипотезы вещественности эѳира **), а вмѣстѣ съ тѣмъ и отъ такихъ чисто метафизическихъ понятій, какъ *невѣсомая матерія*, и согласилась бы принять попросту какъ постулатъ, что *въ природѣ помимо вещества существуетъ еще нѣчто иное, имѣющее съ веществомъ лишь одно общее свойство—протяженности*.

Перехожу теперь ко второй группѣ понятій. Въ большей части учебниковъ физики *явленіемъ* названа *всякая* перемѣна, происходящая въ природѣ, — въ иныхъ же — только такая, которая подлежитъ нашимъ наблюденіямъ ***). И то и другое не точно, ибо *явленіемъ назы-*

---

*) Такихъ гипотезъ было создано не мало. Одною изъ болѣе интересныхъ изъ нихъ является гипотеза *Деллингсгаузена* (1884 г.), отвергающая самостоятельное существованіе „вѣсомой“ матеріи и принимающая, что „тѣла“ суть только тѣ *мѣста*, въ коихъ образуются въ средѣ, выполняющей непрерывно все міровое пространство, стоячія волны.—*Гельмъ* (1881 г.) въ своей гипотезѣ также отказался отъ постоянства матеріи: онъ опредѣляетъ вѣсомый молекулъ какъ то мѣсто въ пространствѣ, гдѣ эѳиръ, принимаемый вообще какъ нѣчто „твердое“, превращается въ „жидкость“. (См. подробнѣе „Очеркъ Исторіи Физики“ Ф. Розенбергера). — Недавно и въ Россіи была придумана крайне фантастичная гипотеза, (г. Ярковскимъ), по которой тяготѣніе объясняется всасываніемъ эѳира твердыми тѣлами (напр. планетами), внутри коихъ онъ сгущается и превращается въ вѣсомую матерію (См. мою рецензію въ № 55 „В. О. Ф.“ и отвѣтъ на нее г. Ярковскаго въ № 64).

**) Всякія аналогіи, какія старались установить между эѳиромъ и вѣсомыми тѣлами, не выдерживаютъ критики уже потому, что—по допущенію—тотъ же эѳиръ входитъ въ составъ всѣхъ вѣсомыхъ тѣлъ. Такъ, напр., изъ факта, что въ эѳирной средѣ могутъ существовать поперечныя волны, подобныя тѣмъ, какія могутъ имѣть мѣсто и въ упругихъ твердыхъ тѣлахъ, нельзя сдѣлать ровно никакого заключенія о сходствѣ эѳира съ твердымъ тѣломъ, ибо, не понимая механизма явленій упругости, мы не можемъ знать, не обусловливаются ли поперечныя волны въ твердыхъ тѣлахъ присутствіемъ въ нихъ того же эѳира.

***) См. напр. учебникъ Кошелькова (ч. I, гл. IV, § 7), гдѣ такое опредѣленіе хотя и не высказывается, но подразумѣвается.

вается не всякая, а лишь *такая перемѣна, происходящая въ природѣ, реальность совершенія которой не подлежитъ для насъ сомнѣнію,* по какимъ бы то ни было причинамъ, т. е. независимо отъ того, можемъ ли мы или не можемъ наблюдать такую перемѣну непосредственно. Помимо событій, наблюдаемыхъ нами непосредственно, въ природѣ совершаются и такія, реальность которыхъ постигается нами косвеннымъ путемъ (какъ напр. измѣненія электрическаго состоянія тѣлъ); таковыя мы должны отнести къ явленіямъ, составляющимъ, наравнѣ съ прочими, предметъ научныхъ изслѣдованій. Наоборотъ, если въ природѣ имѣютъ мѣсто и нѣкоторыя такія событія, реальность которыхъ ни прямымъ ни косвеннымъ путемъ не поддается, въ данное время, констатированію, то, очевидно, причисленіе таковыхъ вполнѣ намъ неизвѣстныхъ событій къ научной области не имѣло бы смысла, и потому не слѣдуетъ ихъ даже и называть „явленіями". Въ исторіи физики находимъ не мало примѣровъ такихъ *фиктивныхъ* явленій, отъ которыхъ пришлось въ послѣдствіи отказаться (таковыми были напримѣръ представленія объ *истеченіи* нѣкотораго объекта (физическаго тѣла) изъ свѣтящихся тѣлъ, изъ нагрѣтыхъ тѣлъ, изъ горящихъ тѣлъ и пр.), и—наоборотъ—такихъ явленій, реальности которыхъ наука раньше не подозрѣвала (какъ напр. явленія электрическихъ волнъ). Слѣдовательно для каждой данной эпохи область явленій, т. е подлежащихъ научному изслѣдованію событій, обусловливается совокупностью познаній, достигнутыхъ въ эту эпоху.

Подобно тому, какъ понятіе о веществѣ неразрывно связано съ идеей о неизмѣнности его существованія, понятіе наше о „явленіи" содержитъ въ себѣ неявно идею о непрекращаемости явленій въ природѣ; такъ же точно какъ не можемъ представить себѣ ни акта созданія вещества изъ ничего, ни акта его превращенія въ ничто, не можемъ также вѣрить въ реальность такого явленія, которое осталось бы въ природѣ безъ всякаго результата, или такого, которое возникло бы само собою, или—какъ принято говорить—безъ всякой причины. Наши понятія о *причинѣ* и *слѣдствіи* цѣликомъ должны бы быть основаны на вышеупомянутой идеѣ непрекращаемости явленій (которую—по аналогіи—можно бы назвать *закономъ сохраненія явленій*) и намъ бы давно слѣдовало принять, что *явленіе можетъ быть вызвано только другимъ явленіемъ,* и что *результатомъ совершившагося явленія должно быть нѣкоторое новое явленіе.* Къ сожалѣнію, эта основная и столь простая идея натуральной философіи подверглась искаженію, вслѣдствіе пристрастія къ чисто абстрактнымъ положеніямъ, и физика, введя въ понятія о причинѣ и слѣдствіи метафизическое представленіе о *силахъ*, была вынуждена принять и такіе постулаты, которые никакого реальнаго смысла не имѣютъ. Къ таковымъ относятся, между прочимъ, такія положенія: „явленіе можетъ быть вызвано не только другимъ явленіемъ, но еще и *положеніемъ* его объектовъ, или ихъ *состояніемъ*", и—наоборотъ—„результатомъ совершившагося явленія могутъ быть не только новыя явленія, но еще и измѣненія *положенія* или *состоянія* объектовъ". Хотя къ такимъ положеніямъ всѣ мы привыкли почти съ дѣтства, но не трудно видѣть, что физическій смыслъ они имѣютъ при томъ только условіи, когда подъ терминами „положеніе" и „состояніе" объектовъ будемъ понимать нѣкоторыя „явленія“. Иначе было бы совершенною нелѣпостью принимать, будто какое бы то ни было „явленіе“ можетъ начаться только отъ того, что его объекты „расположены въ пространствѣ такъ, а не иначе“, или отъ того, что эти объекты въ данный моментъ „находились въ томъ, а не въ иномъ состояніи“. Какъ бы ни было искажено отвлеченной идеей о „силѣ“ наше понятіе о „причинѣ“ явленій, никто изъ насъ, смотря на сущность явленій съ физической точки зрѣнія, не назоветъ *покоя* причиной *перемѣны* или единственнымъ ея слѣдствіемъ.

Итакъ, согласимся принять разъ на всегда, что каждое явленіе представляетъ собою лишь звено въ непрерывной цѣпи совершающихся въ природѣ перемѣнъ, и что если эта непрерывность становится въ иныхъ случаяхъ для насъ не очевидною, то лишь потому, что нѣкоторыя звенья ея представляютъ тѣ именно явленія, коихъ непосредственно наблюдать мы не можемъ, но коихъ реальность тѣмъ не менѣе не подлежитъ никакому сомнѣнію. Такъ напр., когда мы тѣмъ либо инымъ способомъ сожмемъ нѣкоторую часть газа, заставивъ ее принять меньшій объемъ, и когда, повидимому, явленіе такого сжатія дало въ результатѣ лишь измѣненіе состоянія газа,—на самомъ дѣлѣ здѣсь произошло превращенія явнаго явленія въ неявное, (которое можетъ длиться неопредѣленно долго), такъ какъ это новое состояніе газа, характеризующееся увеличеніемъ его упругости, обусловливается нѣкоторыми перемѣнами въ движеніяхъ молекулъ газа, вызванными явленіемъ сжатія; наоборотъ, если этотъ газъ, расширяясь когда нибудь до прежняго объема, вызоветъ то либо другое явленіе, подлежащее нашему наблюденію, то мы, очевидно, скажемъ, что здѣсь произошло превращеніе неявнаго явленія (молекулярнаго) въ явное.

Когда явленія превращаются одни въ другія въ той непрерывной цѣпи событій, совокупность которыхъ мы называемъ *природою*, въ нихъ есть нѣчто, остающееся количественно неизмѣннымъ, независимо отъ того, какіе объекты участвуютъ въ явленіяхъ, и проходятъ ли при такомъ превращеніи явленія черезъ фазы явныя или неявныя. Это *нѣчто, не подлежащее при превращеніяхъ явленій ни уничтоженію ни созданію*, мы *называемъ энергіею*. При такомъ опредѣленіи, мы не постигаемъ ни явленій, лишенныхъ энергіи, ни энергіи внѣ явленія. Терминъ „энергія присущая веществу“ (или—эѳиру) въ физикѣ не можетъ имѣть смысла.

Съ принятіемъ термина „энергія“, вышеупомянутая идея о непрекращаемости явленій могла уже быть формулирована болѣе опредѣленно въ видѣ *закона сохраненія энергіи*, вполнѣ аналогичнаго съ „закономъ сохраненія вещества“. Подобно тому какъ этотъ послѣдній, давно подмѣченный изъ наблюденій надъ окружающими насъ тѣлами, потребовалъ экспериментальнаго оправданія для тѣхъ случаевъ, гдѣ количественная неизмѣнность вещества переставала быть очевидной, такъ и законъ сохраненія энергіи, вполнѣ соотвѣтствующій эмпирически сложившемуся въ насъ убѣжденію объ эквивалентности причины и слѣдствія, требовалъ оправданія и разъясненія для тѣхъ случаевъ, гдѣ такая эквивалентность могла казаться сомнительной. Но такихъ случаевъ оказалось очень много, потому что таковыми представляются намъ, вообще говоря, всѣ тѣ превращенія, въ которыхъ явленія переходятъ изъ фазы явныхъ въ фазу неявныхъ явленій и наоборотъ. Провѣрить непосредственно для такихъ случаевъ эквивалентность слѣдствія и причины, т. е. количественную неизмѣнность энергіи явленія (или *работоспособности*), не оказывалось возможнымъ, и потому законъ сохраненія энергіи не могъ быть прочно установленъ до тѣхъ поръ, пока его не удалось оправдать косвеннымъ путемъ, т. е. пока не догадались, для случаевъ превращенія явленія въ неявную фазу, превратить его еще разъ въ фазу явнаго явленія. Такой искусственный методъ *двойныхъ* превращеній явленій не только далъ возможность установить законъ сохраненія энергіи на вполнѣ прочныхъ основахъ, но способствовалъ еще открытію новаго принципа *разсѣянія энергіи*, обнаруживъ фактъ нѣкоторой количественной потери работоспособности явленій въ иныхъ случаяхъ двойного ихъ превращенія.

И вотъ, ради удобства математической формулировки закона сохраненія энергіи, въ физику былъ введенъ новый и въ сущности излишній терминъ *потенціальной энергіи* для обозначенія работоспособности всѣхъ тѣхъ неявныхъ явленій, которыя не подлежатъ непосредственному наблюденію; въ частности потенціальною *энергіею положенія* была названа энергія тѣхъ неявныхъ явленій, которыми обусловливается расположеніе ихъ объектовъ въ пространствѣ, и—*энергіею состоянія* (которая подраздѣляется на виды: энергіи химической, электрической и пр. соотвѣтственно видовымъ названіямъ явленій)—энергія тѣхъ явленій, коими обусловливается состояніе тѣлъ. Для явленій явныхъ, которыя физика сводитъ къ *движенію*, энергія, для отличія отъ потенціальной, была названа *кинетической*. При превращеніи явленія явнаго въ неявное принято говорить, что энергія кинетическая переходитъ въ потенціальную, и—наоборотъ—потенціальная переходитъ въ кинетическую при превращеніи явленія неявнаго въ явное. Такимъ образомъ законъ сохраненія энергіи принялъ формулировку: „сумма кинетической и потенціальной энергій остается постоянною“ *).

Не отрицая удобствъ такого чисто формальнаго дѣленія энергіи на кинетическую и потенціальную, намъ все таки не слѣдуетъ забывать, что съ физической точки зрѣнія различія между этими двумя видами энергіи не существуетъ. Признать это различіе чисто внѣшнимъ, зависящимъ попросту отъ границъ нашихъ чувственныхъ воспріятій, вынуждаютъ насъ не только тѣ соображенія, какія вкратцѣ здѣсь были

---

*) Аналогично этому можно было бы и законъ сохраненія вещества формулировать напримѣръ такъ: „при всѣхъ (физическихъ и химическихъ) превращеніяхъ сумма твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ веществъ остается постоянною“. Но въ такомъ дѣленіи вещества на „твердое“, „жидкое“ и „газообразное“ не было, къ счастію, необходимости, благодаря тому лишь случайному обстоятельству, что въ эпоху установленія закона Лавуазье перестали уже сомнѣваться въ вещественности газовъ, а въ вещественности жидкостей не сомнѣвались и раньше.

высказаны, но еще и неоспоримые факты. Къ таковымъ относятся напримѣръ факты *излученія* потенціальной энергіи, наравнѣ съ излученіемъ энергіи кинетической, о которыхъ побесѣдуемъ подробнѣе въ слѣдующей статьѣ.

Эр. Шпачинскій.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

О САМОСТОЯТЕЛЬНЫХЪ РАБОТАХЪ
УЧЕНИКОВЪ ГИМНАЗІЙ
по физико-математическимъ наукамъ.

(*Окончаніе**).

Ограничиваясь этими примѣрами, перейдемъ къ физикѣ и предметамъ, связаннымъ по программамъ съ нею,—химіи, механикѣ и метеорологіи съ физической географіей.

Положимъ, предложена тема: „Атомическая гипотеза“ и разработана слѣдующимъ безхитростнымъ манеромъ. Сначала изъ общихъ свойствъ тѣлъ выдѣлены протяженность и непроницаемость, какъ опредѣляющія понятіе о физическомъ тѣлѣ; затѣмъ разсмотрѣны остальныя свойства, причемъ указана довольно заурядная ошибка нашихъ учебниковъ, въ которыхъ въ качествѣ примѣровъ на упругость тѣлъ приводится упругость при сгибаніи и крученіи, тогда какъ упругостью, общею для всѣхъ тѣлъ, является лишь *упругость при сжатіи* ихъ, такъ какъ жидкости и газы ни крутить ни сгибать нельзя; затѣмъ, въ качествѣ обобщенія этихъ свойствъ приведена гипотеза атомовъ: скважность ведетъ къ понятію о частичномъ строеніи тѣлъ, дѣлимость показываетъ чрезвычайную малость частицъ, составляющихъ физическое тѣло, сцѣпленіе и упругость при сжатіи—присутствіе силъ притягательныхъ и отталкивательныхъ между частицами, и т. д.; потомъ приведены аналогіи—во первыхъ, солнечной системы, которая, состоя изъ отдѣльныхъ тѣлъ, тѣмъ не менѣе представляетъ собою цѣлое, причемъ части связаны между собою одновременно притягательными и отталкивательными силами (всемірное притяженіе и центробѣжная сила), во вторыхъ, кучки желѣзныхъ опилокъ, которая при подведеніи магнита подъ бумагу, на которой она насыпана, принимаетъ видъ кучки иголокъ (вродѣ ежа), причемъ каждая иголка состоитъ изъ отдѣльныхъ крупинокъ, связанныхъ между собою магнитизмомъ, и разсыпающихся при удаленіи магнита, и др. подобн.; послѣ этого приведены при-

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 205, 208 и 210.

мѣры, вродѣ измѣненій въ изломѣ полосы желѣза, который является вскорѣ послѣ изготовленія полосы волокнистымъ, а потомъ, черезъ нѣсколько лѣтъ кристаллическимъ, что доказываетъ перемѣщеніе частицъ внутри полосы; наконецъ перечислены и пояснены примѣрами главнѣйшіе законы химіи, связанные съ понятіемъ объ атомахъ. Явленія кристаллизаціи и основанія кинетической теоріи газовъ, допускающія очень элементарную обработку, могутъ быть и пропущены. Чтобы написать подобный рефератъ, ученику 6—8 класса достаточно немного почитать, побольше подумать, обработать со стороны языка и, пожалуй, исторіи вопроса, и въ результатѣ получится чтеніе, которое съ интересомъ выслушается товарищами и можетъ вызвать съ ихъ стороны нѣкоторыя замѣчанія, которыя послужатъ къ лучшему уясненію вопроса.

Такой же разработкѣ можно подвергнуть законъ сохраненія энергіи, теорію свѣта, теорію оптическихъ приборовъ, установленіе должнаго понятія о *массѣ*, основательный выводъ формулъ оптическихъ зеркалъ и стеколъ безъ малопонятныхъ допущеній о равенствахъ гипотенузы и катета, дуги и хорды, различныя части курсовъ химіи, механики и метеорологіи съ физической географіей, и многое другое.

Что касается до опытовъ по физикѣ и химіи, то достаточно будетъ указать на такія сочиненія, какъ лекціи по электричеству, читанныя Тиндалемъ для дѣтей, имѣющіяся въ русскомъ переводѣ, на книгу Ковалевскаго, содержащую описаніе простѣйшихъ пріемовъ производства физическихъ опытовъ, на брошюру П. Преображенскаго по химіи, назначенную для учениковъ гимназій, чтобы доказать полную возможность практическихъ работъ по химіи и физикѣ помощью предметовъ обыденной жизни или же покупныхъ, но стоющихъ очень дешево (напр. производство почти всѣхъ опытовъ по химіи согласно брошюрѣ г. Преображенскаго обходится не дороже 2—3 руб., не принимая въ разсчетъ того, что часть приборовъ можетъ идти также для опытовъ по физикѣ, что, въ сущности, уменьшаетъ расходы на собственно химическіе опыты). Если порыться въ старыхъ и новыхъ дѣтскихъ, педагогическихъ и семейныхъ журналахъ, то найдется много цѣнныхъ указаній подобнаго рода. Отмѣчу статейку въ „Научномъ Обозрѣніи“ за 1894 г. о дешевыхъ вѣсахъ, устраиваемыхъ изъ аптечной стклянки, пробокъ, вязальныхъ спицъ и швейныхъ иголъ, и обращу вниманіе на возможность изъ стеколъ для очковъ получить зрительную трубу, раза въ 3—4 сильнѣе обычныхъ дешевыхъ биноклей (объективъ—стекло № 10—12, т. е. съ фокуснымъ разстояніемъ въ 10—12 дюймовъ, окуляръ—вогнутое или выпуклое стекло или система стеколъ съ фокуснымъ разстояніемъ въ 1—2 дюйма) и на электрическую машину, описанную въ названномъ выше соч. Ковалевскаго; одни эти три прибора могутъ дать возможность произвести длинный рядъ опытовъ и наблюденій въ области физики, астрономіи, минералогіи и др. наукъ.

Физика и космографія—это, казалось бы, науки, назначенныя самою природою ихъ для развитія въ учащихся способности производить опыты и наблюденія. Насколько далеки педагоги отъ стремленія достичь этой цѣли, видно изъ того, что въ учебникахъ космографіи обыкновенно не бываетъ даже карты звѣзднаго неба, въ курсахъ физики (за исключеніемъ чуть ли не одного курса г. Любимова), описываются опыты, производимыя съ помощью дорогихъ и сложныхъ приборовъ; насколько считаются не примѣнимыми къ занятіямъ по физикѣ опыты съ упрощенными приборами, показываетъ каталогъ физическаго кабинета городского училища, помѣщенный г. Краевичемъ въ „Семьѣ и Школѣ“ за 1881 г., въ которомъ онъ рекомендуетъ въ числѣ первыхъ, особо нужныхъ, вещей пріобрѣтать: „бузинный шарикъ на уединяющей подставкѣ въ $1^1/_2$ р., электрофоръ въ 5 р., смоляную или изъ рогового каучука палочку и кусокъ сукна въ 1 р., стеклянную палку съ амальгамированной кожей въ 1 р., отвѣсъ въ 75 коп., плотничій ватерпасъ въ 2 р., приборъ для опытовъ надъ центромъ тяжести, состоящій изъ деревянаго треугольника съ отверстіями и штативомъ въ 5 р.“ и т. д. Въ предисловіи къ этому каталогу г. Краевичъ рекомендуетъ покупать именно эти, а не дешевые приборы для большей успѣшности опытовъ. Насколько онъ былъ не правъ можно видѣть изъ того, что въ одномъ городскомъ училищѣ учитель никакъ не могъ пустить въ ходъ машину Гольца, а въ дѣтствѣ у знакомаго реалиста я видѣлъ превосходно дѣйствующую сдѣланную имъ изъ бутыли электрическую машину. Существуетъ школьный терминъ: „*показывать* опыты“, и дѣйствительно они показываются издали, изучаются по книжкѣ и, оканчивая курсъ, ученики „все знаютъ и ничего не умѣютъ“. Тиндаль смотрѣлъ на дѣло иначе. При своихъ лекціяхъ дѣтямъ объ электричествѣ онъ пользовался исключительно приборами, устроенными изъ стакановъ, бутылокъ, рюмокъ, булавокъ, сургуча и т. п. обиходныхъ предметовъ, и при этомъ настойчиво выражалъ желаніе, чтобы слушатели пытались повторять видѣнные опыты, разнообразя ихъ форму, приводя въ примѣръ знаменитаго Фарадея, который въ минуты отдыха любилъ заставлять кататься по столу яичную скорлупу, кольца изъ бумаги и другія вещи подъ дѣйствіемъ наэлектризованной палочки и производить подобныя этимъ явленія. Руководства Герда по минералогіи и др. естественнымъ наукамъ проводятъ ту же мысль. Въ защиту ея же можетъ служить и статья г. Елсакова: „Опредѣленіе скорости звука помощью эха въ классномъ корридорѣ“, помѣщенная въ № 189 „Вѣстника Оп. Физ.“ за 1894 г. Всѣмъ извѣстны научныя изслѣдованія Франклина, произведенныя простѣйшими средствами: его воздушный змѣй, помощью котораго онъ извлекъ электричество изъ облака, его суконные лоскутки разныхъ цвѣтовъ, раскладываемые по снѣгу на солнцѣ, чтобы по количеству растаявшаго подъ ними снѣга судить о степени теплопоглощательной способности различныхъ цвѣтовъ. Подобнымъ же образомъ и химикъ Шееле свои великія открытія сдѣлалъ, работая съ помощью обыкновенныхъ бутылокъ, пивныхъ стакановъ, бычачьихъ пузырей и т. п. Сѣмянные живчики были открыты лупою, состоящею изъ капли воды, помѣщенной надъ малымъ отверстіемъ въ металлической пластинкѣ. Въ отчетахъ о послѣдней парижской выставкѣ писали, что тамъ былъ отдѣлъ, въ которомъ были выставлены первоначальные инструменты, помощью которыхъ дѣлались извѣстными учеными прославившія ихъ открытія, и эти инструменты оказались самаго простого, можно сказать домашняго устройства.

Все это доказываетъ возможность и пользу научныхъ практическихъ работъ въ гимназіяхъ, но будутъ ли гимназисты производить ихъ?

Недавно знакомый учитель гимназіи передавалъ мнѣ, что одинъ изъ лучшихъ учениковъ по математикѣ обращался къ нему съ просьбою указать какую нибудь серьезную работу изъ области физико-математическихъ наукъ для самостоятельныхъ занятій. Въ одномъ классѣ гимназіи я знаю многихъ учениковъ, изъ которыхъ каждый работалъ самостоятельно въ какой нибудь области и достигъ хорошихъ успѣховъ: одинъ изучалъ химію, производилъ опыты, познакомился съ курсомъ Менделѣева, зналъ атомные вѣса нѣкоторыхъ элементовъ съ сотыми долями, другой собралъ порядочный гербарій и основательно занимался ботаникой и химіей (эти два химика только въ 8-мъ классѣ узнали, что занимались однимъ предметомъ въ предыдущихъ классахъ), третій проходилъ курсы геометрическаго черченія, начертательной геометріи и перспективы, четвертый, построивъ электрическую машину Гольца, электрическій звонокъ, производилъ гальванопластическіе опыты, еще былъ хорошій историкъ, былъ филологъ, былъ музыкантъ—и все это въ *одномъ* классѣ, и при томъ я отмѣтилъ лишь особо выдающихся, которые безъ постронней помощи достигли замѣтныхъ результатовъ. Возьмите любителей физико-математическихъ наукъ изъ пяти старшихъ классовъ, ободрите ихъ къ работѣ примѣрами вродѣ Франклина и Шееле, заинтересуйте чтеніемъ историческаго обзора какой либо части науки или намѣтьте практическое значеніе ея, поощряйте наблюдательность, терпѣливо выслушивайте вопросы, которыхъ молодые умы не въ силахъ разрѣшить, намѣчайте темы для разработки, являйтесь, не лѣнясь, на помощь въ случаяхъ затрудненія въ теоретическомъ вопросѣ или практическомъ приложеніи теоріи, поощряйте взаимное общеніе учащихся на поприщѣ науки—и я увѣренъ, что прекрасные результаты не замедлятъ обнаружиться. Вспомнимъ разсказъ Тиндаля о времени его учительства, какъ его ученики испысывали заборы геометрическими чертежами, какъ они отказывались отъ задачъ изъ обычныхъ сборниковъ съ данными рѣшеніями, а предпочитали болѣе трудныя, изъ неизвѣстныхъ имъ источниковъ, какъ, пробившись долго надъ рѣшеніемъ трудной задачи, мальчикъ съ блестящими отъ удовольствія и гордости глазами, заявлялъ: „я рѣшилъ, сэръ!“ и на основаніи этого придемъ къ заключенію, что не учителямъ не хватитъ любознательныхъ и трудолюбивыхъ учениковъ, а скорѣе ученикамъ—не боящихся лишняго труда учителей. Кто не знаетъ огромнаго практическаго значенія метеорологіи, особенно въ земледѣльческомъ государствѣ, какова Россія, кто также не знаетъ замѣчательной простоты главнѣйшихъ метеорологическихъ наблюденій, необходимости возможно частой сѣти станцій, присутствія въ каждомъ физическомъ кабинетѣ нужныхъ для этого инструментовъ, а при сколькихъ гимназіяхъ производятся наблюденія этого рода? Не такъ же обременены преподаватели дѣломъ, чтобы не имѣть времени организовать наблюденія хотя бы помощью учениковъ, какъ это практикуется въ одномъ заведеніи, извѣстномъ мнѣ. Впрочемъ, метеорологическія наблюденія не входятъ въ кругъ прямыхъ обязанностей учителей, но та работа, о которой трактуется въ настоящей замѣткѣ, имѣетъ цѣлью помочь лучшему выполненію дѣла образованія и воспитанія молодого поколѣнія, и потому можетъ быть и вызоветъ попытки дѣятельности подобнаго рода или, по крайней мѣрѣ, возраженія противъ возможности рекомендуемаго дѣла.

Настоящее время можно считать особенно удобнымъ для опыта введенія описанныхъ выше работъ. Педагогическій отдѣлъ будущей Нижегородской выставки даетъ возможность показать образцы приборовъ, устроенныхъ учениками, таблицы опытовъ и наблюденій, произведенныхъ ими, рефератовъ, читанныхъ на бесѣдахъ, предлагаемыхъ въ настоящей замѣткѣ, и т. п. работы, и услыхать судъ новому дѣлу со стороны педагоговъ и публики.

Каковъ бы ни былъ приговоръ, но участникамъ дѣла онъ во всякомъ случаѣ не принесетъ ничего, кромѣ чести: при необязательности для учениковъ и учителей подобныхъ работъ появленіе ихъ докажетъ трудолюбіе и любовь къ наукѣ первыхъ, преданность своему дѣлу и безкорыстное служеніе интересамъ молодого поколѣнія со стороны вторыхъ.

С. Полянскій (Симбирскъ).

РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ

СО МНОГИМИ НЕИЗВѢСТНЫМИ

ПРИ ПОМОЩИ

МАГИЧЕСКИХЪ КВАДРАТОВЪ.

Когда дано n уравненій съ n неизвѣстными, то, пользуясь магическимъ квадратомъ изъ n^2 членовъ, можно поставить въ эти уравненія на мѣсто неизвѣстныхъ такія значенія, которыя одно изъ уравненій обращаютъ въ тожество, а остальныя $n-1$ уравненіе въ уравненія съ $n-1$ неизвѣстнымъ. Квадратъ изъ $(n-1)^2$ членовъ точно такъ же можетъ служить для приведенія къ $n-2$ уравненіямъ съ $n-2$ неизвѣстными и т. д.

Такъ напр. когда дано пять уравненій:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = n_1,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 = n_2,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 = n_3,$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 + d_5x_5 = n_4,$$

$$e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 + e_5x_5 = n_5,$$

то, пользуясь магическимъ квадратомъ:

$y_1+n_1-y_2$	$2y_1+y_4-y_3-\frac{n_1}{5}$	y_1	$\frac{2n_1}{5}-y_4$	$y_2+y_3-4y_1-\frac{n_1}{5}$
$y_2+y_3-16y_1-y_4$	y_2	y_3	$\frac{3n_1}{5}-y_2-y_3$	$16y_1+y_4+\frac{2n_1}{5}-y_2-y_3$
$5y_1$	$\frac{4n_1}{5}-2y_2-y_3$	$\frac{n_1}{5}$	$2y_2+y_3-\frac{2n_1}{5}$	$\frac{2n_1}{5}-5y_1$
$y_2+6y_1+y_4-\frac{3n_1}{5}$	$y_2+y_3-\frac{n_1}{5}$	$\frac{2n_1}{5}-y_3$	$\frac{2n_1}{5}-y_2$	$n_1-y_2-6y_1-y_4$
$4y_1+\frac{3n_1}{5}-y_2-y_3$	$y_3+\frac{3n_1}{5}-2y_1-y_4$	$\frac{2n_1}{5}-y_1$	y_4	$y_2-y_1-\frac{3n_1}{5}$

можно давать значенія неизвѣстнымъ:

$$x_1=\frac{y_1+n_1-y_2}{a_1},=\frac{y_2+y_3-16y_1-y_4}{a_1},=\frac{5y_1}{a_1},=\frac{y_2+6y_1+y_4-\frac{3n}{5}}{a_1},=\frac{4y_1+\frac{3n_1}{5}-y_2-y_3}{a_1}$$

$$x_2=\frac{2y_1+y_4-y_3-\frac{n_1}{5}}{a_2},=\frac{y_2}{a_2},=\frac{\frac{4n_1}{5}-2y_2-y_3}{a_2},=\frac{y_2+y_3-\frac{n_1}{5}}{a_2},=\frac{y_3+\frac{3n_1}{5}-2y_1-y_4}{a_2}$$

$$x_3=\frac{y_1}{a_3},=\frac{y_3}{a_3},=\frac{\frac{2n_1}{2}-y_3}{a_3},=\frac{\frac{2n_1}{5}-y_1}{a_3}$$

$$x_4=\frac{\frac{2n_1}{5}-y_4}{a_4},=\frac{\frac{3n_1}{5}-y_2-y_3}{a_4},=\frac{2y_2+y_3-\frac{2n_1}{5}}{a_4},=\frac{\frac{2n_1}{5}-y_4}{a_4},=\frac{y_4}{5}$$

$$x_5=\frac{y_2+y_3-4y_4-\frac{n_1}{5}}{a_5},=\frac{16y_1+y_4+\frac{2n_1}{5}-y_2-y_3}{a_5},=\frac{\frac{2n_1}{5}-5y_1}{a_5},=\frac{n_1-y_2-6y_1-y_4}{a_5},=$$

$$=\frac{y_2-y_1-\frac{3n_1}{5}}{a_5}.$$

Такъ что, вставляя значенія, соотвѣтствующія членамъ одного какого либо ряда, столбца или же расположенныя по діагоналямъ квадрата, первое уравненіе обратимъ въ тождество, а вмѣсто остальныхъ получимъ четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными вида:

$$\begin{aligned}
A_1 y_1+A_2 y_2+A_3 y_3+A_4 y_4&=N_1,\\
B_1 y_1+B_2 y_2+B_3 y_3+B_4 y_4&=N_2,\\
C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3+C_4 y_4&=N_3,\\
D_1 y_1+D_2 y_2+D_3 y_3+D_4 y_4&=N_4,
\end{aligned}$$

гдѣ коэффиціенты и извѣстные члены будутъ имѣть то или другое значеніе, смотря по сдѣланной подстановкѣ неизвѣстныхъ. Для рѣшенія послѣднихъ уравненій можно воспользоваться членами магическаго квадрата:

$N_1-z_2-\frac{z_1}{2}$	$\frac{z_1}{2}-z_3$	$z_2+z_3+\frac{z_1}{2}$	$-\frac{z_1}{2}$
$z_1+z_2+z_3-\frac{N_1}{2}$	$\frac{N_1}{2}-z_1$	$\frac{N_1}{2}-z_2$	$\frac{N_1}{2}-z_3$
$\frac{N_1-z_1}{2}-z_2-z_3$	$\frac{N_1+z_1}{2}$	$\frac{z_1-N_1}{2}+z_2$	$z_3+\frac{N_1-z_1}{2}$
z_2	z_3	$N_1-z_1-z_2-z_3$	z_1

(2)

раздѣляя которые на коэффиціенты перваго уравненія и вставляя ихъ въ остальныя, получимъ такого же вида уравненія съ тремя неизвѣстными, для приведенія которыхъ къ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными могутъ служить члены квадрата:

u_1	u_2	$M_1-u_1-u_2$
$\frac{4M_1}{3}-2u_1-u_2$	$\frac{M_1}{3}$	$2u_1+u_2-\frac{2M_1}{3}$
$u_1+u_2-\frac{M_1}{3}$	$\frac{2M_1}{3}-u_2$	$\frac{2M_1}{3}-u_1$.

(3)

Иногда съ помощію магическихъ квадратовъ, смотря по виду уравненій, можно очень быстро привести эти уравненія къ системѣ, имѣющей небольшое число неизвѣстныхъ. Такъ, пользуясь квадратомъ (3), для 8-ми уравненій вида:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5+a_6x_6+a_7x_7+a_8x_8=p_1,$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5+b_6x_6+b_7x_7+b_8x_8=p_2,$$
$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=c_6x_6+c_7x_7+c_8x_8=c_1x_1+c_4x_4+c_6x_6=M_1,$$
$$c_1x_1+c_8x_8=c_3x_3+c_6x_6=c_4x_4+c_5x_5=\frac{2M_1}{3},$$

обратимъ послѣднія шесть уравненій въ тождества, а первыя два будутъ съ двумя неизвѣстными. Точно также, пользуясь квадратами (1) и (2), можно преобразовать систему уравненій съ 25, или 24-мя неизвѣстными и систему съ 16-ю или 15-ю неизвѣстными въ систему съ тремя неизвѣстными.

Для преобразованія системы уравненій:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=p_1,$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5=p_2,$$
$$x_1x_2x_3=x_1x_4x_5=\mathrm{M}_1,\ x_3x_5=\sqrt[3]{\mathrm{M}_1^2}$$

можно пользоваться тройнымъ квадратомъ отъ произведенія:

x_1	x_2	$\frac{\mathrm{M}_1}{x_1x_2}=x_3$
$\frac{\mathrm{M}_1\sqrt[3]{\mathrm{M}_1}}{x_1^2x_2}=x_4$	$\sqrt[3]{\mathrm{M}_1}$	$\frac{x_1^2x_2}{\sqrt[3]{\mathrm{M}_1^2}}$
$\frac{x_1x_2}{\sqrt[3]{\mathrm{M}_1}}=x_5$	$\frac{\sqrt[3]{\mathrm{M}_1^2}}{x_2}$	$\frac{\sqrt[3]{\mathrm{M}_1^2}}{x_1}$

(4)

съ помощію котораго послѣднія три уравненія обратятся въ тождества, а первыя два будутъ квадратныя (въ отношеніи къ x_1) съ двумя неизвѣстными. Пользуясь магическими квадратами:

$\frac{x_1n_1}{x_2^2}$	$\frac{x_1^2x_4}{x_3\sqrt[5]{n_1}}$	x_1	$\frac{\sqrt[5]{n_1^2}}{x_4}$	$\frac{x_2x_3}{x_1^4\sqrt[5]{n_1}}$
$\frac{x_2x_3}{x_1^{16}x_4}$	x_2	x_3	$\frac{\sqrt[5]{n_1^3}}{x_2x_3}$	$\frac{x_1^{16}x_4\sqrt[5]{n_1^2}}{x_2x_3}$
x_1^5	$\frac{\sqrt[5]{n_1^4}}{x_2^2x_3}$	$\sqrt[5]{n_1}$	$\frac{x_2^2x_3}{\sqrt[5]{n_1^2}}$	$\frac{\sqrt[5]{n_1^2}}{x_1^5}$
$\frac{x_2x_1^6x_4}{\sqrt[5]{n_1^3}}$	$\frac{x_2x_3}{\sqrt[5]{n_1}}$	$\frac{\sqrt[5]{n_1^2}}{x_3}$	$\frac{\sqrt[5]{n_1^2}}{x_2}$	$\frac{n_1}{x_1^6x_2x_4}$
$\frac{x_1^4\sqrt[5]{n_1^3}}{x_2x_3}$	$\frac{x_3\sqrt[5]{n_1^3}}{x_1^2x_4}$	$\frac{\sqrt[5]{n_1^2}}{x_1}$	x_4	$\frac{x_2}{x_1\sqrt[5]{n_1^3}}$

(5)

и:

$\frac{n_1}{x_2\sqrt{x_1}}$	$\frac{\sqrt{x_1}}{x_3}$	$x_2x_3\sqrt{x_1}$	$\frac{1}{\sqrt{x_1}}$
$\frac{x_1x_2x_3}{\sqrt{n_1}}$	$\frac{\sqrt{n_1}}{x_1}$	$\frac{\sqrt{n_1}}{x_2}$	$\frac{\sqrt{n_1}}{x_3}$
$\frac{\sqrt{n_1}}{x_2x_3\sqrt{x_1}}$	$\sqrt{x_1n_1}$	$\frac{x_2\sqrt{x_1}}{\sqrt{n_1}}$	$\frac{x_3\sqrt{n_1}}{\sqrt{x_1}}$
x_2	x_3	$\frac{n_1}{x_1x_2x_3}$	x_1

(6)

можно преобразовать сходныя съ предыдущими уравненія съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ въ системы уравненій съ 4-мя и тремя неизвѣстными. Кромѣ того, послѣдніе три квадрата, также какъ и первые, могутъ служить для преобразованія болѣе сложныхъ системъ уравненій. Такъ напр., если дана система уравненій:

$$a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + a_3 \log x_3 + a_4 \log x_4 + a_5 \log x_5 = p_1,$$

$$b_1 \log x_1 + b_2 \log x_2 + b_3 \log x_3 + b_4 \log x_4 + b_5 \log x_5 = p_2,$$

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 x_4 x_5 = \mathrm{M}_1,\ x_3 x_5 = \sqrt[3]{\mathrm{M}_1^2},$$

то, логариѳмируя три послѣднихъ уравненія, получимъ:

$$\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 = \log \mathrm{M}_1$$

$$\log x_1 + \log x_4 + \log x_5 = \log \mathrm{M}_1$$

$$\log x_3 + \log x_5 = \frac{2 \log \mathrm{M}_1}{3}.$$

Съ другой стороны, логариѳмируя члены магическаго квадрата (4), получимъ:

$$\log x_3 = \log \mathrm{M}_1 - \log x_1 - \log x_2,$$

$$\log x_4 = \frac{4 \log \mathrm{M}_1}{3} - 2 \log x_1 - \log x_2,$$

$$\log x_5 = \log x_1 + \log x_2 - \frac{\log \mathrm{M}_1}{3}.$$

Такимъ образомъ члены 4-го квадрата будутъ корнями трехъ послѣднихъ уравненій (изъ числа данныхъ), а логариѳмы ихъ, вставленные въ первыя два уравненія, приводятъ къ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными.

Для преобразованія уравненій:

$$\alpha^{x_1}+\alpha^{x_2}+\alpha^{x_3}+\alpha^{x_4}+\alpha^{x_5}=p,$$

$$\beta^{x_1}+\beta^{x_2}+\beta^{x_3}+\beta^{x_4}+\beta^{x_5}=q,$$

$$\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}\alpha^{x_3}=\alpha^{x_1}\alpha^{x_4}\alpha^{x_5}=\alpha^{n},\ \alpha^{x_3}\alpha^{x_5}=\alpha^{\frac{2n}{3}},$$

можно воспользоваться магическимъ квадратомъ отъ произведенія:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \alpha^{x_1} & \alpha^{x_2} & \alpha^{n-x_1-x_2} \\ \hline \alpha^{\frac{4n}{3}-2x_1-x_2} & \alpha^{\frac{n}{3}} & \alpha^{2x_1+x_2-\frac{2n}{3}} \\ \hline \alpha^{x_1+x_2-\frac{n}{3}} & \alpha^{\frac{2n}{3}-x_2} & \alpha^{\frac{2n}{3}-x_1} \\ \hline \end{array} \qquad (7)$$

члены котораго обращаютъ три послѣднія уравненія въ тождества, а два первыя въ показательныя уравненія съ двумя неизвѣстными.

Магическими квадратами можно также пользоваться для преобразованія неопредѣленныхъ уравненій со многими неизвѣстными въ уравненія съ двумя неизвѣстными. Такъ, въ уравненіи

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=p$$

можно прямо замѣнить неизвѣстныя x_3, x_4, x_5 членами какого либо ряда, столбца или діагонали квадрата (3), а затѣмъ, опредѣляя значенія цѣлыя и положительныя неизвѣстныхъ x_1 и x_2, найдемъ соотвѣтствующія имъ значенія остальныхъ неизвѣстныхъ. Напр., неопредѣленное уравненіе съ пятью неизвѣстными:

$$7x-9y+2z+3u+v=38$$

требуется преобразовать въ уравненіе съ двумя неизвѣстными вида

$$7x-9y=29.$$

Замѣчая, что послѣднія три неизвѣстныхъ должны удовлетворять уравненію:

$$2z+3u+v=9,$$

беремъ квадратъ:

x	$-y$	$9-x+y$
$12+y-2x$	3	$2x-y-6$
$x-y-3$	$6+y$	$6-x$

и полагаемъ:

$$\begin{array}{l|l|l}
z=\frac{x}{2},=\frac{12+y-2x}{2},=\frac{x-y-3}{2} & =\frac{x}{2},=\frac{-y}{2},=\frac{9-x+y}{2} & =\frac{x}{2},=\frac{9-x+y}{2} \\
u=\frac{-y}{3},=\frac{3}{3},=\frac{6+y}{3} & =\frac{12+y-2x}{3}=\frac{3}{3},=\frac{2x-y-6}{3} & =\frac{3}{3},=\frac{3}{3} \\
v=9-x+y,=2x-y-6,=6-x & =x-y-3,=6+y,=6-x & =6-x,=x-y-3.
\end{array}$$

Всѣ эти значенія приведутъ уравненіе къ требуемому виду:

$$7x-9y=29,$$

рѣшая которое въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, получимъ:

$$x=8,\ y=3.$$

Соотвѣтствующія же значенія остальныхъ неизвѣстныхъ будутъ:

$$z=4,\ -{}^1/_2,\ 1,\ 4,\ -{}^3/_2,\ 2,\ 4,\ 2;$$

$$u=-1,\ 1,\ 3,\ -{}^1/_3,\ 1,\ {}^1/_3,\ 1,\ 1;$$

$$v=4,\ 7,\ -2,\ 2,\ 9,\ -2,\ -2,\ 2,$$

а цѣлыя и положителъныя значенія:

$$x=8,\ y=3,\ z=2,\ u=1,\ v=2.$$

И. Износковъ (Казань).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

О производствѣ дѣйствія умноженія на русскихъ торговыхъ счетахъ.

Въ одномъ изъ номеровъ журнала „*Mathesis*“ за 1894 годъ *) приведенъ особый пріемъ умноженія цѣлыхъ чиселъ.

При производствѣ письменныхъ вычисленій этотъ способъ нѣсколько осложняетъ процессъ работы; но если смотрѣть на этотъ спо-

*) См. Обзоръ научныхъ журналовъ въ „В. О. Ф.“ за 1894 годъ.

собѣ съ точки зрѣнія примѣненія его на торговыхъ счетахъ, то легко усмотрѣть въ немъ тѣ достоинства, которыя выгодно отличаютъ его передъ прочими. Дѣйствительно, благодаря тому, что здѣсь приходится цѣликомъ выписывать получаемыя произведенія, является возможность производить съ удобствомъ дѣйствіе умноженія и на счетахъ. Пояснимъ примѣромъ. Положимъ, что для перемноженія даются числа 7895 и 87. Очевидно, что $7859 = 7050 + 0809$, слѣдовательно искомое произведеніе равно

$$7050 \times 87 + 0809 \times 87, \text{ т. е.}$$

7050	0809
× 87	87
350 . . . (*a*)	63 . . . (*e*)
49000 . . . (*b*)	5600 . . . (*f*)
4000 . . . (*c*)	720 . . . (*g*)
56000 . . . (*d*)	64000 . . . (*h*)

Перемножая указаннымъ способомъ и складывая въ тоже время на счетахъ въ послѣдовательномъ порядкѣ числа (*a*), (*b*), (*c*)..., получимъ и искомое произведеніе 683733.

При извѣстномъ навыкѣ дѣйствіе умноженія на счетахъ, благодаря такому пріему, можно производить съ такой же легкостью и быстротой, какъ и сложеніе или вычитаніе.

А. Дмитріевскій (Цивильскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 194. Даны двѣ параллели и на нихъ по точкѣ A и B. Черезъ внѣшнюю точку C провести даннымъ радіусомъ окружность, встрѣчающую параллели въ X и Y такъ, чтобы отрѣзки AX и BY были равны между собою.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 195. Даны двѣ параллели и на нихъ по точкѣ A и B. Черезъ двѣ данныя точки C и D провести окружность, встрѣчающую параллели въ точкахъ X и Y такъ, чтобы отрѣзки AX и BY были равны между собою.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 196. Раздѣлить сферическій секторъ на двѣ равновеликія части плоскостью, перпендикулярною къ его оси.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 197. Въ данный треугольникъ ABC вписанъ треугольникъ MNP такъ, что $PN \parallel BC$, а MN и MP соотвѣтственно перпендикулярны къ AC и AB. По даннымъ сторонамъ треугольника ABC вычислить стороны треугольника MNP.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 198. Опредѣлить величину a, при которой выраженіе

$$\frac{x^2+2ax+3}{x^2+2x+2}$$

не можетъ быть больше 2.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 199. Въ средній полдень 11-го іюля сѣверное склоненіе солнца $=22°4'$. Для какого пункта земного шара солнце въ этотъ день не заходитъ? Опредѣлить длину тѣни, отбрасываемой въ полдень вертикальнымъ стержнемъ въ 1 метръ на широтѣ $=36°22'$.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 115 (3 сер.). Если неизвѣстное число умножить послѣдовательно на каждый изъ десяти первыхъ членовъ ариѳметической прогрессіи, коей и первый членъ и разность равны тремъ, то получаются такія произведенія, что единицы ихъ представляютъ натуральную убывающую ариѳметическую прогрессію; если же въ этихъ произведеніяхъ отбросить цифру единицъ, то полученныя числа составятъ возрастающую ариѳметическую прогрессію, коей разность есть 22. Найти неизвѣстное число.

Положимъ, что число десятковъ въ первомъ изъ полученныхъ произведеній есть a. Тогда

$$x(3+3n)=10(a+22n)+9-n,$$

откуда

$$x=\frac{10a+219n+9}{3(n+1)}.$$

Такъ какъ x есть число цѣлое, то $a=3m$ и

$$x=\frac{10m+73n+3}{n+1}.$$

Такъ какъ x не зависитъ отъ n, то, очевидно

$$2(10m+3)=10m+73+3,$$

откуда $m=7$, $a=21$, $x=73$.

А. Бачинскій (Холмъ); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *И. Барковскій* (Могилевъ); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *ученикъ Кіево-Печерской гимназіи.*

№ 119 (3 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x+y+z+t=n,$$
$$ax+by+cz+dt=n^2,$$
$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2t=n^3,$$
$$a^3x+b^3y+c^3z+d^3t=n^4.$$

1. Умноживъ первое изъ данныхъ уравненій на a и вычитая полученное уравненіе изъ второго даннаго уравненія, найдемъ:

$$(b-a)y+(c-a)z+(d-a)t=n(n-a)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Умноживъ второе изъ данныхъ уравненій на a и вычитая его изъ третьяго, найдемъ:

$$b(b-a)y+c(c-a)z+d(d-a)t=n^2(n-a)\quad .\ .\ (2)$$

Умножая, наконецъ, третье изъ данныхъ уравненій на a и вычитая его изъ четвертаго, получимъ:

$$b^2(b-a)y+c^2(c-a)z+d^2(d-a)t=n^3(u-a)\quad .\ .\ (3)$$

Уравненія (1) и (2) умножаемъ каждое на b и вычитаемъ ихъ соотвѣтственно изъ ур. (2) и (3) получимъ:

$$(c-a)(c-b)z+(d-a)(d-b)t=n(n-a)(n-b)\quad (4)$$
$$c(c-a)(c-b)z+d(d-a)(d-b)t=n^2(n-a)(n-b)\quad .\ (5)$$

Умноживъ уравненіе (4) на c и вычтя полученное произведеніе изъ уравненія (5), найдемъ:

$$(d-a)(d-b)(d-c)t=n(n-a)(n-b)(n-c),$$

откуда

$$t=\frac{n(n-a)(n-b)(n-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Зная t, легко найдемъ

$$x=\frac{n(n-b)(n-c)(n-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)},\ y=\frac{n(n-a)(n-c)(n-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)},$$

$$z=\frac{n(n-a)(n-b)(n-d)}{(c-a)(c-b)c-d)}.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *А. Бачинскій* (Холмъ); *С. Адамовичъ* (с. Спасское).

2. Находимъ опредѣлителя системы данныхъ уравненій:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c-d & d \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-d^2 & d^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3-d^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+d \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-d & c+d \\ (a-e)(a+c+b) & (b-d)(b+d+c) & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c+b & b+d+c \end{vmatrix} =$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(b-d)(d-a).$$

Затѣмъ легко найдемъ:

$$x=\frac{n(n-b)(n-c)(n-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} \text{ и т. д.}$$

Г. Легошинъ (с. Знаменка).

№ 120 (3 сер.). Нѣкто имѣлъ въ 1894 году столько лѣтъ отъ роду, сколько единицъ въ числѣ, составленномъ двумя послѣдними цифрами того года, когда онъ родился. Сколько ему лѣтъ?

Если рожденіе даннаго лица произошло въ прошломъ столѣтіи, то, сообразно съ условіемъ задачи, составимъ уравненіе

$$1894-(1700+x)=x, \text{ откуда } x=97;$$

если же лицо, о которомъ говорится въ задачѣ, родилось въ настоящемъ столѣтіи, то изъ уравненія

$$1894-(1800+x) \text{ найдемъ } x=47.$$

А.Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *H. Husson* (Soissons, Aisne *); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *ученикъ Кіево-Печерской Гимназіи*; *И. Барковскій*, *Э. Заторскій*

*) Рѣшеніе г. H. Husson'а было получено на международномъ языкѣ Эсперанто.

(Могилевъ губ.); *И. Никольскій*, *Н. Андрикевичъ* (Очаковъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *Iубергрицъ* (Кременчугъ); *П. Р.* (Ромны); *В. Ахматовъ* (Тула); *В. Стройновскій* (?); *К. Зновицкій* (Кіевъ).

№ 121 (3 сер.). Доказать, что

$$\sin x = x - 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{x}{3^3} + \cdots\right).$$

Изъ тожества

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

имѣемъ:

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$$

$$3\sin\frac{x}{3} = 3^2\sin\frac{x}{3^2} - 4.3.\sin^3\frac{x}{3^2}$$

$$3^2\sin\frac{x}{3^2} = 3^3\sin\frac{x}{3^3} - 4.3^2\sin^3\frac{x}{3^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^{m-1}\sin\frac{x}{3^{m-1}} = 3^m\sin\frac{x}{3^m} - 4.3^{m-1}\sin^3\frac{x}{3^m}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$\sin x = 3^m\sin\frac{x}{3^m} - 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{x}{3^3} + \cdots 3^{m-1}\sin^3\frac{x}{3^m} + \cdots\right).$$

Такъ какъ при возрастаніи m

$$\lim\left(3^m\sin\frac{x}{3^m}\right) = x,$$

то

$$\sin x = x - 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{x}{3^3} + \cdots + 3^{m-1}\sin^3\frac{x}{3^m} + \cdots\right).$$

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *А. Бачинскій* (Холмъ).

№ 122 (3 сер.). Показать, что

$$\frac{r_a - r}{4R - r_a + r} = \frac{r r_a}{r_b r_c},$$

гдѣ R и r суть соотвѣтственно радіусы описаннаго и внутривписаннаго въ треугольникъ круговъ, а r_a, r_b, r_c — радіусы трехъ внѣвписанныхъ круговъ.

Обозначивъ площадь треугольника черезъ S, а стороны его черезъ a, b, c, получимъ

$$r(a+b+c)=r_a(b+c-a)=r_b(a+c-b)=r_c(a+b-c)=2S,$$

откуда

$$r.\,r_a.\,r_b.\,r_c=S^2,\ \frac{r\,r_a}{r_b\,r_c}=\frac{S^2}{r_b^2.r_c^2},$$

$$r_b^2 r_c^2=\frac{16S^4}{(a+c-b)^2(a+b-c)^2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{r\,r_a}{r_b\,r_c}=\frac{(a+c-b)^2(a+b-c)^2}{16S^2}=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}\ \ldots\ldots\ (1)$$

Такъ какъ

$$r_a-r=\frac{2S}{b+c-a}-\frac{2S}{a+b+c}=\frac{4a.S}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

и

$$4R=\frac{abc}{S},$$

то

$$\frac{r_a-r}{4R-(r_a-r)}=\frac{S^2}{b.c.p.(p-a)-S^2}=\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc-4(p-b)(p-c)}=$$

$$\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Сравнивая выраженія (1) и (2), находимъ:

$$\frac{r.r_a}{r_b\,r_e}=\frac{r_a-r}{4R-(r_a-r)}.$$

И. Барковскій (Могилевъ губ.); *А. Бачинскій* (Холмъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 5-го Іюня 1895 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова

3) Прямыя

$$\left.\begin{array}{lll} E_1F_1, & F_2D_2, & D_3E_3, \\ EF, & F_3D_3, & D_2E_2, \\ E_3F_3, & DF, & D_1E_1, \\ E_2F_2, & D_1F_1, & DE, \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{образуютъ} \\ \text{тр-ки:}\end{array} \left\{\begin{array}{l} X_1\text{У}_2Z_3, \\ X_0\text{У}_3Z_2, \\ X_3\text{У}_0Z_1, \\ X_2\text{У}_1Z_0. \end{array}\right.$$

4) Треугольники $X_1\text{У}_2Z_3$, $X_0\text{У}_3Z_2$, $X_3\text{У}_0Z_1$, $X_2\text{У}_1Z_0$ соотвѣтственно подобны (и обратно расположены) треугольникамъ $I_1I_2I_3$, $I\,I_3I_2$, $I_3I\,I_1$, I_2I_1I; ортоцентръ H тр-ка ABC служитъ общимъ центромъ круговъ, описанныхъ около этихъ тр-въ.

5) Радіусы этихъ описанныхъ круговъ суть:

$$2R+r,\ 2R-r_1,\ 2R-r_2,\ 2R-r_3.$$

6)

$$X_0D = AI,\ X_1D_1 = AI_1,$$

$$\text{У}_0E = BI,\ \text{У}_1E_1 = BI_1,$$

$$Z_0F = CI,\ Z_1F_1 = CI_1, \text{ и т. д.}$$

7) Прямыя:

$$\left.\begin{array}{llll} X_0I, & X_1I_1, & X_2I_2, & X_3I_3 \\ \text{У}_0I, & \text{У}_1I_1, & \text{У}_2I_2 & \text{У}_3I_3 \\ Z_0I, & Z_1I_1, & Z_2I_2, & Z_3I_3 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{проходятъ} \\ \text{черезъ средины} \\ \text{прямыхъ}\end{array} \left\{\begin{array}{l} BC \\ CA \\ AB. \end{array}\right.$$

8) Центръ гомологіи тр-въ $X_1\text{У}_2Z_3$ и $I_1I_2I_3$ есть точка этихъ тр-въ; и т. д.

9) Если обозначить ортоцентры тр-въ:

$$\left.\begin{array}{lll} I_1BC, & AI_2C, & ABI_3, \\ IBC, & AI_3C, & ABI_2, \\ I_3BC, & AIC, & ABI_1, \\ I_2BC, & AI_1C, & ABI \end{array}\right\} \text{черезъ} \left\{\begin{array}{lll} H_a, & H_b, & H_c, \\ H'_a, & H'_b, & H'_c, \\ H''_a, & H''_b, & H''_c, \\ H'''_a, & H'''_b, & H'''_c, \end{array}\right.$$

то стороны тр-въ:

$$\left.\begin{array}{c} H_a\,H_b\,H_c, \\ H'_a\,H'_b\,H'_c, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{проходятъ} \\ \text{черезъ точки}\end{array} \left\{\begin{array}{l} X_0,\ \text{У}_0,\ Z_0, \\ X_1,\ \text{У}_1,\ Z_1, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Кромѣ этихъ свойствъ въ статьѣ приведены еще другія, болѣе сложныя.

Concours de 1894.

Baccalauréat.

Questions resolues. №№ 337, 387, 441, 469, 538, 540, 539, 541, 542. Изъ рѣшенныхъ здѣсь задачъ отмѣтимъ слѣдующую:

Наименьшее число взаимно простое съ $1.2.3\ldots n$ есть простое число большее n.

Questions proposées. №№ 569—572.

Д. Е.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. F. Tisserand, directeur de l'Observatoire. Observations (1885). In- 4⁰, IX+769 p. avec fig. et 4 planches. Paris. Gauthier Villars et fils. fr. 40.

Fleuriais, G. Historique des instruments d'astronomie nautique. In- 8⁰, 43 p. avec fig. Paris, Baudoin.

Tisserand, F. Traité de mécanique céleste. T. 3: Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune. In- 4⁰, IX+427. Paris, Gauthier- Villars et fils. fr. 22.

Turpin, E. L'Univers. La formation des mondes. In- 18⁰ jésus, XII+374 p. avec. nombr. fig.et portrait. Paris, Savine. fr. 3,50.

Latarche, C. Pyromètre actinométrique. In- 8⁰, 14 p. Paris, Baudry et C-e.

Mathieu astronome. Connaissance des temps, basée sur la science. Notions scientifiques sur la météorologie et les phénomènes de la nature pour 1894. (14-e année). In- 16⁰, 160 p. avec vign. Bar- sur- Seine, Sallard.

Ephémérides maritimes à l'usage des marins du commerce et de l'Etat et des candidats aux grades de capitaine au long cours et de maître au cabotage, pour l'année 1894, redigées d'après l'autorisation de F. J. Dubus, par C. Detaille. (58-e année). In- 16⁰, 232 p. Sain - Brieuc, Guyon.

Guyou, E. et *H. Willotte.* Cours élémentaire d'astronomie. In- 8⁰, VIII+570 p. avec 170 fig. et 2 planches. Nancy, Berger-Levrault et C-e. fr. 10.

Loewy, M. Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1894. In- 4⁰, 43 p. Paris, Gauthier - Villars et fils.

Beauregard, H. Le microscope et ses applications. In- 16⁰. 210 p. avec fig. Paris, G. Masson. fr. 2, 50.

Bulletin annuel de la commission de météorologie de département des Bouches-du Rhône, publié sous les auspices du conseil général. Année 1892 (11-e année). In- 4⁰, X+114 p. avec carte et tableaux graphiques. Marseille.

De Heen. La chaleur. Liège, 1894. In- 8⁰, X+382 p. avec 177 fig. dans le texte. fr. 10.

Ganot, A. et *G. Maneuvrier.* Traité élémentaire de physique; par A. Ganot. 21-e édition, entièrement refondue et rédigée à nouveau, conformément aux plus récents programmes universitaires. In- 16⁰, 1,215 p. avec 1025 grav. et 2 planches en coul. Paris, Hachette et C-e. fr. 8.

Millot, C. L'Humidité de l'air à Nancy (observatoire méteorologique de Nancy). In- 8⁰, 12 p et planche. Nancy. Berger-Levrault et C-e.

Association géodésique internationale. Comptes rendus des séances de la dixième conférence générale de l'association géodésique internationale et de sa commission permanente, réunies à Bruxelles, du 27 septembre au 7 octobre 1892, publiés en même temps que les rapports spéciaux sur les progrès de la mesure de la terre et les rapports des délégués sur les travaux géodésiques accomplis dans leurs pays, par la commission permanente de l'association. Avec 14 cartes et planches. Neuchâtel, 1893. In- 4⁰, 695+102 p., 14 pl.

Association géodésique internationale. Rapport sur les tiangulations présenté à la dixième conférence générale tenue à Bruxelles, en 1892, par le général A. Ferrero (avec 3 pl.), faisant suite aux comptes rendus de la conférence de Bruxelles. S. l. n. d. (Florence, 1893). In- 4⁰, 1 tableau, 2 pl.. 1 carte.

Juillard, P. Etude sur la circulation des éléments et la formation des mondes. In- 8⁰, 18 p. Audincourt, Jacot et C-e.

Klumpke, M-lle *D.* Contribution à l'étude des anneaux de Saturne (thèse). In- 4⁰, 70 p. avec fig Paris, Gauthier-Villars et fils.

Loewy, M. Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1891. In- 4⁰, 41 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL
de mathématiques élémentaires.
1894.—№ 11.

Note sur les figures semblables. Par. M. *Dorlet.* Пользуясь извѣстной теоремой, что двѣ параллельныя прямыя отсѣкають отъ сторонъ угла части пропорціональныя, M. *Dorlet* доказываетъ теорему:

Двѣ подобныя фигуры въ пространствѣ F *и* F′ *могутъ быть приведены въ гомотетичное положеніе однимъ вращеніемъ какой нибудь изъ нихъ около нѣкоторой оси.*

Пусть отношеніе подобія фигуръ F′ и F есть k. Соединимъ двѣ соотвѣтственныя точки A′ и A этихъ фигуръ и на полученной прямой возьмемъ точку α такъ, чтобы $\frac{\alpha A'}{\alpha A} = k$. Принимая точку α за центръ гомотетіи, строимъ фигуру F″, гомотетичную съ F, такъ чтобы отношеніе подобія фигуръ F″ и F было $= k$. Фигура F″ должна быть равна фигурѣ F′ и имѣть съ ней общую точку A′; поэтому F′ приводится въ совпаденіе съ F″ однимъ вращеніемъ около нѣкоторой оси $A'z$, что и требовалось доказать.

Изъ этой теоремы авторъ выводитъ такое слѣдствіе: Двѣ подобныя фигуры въ пространствѣ всегда имѣютъ двойную (общую) плоскость, двойную (общую) прямую, которая перпендикулярна къ этой плоскости, и двойную (общую) точку, которая совпадаетъ съ пересѣченіемъ двойной прямой съ двойной плоскостью. Всѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки двухъ подобныхъ фигуръ, дѣлятся двойною плоскостью въ отношеніи, равномъ отношенію подобія фигуръ. Вращеніемъ одной изъ подобныхъ фигуръ около двойной прямой фигура эта приводится въ гомотетичное положеніе съ другой, причемъ центромъ гомотетіи служитъ двойная точка.

Доказанная теорема, по замѣчанію автора, весьма просто получается какъ результатъ аналитическаго рѣшенія такого вопроса: можно ли всѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки подобныхъ фигуръ, раздѣлить въ одномъ и томъ же отношеніи такъ, чтобы всѣ точки дѣленія находились въ одной плоскости? Оказывается при этомъ, что сумма cos'овъ угловъ, составляемыхъ тремя ортогональными направленіями одной фигуры съ соотвѣтственными направленіями другой, есть величина постоянная.

Exercices divers. Par M. *Aug. Boutin.* № 346. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-нія:

$$(m^2+1)x^2+1=y^2, \qquad (1)$$

$$(m^2+1)x^2-1=y^2, \qquad (2)$$

гдѣ m данное цѣлое число.

Рѣш. Изъ формулъ:

$$x_n = (2m)^{n-1} + (n-2)(2m)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2m)^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2m)^{n-7} + \dots$$

$$y_n = 2^{n-1}m^n + 2^{n-3}n\,m^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}m^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}m^{n-6} + \dots$$

при n четномъ получаются рѣшенія ур. (1), а при n нечетномъ -- рѣшенія ур-нія (2).

x_n и y_n удовлетворяютъ дифференціальнымъ ур-ямъ:

$$(m^2+1)\frac{d^2x_n}{dm^2}+3m\frac{dx_n}{dm}-(n^2-1)x_n=0,$$

$$(m^2+1)\frac{d^2y_n}{dm^2}+m\frac{dy_n}{dm}-n^2y_n=0.$$

№ 347. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе

$$x^2-(m^2-1)y^2=1,$$

гдѣ m данное цѣлое число.

Рѣш. $$x_n=2^{n-1}m^n-2^{n-3}nm^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2.}2^{n-5}m^{n-4}-\ldots,$$

$$y_n=(2m)^{n-1}-(n-2)(2m)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2m)^{n-5}-\ldots$$

x_n и y_n удовлетворяютъ дифф-ымъ ур-ямъ:

$$(m^2-1)\frac{d^2x_n}{dm^2}+m\frac{dx_n}{dm}-n^2x_n=0,$$

$$(m^2-1)\frac{d^2y_n}{dm^2}+3m\frac{dy_n}{dm}-(n^2-1)y_n=0.$$

№ 348. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе

$$x^2-a(a+2)y^2+2a=0,$$

гдѣ a данное цѣлое число.

Рѣш. $$x_n=2^na^{n+1}+(2n+1)2^{n-1}a^n-\frac{n-1}{1.2}(2n+1)2^{n-1}a^{n-1}+$$

$$+\frac{(n-2)(2n-3)}{1.2.3}(2n+1)2^{n-2}a^{n-2}+\ldots,$$

$$y_n=2^na^n+2^{n-1}(2n-1)a^{n-1}+2^{n-2}a^{n-2}(n-1)(2n-3)+$$

$$+\frac{(2n-3)(2n-5)}{1.3}2^{n-3}(n-2)a^{n-3}+\ldots$$

№ 349. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе:

$$x^2-m(m\alpha^2+2)y^2=1,$$

гдѣ m и α данныя цѣлыя числа.

Рѣш. $$x_0=1,\ x_1=m\alpha^2+1,\ \ldots,\ x_n=2(m\alpha^2+1)x_{n-1}-x_{n-2};$$

$$y_0=0,\ y_1=\alpha,\qquad \ldots,\ y_n=(m\alpha^2+1)y_{n-1}-y_{n-2}$$

Bibliographie. Exercices d'Arithmétique. Par ***F. J.*** Paris. Algèbre. Par M. *Giraud*. Prix: 2 fr.

Exercices de géométrie descriptive. Par ***F. J.***

Récréations mathématiques. Par M. Edouard Lucas.

Société Philomathique de Bordeaux.

Baccalauréat classique. 1894.

Questions résolues. №№ 543, 544, 545, 546, 546, 547, 548, 528. Въ № 543 доказано слѣдующее свойство тр-ка:

Обложка
ищется

Обложка
ищется