Обложка
ищется

Обложка
ищется

XVIII Сем. 25-го января 1895 г. № 2.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 206.



## О ЧИСЛѢ ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНЫХЪ ДѢЛЕНІЙ.

При отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ $a$ и $b$, а также при обращеніи дроби $a/b$ въ непрерывную пользуются извѣстнымъ алгориѳмомъ послѣдовательнаго дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ. Въ этомъ алгориѳмѣ послѣдовательныя дѣленія продолжаются до тѣхъ поръ, пока не получаютъ остатка, равнаго нулю. Послѣдній дѣлитель есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ $a$ и $b$, а послѣдовательныя неполныя частныя будутъ частными знаменателями непрерывной дроби, равной $a/b$. Число $p$ всѣхъ дѣленій въ алгориѳмѣ послѣдовательнаго дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ $a$ и $b<a$ зависитъ отъ чиселъ $a$ и $b$. Задача, которую мы поставимъ себѣ, состоитъ въ томъ, чтобы найти высшій предѣлъ для $p$ при неопредѣленныхъ $a$ и $b$, т. е. мы постараемся найти такое выраженіе $\varphi(a,b)$, зависящее отъ $a$ и $b$ или отъ одного только изъ этихъ чиселъ, чтобы для всякаго $a$ и $b$ соотвѣтствующее $p$ удовлетворяло неравенству $p\leq\varphi(a,b)$ присоединимъ къ этому требованіе, чтобы равенство $p=\varphi(a,b)$ имѣло мѣсто для безконечнаго числа значеній $a$ и $b$.

§ 1. Обозначимъ черезъ $m_1, m_2, \ldots . m_{p-1}, m_p$ послѣдовательныя неполныя частныя въ разсматриваемомъ алгориѳмѣ, такъ что

$$\frac{a}{b}=m_1+\frac{1}{m_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m_{p-1}}+\frac{1}{m_p},$$

что мы будемъ писать короче такъ:

$$\frac{a}{b} = (m_1,\ m_2, \ldots\ldots m_{p-1},\ m_p). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Каждое изъ чиселъ $m$ не меньше единицы, а число $m_p$ не меньше двухъ, ибо, при $m_p = 1$, имѣли бы $m_{p-1} + \frac{1}{m^p} = m_{p-1} + 1$ и тогда

$$\frac{a}{b} = (m_1,\ m_2, \ldots\ldots m_{p-1} + 1),$$

т. е. непрерывная дробь, равная $^a/_b$, содержала бы только $p-1$ звеньевъ и въ разсматриваемомъ алгориѳмѣ послѣдовательнаго дѣленія чиселъ $a$ и $b < a$ было бы $p-1$ дѣленій, что противно допущенію.

Мы станемъ сравнивать непрерывную дробь (1) съ непрерывными дробями вида

$$(1,\ 1, \ldots\ldots 1,\ 1,\ 1),$$

т. е. съ подходящими дробями безконечной непрерывной періодической дроби

$$(1,\ 1,\ 1, \ldots\ldots \text{ad infinit.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Принимая $^1/_1$ за первую подходящую дробь этой непрерывной дроби и означая черезъ $P_x/Q_x$ подходящую дробь $x$-го порядка, получимъ:

$$\frac{P_{x+1}}{Q_{x+1}} = (1, 1, \ldots\ldots 1,\ 1,\ 1),$$

гдѣ число единицъ въ скобкахъ равно $x+1$. Такъ какъ $1 + \frac{1}{1} = 2$, то можемъ писать

$$\frac{P_{x+1}}{Q_{x+1}} = (1,\ 1, \ldots\ldots 1,\ 2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Въ этомъ видѣ непрерывная дробь $\frac{P_{x+1}}{Q_{x+1}}$ содержитъ только $x$ звеньевъ.

Если $p > x$, то непрерывная дробь (1) содержитъ больше звеньевъ, чѣмъ непрерывная дробь (3) и такъ какъ каждый частный знаменатель въ дроби (1) не меньше соотвѣтствующаго частнаго знаменателя въ дроби (3), то

$$b > Q_{x+1}.$$

Если $p = x$, то въ дроби (1) столько же звеньевъ, сколько и въ дроби (3). Посему, если хоть одинъ изъ частныхъ знаменателей $m_2, m_3, \ldots\ldots m_{p+1}$ отличенъ отъ единицы или если $m_p$ отлично отъ двухъ, то

$$b > Q_{x+1},$$

ибо $b$ не зависитъ отъ $m_1$. Но если $m_2 = m_3 = \cdots\cdots = m_{p-1} = 1$ и $m_p = 2$, то будемъ имѣть

$$b = Q_{x+1}.$$

Замѣтимъ, что въ послѣднемъ случаѣ, полагая $m_1 - 1 = t$, имѣемъ:

$$\frac{a}{b} = m_1 - 1 + (1,\ 1, \ldots\ldots 1,\ 2) = t + \frac{P_{x+1}}{Q_{x+1}}$$

и такъ какъ $b = Q_{x+1}$, то

$$a = bt + P_{x+1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Легко видѣть, что и наоборотъ, если $b = Q_{x+1}$ и $a = bt + P_{x+1}$, то $a/_b = t + P_x/Q_x = (t+1,\ 1,\ 1, \ldots\ldots 1,\ 2)$, т. е. $p = x$.

Отсюда слѣдуетъ, что если возьмемъ $x$ столь большимъ, чтобы было

$$Q_{x+1} > b,$$

а это всегда возможно сдѣлать, ибо $Q_{x+1}$ растетъ неопредѣленно вмѣстѣ съ $x$, то $p$ не можетъ быть ни больше, ни равно $x$, т. е. для такого значенія $x$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$p < x.$$

Резюмируя сказанное, находимъ, что если

$$Q_{x+1} \geqslant b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то

$$p \leqslant x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

причемъ равенство $p = x$ возможно и дѣйствительно имѣетъ мѣсто только тогда, когда возможно и имѣетъ мѣсто равенство (5) и когда сверхъ того существуетъ равенство (4), въ которомъ $t$ есть произвольное положительное цѣлое число или 0.

§ 2. Опредѣлимъ теперь $P_x$ и $Q_x$ въ функціи $x$. Послѣдовательныя значенія $P_x$ и $Q_x$ содержатся въ рядахъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots\ldots P_{x-2},\ P_{x-1},\ P_x, \quad . \quad .$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \ldots\ldots Q_{x-2},\ Q_{x-1},\ Q_x, \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

поэтому

$$P_x = Q_{x+1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

По правилу составленія подходящихъ дробей имѣемъ:

$$Q_x = Q_{x-1} + Q_{x-2},$$

т. е. каждое послѣдующее значеніе Q равно суммѣ двухъ непосредственно ему предшествующихъ значеній. Это обстоятельство, а также и то, что $Q_1 = Q_2 = 1$ даетъ возможность легко рѣшить вопросъ.

Найдемъ прежде всего такую геометрическую прогрессію, въ которой каждый членъ равенъ суммѣ двухъ непосредственно ему предшествующихъ членовъ. Называя черезъ A первый членъ, черезъ $q$ знаменатель искомой прогрессіи и черезъ $n$ произвольное цѣлое число, получимъ:

$$Aq^n = Aq^{n-1} + Aq^{n-2},$$

или, полагая каждое изъ чиселъ A и $q$ отличнымъ отъ нуля, имѣемъ:

$$q^2 = q + 1,$$

откуда

$$q = q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ q = q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \quad . \quad . \quad (9)$$

Такъ какъ A осталось совершенно произвольнымъ, то можемъ написать двѣ геометрическія прогрессіи

$$A,\ Aq_1,\ Aq_1^2, \ldots . Aq_1^{x-1}, \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$B,\ Bq_2,\ Bq_2^2, \ldots . Bq_2^{x-1},$$

обладающія тѣмъ свойствомъ, что въ каждой прогрессіи любой членъ равенъ суммѣ двухъ непосредственно ему предшествующихъ членовъ. Отсюда слѣдуетъ, что и въ ряду

$$A+B,\ Aq_1+Bq_2,\ Aq_1^2+Bq_2^2, \ldots . Aq_1^{x-1}+Bq_2^{x-1}$$

каждый членъ также равенъ суммѣ двухъ непосредственно ему предшествующихъ членовъ. Если въ этомъ ряду первые два члена будутъ соотвѣтственно равны первымъ двумъ членамъ ряда (7), то эти ряды ничѣмъ не будутъ отличаться одинъ отъ другого, т. е. если выберемъ A и B такъ, чтобы было

$$A+B=1,\ Aq_1+Bq_2=1,$$

то будемъ имѣть также

$$Q_x = Aq_1^{x-1} + Bq_2^{x-1}.$$

Первыя два изъ этихъ равенствъ даютъ:

$$A = \frac{1-q_2}{q_1-q_2},\ B = -\frac{1-q_1}{q_1-q_2},$$

а такъ какъ [см. равенство (9)] $q_1 - q_2 = \sqrt{5}$; $1-q_2 = q_1$; $1-q_1 = q_2$, то $A = \frac{q_1}{\sqrt{5}}$; $B = -\frac{q_2}{\sqrt{5}}$, такъ что

$$Q_x = \frac{1}{\sqrt{5}} q_1^x - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и, на основаніи (8),

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}.$$

§ 3. Предположимъ теперь, что равенство

$$Q_{x+1} = b$$

не можетъ быть удовлетворено никакимъ цѣлымъ значеніемъ $x$, и въ этомъ предположеніи найдемъ наименьшее цѣлое значеніе $x$, удовлетворяющее неравенству

$$Q_{x+1} > b,$$

которое, согласно равенству (10), можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1} > b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Для всякаго цѣлаго значенія $x$ лѣвая часть этого неравенства, равная $Q_{x+1}$, есть цѣлое число. Слѣдовательно, для всѣхъ цѣлыхъ значеній $x$, удовлетворяющихъ этому неравенству, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1} = b + e,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} = b + e + \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1},$$

гдѣ $e$ положительное цѣлое. Изъ равенствъ (9) усматриваемъ, что $q_2$ есть отрицательная правильная дробь, а потому $\frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+2}$ будетъ положительная или отрицательная правильная дробь. Въ обоихъ случаяхъ $e + \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}$ есть положительное число. Слѣдовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} > b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Наоборотъ, если неравенство (12) существуетъ, то можемъ писать:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} = b + e + \alpha,$$

гдѣ $e$ есть положительное цѣлое или нуль, а $\alpha$ есть положительная правильная дробь*). Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1} = b + e + \alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}. \quad . \quad . \quad (13)$$

Такъ какъ лѣвая часть этого равенства есть цѣлое число, то $\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}$ должно быть цѣлымъ, а такъ какъ $\alpha$ есть положительная правильная дробь, а $\frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}$ представляетъ либо положительную либо

---

*) Число $\alpha$ не можетъ быть нулемъ, ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{x+1} = b + e.$$

Разложивъ лѣвую часть по формулѣ Ньютона, и опредѣливъ $\sqrt{5}$, нашли бы, что радикалъ $\sqrt{5}$ равенъ раціональному числу.

отрицательную правильную дробь, то необходимо, чтобы $\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1}$ было равно либо единицѣ, либо нулю. Въ первомъ случаѣ изъ равенства (13) будетъ вытекать неравенство (11). Во второмъ случаѣ будемъ имѣть

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1} = b + e.$$

Здѣсь $e$ не можетъ быть нулемъ, ибо по допущенію равенство

$$Q_{x+1} = b$$

невозможно. Но если $e$ отлично отъ нуля, то оно, какъ сказано выше, есть положительное цѣлое, а потому и въ этомъ случаѣ неравенство (11) имѣетъ мѣсто. Такимъ образомъ неравенства (11) и (12) вытекаютъ одно изъ другого. Но изъ (12) имѣемъ:

$$x > \frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1} - 1;$$

слѣдовательно, искомое наименьшее значеніе $x$ будетъ:

$$x = \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1}\right],$$

гдѣ символомъ E обозначено наибольшее цѣлое число, содержащееся въ дроби

$$\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, на основаніи § 1, что если для цѣлаго значенія $x$ равенство $Q_{x+1} = b$ невозможно, то

$$p < \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}\right].$$

§ 4. Допустимъ теперь, что равенство

$$Q_{x+1} = b$$

возможно при цѣломъ значеніи $x$. Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ

$$p \leqslant x,$$

гдѣ $x$ есть число, удовлетворяющее уравненію $Q_{x+1} = b$, которое можетъ быть написано въ видѣ

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^{x+1} = b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Разсмотримъ два случая.

*Первый случай.* Число $x$, удовлетворяющее уравненію (14), нечетное. Въ этомъ случаѣ $q_2^{x+1}$ будетъ положительнымъ числомъ, а потому

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_1^{x+1} > b. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Замѣтимъ, что, при существованіи равенства (14), число $Q_x < b$, или

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_1^x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,q_2^x < b,$$

а такъ какъ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_2^x$ будетъ теперь числомъ положительнымъ, то

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_1^x < b. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Изъ этого неравенства и неравенства (15) слѣдуетъ, что $x$ есть наибольшее цѣлое, удовлетворяющее неравенству (16), изъ котораго имѣемъ

$$x < \frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1};$$

слѣдовательно,

$$x = \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1}\right]$$

и, на основаніи неравенства (6), имѣемъ:

$$p \leqslant \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5})-\log 2}\right].$$

Равенство здѣсь возможно тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1},\\ a &= bt + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x+2} \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (17),$$

причемъ число $x$, равное

$$\mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5})-\log 2}\right],$$

должно быть нечетнымъ.

*Второй случай.* Число $x$, удовлетворяющее равенству (14), четное. Въ этомъ случаѣ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_2^{x+1}$ есть положительная правильная дробь, а потому

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_1^{x+1} < b.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_1^{x+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,q_2^{x+2} > b$$

и что $q_1^{x+2}$ есть положительное число, находимъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+2} > b.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $x$ есть наибольшее цѣлое, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{x+1} < b,$$

изъ котораго имѣемъ:

$$x + 1 < \frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1}.$$

Слѣдовательно,

$$x = -1 + \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log q_1}\right],$$

а такъ какъ $p \leqslant x$, то

$$p < \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}\right].$$

§ 5. Все сказанное до сихъ поръ приводитъ къ слѣдующимъ результатамъ:

Число дѣленій въ алгориѳмѣ послѣдовательныхъ дѣленій двухъ чиселъ $a$ и $b < a$ не будетъ больше числа

$$\varphi(b) = \mathrm{E}\left[\frac{\log(b\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}\right];$$

оно можетъ быть равно $\varphi(b)$, если это послѣднее нечетно и если при этомъ оно равно числу $x$, удовлетворяющему равенствомъ (17).

Такимъ образомъ найдемъ напр., что если меньшее изъ двухъ чиселъ $a$ и $b$ не превосходитъ билліона, то число послѣдовательныхъ дѣленій не будетъ больше числа

$$\mathrm{E}\left[\frac{9+\log\sqrt{5}}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}\right] = 44,$$

а такъ какъ 44 число четное, то число дѣленій не можетъ быть равно 44, но будемъ имѣть $p = \varphi(b) = 43$, когда

$$b = 701408732,$$

$$a = bt + 1134903170.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что при $b < 3 \times 10^{20}$ число послѣдовательныхъ дѣленій не больше 100.

*С. Шатуновскій* (Одесса).

# ЗАКОНЪ ОТНОСИТЕЛЬНАГО ДВИЖЕНІЯ
и
# БЛИЖАЙШІЯ СЛѢДСТВІЯ ИЗЪ НЕГО.

Неточная формулировка этого закона служитъ, по нашему мнѣнію, одной изъ главныхъ причинъ неудовлетворительности изложенія началъ механики въ учебникахъ физики. Обыкновенно его формулируютъ слѣдующимъ образомъ: дѣйствіе силы не зависитъ отъ состоянія покоя или движенія тѣла, на которое сила дѣйствуетъ, а также отъ дѣйствія другихъ силъ. Въ подтвержденіе приводится примѣръ камня, брошеннаго съ верхушки мачты движущагося корабля: камень упадетъ къ основанію мачты, а не къ кормѣ, какъ думали раньше, и въ этомъ видятъ подтвержденіе изложеннаго закона. Однако если бы тѣхъ, кто думалъ ошибочно, заставить формулироватъ основаніе, почему они такъ думали, они не могли бы его лучше выразить, какъ приведенной формулой закона относительнаго движенія. Они, очевидно, думали, что тяжесть будетъ дѣйствовать на камень такъ же, какъ если бы корабль былъ въ покоѣ, т. е. сообщитъ ему движеніе по вертикальной линіи внизъ. Разница, значитъ, въ пониманіи дѣйствія силы, которое мы видимъ въ относительномъ движеніи тѣла внутри системы, подчиненной всѣмъ другимъ условіямъ (кромѣ дѣйствія данной силы) такимъ же, какъ данное тѣло; они видѣли — въ абсолютномъ движеніи тѣла; но, понимая такъ дѣйствіе силы, они подобно намъ полагали, что оно не зависитъ отъ состоянія покоя или движенія тѣла. Вводя указанное различіе, мы приходимъ къ слѣдующей формулѣ закона относительнаго движенія: *сила всегда сообщаетъ тѣлу такое же относительное движеніе, какъ если бы вся система была въ покоѣ и на нее не дѣйствовали никакія силы.*

Относительнымъ движеніемъ подъ дѣйствіемъ данной силы называется движеніе относительно системы, подчиненной всѣмъ прочимъ условіямъ такимъ же, какъ данное тѣло, кромѣ дѣйствія данной силы.

---

Отсюда прямо вытекаетъ общій способъ примѣненія этого закона къ сложенію дѣйствія данной силы съ дѣйствіемъ другихъ силъ, или съ существующей уже скоростью по инерціи: нужно только вообразить около даннаго тѣла систему, удовлетворяющую указанному выше условію, т. е. такую, относительно которой тѣло было бы въ покоѣ, если бы данная сила на него не дѣйствовала; тогда, зная дѣйствіе данной силы на тѣло покоющееся, мы можемъ построить его относительное движеніе; зная дѣйствіе остальныхъ силъ, мы построимъ движеніе системы, а тогда опредѣлимъ и абсолютное движеніе тѣла.

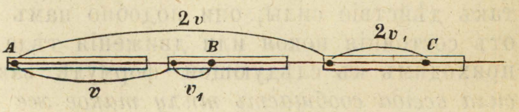
Примѣнимъ этотъ способъ къ выводу нѣкоторыхъ основныхъ положеній механики.

## *А.* Дѣйствія мгновенныхъ силъ.

### 1. Пропорціональность между силами и сообщаемыми скоростями.

Теорія какихъ либо величинъ основывается на опредѣленіи ихъ равенства и суммы. Равными называются такія силы, которыя производятъ равныя дѣйствія. Это опредѣленіе основывается на *постулатѣ*, что *если силы производятъ одного рода дѣйствія равныя, то и всякаго другого рода дѣйствія произведутъ равныя.* Суммой нѣсколькихъ силъ называется сила, которая производитъ такое же дѣйствіе, какъ всѣ данныя силы вмѣстѣ, если всѣ онѣ приложены къ одной точкѣ и имѣютъ одно и то же направленіе. Силой, большей другой въ нѣсколько разъ, называется сумма столькихъ же слагаемыхъ, равныхъ каждая второй силѣ. Доказательство пропорціональности между силами и сообщаемыми скоростями приводится такимъ образомъ къ доказательству *теоремы,* что *скорость, которую получаетъ тѣло при одновременномъ дѣйствіи нѣсколькихъ силъ, имѣющихъ одно направленіе и приложенныхъ къ одной точкѣ, равна суммѣ скоростей, которыя тѣло получило бы, если бы каждая сила дѣйствовала одна.*

Представимъ себѣ данное тѣло, какъ шарикъ, на который дѣйствуютъ двѣ силы одного направленія, сообщающія ему скорости $v$ и $v_1$. Вообразимъ шарикъ заключеннымъ въ трубку, которая расположена по направленію силъ и движется по тому же направленію со скоростью $v$. Тогда, если бы вторая сила на шарикъ не дѣйствовала, онъ двигался бы такъ же, какъ и трубка, и былъ бы къ ней въ относительномъ покоѣ; но такъ какъ на него дѣйствуетъ еще другая сила, то онъ получитъ относительное движеніе внутри трубки, и это движеніе будетъ такое же, какъ если бы скорости $v$ не было, т. е. шарикъ будетъ относительно трубки двигаться со скоростью $v_1$: черезъ одну секунду онъ будетъ въ точкѣ B (фиг. 7), черезъ двѣ — въ точкѣ C и т. д. Относительно неподвижной точки онъ будетъ двигаться со скоростью $v + v_1$. Подобнымъ же образомъ можно перейти отъ двухъ скоростей къ тремъ и т. д.



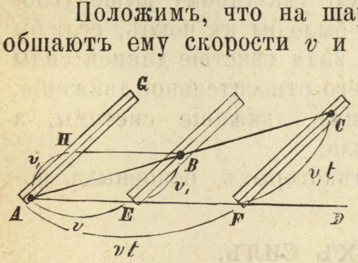
Фиг. 7.

Если предположить всѣ силы, а слѣд. и скорости, равными, то получимъ, что сила въ $n$ разъ большая сообщаетъ и скорость въ $n$ разъ большую*), а отсюда заключимъ, что *силы пропорціональны сообщаемымъ скоростямъ.*

## 2. Параллелограммъ скоростей.

Теорема: *равнодѣйствующая двухъ скоростей, направленныхъ подъ угломъ, выражается по величинѣ и направленію діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ скоростяхъ.*

Положимъ, что на шарикъ A дѣйствуютъ двѣ силы, которыя сообщаютъ ему скорости $v$ и $v_1$ по направленіямъ AD и AG (фиг. 8). Вообразимъ трубку, заключающую этотъ шарикъ, направленную по скорости $v_1$ и движущуюся со скоростью $v$ по направленію AD. Такъ какъ шарикъ подчиненъ тѣмъ же условіямъ, что и трубка, и кромѣ того на него дѣйствуетъ еще вторая сила, то шарикъ будетъ имѣть внутри трубки относительное движеніе. Это движеніе будетъ



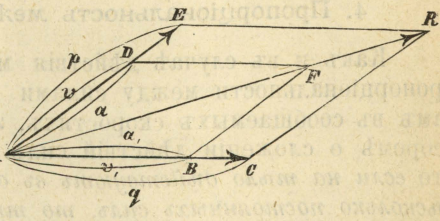
Фиг. 8.

*) Здѣсь опять подразумѣвается, что если сила производитъ скорость такую же, какъ $n$ силъ, то и какое угодно статическое дѣйствіе произведетъ такое же, какъ эти силы.

такое же, какъ если бы вся система была въ покоѣ, т. е. по направленію трубки со скоростью $v_1$, Черезъ 1 сек. трубка перемѣстится на разстояніе $AE = v$, а шарикъ внутри трубки пройдетъ относительнымъ движеніемъ разстояніе $EB = v_1$ и будетъ въ точкѣ B. Черезъ $t$ сек. трубка пройдетъ разстояніе $AF = vt$, шарикъ внутри трубки—разстояніе $FC = v_1 t$ и будетъ въ точкѣ C. Такъ какъ $\frac{BE}{AE} = \frac{v_1}{v}$ и $\frac{CF}{AF} = \frac{v_1 t}{vt} = \frac{v_1}{v}$, то $\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$ и слѣд. линія ABC прямая. Затѣмъ, $\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{vt}{v} = t$; отсюда $AC = AB.t$, т. е. разстояніе AC, пройденное въ $t$ сек., равно разстоянію AB, пройденному въ 1 сек., помноженному на время. Это доказываетъ, что движеніе шарика равномѣрное, и скорость его есть AB. Итакъ, абсолютное движеніе шарика будетъ по прямой линіи съ постоянной скоростью AB. Такъ какъ BE равно и параллельно AH, то фигура AHBE есть параллелограммъ и AB — его діагональ, ч. и т. д.

### 3. Параллелограммъ силъ.

Теорема: *равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку подъ угломъ, выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ силахъ, какъ сторонахъ.* Положимъ, что на точку A дѣйствуютъ двѣ силы $p$ и $q$, которыя сообщаютъ ей скорости $v$ и $v_1$, по направленіямъ AE и AC (фиг. 9). Равнодѣйствующая скорость будетъ діагональ AF параллелограмма ADFB, въ которомъ $AD = v$ и $AB = v_1$. Равнодѣйствующая сила, т. е. сила, сообщающая равнодѣйствующую скорость, должна быть направлена по линіи AF. Пусть будетъ AR равнодѣйствующая сила. Отложимъ отрѣзки AE и AC, соотвѣтственно равные $p$ и $q$, и соединимъ точку R съ точками E и C. Нужно доказать, что четыреугольникъ AERC есть параллелограммъ. Такъ какъ силы пропорціональны сообщаемымъ скоростямъ, то $\frac{AR}{AC} = \frac{AF}{AB}$ и $\frac{AR}{AE} = \frac{AF}{AD}$; отсюда слѣдуетъ, что $RC \parallel BF$ и $RE \parallel DF$; но $FB \parallel AE$ и $DF \parallel AC$, слѣд. $RC \parallel AE$ и $RE \parallel AC$, ч. и т. д.




Фиг. 9.

## *B*. Дѣйствія постоянныхъ силъ.

Въ выводѣ законовъ равномѣрноускореннаго движенія предмета нашей статьи касается только опредѣленіе способа наростанія скорости въ прерывно-равномѣрно-перемѣнномъ движеніи, т. е. въ сущности вопросъ о сложеніи равномѣрныхъ движеній, тогда какъ переходъ отъ движенія прерывно-перемѣннаго къ непрерывно перемѣнному касается вопроса о болѣе или менѣе точномъ примѣненіи способа предѣловъ, а не закона относительнаго движенія. Мы имѣемъ въ виду въ другой разъ разсмотрѣть этотъ вопросъ въ связи съ примѣненіемъ способа предѣловъ въ другихъ отдѣлахъ курса физики, теперь же замѣтимъ только, что точное примѣненіе его состояло бы въ томъ, чтобы, раздѣливъ время на равные промежутки, построить на данномъ непрерывно-перемѣнномъ движеніи два прерывно-перемѣнныхъ движенія—можно было бы назвать ихъ вписаннымъ и описаннымъ, — которыхъ скорости совпадали бы со скоростью даннаго движенія у перваго въ концѣ, у второго въ началѣ каждаго промежутка времени, и доказать, что ускореніе, скорость и пройденное пространство въ данномъ движеніи составляютъ общіе предѣлы ускореній, скоростей и пройденныхъ пространствъ построенныхъ прерывно-перемѣнныхъ движеній.

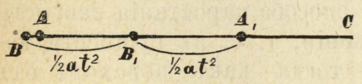
Наростаніе скорости въ прерывно-равномѣрно-перемѣнномъ движеніи, т. е. движеніи подъ дѣйствіемъ ряда толчковъ, равныхъ и слѣдующихъ черезъ равные промежутки времени, представляетъ, какъ уже сказано, вопросъ о сложеніи равномѣрныхъ движеній, разсмотрѣнный въ § 1. Разница здѣсь только въ томъ, что приходится складывать скорость, сообщаемую новымъ толчкомъ, съ существующею уже скоростью по инерціи, а не съ одновременно возникающей скоростью отъ другого толчка, какъ было тамъ. Но такъ какъ законъ относительнаго движенія безразлично относится, какъ къ существовавшему раньше движенію, такъ и къ дѣйствующей одновременно другой силѣ, то намъ пришлось бы здѣсь почти дословно повторить доказательство § 1, и мы пришли бы къ заключенію, что скорости возрастаютъ пропорціонально числу толчковъ, а слѣд. и пропорціонально времени, потому что толчки слѣдуютъ черезъ равные промежутки времени.

### 4. Пропорціональность между силами и ускореніями.

Какъ и въ случаѣ дѣйствія мгновенныхъ силъ (§ 1), теорема о пропорціональности между силами и ихъ дѣйствіями, выражающимися тамъ въ сообщаемыхъ скоростяхъ, здѣсь въ ускореніяхъ, приводится къ теоремѣ о сложеніи дѣйствій силъ. Намъ надо прежде всего доказать, что *если на тѣло дѣйствуютъ въ одну сторону по одному направленію нѣсколько постоянныхъ силъ, то тѣло получитъ движеніе равномѣрно-ускоренное съ ускореніемъ, равнымъ суммѣ ускореній, которыя оно получило бы, если бы каждая сила дѣйствовала одна.*

Чтобы не связывать способъ доказательства съ тѣмъ или другимъ частнымъ способомъ представленія системы, вообразимъ въ качествѣ системы, къ которой относится одно изъ движеній шарика A, другой шарикъ B, расположенный сейчасъ же за первымъ на линіи, по которой направлены всѣ силы.

Положимъ, что на шарикъ A дѣйствуютъ двѣ постоянныя силы по направленію AC (фиг. 10), которыя сообщаютъ ему ускоренія $a$ и $a_1$. Вообразимъ за шарикомъ A, сейчасъ возлѣ него, другой шарикъ B, который движется по тому же направленію AC съ постояннымъ ускореніемъ $a$. Тогда,



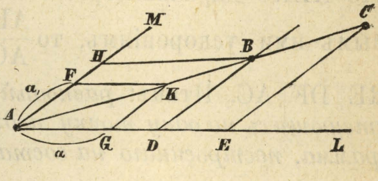

Фиг. 10.

если бы на шарикъ A не дѣйствовала вторая сила, онъ былъ бы въ покоѣ относительно шарика B и двигался бы вмѣстѣ съ нимъ равноускоренно съ ускореніемъ $a$. Но вторая сила сообщитъ шарику A относительное движеніе отъ шарика B, и это послѣднее движеніе будетъ такое же, какъ если бы дѣйствія 1-й силы не было и вся система была въ покоѣ, т. е. равноускоренное съ ускореніемъ $a_1$. Слѣд. въ $t$ сек. шарикъ B перемѣстится на разстояніе $BB_1 = \frac{at^2}{2}$, а шарикъ A относительнымъ движеніемъ пройдетъ разстояніе $B_1A_1 = \frac{a_1t^2}{2}$. Абсолютное перемѣщеніе шарика A будетъ $AA_1 = \frac{at^2}{2} + \frac{a_1t^2}{2} = \frac{(a+a_1)t^2}{2}$; т. е. шарикъ будетъ двигаться равномѣрно-ускоренно съ ускореніемъ $a+a_1$, ч. и т. д.

Подобнымъ образомъ перейдемъ отъ двухъ силъ къ тремъ и т. д. Предполагая всѣ силы, а слѣд. и ускоренія, равными, найдемъ, что сила въ $n$ разъ большая сообщаетъ ускореніе въ $n$ разъ большее, а отсюда заключимъ, что *силы пропорціональны ускореніямъ, сообщаемымъ ими одному и тому же тѣлу.*

## 5. Параллелограммъ ускореній.

Положимъ, что на данное тѣло, шарикъ A, дѣйствуютъ двѣ силы $p$ и $q$ по направленіямъ AL и AM (фиг. 11) и сообщаютъ ему ускоренія $a$ и $a_1$. Представимъ систему, какъ прямой, совершенно гладкій стержень, на который надѣтъ шарикъ A и по которому онъ можетъ свободно скользить. Пусть этотъ стержень направленъ по силѣ $q$ и движется съ ускореніемъ $a$ по направленію силы $p$. Тогда, если бы силы $q$ не было, стержень и шарикъ были бы въ относительномъ покоѣ и двигались бы по направленію AL съ ускореніемъ $a$. Но сила $q$ сообщаетъ шарику относительное движеніе по стержню съ ускореніемъ $a_1$. Черезъ $t$ сек. стержень пройдетъ разстояніе $AD = \frac{at^2}{2}$, а шарикъ по стержню — разстояніе $DB = \frac{a_1t^2}{2}$ и будетъ въ точкѣ B. Черезъ $t_1$ сек. стержень пройдетъ разстояніе $AE = \frac{at_1^2}{2}$, а шарикъ по стержню — разстояніе $\frac{a_1t_1^2}{2} = EC$ и будетъ въ точкѣ C.




Фиг. 11.

Такъ какъ $\frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}a_1t^2}{\frac{1}{2}at^2} = \frac{a_1}{a}$ и $\frac{CE}{AE} = \frac{\frac{1}{2}a_1t_1^2}{\frac{1}{2}at_1^2} = \frac{a_1}{a}$, то $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$; слѣд. линія ABC прямая. Отсюда заключаемъ, что шарикъ движется прямолинейно и равнодѣйствующее ускореніе направлено по линіи ABC. Такъ какъ $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{t_1^2}{t^2}$, то движеніе равномѣрно-ускоренное. Откладываемъ на линіяхъ AL и AM ускоренія $a$ и $a_1$ и пусть линія AK представляетъ равнодѣйствующее ускореніе. Соединимъ точки K, G и

F, проведемъ $BH \parallel AL$ и докажемъ, что четыреугольникъ AFKG параллелограммъ. Такъ какъ абсолютное движеніе шарика равномѣрно ускоренное и ускореніе равно AK, то AB, пространство, пройденное въ $t$ сек., равно $\frac{AKt^2}{2}$, $AC = \frac{1}{2} AKt_1^2$. Отсюда: $\frac{AB}{AD} = \frac{\frac{1}{2} AKt^2}{\frac{1}{2} at^2} = \frac{AK}{a}$ и $\frac{AB}{BD} = \frac{\frac{1}{2} AKt^2}{\frac{1}{2} a_1t^2} = \frac{AK}{a_1}$ и слѣд. $KG \parallel BD \parallel AF$ и $KF \parallel BH \parallel AL$. Слѣд. *равнодѣйствующее ускореніе выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ ускореніяхъ, какъ сторонахъ.*

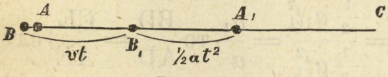
### 6. Правило параллелограмма силъ.

Положимъ, что на шарикъ A дѣйствуютъ двѣ постоянныхъ силы $p$ и $q$, изображаемыя линіями AE и AC (фиг. 9). Пусть эти силы сообщаютъ ему ускоренія $a$ и $a_1$, изображаемыя отрѣзками AD и AB. Равнодѣйствующее ускореніе будетъ представлено прямой AF, діагональю параллелограмма, построеннаго на ускореніяхъ $a$ и $a_1$. Равнодѣйствующая сила, сообщающая это ускореніе, должна быть направлена по линіи AF. Пусть эта сила изобразится отрѣзкомъ AR. Надо доказать, что AERC параллелограммъ. Такъ какъ силы пропорціональны сообщаемымъ ими ускореніямъ, то $\frac{AR}{AC} = \frac{AF}{AB}$ и $\frac{AR}{AE} = \frac{AF}{AD}$; слѣд. $RC \parallel FB \parallel AE$ и $RE \parallel DF \parallel AC$. Итакъ: *равнодѣйствующая двухъ постоянныхъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку подъ угломъ, выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ силахъ, какъ сторонахъ.*

### 7. Сложеніе движеній равномѣрнаго и равномѣрно-ускореннаго.

*a*) Равномѣрно-ускоренное движеніе съ начальной скоростью.

Положимъ, что шарикъ A, имѣя уже скорость $v$ по направленію AC, подвергается дѣйствію постоянной силы, сообщающей ему ускореніе $a$ по тому же направленію. Вообразимъ за шарикомъ A другой шарикъ B и положимъ, что онъ движется по той же линіи AC со скоростью $v$. Если бы на шарикъ A не дѣйствовала сила, оба шарика были бы въ относительномъ покоѣ (фиг. 12); теперь же шарикъ A получитъ относительно шарика B равноускоренное движеніе съ ускореніемъ $a$ по направленію AC. Черезъ $t$ сек. шарикъ B пройдетъ разстояніе $BB_1 = vt$, шарикъ A пройдетъ относительнымъ движеніемъ разстояніе $\frac{1}{2} at^2 = B_1A_1$. Абсолютное перемѣщеніе его будетъ $AA_1 = vt + \frac{1}{2} at^2$.

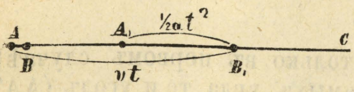



Фиг. 12.

Если бы въ точкѣ $A_1$ на шарикъ A перестала дѣйствовать сила, онъ двигался бы относительно шарика B со скоростью $at$; но шарикъ B движется по тому же направленію со скоростью $v$; слѣд. относительно какой нибудь неподвижной точки шарикъ A перемѣщался бы со скоростью $v + at$. Это и будетъ его абсолютная скорость въ моментъ $t$.

### *b*) Равномѣрно-замедленное движенiе.

Пусть на шарикъ А, движущiйся со скоростью $v$, дѣйствуетъ сила, сообщающая ему ускоренiе $a$ въ сторону СА, противоположную скорости $v$, направленной отъ А къ С (фиг. 13). Вообразимъ передъ шарикомъ А, сейчасъ возлѣ него, шарикъ В, движущiйся со скоростью $v$ отъ А къ С. Черезъ $t$ сек. шарикъ В пройдетъ разстоянiе $BB_1 = vt$; шарикъ А пройдетъ относительно шарика В разстоянiе $B_1A_1$ въ направленiи отъ С къ А, равное $\frac{1}{2}at^2$; абсолютное перемѣщенiе шарика А будетъ $AA_1 = vt - \frac{1}{2}at^2$. Если бы въ точкѣ $A_1$ перестала на шарикъ А дѣйствовать сила, онъ получилъ бы относительно шарика В скорость $at$ въ направленiи отъ С къ А. Скорость шарика В равна $v$ отъ А къ С. Слѣд. абсолютная скорость шарика А въ моментъ $t$ равна $v - at$.



Фиг. 13.

---

*Критическое замѣчанiе.* Въ 3-мъ изданiи учебника физики Ковалевскаго законъ относительнаго движенiя выраженъ такъ: измѣненiе движенiя происходитъ пропорцiонально дѣйствiю приложенной движущей силы и совершается по прямой линiи, по направленiю которой эта сила дѣйствуетъ. Исходнымъ пунктомъ здѣсь является готовое сложное движенiе. Измѣненiю его нельзя придать точнаго смысла иначе, какъ мысленно разлагая это движенiе на два: одно—первоначальное движенiе, или движенiе, какое имѣла бы система, подчиненная всѣмъ прочимъ условiямъ такимъ же, какъ данное тѣло, кромѣ дѣйствiя данной силы, другое—относительное движенiе подъ дѣйствiемъ данной силы. Эта формула постулируетъ такимъ образомъ понятiе о разложенiи движенiй.

Далѣе, если мы говоримъ о неизмѣняемости движенiя, или о тождествѣ движенiй, то это понятiе не заключаетъ въ себѣ ничего неяснаго: здѣсь само собою разумѣется одинаковость всѣхъ свойствъ и равенство всѣхъ величинъ ускоренiй, скоростей и пройденныхъ пространствъ. Совсѣмъ другое дѣло, когда говорятъ объ измѣненiи движенiя, какъ о величинѣ. Что здѣсь разумѣется: ускоренiе, скорость, или пройденное пространство? или заранѣе допускается, что всѣ эти величины пропорцiональны между собою?

Наконецъ, тожество понятiе болѣе первоначальное, чѣмъ пропорцiональность и потому должно быть предпочитаемо въ выраженiи основного закона.

*Б. Гернъ* (Смоленскъ).

# ОЧЕРКЪ

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

*(Продолженіе*).*

Если уголъ C прямой (что возможно только въ первомъ случаѣ), т. е. въ нашемъ четырехугольникѣ три прямыхъ угла, то и уголъ (AA′) прямой (ур. 5). Въ этомъ случаѣ сферическій треугольникъ имѣетъ прямой уголъ при вершинѣ M. Четырехугольникъ вполнѣ опредѣляется двумя элементами; чтобы получить уравненія, связывающія стороны и четвертый уголъ этого четырехугольника, нужно въ уравненіяхъ прямоугольнаго сферическаго трехугольника сдѣлать подстановку:

$$\begin{bmatrix} m & n & p & \mathrm{N} & \mathrm{P} \\ \mathrm{A} & \Pi(a) & \Pi(d) & \Pi(c) & \Pi(b) \end{bmatrix}.$$

Такъ что уравненія

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} n &= \sin p \operatorname{tg} \mathrm{N} \\ \cos \mathrm{P} &= \cos p \sin \mathrm{N} \\ \sin n &= \sin m \sin \mathrm{N} \\ \cos m &= \cos n \cos p \end{aligned}$$

даютъ: **)

$$\operatorname{tg} a' = \sin d' \operatorname{tg} c' \qquad \text{XXXV } g)$$

$$\cos b' = \cos d' \sin c' \qquad \text{XXXV } h)$$

$$\sin a' = \sin \mathrm{A} \sin c' \qquad \text{XXXV } i)$$

$$\cos \mathrm{A} = \cos a' \cos d'. \qquad \text{XXXV } k)$$

Такъ какъ въ четырехугольникѣ MPON***) (фиг. 49) три прямыхъ угла, то любые два изъ четырехъ отрѣзковъ $x$, $y$, $z$ и $t$ опредѣляютъ остальные. Предыдущая теорема даетъ такимъ образомъ всѣ формулы, необходимыя для преобразованія однихъ изъ этихъ координатъ въ другія. Такъ, полагая въ уравненія XXXV $g$) $a = t$, $d = y$ и $c = x$, мы получимъ:

$$\operatorname{tg} t' = \sin y' \operatorname{tg} x'.$$

Уголъ $x'$ всегда заключается между 0 и $\pi$, какъ при положительныхъ, такъ и при отрицательныхъ значеніяхъ аргумента $x$; предыдущее же соотношеніе, какъ это легко видѣть, имѣетъ мѣсто при тѣхъ

---

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201, 202 и 203.

**) Мы возвращаемся къ сокращенному обозначенію, принятому Лобачевскимъ: $x'$ вмѣсто $\Pi(x)$.

***) Четырехугольникъ съ двумя противоположными прямыми углами (напр. MPON) мы всегда будемъ читать въ такомъ порядкѣ, чтобы первая вершина соотвѣтствовала вершинѣ A, вторая—B и т. д.

и другихъ значеніяхъ аргумента; поэтому координаты $t$ и $y$, опредѣляя однозначно абсциссу $x$, и при томъ всегда дѣйствительную, вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки на плоскости, какъ мы это утверждали выше. Мы не станемъ приводить остальныхъ формулъ преобразованія координатъ, потому что онѣ находятся крайне просто съ помощью изложенной теоремы. Къ тому же мы будемъ исключительно пользоваться координатами $x$, $y$. Разбирая подробно всѣ системы, мы имѣли въ виду обратить вниманіе на разнообразіе тѣхъ координатъ, которыя въ системѣ Лобачевскаго соотвѣтствуютъ координатамъ Декарта. Значеніе этого обстоятельства выяснится въ X-ой главѣ.

Но мы разсмотримъ однако формулы преобразованія координатъ, когда ось обсциссъ поворачивается вокругъ того-же начала на уголъ $\vartheta$. Принимая AB на фиг. 52-ой за первоначальное положеніе оси обсциссъ, а AD за новое ея положеніе и обозначая первоначальныя координаты точки C черезъ $x, y$, а новыя черезъ X,У, мы будемъ имѣть:

$$a = x,\ b = y,\ c = У,\ d = X,\ A = \vartheta;$$

и формулы XXXV $c''$) и $f''$) даютъ:

$$\cos x' = \cos X' \cos\vartheta - \sin X' \cos У' \sin\vartheta \qquad \text{XXXVI } a)$$

$$\cot g y' = \frac{\cos X' \sin\vartheta + \cos У' \cos\vartheta \sin X'}{\sin X' \sin У'} .^{*)} \qquad \text{XXXVI } b)$$

Исключая отсюда $\vartheta$, мы находимъ:

$$\sin x' \sin y' = \sin X' \sin У'. \qquad \text{XXXVI } c)$$

Впрочемъ это соотношеніе, очевидно, вытекаетъ, на основаніи уравненія VII, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABC и ADC.

Мы приведемъ еще формулы преобразованія координатъ $x$ и $y$ въ полярныя и наоборотъ. Какъ и въ обыкновенной геометріи, положеніе точки на плоскости, очевидно, вполнѣ опредѣляется радіусомъ векторомъ $OM = r$ (фиг. 49) и полярнымъ угломъ $MOX = \vartheta$. Изъ прямоугольнаго треугольника OMN имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{ll} [\text{ур. XI}] & \cos x' = \cos r' \cos\vartheta \\ [\text{ур. III}] & \cot g y' = \cot g r' \sin\vartheta \end{array}\right\}. \qquad \text{XXXVII } a)$$

И наоборотъ:

$$\left.\begin{array}{ll} [\text{ур. VII}] & \sin r' = \sin x' \sin y' \\ [\text{ур. V}] & \operatorname{tg}\vartheta = \cos y' \operatorname{tg} x' \end{array}\right\}. \qquad \text{XXXVII } b)$$

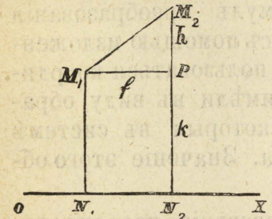
Обратимся теперь къ простѣйшей задачѣ аналитической геометріи, къ разысканію разстоянія между двумя точками $M_1(x_1\, y_1)$ и $M_2(x_2\, y_2)$, (Фиг. 14). Пусть O начало координатъ, OX ось обсциссъ. Полагая $y_2 \geqq y_1$,

---

*) Формулъ $f'$) и $f''$) нѣтъ въ текстѣ. Ясно, что онѣ находятся въ такомъ же отношеніи къ формулѣ $f$), какъ уравненія $e'$) и $e''$) къ уравненію $e$). Уравненіе $f''$) имѣетъ, слѣдовательно, видъ:

$$\cot g b' \sin c' - \cot g d' \sin A = \cos A \cos c'.$$

опускаемъ изъ $M_1$ перпендикуляръ $M_1P$ на $M_2N_2$. Этотъ перпендикуляръ встрѣчаетъ прямую $M_2N_2$ въ точкѣ P между $M_2$ и $N_2$, ибо $PN_2 < M_1N_1 < M_2N_2$. Для краткости обозначимъ искомое разстояніе $M_1M_2$




Фиг. 14.

черезъ $r$, отрѣзки $M_1P$ черезъ $f$, $M_2P$ черезъ $h$, $PN_2$ черезъ $k$ и, наконецъ, $N_1N_2$ черезъ $\S$. Въ четырехугольникѣ $M_1PN_2N_1$ три прямыхъ угла; поэтому полагая въ уравненіяхъ XXXV $a$) и $b$) $a=f$, $b=k$, $c=\S$, $d=y_1$, мы получимъ:

$$\sin f' = \frac{\sin\S' \sin y'_1}{\sin k'}, \cos k' = \cos y'_1 \sin\S'. \quad (10)$$

Согласно уравненію XVII $b$),

$$\sin h' = \sin(y_2-k)' = \frac{\sin y'_2 \sin k'}{1-\cos y'_2 \cos k'} = \frac{\sin y'_2 \sin k'}{1-\cos y'_1 \cos y_2' \sin\S'}. \quad (11)$$

Изъ прямоугольнаго-же треугольника $M_1\,M_2\,P$, согласно уравненію VII, имѣемъ:

$$\sin r' = \sin f' \sin h'.$$

Подставляя же сюда соотвѣтствующія выраженія изъ уравненій (10) и (11), находимъ окончательно:

$$\sin r' = \frac{\sin y'_1 \sin y'_2 \sin\S'}{1-\cos y'_1 \cos y'_2 \sin\S'} = \frac{\sin y'_1 \sin y'_2 \sin(x_2-x_1)'}{1-\cos y'_1 \cos y'_2 \sin(x_2-x_1)'}. \quad \text{XXXVIII}\,a)$$

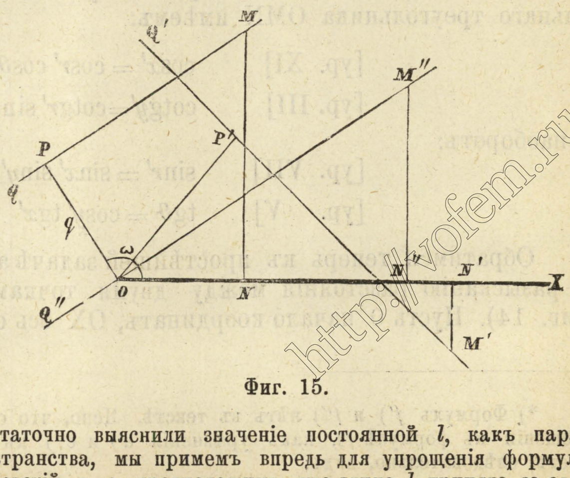
Замѣтимъ, что эта формула симметрична относительно двухъ аргументовъ. Поэтому условіе $y_2 \geqq y_1$ не имѣетъ никакого значенія.

Предыдущему выраженію можно дать нѣсколько иную форму, если раздѣлить числитель и знаменатель на $\sin(x_2-x_1)'$ и воспользоваться уравненіемъ XXII $c$):*)

$$\frac{1}{\sin r'} = \frac{e^{x_2-x_1}+e^{x_1-x_2}-2\cos y'_1 \cos y'_2}{2\sin y'_1 \sin y'_2}. \quad \text{XXXVIII}\,b)$$

Обратимся теперь къ уравненію прямой.

Пусть QM данная прямая (фиг. 15), OX ось обсциссъ. Изъ начала координатъ опускаемъ перпендикуляръ OP на нашу прямую и опредѣляемъ положеніе прямой MQ нормальными параметрами: разстояніемъ $OP=q$ и угломъ $POX=\omega$.




Фиг. 15.

Пусть $(x,y)$ будутъ текущія координаты точки M нашей прямой. Въ че-

*) Полагая, что мы достаточно выяснили значеніе постоянной $l$, какъ параметра, характеризующаго пространства, мы примемъ впредь для упрощенія формулъ $l=1$, какъ это дѣлаетъ Лобачевскій, т. е. предположимъ, что длина $l$ принята за единицу мѣры.

тырехугольникѣ OPMN два противоположныхъ угла—прямые. Полагая поэтому въ уравненіи XXXV $c$) $a = q$, $c = y$, $d = x$, $A = \omega$, мы получаемъ:

$$\cos q' = \cos x' \cos\omega + \sin x' \cos y' \sin\omega. \qquad \text{XXXIX } a)$$

Это уравненіе сохраняется и въ томъ случаѣ, когда прямая (напр. M′N′), пересѣкая ось абсциссъ, имѣетъ точки, расположенныя съ другой стороны ея. Четырехугольникъ OP′M′N′ въ этомъ случаѣ не будетъ выпуклымъ; намъ приходится воспользоваться поэтому уравненіемъ XXXV $c'$), т. е. вмѣсто M′N′, взять (—M′N′); но такъ какъ въ этомъ случаѣ $y = -$ M′N′, то уравненіе XXXIX $a$) отъ этого не измѣняется. Могутъ имѣть мѣсто еще и другія положенія прямой, не соотвѣтствующія нашему чертежу; читатель однако убѣдится безъ затрудненій, что уравненіе прямой отъ этого не измѣняется.

Подставляя сюда вмѣсто $\cos x'$ и $\sin x'$ выраженія XXII $b$) и $c$) находимъ

$$\cos q'(e^x + e^{-x}) = \cos\omega(e^x - e^{-x}) + 2\sin\omega \cos y' \qquad (12)$$

или иначе:

$$(\cos q' - \cos\omega)e^x + (\cos q' + \cos\omega)e^{-x} = 2\sin\omega \cos y'. \qquad (12\, a)$$

Полагая здѣсь

$$\cos q' - \cos\omega = A,\ \cos q' + \cos\omega' = B,\ 2\sin\omega = C, \qquad (13)$$

мы представимъ уравненіе прямой въ видѣ:

$$Ae^x + Be^{-x} = C\cos y'. \qquad \text{XXXIX } b)$$

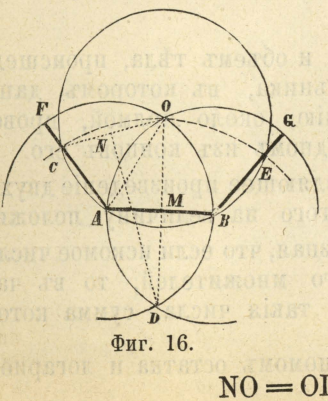
*В. Каганъ* (Спб.).

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

# МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

### Построеніе правильнаго семиугольника по данной сторонѣ.

Принимая точки A и B за центры (фиг. 16), описываемъ окружности радіусомъ AB; тѣмъ же радіусомъ описываемъ окружность, принявъ за центръ пересѣченіе полученныхъ окружностей — точку O. Затѣмъ, принявъ точку D за центръ, описываемъ дугу COE, которая пересѣчетъ окружность O въ точкахъ C и E, соединивъ которыя съ точками A и B, мы получимъ двѣ стороны искомаго семиугольника AF и BG. Полученіе остальныхъ сторонъ не представитъ затрудненія.



Фиг. 16.

Опредѣлимъ уголъ FAB. (AB = 1)

$$NO = OD.\cos NOD;\ \cos NOD = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}};$$

$\lg\cos NOD = 9,46041$; $\angle NOD = 73^0 13'$ (секунды отбрасываемъ);

$$\angle CAO = \frac{180^0 - 73^0 13'}{2} = 68^0 23'; \ \angle FAB = 128^0 23'.$$

Уголъ правильнаго семиугольника долженъ быть равенъ $\frac{180.5}{7} =$
$= 128^0 34'$ (секунды отбрасываемъ).

Такимъ образомъ полученный уголъ разнится отъ истиннаго на 11 минутъ, что, при дальнѣйшемъ построеніи семиугольника, къ вершинѣ, лежащей противъ AB, даетъ ошибку менѣе $^1/_2{}^0$. Хотя эта ошибка и значительна, но, принявъ во вниманіе простоту построенія и легкое запоминаніе его, можно рекомендовать его для построеній, не требующихъ большей точности.

*С. Л.* (Тула).

# ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ.

## Маріампольская гимназія.

### Въ $18^{93}/_{94}$ г.

*По геометріи.* Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, площадь котораго $S = 545,3$ кв. д., данъ уголъ $B = 68^0 48'$, заключающійся между равными сторонами AB и BC. Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого треугольника около прямой, проведенной черезъ вершину B параллельно сторонѣ AC.

*По алгебрѣ.* Разность между коэффиціентами 3-го и 2-го членовъ разложенія $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{a^3}\right)^n$ по формулѣ бинома Ньютона $= xy$, гдѣ $x$ и $y$ суть цѣлыя и положительныя значенія, удовлетворяющія уравненію: $fx + ky = 543$ и неравенству: $x - y > 0$; $f$ есть 4-й членъ, а $k$—2-й членъ ариѳметической прогрессіи, въ которой 3-й членъ $= 22$, а 5-й равенъ 40. Опредѣлить коэффиціентъ въ разложеніи при $a^{9,6}$.

### Въ $18^{92}/_{93}$ г.

*По геометріи.* Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія равнобедреннаго треугольника, въ которомъ даны площадь и уголъ, противоположный основанію, около прямой, проведенной перпендикулярно къ основанію, въ одномъ изъ концовъ его.

*По алгебрѣ.* Опредѣлить число, представляющее произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ болѣе другого на величину положительнаго корня уравненія: $3^{2x^2 - 3x + 0,5} = 9\sqrt{3}$, зная, что если искомое число раздѣлить на сумму упомянутыхъ двухъ его множителей, то въ частномъ и остаткѣ получимъ соотвѣтственно такія числа, сумма которыхъ $= \sqrt[3]{12812904}$, а разность между логариѳмомъ остатка и логариѳмомъ частнаго $= \lg 5$.

*Харьковскій учебный округъ (въ $18^{93}/_{94}$ г.).*

## Реальные училища.

**VII. классъ.** *Алгебра.* Означая черезъ $\alpha$ и $\beta$ корни уравненія,

$$x^2 - 2x\cos\omega + 1 = 0,$$

опредѣлить $m$ изъ условія

$$\alpha^m + \beta^m + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} = 4\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{3\omega}{2}.$$

*Приложеніе алгебры къ геометріи.* Въ данный конусъ вписать цилиндръ, полная поверхность котораго равна половинѣ площади основанія конуса.

**VI классъ.** *Ариѳметика.* Раздѣлить 1234 на такія 4 части, чтобы первая равнялась 0,9090.... второй; отношеніе второй къ третьей равнялось бы $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10}}}$, а третья относилась бы къ четвертой, какъ $^5/_{17} : 0,11(36)$.

*Геометрія. a)* На построеніе. Въ полукругъ вписать прямоугольникъ, стороны котораго были бы пропорціональны даннымъ прямымъ.

*b)* На вычисленіе. Опредѣлить объемы: 1) правильнаго октаэдра, ребро котораго$=a$, и 2) шара, вписаннаго въ этотъ октаэдръ.

*Алгебра.* 1) Вычислить $\sqrt[-e]{\dfrac{\frac{0,0068}{17}}{\lg\sqrt{17}}}$, гдѣ $e$ равно 2,71828182 (основаніе натуральныхъ логариѳмовъ).

2) Первый членъ ариѳметической прогрессіи равенъ 768, число членовъ 6, послѣдній членъ менѣе четвертаго въ 4 раза; сколько надо положить въ банкъ по 8,5%, чтобы черезъ 10 лѣтъ получить число рублей, равное суммѣ членовъ прогрессіи.

*Тригонометрія.* Радіусы двухъ колесъ, установленныхъ въ одной плоскости, соотвѣтственно равны 5 футамъ и 0,7 фута, а разстояніе между центрами равно 12 футамъ. Какова должна быть длина безконечнаго ремня, охватывающаго извнѣ оба колеса?

# ЗАДАЧИ.

**№ 158.** Въ треугольникѣ $ABC$ проведены медіаны $AM$, $BN$ и $CP$ и точки $D$, $E$ и $F$, въ которыхъ внутри вписанный въ треугольникъ $ABC$ кругъ касается соотвѣтственно сторонъ $BC$, $AC$ и $AB$, соединены съ центромъ $O$ этого круга прямыми, продолженными до пересѣченія съ $AM$, $BN$ и $CP$ соотвѣтственно въ точкахъ $X$, $У$, $Z$. Черезъ $X$, $У$

и $Z$ проведены прямыя, параллельныя соотвѣтственно $BC$, $AC$ и $AB$, пересѣкающіяся въ точкахъ $R$, $S$ и $T$. По даннымъ сторонамъ треугольника $ABC$ опредѣлить стороны треугольника $RST$.

*Н. Николаевъ* (Пенза).

**№ 159.** Показать, что

$$4\operatorname{arc\,tg} z + {}^1/_z - z > \pi \text{ при } z < 1 \text{ и } 4\operatorname{arc\,ctg} z - {}^1/_z + z > \pi \text{ при } z > 1.$$

*В. Каганъ* (Спб.).

**№ 160.** Въ усѣченномъ конусѣ помѣщены три равныхъ шара радіуса $r$; шары эти взаимно касаются и кромѣ того каждый изъ нихъ касается основаній и боковой поверхности конуса. Вычислить объемъ этого конуса, зная отношеніе радіусовъ основаній его 2:1.

*И. Ок—чъ* (Варшава).

**№ 161.** Найти зависимость между площадями двухъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же кругъ, если одинъ изъ многоугольниковъ имѣетъ втрое болѣе сторонъ, чѣмъ другой.

*П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

**№ 162.** Найти зависимость между сторонами и площадями двухъ правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около одного и того же круга, если одинъ изъ многоугольниковъ имѣетъ вдвое болѣе сторонъ, чѣмъ другой.

*П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

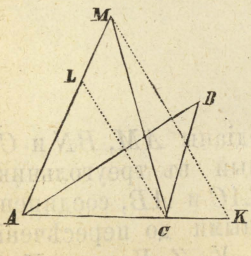
**№ 163.** Пусть $A''$ есть полюсъ стороны $BC$ треугольника $ABC$ по отношенію къ кругу описанному, а $A''A''_a$, $A''A''_b$ и $A''A''_c$ — перпендикуляры, опущенные изъ $A''$ на стороны треугольника $ABC$. Показать, что фигура $A''A''_b A''_a A''_c$ есть параллелограммъ.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 68** (3 сер.). Данъ треугольникъ $ABC$, стороны котораго $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$. Двѣ стороны другого треугольника соотвѣтственно равны сторонамъ $AB$ и $AC$ и уголъ между ними $=2\angle BAC$. Опредѣлить безъ помощи тригонометріи третью сторону этого треугольника.

Пусть $ABC$ (фиг. 17) есть данный треугольникъ. Проведя прямую $AM=AB$ подъ угломъ $MAB$ къ $AB$, равнымъ углу $BAC$, опустимъ изъ точекъ $M$ и $C$ перпендикуляры на $AB$ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ $AC$ и $AM$ соотвѣтственно въ точкахъ $K$ и $L$. Очевидно, что $MK=2h_b$, $CL=2h_c$, гдѣ $h_b$ и $h_c$ суть высоты треугольника $ABC$, проведенныя соотвѣтственно изъ вершинъ $B$ и $C$. Изъ равнобочной трапеціи $CLMK$ имѣемъ:



Фиг. 17.

$$\overline{MC}^2 = \overline{CK}^2 + 4h_b h_c = (c-b)^2 + 4h_b h_c.$$

Но такъ какъ

$$h_b = \frac{2\triangle}{b}, h_c = \frac{2\triangle}{c},$$

гдѣ $\triangle$ есть площадь треугольника $ABC$, то

$$\overline{MC}^2 = \frac{bc(c-b)^2 + 16\triangle^2}{bc}.$$

*А. Варенцовъ* (Шуя); *П. Х.* (Тула); *Гольдблатъ*(?).

**№ 83** (3 сер.). Показать, что сумма разстояній всякой точки отъ вершинъ четыреугольника болѣе суммы діагоналей этого четыреугольника.

Соединяя точку $M$ съ вершинами четыреугольника $ABCD$, получимъ

$$MA + MC \geqq AC,\ MB + MD \geqq BD,$$

откуда

$$MA + MB + MC + MD \geqq AC + BD.$$

Знакъ равенства въ послѣднемъ выраженіи соотвѣтствуетъ тому случаю, когда точка $M$ совпадаетъ съ точкою пересѣченія діагоналей четыреугольника $ABCD$.

*И. Никольскій, Н. Андрикевичъ* (Очаковъ); *І. Кучинскій, И. Барковскій, Э. Заторскій* (Могилевъ губ.); *А. Бачинскій* (Холмъ); *Ученикъ Кіево-Печерской гимназіи*; *Д. Татариновъ, Б. Гуминскій, Н. Новиковъ* (Троицкъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Конюховъ* (Тамбовъ); *А. Медвѣдь, Н. Кузнецовъ* (Иваново-Вознесенскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *А. Дмитріевскій, ученики 3-го кл. Цивильскаго уѣздн. училища* (Цивильскъ); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

**№ 85** (3 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0.$$

Такъ какъ

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x^2 - 2ax - a^2)^2,$$

то данное уравненіе приводится къ уравненію

$$x^2 - 2ax - a^2 = 0,$$

откуда $x = a(1 \pm \sqrt{2})$.

*А. Медвѣдь, Н. Кузнецовъ* (Ив.-Вознесенскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *С. Конюховъ* (Харьковъ); *А. Гольфандъ, П. Ивановъ* (Одесса); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *В. Новиковъ, Д. Татариновъ, Б. Гуминскій* (Троицкъ); *Жихаревъ* (Воронежъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *Э. Заторскій, І. Кучинскій, И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *Ученикъ Кіево-Печерской гимназіи*; *Л. Беркманъ* (Бѣлостокъ).

**№ 86** (3 сер.). Найти условія, при которыхъ въ равнобедренномъ треугольникѣ

$$2a > b + h,\ 2a = b + h \text{ и } 2a < b + h,$$

гдѣ $a$ обозначаетъ одну изъ двухъ равныхъ сторонъ треугольника, $b$— третью сторону и $h$—высоту, на нее опущенную.

Извѣстно, что

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

если $2a = b + h$, то исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій $a$, получимъ

$$2bh = 3h^2,$$

откуда слѣдуетъ, что въ равнобедренномъ треугольникѣ $2a = b + h$, когда $h = 0$ или когда $h = {}^2/_3 b$.

Если $2a > b + h$, то изъ соотношенія ($\alpha$) найдемъ

$$4h^2 + b^2 > (b + h)^2, \text{ откуда } h > {}^2/_3 b.$$

Если же $2a < b + h$, то, очевидно $h < {}^2/_3 b$.

*В. Новиковъ*, *Д. Татариновъ*, *Б. Гуминскій* (Троицкъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *Э. Заторскій*, *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *А. Павлычевъ* (Ив.-Вознесенскъ); *С. Конюховъ* (Харьковъ); *А. Баренцовъ* (Ростовъ на Дону).

**№ 401** (1 сер.). Сифонная трубка, одно колѣно которой значительно длиннѣе другого, содержитъ нѣкоторое количество ртути; ее опускаютъ вертикально въ воду, такъ чтобы короткое колѣно вполнѣ погрузилось и чтобы находящаяся въ немъ ртуть была подъ давленіемъ столба воды въ 1,5 метра. Въ длинномъ колѣнѣ ртуть находится подъ давленіемъ атмосферы. Опредѣлить разность уровней. (Задача Паскаля).

Для уравновѣшенія столба воды въ 1,5 метра нуженъ столбъ ртути въ 1,5:13,6 м., т. е. приблизительно 0,11 метра. Отсюда разность высотъ ртути 0,11 метра, а разность свободныхъ поверхностей жидкостей 1,39 метра.

*И. Поршневъ* (Вятка); *Т. Шаталовъ* (Курскъ).

**№ 402** (1 сер.). Требуется вычислить длину трехъ стальныхъ и двухъ латунныхъ стержней, изъ которыхъ хотятъ сдѣлать уравнительный маятникъ для часовъ въ 0,5 метра длиною, если даны коэффиціенты линейнаго расширенія:

для стали $\alpha = 0{,}0000108$, для латуни $\beta = 0{,}0000188$.

Обозначимъ общую длину стальныхъ стержней, понижающихъ центръ качанія, черезъ $l$, а длину латунныхъ, повышающихъ его, черезъ $l_1$. Тогда

$$l - l_1 = 0{,}5 \text{ и } l\alpha = l_1\beta,$$

или

$$\frac{l}{l_1} = \frac{47}{27}.$$

$$\text{Откуда } l_1 = \frac{0{,}5}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} = 0{,}675 \text{ метр. } l = 1{,}175 \text{ метр.}$$

*И. Поршневъ* (Вятка); *Н. Кастеринъ* (?); *Г. У.* (Воронежъ).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Марта 1895 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

**Concours de 1894** (France). Ecole militaire spéciale. Ecole navale.

**Revue bibliographique**. Lezioni di Analisi infinitesimale. Del Prof. *Peano*. Torino. 1893. Prix 10 fr. Оглавленіе и краткая рецензія. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. Par. M. C. *Jordan*. Paris 1894. Prix 34 fr. Оглавленіе и краткая рецензія.

**Solutions de questions proposées**. №№ 790, 817, 849, 865, 871, 877, 895, 908, 915.

**Questions d'examen**. №№ 840—847.

**Questions proposées**. №№ 964—973.

*Д. Е.*

# L'ASTRONOMIE

## № 12. — 1894.

**A nos lecteurs**. Этимъ № журналъ l'Astronomie прекращаетъ свое существованіе.

**Société astronomique de France**. *Séance du 7 Nov. 1894.*

**Encore quelques mots sur la planète Mars**. *C. Flammarion*. Возражая тѣмъ скептикамъ, которые отрицаютъ то, чего сами не видѣли, Фламмаріонъ сопоставляетъ рисунки нѣкоторыхъ частей Марса, сдѣланные разными наблюдателями въ разныхъ мѣстахъ земного шара приблизительно въ одно и то же время. Изъ такого сопоставленія видно, что *наблюдатели видѣли несомнѣнно одно и то же*, разница же въ деталяхъ можетъ быть объяснена личными особенностями наблюдателей (острота зрѣнія, манера рисовать), различіемъ въ инструментахъ и, наконецъ, перемѣнами, происходящими на самомъ Марсѣ. Въ доказательство существованія такихъ перемѣнъ приводится письмо Скіапарелли, въ которомъ знаменитый астрономъ заявляетъ о тѣхъ лично имъ замѣченныхъ измѣненіяхъ на Марсѣ, которыя были также замѣчены и Brenner'омъ.

**Etude des gaz et vapeurs du soleil. Comparaison entre les appareils et les méthodes employés récemment**. *H. Deslandres*.

**La constitution chimique de l'atmosphère**, *T. L. Phipson*. Опыты съ растеніями, произроставшими въ искусственной атмосферѣ, состоящей изъ азота, углекислоты и водяныхъ паровъ, показали, что растенія могутъ обходиться безъ кислорода. Послѣ трехмѣсячнаго произрастанія въ такой атмосферѣ полеваго вьюнка (Convolvulus arvensis) атмосфера оказалась богаче кислородомъ, чѣмъ земная. При равномъ вѣсѣ болѣе всего кислорода выдѣляютъ нисшія растенія (Protococcus, Microcystis, Conferva и др.), помѣщенныя въ водѣ, насыщенной углекислотой.

Можно предположить поэтому, что свободный кислородъ появился въ земной атмосферѣ только послѣ появленія на земномъ шарѣ растительной жизни, представители которой были тѣмъ крупнѣе, чѣмъ богаче углекислотой была атмосфера; послѣ появленія свободнаго кислорода стала возможной животная жизнь, давшая все высшіе и высшіе организмы по мѣрѣ увеличенія процентнаго содержанія свободнаго кислорода въ атмосферѣ.

**Accroissement de température des couches terrestres avec la profondeur, dans le bas Sahara algérien**. *G. Rolland*. Изъ многихъ наблюденій въ Европѣ выведено, что температура земныхъ слоевъ возрастаетъ на 1°C при углубленіи на каждые 30 метровъ (считая отъ слоя неизмѣнной температуры). Такія же измѣренія въ алжирской Сахарѣ (30—35° шир.) дали увеличеніе темп. въ 1° на 20 метровъ.

**Les grains et les orages**. *Durand Gréville*. Передъ грозой барометръ медленно падаетъ, во время же грозы замѣчается быстрое паденіе барометра и внезапное измѣненіе направленія и скорости вѣтра. Тѣ же явленія наблюдаются и въ буряхъ безъ грозъ, въ вихряхъ и ливняхъ. Изъ этого слѣдуетъ, что главную роль во всякаго рода буряхъ играетъ измѣненіе атмосфернаго давленія и вѣтра, гроза же, ливень, градъ представляютъ результатъ мѣстныхъ условій - результатъ вторженія вихря въ атмосферу, предварительно извѣстнымъ образомъ подготовленную*). Подтвержденіемъ этой гипотезы служитъ приводимое авторомъ подробное изслѣдованіе бури 27 апрѣля 1890 г.

**Nouvelles de la science. Variétés.**

*К. Смоличъ* (Умань).

# БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

## НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІИ.

*Андреевскій, И. С.* Генезисъ науки, ея принципы и методы. Часть II. Кіевъ. 1894 г.

*Бертело, М.* Практическое руководство по термохиміи. Предисловіе акад.-проф. Н. Н. Бекетова. Переводъ д-ра химіи. С. Танатара. Изд. С. Исаковича. Одесса. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

*Бикъ, А.*, межевой инженеръ. Курсъ низшей геодезіи. Часть III. Москва. 1894. Ц. 3 р.

*Вейерштрассъ.* Къ мемуару Линдеманна „О Лудольфовомъ числѣ" (доказательство невозможности квадратуры круга). Переводъ съ дополненіями И. Л. Скалозубова подъ ред. проф. А. В. Васильева. Изд. Физико-математическаго общества. Казань. 1894.

*Давидовъ, А.*, орд. проф. Моск. унив. Элементарная геометрія въ объемѣ гимназическаго курса. Изд. 17-е книжн. магаз. В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р. 35 к.

*Егоровъ, Ѳ. И.* Собраніе ариѳметическихъ задачъ, вычисленій и другихъ упражненій въ предѣлѣ первой сотни чиселъ для начальнаго преподаванія. Изд. 6-е, книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 25.

*Карповъ, И.* Фотографъ-любитель. Краткое наставленіе къ фотографированію для начинающихъ. Изд. 2-е. Спб. 1894. Ц. 50 к.

*Ньюкомбъ, С.* и *Энгельманъ, Р.* Астрономія въ общепонятномъ изложеніи, дополненная Г. Фогелемъ. Переводъ со 2-го изданія: „Newcomb-Engelmann's Populäre Astronomie" Н. С. Дрентельна. Вып. I. Изд. К. Риккера. Спб. 1894. Ц. 1 р. 40 коп.

Подробныя разсчетныя таблицы для устройства пенсіонныхъ кассъ, вычисленныя, при 4% ростѣ на капиталъ, примѣнительно къ Высочайше утвержденному общему положенію о пенсіонныхъ кассахъ россійскихъ желѣзныхъ дорогъ, подъ руководствомъ Б. Ѳ. Малешевскаго. Спб. 1894.

*Розенбергъ, В. Л.* Потенціальная теорія электрическихъ явленій на основаніи аналогій (Изъ журнала „Русская Школа"). Спб. 1894.

Четырехзначные логариѳмы чиселъ, ихъ антилогариѳмы и логариѳмы тригонометрическихъ функцій (Извлеченіе изъ „Курса низшей геодезіи" А. Бика). Москва. 1895. Ц. 1 р.

*Эттель, Ф.*, д-ръ. Практическое руководство для электро-химическихъ работъ. Переведено съ нѣмецкаго подъ ред. проф. Д. П. Коновалова, В. И. Святскимъ. Съ 26-ю рис. въ текстѣ. Изд. Ф. Щепанскаго. Спб. 1894. Ц. 1 р. 50 к.

*Боровичъ, Л. А.*, инж.-техн. Практическое руководство къ построенію динамомашинъ съ постояннымъ токомъ. Изд. 2-е, исправл. и значит. дополненное К. Риккера. Съ 164 рис. Спб. 1894. Ц. 3 р.

*Вильке, А.*, Электричество, его источники и примѣненія въ промышленности. Вып. XI и XII. Перевелъ и дополнилъ Д. Головъ. Изд. Ф. Щепанскаго. Спб. 1894.

---

*) Эта гипотеза Durand Gréville'я подробно развита въ рядѣ статей въ Révue Scientifique за ноябрь—декабрь 1894 г. подъ заглавіемъ Théorie de la grêle.

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## MATHESIS.

### 1894. — № 10.

**Quelques propriétes de l'hyperbole.** Par M. *Pirondini*. Пусть $Ox$, $Oy$ суть прямоугольныя оси координатъ. Около точки C оси $Ox$ опишемъ окружность радіусомъ CO (фиг. 23) и проведемъ діаметръ Q'Q, пересѣкающій при продолженіи ось $Oy$ въ точкѣ A. На перпендикулярѣ въ A къ $Oy$ отложимъ отрѣзки $AP = \frac{AQ}{k}$ и $AP' = \frac{AQ'}{k}$, гдѣ $k$=нѣкоторая постоянная. Координаты точекъ P и P' удовлетворяютъ соотвѣтственно ур-ніямъ:

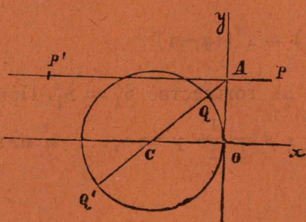
$$\sqrt{r^2 + y^2} = \pm (r + kx),$$

которыя приводятся къ одному ур-нію:

$$k^2x^2 - y^2 + 2kx = 0.$$

Слѣд. геометрическимъ мѣстомъ точекъ P и P' служатъ двѣ вѣтви гиперболы, имѣющей одну вершину въ O. Радіусъ $r$ окружности C равенъ мнимой полуоси этой гиперболы, а $k$ = отношенію мнимой полуоси къ дѣйствительной. При $k=1$ гипербола обращается въ равнобочную, концентрическую съ окружностью C.

Касательныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ P и Q гиперболы и окружности пересѣкаются на оси $Oy$.




Фиг. 23.

Пусть OA и AP суть координаты точки P относительно осей $Ox$ и $Oy$, составляющихъ уголъ $\vartheta$. Если площадь тр-ка OAP пропорціональна его периметру, то геометрическое мѣсто точки P есть гипербола, ассимптоты которой параллельны осямъ $Ox$ и $Oy$; ибо координаты точки P удовлетворяютъ ур-нію:

$$xy.\sin^2\vartheta - 2m(x + y)\sin\vartheta + 2m^2(1 - \cos\vartheta) = 0.$$

Координаты центра гиперболы суть

$$x = y = \frac{2m}{\sin\vartheta}.$$

Точно такъ же, если PA и PB суть координаты точки P относительно тѣхъ же осей и если площадь параллелограмма OAPB пропорціональна его периметру, то геометрическое мѣсто точки P есть гипербола, асссимптоты которой параллельны осямъ $Ox$ и $Oy$; ибо, въ этомъ случаѣ координаты точки P удовлетворяютъ ур-нію:

$$xy\sin\vartheta - 2m(x + y) = 0.$$

**Note sur la relation** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdot\cdot\cdot + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdot\cdot\cdot + n^2)$. Par M. *Gelin*. Положивъ

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$$

и составивъ суммы $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, ...., авторъ по индукціи составляетъ формулу:

$$S_m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{2} n^{m-1} - \frac{1}{30} \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4} n^{m-2} +$$

$$+ \frac{1}{42} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6} n^{m-5} - \frac{1}{30} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-6)}{2.3.4\ldots8} n^{m-7} +$$

$$+ \frac{5}{66} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-8)}{2.3.4\ldots.10} n^{m-9} - \frac{691}{2730} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-10)}{2.3.4\ldots.12} n^{m-11} +$$

$$+ \frac{7}{6} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-12)}{2.3.4\ldots14} n^{m-13} - \ldots\ldots$$

Положивъ затѣмъ

$$S_m^x = in^k S_p^y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

гдѣ $i$ нѣкоторое постоянное, а $k$ цѣлое положительное или отрицательное число, онъ ищетъ цѣлыя положительныя числа $x$ и $y$, удовлетворяющія этому ур-нію. Если коэффиціенты въ разложеніяхъ $S_m$ и $S_p$ обозначить черезъ $a, b, c, d, e, \ldots.$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots.$, то ур-ніе (A) приметъ видъ

$$(an^{m+1} + bn^m + cn^{m-1} + dn^{m-3} + en^{m-5} + \cdots)^x = in^k(\alpha n^{p+1} + \beta n^p + \gamma n^{p-1} + \delta n^{p-3} + \cdots)^y;$$

раскрывая степени въ обѣихъ частяхъ этого ур-нія и приравнивая коэффиціэнты и показатели при $n$, получимъ:

$$(m+1)x = (p+1)y + k,\ a^x = i\alpha^y,\ xa^{x-1}b = iy\alpha^{y-1}\beta,$$

$$xa^{x-1}c + \frac{1}{2}x(x-1)a^{x-2}b^2 = iy\alpha^{y-1}\gamma + \frac{1}{2}iy(y-1)\alpha^{y-2}\beta^2, \cdots \quad (B)$$

При $m = p = 1$, $a = \alpha = \frac{1}{2}$, $b = \beta = \frac{1}{2}$, $c = \gamma = 0, \ldots$; ур-нія (B) будутъ:

$$2x = 2y + k,\ 2^y = 2^x i,\ 2^y x = 2x^x y . i,\ 2^y x(x-1) = 2^x y(y-1)i;$$

отсюда $x = y$, $k = 0$, $i = 1$, т. е. ур-ніе (A) обращается въ тождество $S_1^x = S_1^x$. При $m > 1$ и $p = 1$, $a = \frac{1}{m+1}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{12}m, \ldots$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0, \ldots$ и изъ ур-ній (B) находимъ

$$2x = y,\ k = 0,\ m = 3,\ i = 1;$$

слѣд., ур-ніе (A) обращается въ равенство $S_3 = S_1^3$. Наконецъ, при $m > 1$ и $p > 1$, $a = \frac{1}{m+1}$, $\alpha = \frac{1}{p+1}$, $b = \beta = \frac{1}{2}$, $c = \gamma = \frac{m}{12}, \ldots.$; изъ ур-ній (B) получимъ:

$$(m+1)x = (p+1)y + k,\ \frac{1}{(m+1)x} = \frac{i}{(p+1)^y},\ \frac{x}{(m+1)^{x-1}} = \frac{iy}{(p+1)^{y-1}},$$

$$\frac{mx}{12(m+1)^{x-1}} + \frac{x(x-1)}{8(m+1)^{x-2}} = \frac{ipy}{12(p+1)^{y-1}} + \frac{iy(y-1)}{8(p+1)^{y-2}}.$$

Раздѣливъ 3-е изъ этихъ ур. на 2-е, а 4-е на 3-е, получимъ:

$$(m+1)x = (p+1)y,\ \frac{1}{3}m + \frac{1}{2}(m+1)(x-1) = \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}(p+1)(y-1);$$

отсюда $x = y$ и $m = p$, а потому $k = 0$ и $i = 1$. Ур. (A) въ этомъ случаѣ обращается въ тождество $S_m^x = S_m^x$; слѣд., *единственное равенство вида* $S_m^x = in^k S_p^y$ *есть* $S_3 = S_1^2$. (Ср. по тому же вопросу обзоръ Math. въ № 198 „Вѣст.“).

Обложка
ищется

Обложка
пщется