Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. № 179. № 11.

ОЧЕРКЪ
геометрической системы Лобачевскаго.

(Продолженіе)*

Болѣе серьезнаго вниманія заслуживаетъ доказательство Бертрана, которое появилось въ концѣ прошлаго столѣтія и служитъ типомъ цѣлаго ряда доказательствъ, основанныхъ на свойствахъ безконечно малыхъ и безконечно большихъ величинъ. Касаясь этого вопроса, профессоръ Ермаковъ замѣчаетъ, что доказательства эти основаны на употребленіи безконечно большихъ величинъ, при помощи которыхъ можно доказать „все, что угодно" **). Позволимъ себѣ замѣтить, что такая фраза, безъ дальнѣйшихъ оговорокъ, представляется намъ тѣмъ болѣе неосторожной, что она помѣщена въ элементарномъ сочиненіи и вызываетъ въ читателѣ незаслуженное недовѣріе къ высшему анализу, въ которомъ такія величины фигурируютъ. Мы остановимся на этомъ вопросѣ подробнѣе.

Доказательство Бертрана относится къ той эпохѣ, когда формировавшійся анализъ безконечно малыхъ еще далеко не былъ строго обоснованъ. На безконечно малыя и безконечно большія установился нѣсколько мистическій взглядъ, который позволялъ трактовать ихъ то какъ обыкновенныя величины, то какъ величины особенныя, допускающія такія равенства, которыя неприложимы къ величинамъ конечнымъ.

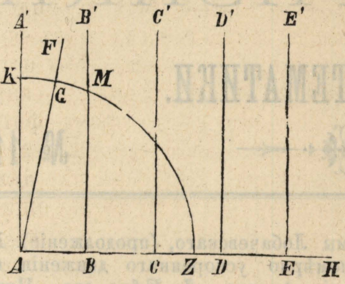
---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" №№ 174 и 178.

**) Пр. Ермаковъ „Одиннадцатая аксіома Евклида", № 17 „Вѣстн. Оп. Физ.".

Естественно, что этими допущеніями, къ которымъ геометръ привыкъ, легко можно было замаскировать допущеніе геометрическое, достаточное для доказательства постулата.

Бертранъ имѣетъ въ виду доказать (фиг. 47), что перпендикуляръ BB' по достаточномъ продолженіи пересѣчетъ наклонную AF. Откладываемъ отрѣзки $BC=CD=DE...=AB$. Изъ точекъ $C,D,E,...$ возставимъ перпендикуляры $CC',DD',EE',...$ къ AH. Мы получимъ рядъ безконечно большихъ полосъ, ограниченныхъ отрѣзкомъ сѣкущей и двумя параллелями. Если наложимъ полосу $A'ABB'$ на одну изъ другихъ полосъ такимъ образомъ, чтобы ихъ основанія совмѣстились,—то перпендикуляры, ограничивающіе эти полосы съ боковъ, совпадутъ. Слѣдовательно, заключаетъ отсюда Бертранъ: самыя полосы будутъ равны. Далѣе, такъ какъ мы можемъ нанести на прямой AH безчисленное множество отрѣзковъ, равныхъ AB, — то каждая изъ этихъ полосъ представляетъ собой безконечно малую часть той *неопредѣленно* простирающейся части плоскости, которая ограничена прямыми AA_1 и AH. Съ другой стороны уголъ FAA' составляетъ нѣкоторую опредѣленную часть прямого угла; часть плоскости, заключенная между прямыми AA' и AF, составляетъ поэтому конечную часть той-же плоскости $A'AH$. Отсюда слѣдуетъ, что прямая AF должна выйти изъ первой полосы и пересѣчь перпендикуляръ BB': иначе часть плоскости, заключенная внутри угла A_1AF, была бы меньше каждой полосы.



Фиг. 47.

Этому доказательству нельзя отказать въ остроуміи и изяществѣ, но оно отнюдь не удовлетворяетъ тѣмъ требованіямъ, при которыхъ методъ безконечно малыхъ можетъ считаться законнымъ. Прежде всего, что такое безконечная полоса? Если ее опредѣлить, какъ *неопредѣленную* часть плоскости, ограниченную прямолинейнымъ отрѣзкомъ и двумя прямыми, къ нему перпендикулярными, то какъ понимать выводъ, утверждающій, что одна *неопредѣленная* часть плоскости составляетъ безконечно малую часть другой *неопредѣленной* же части плоскости. Когда мы говоримъ о геометрическомъ тождествѣ конечныхъ величинъ, то мы хотимъ этимъ сказать, что одна изъ нихъ совмѣщается съ другой во всѣхъ своихъ частяхъ; ясное дѣло, что эта идея можетъ быть перенесена на неопредѣленныя полосы только въ томъ смыслѣ, что мы начнемъ наложеніе съ конечныхъ и вполнѣ опредѣленныхъ частей, а затѣмъ станемъ увеличивать части одной и другой полосы согласно опредѣленному закону. Пока это не сдѣлано, нѣтъ мѣста доказательству; если-же такой законъ будетъ установленъ, въ немъ самомъ уже найдется критерій для оцѣнки доказательства. Постараемся это сдѣлать. Если мы говоримъ, что уголъ $A'AF$ составляетъ опредѣленную часть, скажемъ для простоты десятую часть, прямого угла A_1AH, то въ этомъ утвержденіи заключается слѣдующій фактъ: если мы изъ вершины, какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ AK, то секторъ KAZ можетъ быть разбитъ на десять секторовъ, равныхъ KAG; и это останется справедливымъ, сколько бы мы ни увеличивали радіусъ AK.

Если-бы Бертранъ доказалъ, что при достаточномъ увеличеніи радіуса часть круга MBZ можетъ быть сдѣлана менѣе одной десятой части квадранта, то отсюда дѣйствительно вытекало бы, что при нѣкоторой опредѣленной величинѣ радіуса *вполнѣ опредѣленная* площадь сектора KAG становится больше *опредѣленной* площади KABM, и тогда можно было бы сдѣлать вполнѣ законный выводъ, что прямая AF перейдетъ на другую сторону перпендикуляра. Въ такомъ видѣ можетъ быть формулировано допущеніе, искусно замаскированное Бертраномъ. Мы остановились подробно на этомъ вопросѣ, зная по личному опыту, какъ трудно бываетъ оріентироваться въ доказательствѣ, въ которомъ фигурируютъ безконечныя величины. Такъ г. Буняковскій высказываетъ только сомнѣніе въ справедливости доказательства Бертрана и даже болѣе, предлагая собственное доказательство, впадаетъ въ ту-же ошибку. При изложеніи системы Лобачевскаго, мы встрѣтимся съ доказательствомъ аналогичнаго предложенія при помощи метода предѣловъ; разница между однимъ доказательствомъ и другимъ обнаружится сама собой. Мы не станемъ на этомъ останавливаться, чтобы не утомлять читателя, а перейдемъ къ изслѣдованію Лежандра, который, въ сущности, первый подвинулъ вопросъ впередъ.

Извѣстно, что изъ Евклидовой теоріи параллельныхъ линій непосредственно вытекаетъ предложеніе о суммѣ угловъ треугольника. Лежандръ (правда не первый) задается цѣлью доказать, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна $2d$,—независимо отъ постулата. Знаменитый геометръ много разъ переходилъ отъ одной системы изложенія этого вопроса къ другой*); мы будемъ строго придерживаться его идеи, позволяя себѣ небольшія отступленія въ методѣ доказательства въ видахъ упрощенія вопроса.

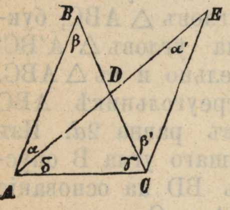
Лежандръ доказываетъ прежде всего, что всегда возможно построить треугольникъ, имѣющій ту-же сумму угловъ, что и данный, но въ которомъ сумма двухъ угловъ сколь угодно мала.

Для этого дѣлимъ середину стороны BC (фиг. 48) даннаго треугольника ABC пополамъ и, отложивъ на продолженіи прямой AD отрѣзокъ DE=AD, мы получимъ треугольникъ AEC. Въ треугольникѣ ABC сумма внутреннихъ угловъ

$$s=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Въ треугольникѣ AEC сумма внутреннихъ угловъ

$$s'=\alpha'+\beta'+\gamma+\delta.$$



Фиг. 48.

Ввиду равенства тр. ABD и EDC имѣемъ $\alpha=\alpha'$ и $\beta=\beta'$, слѣдовательно $s=s'$. Сверхъ того въ новомъ треугольникѣ сумма двухъ внутреннихъ угловъ $\alpha'+\delta$ равна $\alpha+\delta$, т. е. одному внутреннему углу BAC даннаго треугольника, который мы просто обозначимъ черезъ A. Изъ этого слѣдуетъ, что въ случаѣ равенства этихъ двухъ угловъ, каждый изъ нихъ равенъ $^1/_2$A; въ случаѣ неравенства меньшій будетъ

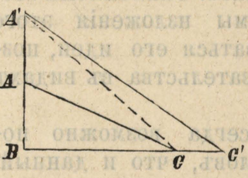
*) Въ различныхъ изданіяхъ его „Eléments de Géometrie“ онъ даетъ то одно, то другое доказательство. Подробно разсмотрѣнъ вопросъ въ спеціальномъ мемуарѣ: „Reflexion sur differentes manières de démontrer la théorie des parallèles“. Memoires de l'Academie Royale, Tome XI, 1833.

меньше $^1/_2$ A: во всякомъ случаѣ одинъ изъ двухъ угловъ не превышаетъ $^1/_2$A. Произведя снова аналогичное построеніе такимъ образомъ, чтобы этотъ уголъ игралъ роль угла A, мы получимъ треугольникъ, въ которомъ сумма двухъ угловъ не превышаетъ $^1/_2$ A, а одинъ изъ двухъ угловъ не превышаетъ $^1/_4$ A. Продолжая это построеніе, мы, очевидно, можемъ сдѣлать сумму двухъ угловъ сколь угодно малой, такъ какъ величина этой суммы убываетъ въ геометрической прогрессіи.

Изъ этого непосредственно вытекаетъ, что сумма угловъ треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ она равнялась $2d+k$, то мы построили бы треугольникъ съ той же суммой угловъ, въ которомъ сумма двухъ угловъ была бы меньше k, а слѣдовательно третій уголъ былъ бы больше $2d$,—что совершенно невозможно. Лежандръ старался доказать при помощи аналогичныхъ соображеній, что сумма угловъ также не можетъ быть меньше $2d$. Эта попытка, конечно, неудачна. За то онъ обнаружилъ, что намъ представляется такая альтернатива: либо сумма угловъ въ треугольникѣ постоянно равна двумъ прямымъ, либо она постоянно меньше $2d$ и является величиной перемѣнной. Разсужденія, которыя приводятъ его къ этому заключенію, не сложны.

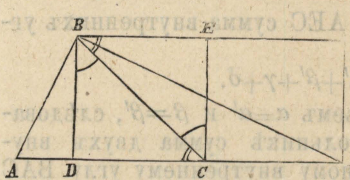
Прежде всего очевидно, что внѣшній уголъ (C_1) треугольника не можетъ быть меньше суммы двухъ внутреннихъ, съ нимъ не смежныхъ ($A+B$), —потому что при $A+B>C_1$ и $C+C_1=2d$, мы имѣли бы $A+B+C>2d$.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ два прямоугольныхъ треугольника ABC и A′BC′ (фиг. 49), причемъ катеты второго больше катетовъ перваго; легко обнаружить, что сумма внутреннихъ угловъ во второмъ треугольникѣ не превышаетъ суммы угловъ въ первомъ. Дѣйствительно, соединивъ точки A′ и C, мы составимъ треугольникъ A′BC; сравнивая сумму его угловъ съ той же суммой въ данномъ треугольникѣ, мы видимъ, что въ немъ углы AA′C и ACA′ замѣняютъ уголъ BAC; такъ какъ они являются внутренними углами треугольника BA′C, то сумма ихъ не превышаетъ внѣшняго угла BAC; поэтому сумма угловъ $\triangle$ BA′C не превышаетъ суммы угловъ $\triangle$ ABC; буквально такимъ же путемъ мы докажемъ, что сумма угловъ $\triangle$ A′BC′ не превышаетъ той же суммы въ $\triangle$ A′BC, а слѣдовательно и въ $\triangle$ ABC.



Фиг. 49.

Допустимъ теперь, что въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC (фиг. 50) сумма угловъ равна $2d$. Изъ вершины самаго большаго угла B опустимъ перпендикуляръ BD на основаніе AC; такъ какъ углы A и C острые, то перпендикуляръ пройдетъ внутри треугольника и раздѣлитъ его на два другихъ ABD и CBD; сумма внутреннихъ угловъ обоихъ треугольниковъ составляется изъ угловъ треугольника ABC (т. е. $2d$) и двухъ смежныхъ угловъ ADB и BDC; она равна, слѣдовательно, $4d$. Изъ этого слѣдуетъ, что сумма угловъ въ каждомъ изъ этихъ прямоугольныхъ треугольниковъ равна $2d$, потому что,—если бы она была меньше $2d$ въ одномъ изъ нихъ, то была бы больше $2d$ въ другомъ, что невозможно. Приложимъ теперь къ треугольнику DBC тожде-



Фиг. 50.

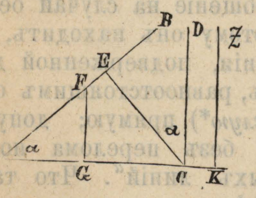
ственный ему треугольникъ CBE, въ которомъ $\angle CBE = \angle BCD$, а $\angle BCE = \angle CBD$, тогда составится четыреугольникъ BDCE, въ которомъ всѣ четыре угла прямые, ибо

$$\angle DBC + \angle CBE = \angle DCB + \angle BCE = \angle DBC + \angle DCB = d.$$

Продоливъ BE и DC на равныя имъ разстоянія EF и CG и соединивъ точки F и G получимъ четырехугольникъ ECGF, тождественный четырехугольнику DBEC. Слѣдовательно въ четырехугольникѣ DBFG всѣ четыре угла прямые. Въ прямоугольномъ треугольникѣ BDG, сумма угловъ равна $2d$, потому что, будь она меньше $2d$, сумма угловъ въ $\triangle$ BGF была бы больше $2d$. Мы имѣемъ слѣдовательно возможность построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ по прежнему равна $2d$, но одинъ изъ катетовъ вдвое больше предыдущаго. Повторяя то же построеніе достаточное число разъ и примѣняя его то къ одному, то къ другому катету, мы можемъ, слѣдовательно, построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна $2d$, а катеты сколь угодно велики. Изъ всего сказаннаго уже не трудно заключить, что при сдѣланномъ допущеніи сумма угловъ равна $2d$ во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ. Въ самомъ дѣлѣ допустимъ, что въ какомъ нибудь прямоугольномъ треугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ оказалась бы меньше $2d$. Мы только что показали, что мы можемъ построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ катеты будутъ больше катетовъ этого треугольника, а сумма угловъ равна $2d$. Но мы видѣли выше, что сумма угловъ треугольника съ большими катетами не можетъ превышать суммы угловъ даннаго треугольника. Слѣдовательно, нельзя допустить, чтобы въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма угловъ была меньше $2d$. Отсюда непосредственно вытекаетъ, что и въ косоугольномъ треугольникѣ сумма угловъ равна $2d$. Въ самомъ дѣлѣ, опустимъ изъ вершины угла B треугольника ABC перпендикуляръ BD на основаніе; сумма внтренних угловъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ равна $4d$; отбросивъ два смежныхъ угла получимъ сумму угловъ $\triangle$ ABC, равную $2d$.

Намъ остается только обнаружить, что альтернатива относительно суммы внутреннихъ угловъ треугольника эквивалента альтернативѣ относительно параллельныхъ линій. Иными словами, намъ остается доказать, что постулатъ Евклида можно вывести, какъ слѣдствіе изъ допущенія, что сумма угловъ треугольника равна $2d$*).

Дѣйствительно (фиг. 51), допустимъ, что перпендикуляръ KZ не пересѣкаетъ наклонной AB. Изъ произвольной точки прямой AB можно опустить перпендикуляръ FG на AK и можно сказать, что наклонная AB пересѣкаетъ перпендикуляръ, возставленный изъ точки G. Слѣдовательно при перемѣщеніи отъ точки G къ K по прямой GK найдется точка C, которая служитъ основаніемъ перваго непересѣкающаго перпендикуляра CD; иными словами, всякій перпендикуляръ, основаніе котораго ближе къ A, пересѣчетъ наклонную. Опустимъ теперь изъ C перпендикуляръ CE на AB;



Фиг. 51.

*) Предлагаемое доказательство принадлежитъ г. Буняковскому „Параллельныя линіи“, § 20.

углы ECD и EAC равны, ибо при сдѣланномъ допущеніи относительно суммы угловъ треугольника, они дополняютъ до прямого одинъ и тотъ же уголъ ACE. Но EC меньше AC. А такъ какъ прямая DC наклонена къ сѣкущей EC подъ тѣмъ же угломъ, подъ какимъ AB наклонена къ AC, то при разстояніи основанія E перпендикуляра EB, меньшемъ AC, она пересѣчетъ перпендикуляръ. Это обнаруживаетъ невозможность сдѣланнаго предположенія.

Мы оставляемъ совершенно въ сторонѣ доказательства, основанныя на началѣ однородности, потому что они не вносятъ ничего въ теорію вопроса. Замѣтимъ только, что намъ совершенно непонятно одобрительное отношеніе къ этой точкѣ зрѣнія г. Буняковскаго послѣ того, какъ работы Лобачевскаго были уже давно опубликованы.

Посвятимъ нѣсколько словъ доказательствамъ, которыя основаны на представленіяхъ заимствованныхъ изъ механики. Идея заключается въ томъ, что представляютъ себѣ матеріальную прямую и на ней безчисленное множество точекъ, находящихся на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Въ этихъ точкахъ представляютъ себѣ приложенными равныя и параллельныя силы, перпендикулярныя къ данной прямой. Подъ дѣйствіемъ этихъ силъ прямая, въ теченіе извѣстнаго промежутка времени перемѣстится, при чемъ принимается за очевидное, что силы не произведутъ ни растяженія, ни излома; въ виду симметріи въ расположеніи силъ всѣ точки, къ которымъ приложены силы, опишутъ равные пути, перпендикулярныя къ данной прямой; изъ отрѣзковъ прямой въ ея прежнемъ и новомъ положеніи—и изъ траэкторій точекъ приложенія силъ составляется четыреугольникъ съ четырьмя прямыми углами. Мы видѣли при изложеніи системы Лежандра, что этого достаточно для обоснованія Евклидовой геометріи.

Приведенныя здѣсь соображенія состоятъ изъ двухъ существенно различныхъ частей. Во первыхъ, утверждается, что прямая можетъ быть передвинута въ новое положеніе такимъ образомъ, чтобы она въ безконечномъ рядѣ точекъ находилась на равныхъ разстояніяхъ отъ прежняго положенія; во вторыхъ, указанъ способъ, которымъ это передвиженіе можетъ быть достигнуто. Геометру нужно только первое положеніе, -- и приведенное доказательство, на нашъ взглядъ, служитъ только указаніемъ на одинъ изъ многочисленныхъ экспериментовъ, которымъ мы обязаны нашими представленіями о пространственныхъ образахъ. Г. Буняковскій очевидно сознаетъ, что экспериментально мы можемъ имѣть дѣло только съ ограниченнымъ числомъ силъ, а потому обобщеніе на случай безконечно большого числа силъ незаконно. Поэтому онъ находитъ, что „вмѣсто матеріальной неизмѣняемой прямой линіи, подверженной дѣйствію равныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ, равноотстоящимъ одна отъ другой, можно разсматривать просто *тяжелую**) прямую; допущеніе возможности горизонтальнаго ея движенія безъ перелома послужитъ строгимъ основаніемъ теоріи параллельныхъ линій". Что такое матеріальная неизмѣняемая прямая? Это есть нѣкоторая связь между

---

*) Буняковскій. loc. cit. § 15. Курсивъ подлинника.

безконечнымъ рядомъ матеріальныхъ точекъ, какъ кинематическое условіе движенія. Возникаетъ вопросъ, совмѣстимо-ли передвиженіе прямой параллельно самой себѣ въ евклидовскомъ смыслѣ слова съ такимъ кинематическимъ условіемъ движенія. Если на этотъ вопросъ отвѣтить утвердительно, то зачѣмъ г. Буняковскому именно „тяжелая“ прямая? Намъ кажется, что этимъ авторъ подчеркиваетъ только, что въ возможности такого передвиженія прямой мы убѣждаемся, между прочимъ, путемъ наблюденія движенія тяжелыхъ тѣлъ. И если такая точка зрѣнія правильна, то этотъ фактъ служитъ, на нашъ взглядъ, только новымъ указаніемъ на нашу склонность къ поспѣшному обобщенію экспериментальныхъ фактовъ, — обобщенію, основанному на нашей неспособности наблюдать явленіе „in toto“. Въ самомъ дѣлѣ всѣ тяжелыя тѣла, движеніе которыхъ мы созерцаемъ, имѣютъ размѣры ничтожные по сравненію съ размѣрами земного радіуса. Какъ двигалось бы тяжелое тѣло громадныхъ размѣровъ, вопросъ очень сложный; или правильнѣе трудно сказать a priori, содѣйствовало ли бы такое движеніе развитію представленій, соотвѣтствующихъ евклидовой геометріи или нѣтъ. Во всякомъ случаѣ теоретически рѣшить этотъ вопросъ въ пользу допущенія г-на Буняковскаго немыслимо безъ евклидовой геометріи; а такого опыта мы въ данное время сдѣлать не можемъ. Между тѣмъ именно изъ подобныхъ наблюденій, по крайней мѣрѣ, съ точки зрѣнія господствующей теперь экспериментальной философіи, создается наше представленіе о пространствѣ. Для эмпириста является поэтому всегда возможнымъ измѣненіе въ его пространственныхъ представленіяхъ въ зависимости отъ тѣхъ условій наблюденія и опыта, въ которыя онъ будетъ поставленъ. Мы рѣшительно не въ состояніи усмотрѣть въ этомъ логическаго абсурда.

Возвратимся къ постулату Евклида. Многочисленныя попытки доказать постулатъ имѣютъ значеніе съ двухъ точекъ зрѣнія. Во первыхъ, онѣ выяснили, что сущность задачи заключается не въ томъ, чтобы замѣнить одно допущеніе другимъ, болѣе очевиднымъ; необходимо вывести это предложеніе изъ формальныхъ опредѣленій и предшествующихъ посылокъ. Во вторыхъ, онѣ указали цѣлый рядъ предложеній, отъ которыхъ пришлось бы отказаться, если не принять постулата Евклида. Они освѣтили путь геометру, который рѣшился бы стать на эту опасную точку зрѣнія.

Первые проблески этой идеи мы встрѣчаемъ у іезуита Саккери*). Въ 1733 году имъ издано сочиненіе подъ заглавіемъ: „Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus, quo stabiliunutur prima ipsa universae Geometriae principia. Auctore Hieronymo Saccherio, Societate Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos professore“. Въ этомъ сочиненіи авторъ, какъ видно изъ самаго заглавія, старается освободить книгу Евклида отъ всякихъ упрековъ, которые ей могутъ быть поставлены на видъ,—въ томъ числѣ и отъ пробѣла въ теоріи параллельныхъ. Къ этому вопросу онъ подходитъ съ слѣдующей точки зрѣнія. Возставивъ два перпендикуляра изъ двухъ точекъ прямой, онъ откладываетъ на нихъ равныя разстоянія и соединяетъ конечныя точки пря-

*) См. *Васильевъ*: „Іезуитъ Саккери, итальянскій предшественникъ Лобачевскаго“. Извѣстія физико-математическаго общества при Казанскомъ университетѣ. Серія II, томъ III, № 3. 1893. Тамъ же указаніе остальной литературы.

мой. Въ полученномъ четырехугольникѣ два угла прямые; остальные, какъ это не трудно доказать, равны. При такихъ условiяхъ возможны три предположенiя. Можно допустить, что оба угла острые, оба прямые или оба тупые. A priori Саккери не отказывается ни отъ одной изъ этихъ трехъ гипотезъ. Дальнѣйшiя соображенiя обнаруживаютъ, что въ зависимости отъ того, какая изъ трехъ гипотезъ будетъ принята, сумма угловъ въ треугольникѣ окажется меньше, равна или больше двухъ прямыхъ. Онъ однако доказываетъ невозможность „гипотезы тупого угла", и въ этомъ отношенiи является, слѣдовательно, предшественникомъ Лежандра. Представляющуюся такимъ образомъ дилемму Саккери рѣшаетъ въ пользу гипотезы прямого угла при помощи доказательства, которое основано на теорiи безконечно малыхъ, примѣненной, разумѣется, неправильно. Но предварительно онъ даетъ цѣлый рядъ теоремъ, которыя имѣли бы мѣсто при гипотезѣ остраго угла. Конечно онѣ являются только отдѣльными, отрывочными предложенiями, которыя авторъ оставляетъ безъ всякаго примѣненiя.

Прошло почти цѣлое столѣтiе, прежде чѣмъ идеи эти нашли себѣ дальнѣйшее развитiе. На этотъ разъ онѣ появляются не въ печатномъ трудѣ, а въ частной перепискѣ Гаусса съ Шумахеромъ*). Шумахеръ неоднократно присылаетъ Гауссу доказательства предложенiя о суммѣ угловъ въ треугольникѣ. Разоблачая въ отвѣтныхъ письмахъ погрѣшности, допущенныя въ этихъ доказательствахъ, Гауссъ сообщаетъ Шумахеру свой собственный взглядъ на этотъ вопросъ. Онъ находитъ, что допущенiе, противоположное тому, которое дѣлаетъ Евклидъ, не представляетъ собой логическаго абсурда; что оно можетъ быть положено въ основанiе геометрической системы. „Въ этомъ смыслѣ *неевклидова* геометрiя не имѣетъ въ себѣ никакихъ противорѣчiй, хотя по первому взгляду многiе изъ ея результатовъ имѣютъ видъ парадоксовъ. Эти кажущiяся противорѣчiя должны быть разсматриваемы, какъ дѣйствiе иллюзiи, происходящей отъ привычки, которую мы себѣ уже давно усвоили, разсматривать Евклидову геометрiю, какъ строгую". За этимъ слѣдуетъ нѣсколько указанiй на результаты, къ которымъ приводитъ неевклидова геометрiя; указанiя эти обнаруживаютъ, что новая система была Гауссомъ глубоко продумана. Гауссъ сообщаетъ также, что онъ наноситъ свои соображенiя на бумагу, чтобъ они не погибли съ его смертью. Къ сожалѣнiю, до сихъ поръ неизвѣстно, сохранилась ли эта рукопись въ бумагахъ Гаусса. Въ этой же перепискѣ, въ письмѣ отъ 28 Ноября 1846 г. великiй геометръ съ глубокимъ сочувствiемъ привѣтствуетъ появившiйся незадолго передъ тѣмъ въ Европѣ трудъ Николая Ивановича Лобачевскаго. Казанскому профессору выпало на долю въ первый разъ высказать въ печати новыя воззрѣнiя на геометрiю въ строго продуманной и обработанной системѣ.

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженiе слѣдуетъ).

---

*) Ту часть переписки, которая имѣетъ отношенiе къ этому вопросу, можно найти въ юбилейномъ сборникѣ, изданномъ казанскимъ физико-математическимъ обществомъ подъ заглавiемъ: „Объ основанiяхъ геометрiи". Казань. 1893.

Объ одномъ слѣдствіи изъ законовъ равномѣрно ускореннаго движенія.

Въ равномѣрно ускоренномъ движеніи квадратъ скорости въ данной точкѣ пути равенъ квадрату начальной скорости, сложенному съ удвоеннымъ произведеніемъ пройденнаго пространства на ускореніе движенія.

Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ v скорость спустя t единицъ времени отъ начала движенія, черезъ u—начальную скорость, черезъ S—пространство, пройденное во время t, черезъ a—ускореніе разсматриваемаго движенія, на основаніи законовъ скорости и пространствъ имѣемъ:

$$v=u+at \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$S=ut+\frac{at^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Возведя I-ое въ квадратъ, получимъ:

$$v^2=u^2+2aut+a^2t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(III)}.$$

Но изъ II-го, по умноженіи его на a, получаемъ:

$$a^2t^2=2aS-2aut.$$

Подставляя это значеніе a^2t^2 въ III и сдѣлавъ приведеніе, имѣемъ окончательно:

$$v^2=u^2+2aS,$$

что и требовалось доказать. Указанная теорема, пропускаемая обыкновенно при элементарномъ изложеніи законовъ равномѣрно перемѣннаго движенія, имѣетъ весьма важное значеніе, такъ какъ, пользуясь ею, можно вполнѣ элементарно опредѣлить скорость въ данной точкѣ траекторіи прямолинейнаго движенія съ перемѣннымъ ускореніемъ.

Примѣнимъ сказанное къ опредѣленію скорости въ данной точкѣ на траекторіи въ простомъ гармоническомъ движеніи. Для этого допустимъ сначала, что ускореніе разсматриваемаго прямолинейнаго движенія измѣняется не непрерывно, а, если можно такъ выразиться, толчками. Предположимъ, именно, что путь S, въ концѣ котораго требуется опредѣлить скорость, состоитъ изъ n равныхъ элементовъ и что движущаяся точка проходитъ каждый изъ этихъ элементовъ движеніемъ равномѣрно перемѣннымъ, съ неодинаковыми ускореніями a_1, a_2, a_3, которыя остаются постоянными лишь пока точка не очутилась на границѣ двухъ элементовъ, но въ этомъ мѣстѣ, то есть въ концѣ предыдущаго и началѣ послѣдующаго элемента,—вдругъ мѣняетъ свою величину. Затѣмъ положимъ, что ускореніе измѣняется пропорціонально разстоянію движущейся точки отъ нѣкоторой постоянной точки M на траекторіи, находящейся на разстояніи d отъ начальной точки. Если въ разстояніи d содержится m такихъ элементовъ, какихъ въ S заключается n, то

$$d=S\frac{m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Если, затѣмъ, обозначимъ величину ускоренія на единицѣ разстоянія отъ точки M черезъ q, то ускореніе въ начальной точкѣ, отстоящей отъ M на $S^m/_n$, будетъ $qS^m/_n$; это и будетъ ускореніе a_1 на первомъ элементѣ пути; очевидно ускореніе a_2 на второмъ элементѣ будетъ $qS\frac{m-1}{n}$ и т. д. и, наконецъ, ускореніе a_n на n-омъ элементѣ пути будетъ:

$$a_n = qS\frac{m-n+1}{n}.$$

Назовемъ черезъ $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ скорости въ концѣ 1-го, 2-го, 3-го.....n-го элемента пути; тогда, по доказанной выше теоремѣ, квадраты скоростей въ концѣ 1-го, 2-го... n-го элемента (предполагая, что начальная скорость равна нулю) будутъ:

$$C_1^2 = 2a_1\frac{S}{n} = 2qS\frac{m}{n}\cdot\frac{S}{n};$$

$$C_2^2 = C_1^2 + 2a_2\frac{S}{n} = 2q\frac{S^2}{n^2}[m+(m-1)],$$

$$C_3^2 = C_2^2 + 2a_3\frac{S}{n} = 2q\frac{S^2}{n^2}[m+(m-1)+(m-2)],$$

и вообще

$$C_n^2 =-2q\frac{S^2}{n^2}[m+(m-1)+(m-2)\ldots+(m-n+1)].$$

Но рядъ, стоящій въ скобкахъ, есть сумма членовъ ариѳметической прогрессіи и равенъ $\left(\frac{2m+1-n}{2}\right)n$, а потому

$$C_n^2 = 2q\frac{S^2}{n^2}\left(\frac{2m+1-n}{2}\right)n$$

или

$$C_n^2 = q\left(2S^2\frac{m}{n} + \frac{S^2}{n} - S^2\right),$$

что можно представить въ такомъ видѣ:

$$C_n^2 = qS\left(2S\frac{m}{n} - S + \frac{S}{n}\right).$$

Но $S\frac{m}{n} = d$, а потому:

$$C_n^2 = qS\left(2d - S + \frac{S}{n}\right).$$

Очевидно, что съ увеличеніемъ числа n частей, на которое дѣлимъ путь S, членъ $\frac{S}{n}$ будетъ уменьшаться и мы можемъ сдѣлать его сколь угодно малымъ, увеличивая соотвѣтственно n; наконецъ, при

$n=\infty$, членъ $\frac{S}{n}=O$. Для этого послѣдняго случая скорость нашей точки въ концѣ пути S выразится такъ:

$$C^2_{n=\infty}=qS\ (2d-S)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (V).$$

Отъ того, что мы предположили $n=\infty$, законъ измѣненія ускореній не перемѣнился: они продолжаютъ измѣняться пропорціонально разстоянію до точки M, но только измѣненія эти слѣдуютъ такъ быстро, какъ это свойственно непрерывному измѣненію величины по данному закону. Въ виду этого уравненіе (V) представляетъ скорость простого гармоническаго движенія въ концѣ пути S.

Но нетрудно видѣть, что $S(2d-S)$ представляетъ квадратъ линіи, средне-пропорціональной между $2d-S$ и S или квадратъ длины перпендикуляра, возставленнаго къ траекторіи на разстояніи S отъ начала до встрѣчи съ окружностью радіуса d. Называя длину этого перпендикуляра черезъ y можемъ написать

$$S(2d-S)=y^2,$$

а потому: $C^2_{n=\infty}=y^2q$ или скорость C простого гармоническаго движенія въ концѣ пути S выразится такъ:

$$C=y\sqrt{q}.$$

Формула общеизвѣстная.

С. Стемпневскій (Пермь).

СИММЕТРИЧНО-ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ФИГУРЪ.

Опредѣленія.

1. Пусть имѣется тр—къ ABC; назовемъ этотъ тр—къ *основнымъ* и условимся разсматривать относительно его положеніе всякой фигуры въ той-же плоскости.

Двѣ точки M и N, лежащія на одной окружности съ B и C и на одной прямой съ A, наз. *изоциклическими* относительно BC и A.

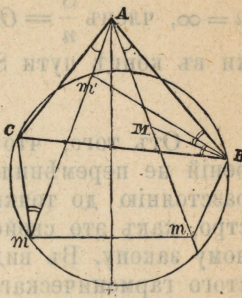
Двѣ точки, гармонически сопряженныя съ концами какого нибудь діаметра окружности ABC, наз. *сопряженными* относительно тр—ка ABC.

Двѣ прямыя, проходящія чрезъ вершину какого-нибудь угла тр—ка ABC и равнонаклонныя къ сторонамъ этого угла, наз. *изогональными*.

Двѣ точки наз. *изогональными* относительно тр—ка ABC, если прямыя, соединяющія ихъ съ каждой вершиной этого тр—ка, изогональны.

2. Обозначимъ черезъ m' точку, изогональную съ M относительно

тр—ка ABC, и чрезъ m—точку, изоцикличную съ m'. Такъ какъ (фиг. 52) $\angle CAm = \angle BAM$ и $\angle CmA = \angle CBm' = \angle ABM$, то тр—ки ACm и AMB подобны; поэтому, положивъ $AC = b$, $AB = c$, получимъ



Фиг. 52.

$$AM.\ Am = b.\ c.$$

Обозначивъ чрезъ m_1 точку обратную (inverse) съ M со степенью обращенія $b.c$, такъ что

$$AM.\ Am_1 = b.\ c,$$

находимъ, что $Am = Am_1$; слѣдов. точки m и m_1 симметричны относительно биссектора AL угла A.

Точки m и M наз. симметрично-обратными относительно полюса A.

Двѣ фигуры наз. *симметрично-обратными*, если всякой точкѣ M одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ симметрично-обратная точка m другой.

Симметрично-обратнымъ преобразованіемъ какой-нибудь фугуры F наз. построеніе фигуры f, симметрично-обратной съ F.

Свойства преобразованія.

3. Изъ опредѣленія симметрично-обратныхъ точекъ M и m слѣдуетъ, что фигура f, симметрично-обратная съ F, симметрична относительно биссектора AL съ фигурой f_1, обратной съ F относительно полюса A. Но при простомъ обращеніи (inversion) фигуръ*)

a) прямая, проходящая чрезъ полюсъ, преобразуется сама въ себя;

b) прямая, не проходящая чрезъ полюсъ, преобразуется въ окружность, проходящую чрезъ полюсъ,—и наоборотъ;

c) окружность, не проходящая чрезъ полюсъ, обращается въ окружность тоже не проходящую чрезъ полюсъ;

d) уголъ между двумя линіями (прямыми или кривыми) преобразуется въ равный ему уголъ.

Поэтому при симметрично-обратномъ преобразованіи:

a) прямая, проходящая чрезъ полюсъ A, преобразуется въ прямую, проходящую чрезъ A и изогональную съ первой;

b) прямая, не проходящая чрезъ A, преобразуется въ окружность, проходящую чрезъ A,—и наоборотъ;

c) окружность, не проходящая чрезъ A, преобразуется въ окружность, тоже не проходящую чрезъ A;

d) прямолинейный или криволинейный уголъ преобразуется въ уголъ равный ему.

4. Кромѣ того, очевидно, что точка A преобразуется въ точку безконечно удаленную; точка B преобрезуется въ C,—и наоборотъ; прямая AB преобразуется въ AC, и наоборотъ; прямая BC преобразуется въ окружность ABC, и наоборотъ; точка E на сторонѣ AC пре-

*) Rouché et Comberousse. Traité de géométrie.

образуется въ точку ε на сторонѣ AB, въ которой эта сторона пересѣкается съ прямой $C\varepsilon$, параллельной BE.

5. Точку m, симметрично-обратную съ M, можно получить какъ изогональную съ точкой M′, изоцикличной съ M; ибо точка M, как изоцикличная съ M′, изогональной съ m, симметрично-обратна съ m. Изъ этого слѣдуетъ, что изогональныя точки M и N преобразуются въ точки изогональныя m и n, при чемъ MN и mn параллельны, ибо AM. Am = AN. An $(=b.c)$. Отсюда слѣдуетъ также, что изоцикличныя точки преобразуются въ точки также изоцикличныя.

6. Если точки M и N преобразуются въ m и n, то тр—ки AMN и Anm подобны, такъ что $\angle M = \angle n$ и $\angle N = \angle m$; ибо, если m_1 и n_1 суть точки, симметричныя съ m и n относительно биссектора угла A, то AM. Am_1=AN. An_1; слѣд. тр—ки AMN и An_1m_1 подобны; тр—ки-же Am_1n_1 и Amn равны. Изъ этого подобія получаются формулы

$$MN = mn\frac{b.c}{Am.\ An},\quad AM = \frac{b.c}{Am},$$

служащія для преобразованія метрическихъ соотношеній фигуры F въ метрическія соотношенія преобразованія ея f.

7. Если точки M, N, P преобразуются въ m, n, p, то углы NMP и nmp равны; ибо, по доказанному, $\angle AMN = \angle Anm$, $\angle AMP = \angle Apm$ и $\angle NMP = \angle AMP - \angle AMN$, $\angle nmp = \angle Apm - \angle Anp$.

8. Чтобы построить окружность, въ которую преобразуется какая нибудь прямая, пересѣкающая AB и AC въ точкахъ F и E, находимъ преобразованія f и e этихъ точекъ (4); окружность Aef будетъ преобразованіемъ прямой EF; подобнымъ-же образомъ находится прямая, въ которую преобразуется окружность, проходящая чрезъ точку A. На этомъ основанъ слѣдующій общій способъ нахожденія точки m, симметрично-обратной съ M; чрезъ A и M проводятся двѣ произвольныя окружности и находятся ихъ преобразованія (прямыя); пересѣченіе ихъ m есть преобразованіе точки M.

9. Предыдущее построеніе упрощается, если взять окружности ABM и ACM; если эти окружности пересѣкутъ AC и AB въ E и F, то преобразованіями ихъ будутъ прямыя, проходящія чрезъ C и B и параллельныя прямымъ BE и CF; пересѣченіе этихъ прямыхъ будетъ точка m.

Можно также чрезъ точки C и B провести прямыя, параллельныя линіямъ BM и CM; если онѣ пересѣкутъ AB и AC въ точкахъ e и f, то окружности ACe и ABf пересѣкутся въ точкѣ m.

10. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія теоремы:

ТЕОРЕМА I. *Если точки* B *и* C *соединить съ какой нибудь точкой* M *кривой* G *и если прямыя, проведенныя чрезъ* B *и* C *параллельно* CM *и* BM *пересѣкаютъ* AC *и* AB *въ точкахъ* f *и* e, *то геометрическое мѣсто точки* (m) *пересѣченія окружностей* ACe *и* ABf *есть кривая* g, *симметрично-обратная съ кривой* G *относительно* A.

ТЕОРЕМА II. *Если* m *есть какая нибудь точка кривой* g *и если окружности* ABm *и* ACm *пересѣкаютъ* AC *и* AB *въ точкахъ* e *и* f, *то* *геометрическое мѣсто точки* (M) *пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ чрезъ* B *и* C *параллельно* Cf *и* Be, *есть кривая* G, *симметрично-обратная съ кривой* g *относительно* A.

11. ТЕОРЕМА III. *Если* N *есть точка фигуры* G *и если окружности* ABN *и* ACN *пересѣкаютъ* AC *и* AB *въ* E *и* F, *то точка* (m) *пересѣченія прямыхъ* BE *и* CF *принадлежитъ фигурѣ, симметричной относительно средины* BC *съ фигурой* g, *симметрично-обратной съ* G.

Доказ. Окружности ABN и ACN, проходящія чрезъ точки E и F, преобразуются въ прямыя, проходящія чрезъ C и B и параллельныя линіямъ CF и BE; пересѣченіе ихъ M (Теор. II) есть точка, симметрично обратная съ N; точка-же m симметрична съ M относительно средины BC.

12. ТЕОРЕМА IV. *Если* N *есть точка фигуры* G *и* e, f *суть точки пересѣченія прямыхъ* CN *и* BN *съ* AB *и* AC, *то точка* (M) *пересѣченія окружностей* ACe *и* ABf *принадлежитъ фигурѣ, симметрично-обратной съ фигурой, симметричной съ* G *относительно средины* BC.

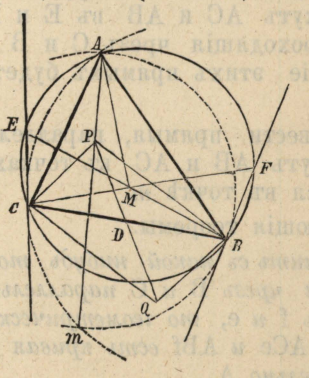
Доказ. Если параллели къ C*e* и B*f*, проходящія чрезъ B и C, пересѣкаются въ m, то точка M симметрично обратна съ m (Теор. I); но N и m симметричны относительно средины BC; слѣдов. теорема доказана.

13. Слѣдующія двѣ теоремы даютъ еще новый способъ построенія симметрично-обратныхъ точекъ.

ТЕОРЕМА V. *Если* M *есть точка фигуры* G, *а* E *и* F *суть пересѣченія прямыхъ* BM *и* CM *съ окружностью* ABC, *то пересѣченіе* (m) *окружности, проходящей чрезъ* A *и* C *и касательной къ* CE, *съ окружностью, проходящею чрезъ* A *и* B *и касательною къ* BF, *есть соотвѣтственная точка фигуры* g, *симметрично-обратной съ* G.

ТЕОРЕМА VI. *Если* m *есть точка фигуры* g, *а* E *и* F *суть точки пересѣченія окружности* ABC *съ окружностями* ACm *и* ABm, *то пересѣченіе* (M) *прямыхъ* BE *и* CF *есть соотвѣтственная точка фигуры* G, *симметрично-обратной съ* g.

Доказ. (Фиг. 53). Такъ какъ прямыя BA и BM преобразуются въ прямую CA и окружность, проходящую чрезъ A и C, то уголъ, составляемый этой окружностью съ CA, долженъ равняться углу ABM (3); но $\angle ABM = \angle ACE$; слѣдов. окружность, касательная въ C къ CE и проходящая чрезъ A есть преобразованіе прямой BM; по той же причинѣ, окружность, касательная въ B къ BF и проходящая чрезъ A, есть преобразованіе прямой CM; слѣд. M и m суть точки симметрично-обратныя.



Фиг. 53.

14. Если линіи CE и BF пересѣкаются въ N, то точки P и Q, изогональныя съ M и N, симметричны относительно средины BC. Дѣйствительно, $\angle CBP = \angle ABM = \angle ACE = \angle BCQ$, поэтому BP и CQ параллельны; точно такъ же CP параллельна BQ; слѣд. P и Q симметричны относительно средины D прямой BC.

15. ТЕОРЕМА VII. *Если* P *и* Q *суть точки, симметричныя относительно средины* D *линіи* BC; M *и* N*—изогональныя съ* P *и* Q; m *и* n*—изоцикличныя съ* P *и* Q, *т. е. симметрично-обратныя съ* M *и* N*;* p *и* q *—симметрично-обратныя съ* P *и* Q, *т. е. изоцикличныя съ* M *и* N *и изогональныя съ* m *и* n, *то 1) линіи* BM *и* CN (*также* CM *и* BN) *пересѣкаются на окружности* ABC, *а окружности* ACm *и* ABn (*также* ABm *и* ACn) *пересѣкаются на линіи* BC; *2) линіи* CN *и* BN *касательны къ окружностямъ* ACm *и* ABm (*то же относительно линій* CM *и* BM *и окружностей* ACn *и* ABn); *3) окружности* ACp *и* ABq, ABp *и* ACq *попарно касательны.*

Доказ. 1) Такъ какъ $\angle ABM=\angle PBC$, $\angle ACN=\angle BCQ$ и $\angle PBC=$ $=\angle BCQ$, то $\angle ABM=\angle ACN$, поэтому BM и CN пересѣкаются на окружности ABC; но линіи BM и CN и окружность ABC преобразуются въ окружности AC*m* и AB*n* и прямую BC; слѣд. окружности AC*m* и AB*n* пересѣкаются на BC. 2) Такъ какъ $\angle ACN=\angle ABM=\angle AmC$ (2), то CN касательна къ окружности AC*m*. 3) Параллельныя линіи BP и CQ преобразуются въ окружности AC*p* и AB*q*; слѣд. эти окружности касаются одна другой (3,*d*).

16. Если изъ восьми точекъ P, Q, M, N, *p*, *q*, *m*, *n* одна перемѣщается по заданной кривой, то этимъ вполнѣ опредѣляются геометрическія мѣста остальныхъ семи точекъ; напр., если одна изъ этихъ точекъ описываетъ окружность, проходящую чрезъ B и C, то остальныя точки также опысываютъ окружности; въ этомъ легко убѣдиться à priori.

Примѣры преобразованія точекъ.

17. Если I, I_a, I_b, I_c суть центры круговъ вписаннаго и внѣ вписанныхъ въ тр—къ ABC, то I преобразуется въ I_a, а I_b преобразуется въ I_c, и наоборотъ.

Ибо точка I совпадаетъ со своей изогональной, а точка I_a изоциклична съ I; точно такъ же точка I_b совпадаетъ со своей изогональной и изоциклична съ I_c.

18. Центръ O круга ABC преобразуется въ точку A', симметричную съ A относительно BC.

Дѣйствительно, такъ какъ точка O изогональна съ ортоцентромъ H тр—ка ABC, то преобразованіе ея A' находится на продолженіи прямой AH; но тр—ки ACA' и AOB подобны (6) и AO=BO; слѣд. $CA=CA'$, т. е. A' симметрична съ A относительно BC.

19. Ортоцентръ H тр—ка ABC преобразуется въ точку L, изоцикличную съ O, ибо H и O изогональны.

Точки L и A' изогональны и $HO \parallel A'L$ (5).

20. Обозначимъ чрезъ H_1, H_2, H_3 основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A, B, C на стороны тр—ка ABC. Если перпендикуляры къ AC въ C и къ AB въ B пересѣкаютъ AB въ F и AC въ E, то E и F суть преобразованія точекъ H_3 и H_2 (4) и $EF \parallel H_2H_3$; поэтому EF антипараллельна съ BC, и AO, какъ изогональная съ AH_1, перпендикулярна къ EF. Такъ какъ H есть пересѣченіе прямой AH_1 съ окружностью AH_2H_3, которыя преобразуются въ прямыя AO и EF (8), то

точка L, какъ преобразованіе H, находится въ пересѣченіи AO съ EF, т. е. L есть проэкція точки A на прямую EF.

21. Если T есть пересѣченіе касательныхъ къ окружности ABC въ точкахъ B и C, то OT есть діаметръ круга BOCT; поэтому точка L есть проэкція T на AO и T лежитъ на EF. Замѣтивъ, что AT, какъ симедіана тр—ка ABC, есть медіана тр—ка AEF, заключаемъ, что T есть средина линіи EF.

22. Проэкція ω центра O на симедіану AT преобразуется въ точку A_1, симметричную съ A относительно средины D линіи BC. Пусть d есть пересѣченіе прямой AT съ окружностью ABC; такъ какъ d есть преобразованіе точки D, то AD. $Ad=b.c$ (2); но если A_1 симметрична съ A относительно D, то тр—ки $A\omega D$ и AdA_1 подобны, а потому $A\omega.\ AA_1=AD.\ Ad=b.c$, слѣд. A_1 есть преобразованіе точки ω.

23. Если Ag есть хорда окружности ABC, параллельная $A'A_1$, то $Ag=A'A_1$, а потому окружность $AA'A_1$ проходитъ чрезъ точку g; такъ какъ окружность $AA'A_1$ преобразуется въ прямую $O\omega$, окружность ABC въ прямую BC и прямая Ag въ касательную AK въ точкѣ A къ окружности ABC (3,d), то заключаемъ, что прямая $O\omega$ и касательная въ A къ окружности ABC пересѣкаются на BC.

24. Проэкція φ ортоцентра H на медіану AD преобразуется въ точку T пересѣченія касательныхъ въ B и C къ окружности ABC.

Ибо окружность HBC проходитъ чрезъ A_1, такъ какъ $\angle CA_1B=\angle A$ и $\angle CHB+\angle A=\pi$; но $\angle HCA_1=\pi/_2$, слѣд. HA_1 есть діаметръ круга CHB, а потому φ лежитъ на окружности CHB: такъ какъ $\angle CBT=\angle A$, то BT и BA_1 изогональны; точно также CT и CA_1 изогональны, а потому точка T изогональна съ A_1; но A_1 изоциклична съ φ, слѣд. φ преобразуется въ T.

Отсюда слѣдуетъ, что точки φ и ω изогональны и $\omega\varphi \| TA_1$.

25. Такъ какъ окружности ABC и A_1BC симметричны относительно средины D прямой BC, то точка D равно отстоитъ отъ φ и тоски $\triangle$ пересѣченія медіаны AD съ окружностью ABC.

26. Преобразованіе g центра тяжести G тр—ка ABC находится на продолженіи симедіаны $A\delta$ и отстоитъ отъ точки d пересѣченія ея съ окружностью ABC на разстояніе $dg=\frac{1}{2}\,Ad$; это слѣдуетъ изъ того, что $Gd \| gD$, такъ какъ D преобразуется въ d.

27. Если на AB и AC отложить $Ad'=2AB$ и $Ad''=2AC$, то окружности ACd' и ABd'' пересѣкутся въ g, ибо эти окружности суть преобразованія медіанъ BD' и CD'' тр—ка ABC.

Тр—ки gCd' и $gd''B$, gCd'' и $gd'B$ попарно подобны, ибо $\angle d'Cg= =\angle BAg=\angle Bd''g$ и $\angle gd'C=\angle gAC=\angle gBd''$.

28. Пусть g' есть преобразованіе точки Лемуана G'. Такъ какъ точка Лемуана G' изогональна съ центромъ тяжести G, то g' есть пересѣченіе медіаны AD и прямой, параллельной GG' и проходящей чрезъ точку g.

Точки g и g' изогональны.

29. Преобразованіе ω одной изъ точекъ Брокара Ω есть пересѣченіе касательной къ кругу ABC въ точкѣ B съ прямой, проходящей чрезъ C и параллельной AB.

Для доказательства припомнимъ, что точки Брокара Ω и Ω' суть изогональныя точки, удовлетворяющія условіямъ:

$$\angle BC\Omega = \angle CA\Omega = \angle AB\Omega (=\theta),$$

$$\angle CB\Omega' = \angle AC\Omega' = \angle BA\Omega' (=\theta), \text{ или}$$

$$\angle B\Omega C = \pi - B, \quad \angle C\Omega A = \pi - C, \quad \angle A\Omega B = \pi - A,$$

$$\angle B\Omega' C = \pi - C, \quad \angle C\Omega' A = \pi - A, \quad \angle A\Omega' B = \pi - B.$$

Такъ какъ $\angle CB\omega = \angle C\Omega'\omega = \pi - (\pi - A) = A$, то $B\omega$ касательна въ B къ окружности ABC; кромѣ того $\angle BC\omega = \angle B\Omega'\omega = \pi - (\pi - B) = B$, слѣдов. $C\omega \| AB$, что и требовалось доказать.

Дм. Ефремовъ (Ив.-Вознесенскъ).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

НУЖНЫ-ЛИ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКѢ И ФИЗИКѢ?

Вопросъ о томъ, нужны или не нужны экзамены, можетъ быть правильно рѣшенъ на основаніи двоякаго рода соображеній: однихъ, болѣе общихъ, объ образовательной системѣ и роли въ ней экзаменовъ, о вліяніи послѣднихъ на характеръ, интенсивность и распредѣленіе занятій, о вліяніи экзаменовъ на здоровье учащихся и т. п., и соображеній частныхъ—о томъ, на сколько экзамены по тому или другому предмету достигаютъ своей прямой цѣли.

Мы недавно узнали, что экзамены въ школахъ составляютъ продуктъ сравнительно недавняго времени, что ни Гете, ни Шиллеръ, ни Фихте, ни все поколѣніе, составившее истинную славу Германіи, не подвергались не только переходнымъ, но даже выпускнымъ экзаменамъ. Отсюда возникаетъ вопросъ, не составляютъ-ли экзамены продукта временныхъ, одностороннихъ взглядовъ на задачи образованія, который долженъ исчезнуть вмѣстѣ съ измѣненіемъ этихъ взглядовъ. Мы присутствуемъ при завершеніи именно такого переворота во взглядахъ на цѣль и средства преподаванія почти всѣхъ учебныхъ предметовъ. Теперь было-бы своевременно разсмотрѣть, соотвѣтствуютъ-ли экзамены этимъ новымъ взглядамъ, или противорѣчатъ имъ, не остаются-ли они вреднымъ переживаніемъ, опаснымъ для того новаго, что всѣми признано за несомнѣнно истинное.

Вопросъ объ экзаменахъ обсуждался до сихъ поръ главнымъ образомъ на основаніи перваго рода соображеній. Для полноты освѣщенія, его слѣдуетъ обсудить такъ же съ этой новой точки зрѣнія.

Въ этомъ журналѣ за прошлый годъ появилась статья г. Р. И. подъ тѣмъ же заглавіемъ, что и наша. Но, пожелавъ предпослать своей статьѣ нѣсколько общихъ замѣчаній объ экзаменахъ, авторъ такъ увлекся ими и полемикой, что до экзаменовъ по математикѣ и физикѣ такъ и не дошелъ. Мы предпочли совершенно устраниться отъ общихъ соображеній и разсмотрѣть только вопросъ о томъ, на сколько экзамены по математикѣ и физикѣ способны обнаружить успѣхи учениковъ въ этихъ предметахъ, какъ эти успѣхи въ настоящее время понимаются.

Поэтому намъ надо предварительно разсмотрѣть:

1) Какъ понимается въ наше время цѣль преподаванія математики и физики?

2) Каковъ долженъ быть истинный критерій успѣшнаго достиженія этой цѣли?

3) Какія условія нужны для успѣшнаго примѣненія истиннаго критерія?

4) Осуществимы ли эти условія на экзаменахъ?

I.

Вопросъ о цѣли преподаванія математики въ гимназіяхъ не возбуждаетъ уже разногласій. Никто не станетъ утверждать, что слѣдуетъ добиваться такого усвоенія математическихъ теоремъ и доказательствъ, которое сохранилось-бы на всю жизнь. Если бы это для многихъ и оказалось полезнымъ, то всѣ признаютъ, что это невозможно, Въ былыя времена у насъ были и плохіе преподаватели математики, но были и хорошіе. Ученики ихъ въ свое время знали и любили математику. Однако посмотрите на тѣхъ изъ нихъ, которымъ по ихъ профессіи не приходилось имѣть дѣло съ математикой, много-ли они помнятъ изъ того, что прежде знали. Едва-ли найдется десятокъ геометрическихъ теоремъ, которыя могъ бы доказать теперь любой образованный человѣкъ лѣтъ 40—45, едва-ли сумѣетъ онъ подобрать логарифмы, едва-ли рѣшитъ квадратное уравненіе, едва-ли обратитъ періодическую дробь въ простую. И всѣ понимаютъ, что не въ этомъ и дѣло, а въ тѣхъ умственныхъ навыкахъ, которые пріобрѣтаются при изученіи математическихъ наукъ, въ усвоеніи общихъ пріемовъ доказательствъ, въ изощреніи чувства очевидности. Это и составляетъ то наиболѣе цѣнное пріобрѣтеніе, которое каждый гимназистъ долженъ сдѣлать изъ курса математики.

Относительно цѣли преподаванія физики меньше было говорено и писано; поэтому нельзя утверждать, чтобы здѣсь существовало такое же полное согласіе. Но мы дадимъ этой цѣли по возможности широкое толкованіе.

Съ физическими явленіями и законами всякому приходится сталкиваться въ повседневной жизни. Физическія открытія близко затрагиваютъ экономическіе и соціальные интересы. Журналы и ежедневныя газеты въ научныхъ хроникахъ популяризируютъ новыя изобрѣтенія и теоріи. Не рѣдкость встрѣтить образованныхъ людей, которые и интересуются и читаютъ популярныя сочиненія по физикѣ. Вообще физическія знанія гораздо болѣе въ ходу и больше возобновляются въ жизни, чѣмъ математическія. Поэтому разъ сама жизнь заставляетъ образованныхъ людей такъ или иначе судить о физическихъ явленіяхъ и теоріяхъ, обязанность школы подготовить ихъ къ тому, чтобы судить объ этомъ основательно. Слѣд. школа должна подготовить своихъ питомцевъ къ пониманію движенія физическихъ знаній и возбудить интересъ къ нимъ.

Такова реальная цѣль изученія физики; но не меньшее значеніе имѣетъ и цѣль формальная.

Физика имѣетъ свои болѣе сложные методы доказательствъ, ближе стоящіе къ тѣмъ, которые могутъ быть примѣнены къ правильному рѣшенію вопросовъ повседневной жизни; она же представляетъ случаи примѣненія тѣхъ же математическихъ методовъ къ анализу болѣе сложныхъ явленій. Усвоеніе этихъ методовъ, тѣхъ спеціальныхъ приспособленій, къ которымъ прибѣгаетъ человѣческій умъ для преодолѣнія встрѣчаемыхъ затрудненій, въ высшей степени важно для правильнаго разрѣшенія сложныхъ жизненныхъ проблемъ.

Итакъ, цѣль преподаванія математики и формальная цѣль преподаванія физики состоятъ въ томъ, чтобы внести свою долю въ общее умственное развитіе учащихся; развить и укрѣпить понятіе о логической причинности предложеній, усвоить общіе методы доказательствъ, изощрить чувство очевидности. Реальная цѣль преподаванія физики состоитъ въ томъ, чтобы ознакомить съ основными законами и теоріями этой науки и подготовить къ пониманію и правильной оцѣнкѣ научнаго достоинства тѣхъ новыхъ изобрѣтеній и теорій, о которыхъ они прочтутъ потомъ въ популярныхъ статьяхъ и книжкахъ.

II.

Въ одномъ изъ своихъ сочиненій—кажется, въ одномъ мѣстѣ своего дневника—Пироговъ говоритъ, что всякая наука въ самой себѣ содержитъ достаточную образовательную и воспитательную силу. Отсюда можно было-бы заключить—и такое мнѣніе дѣйствительно существуетъ,—что одно усвоеніе науки, т. е. теоремъ, правилъ и доказательствъ, служитъ достаточнымъ критеріемъ и всѣхъ другихъ пріобрѣтеній, которыя могутъ быть сдѣланы при изученіи ея. Если это мнѣніе и признать справедливымъ, то вопросъ все таки приведется къ другому: что называть усвоеніемъ науки? Можно-ли сказать, что учащійся усвоилъ науку, если онъ только помнитъ теоремы и доказательства, но не можетъ отнестись къ нимъ сколько нибудь свободно, не можетъ сдѣлать изъ нихъ самаго простого вывода?—если учащійся не составилъ себѣ никакого общаго понятія о пріемахъ доказательства, если онъ повторитъ извѣстный пріемъ на той теоремѣ, которая доказана въ учебникѣ, но не сумѣетъ примѣнить его къ самому простому новому случаю? Если на эти вопросы отвѣтить „да“, то, очевидно, подобное усвоеніе не отвѣчаетъ той цѣли, которая поставлена преподаванію математики и физики. Между тѣмъ всякій, кто слѣдилъ за преподаванiемъ, знаетъ, что подобное усвоенiе составляетъ общее явленiе у преподавателя, не употребляющаго спецiальныхъ прiемовъ для усвоенiя учениками всѣхъ образовательныхъ элементовъ, которые могутъ быть извлечены изъ курсовъ математики и физики. Мы не станемъ преувеличивать. Разумѣется, найдутся всегда 2—3 даровитыхъ ученика въ классѣ, которые извлекутъ значительную, можетъ быть и очень большую пользу изъ курса даже у такого преподавателя, который ничего не объясняетъ. У преподавателя, который хорошо объясняетъ, но заботится только о томъ, чтобы каждая теорема отдѣльно была понята, число такихъ учениковъ, которые извлекутъ болѣе или менѣе существенную пользу изъ курса и составятъ себѣ кое-какое понятiе о доказательствахъ, будетъ значительно шире. Распространить же это образовательное влiянiе на значительное большинство и въ лучшихъ случаяхъ на весь классъ можетъ только преподаванiе, спецiально направленное на развитiе самостоятельности въ ученикахъ. Поэтому проявленiе самостоятельности учениками только и можетъ служить критерiемъ прочныхъ умственныхъ прiобрѣтенiй.

Нельзя ожидать, конечно, чтобы ученики научились доказывать любую предложенную имъ новую теорему. Можно ожидать самостоятельнаго доказательства только самыхъ легкихъ теоремъ, непосредственно, или почти непосредственно—черезъ два—три заключенiя—вытекающихъ изъ какой нибудь извѣстной теоремы. Немного труднѣе теорему могъ бы доказать какой-нибудь даровитый ученикъ; многихъ теоремъ не могъ-бы самостоятельно доказать и преподаватель. Однако и болѣе трудная теорема можетъ быть предложена для самостоятельнаго доказательства, если къ ней примѣняется какой нибудь общiй прiемъ. Такъ послѣ нѣсколькихъ теоремъ, доказанныхъ способомъ отъ противнаго, можно предложить доказать этимъ, способомъ, новую теорему если предварительно дать общее понятiе объ немъ. Если приступая къ доказательству теоремы о пропорцiональности центральныхъ угловъ и дугъ, повторить теорему о пропорцiональности отрѣзковъ сторонъ угла, отсѣкаемыхъ параллельными линiями, и указать на сходство прiема; если повторить потомъ обѣ теоремы, приступая къ доказательству основной теоремы объ измѣренiи площадей, то можно ожидать, что ученики, если и не проведутъ во всѣхъ подробностяхъ доказательство этой теоремы, то все же въ состоянiи будутъ намѣтить общiй планъ его. То же относится и къ выводу правилъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ дѣйствiй. Во всѣхъ этихъ случаяхъ и подобныхъ имъ единственнымъ критерiемъ усвоенiя прiема доказательства служитъ умѣнье приложить его къ новому случаю.

Но самостоятельность учениковъ можетъ проявиться не только въ полномъ доказательствѣ теоремы. Всякое сложное доказательство состоитъ изъ частей, болѣе или менѣе простыхъ. Поэтому, если доказательство теоремы не представляетъ какого нибудь общаго прiема, раньше усвоеннаго, и довольно сложно, такъ что не можетъ быть самостоятельно найдено учениками, преподаватель можетъ сдѣлать въ общихъ чертахъ анализъ теоремы и т. о. разбить ее на отдѣльные вопросы, достаточно простые, чтобы ученики могли ихъ доказать. Мы не станемъ утверждать, чтобы это было всегда возможно. Но такихъ случаевъ, гдѣ это возможно, довольно много, чтобы развить въ ученикахъ и провѣрить ихъ способность къ самостоятельнымъ разсужденiямъ.

Въ физикѣ всякiй основной законъ имѣетъ множество разнообразныхъ примѣненiй, болѣе или менѣе сложныхъ; всякое примѣненiе допускаетъ много видоизмѣненiй. Умѣнье самостоятельно примѣнить законъ въ простыхъ случаяхъ, или видоизмѣнить извѣстное его примѣненiе при какихъ нибудь условiяхъ служитъ единственнымъ критерiемъ успѣшнаго достиженiя формальной цѣли преподаванiя физики. Но та же самостоятельность является необходимымъ условiемъ успѣшнаго достиженiя реальной цѣли преподаванiя физики. Для того, чтобы понять и оцѣнить значенiе новыхъ извѣстiй о физическихъ теорiяхъ или изобрѣтенiяхъ, надо умѣть дѣлать самостоятельно выводы изъ извѣстныхъ законовъ: надо понимать, доказательны извѣстныя разсужденiя или нѣтъ, слѣдуетъ или нѣтъ тотъ или другой выводъ, произойдетъ или нѣтъ при извѣстныхъ условiяхъ такое-то явленiе. Въ противномъ случаѣ все прiйдется принимать на вѣру, какъ курьезы, какъ фокусы. Одно простое знанiе курса физики, какъ онъ пройденъ въ школѣ, безъ умѣнья отнестись къ своему знанiю сколько нибудь самостоятельно, представляетъ мертвый капиталъ, который не можетъ быть ни къ чему приложенъ, не можетъ поэтому возобновляться и необходимо обреченъ на исчезновенiе.

Итакъ, единственно надежнымъ критеріемъ успѣшнаго прохожденія курсовъ математики и физики служитъ пріобрѣтенная учениками самостоятельность въ доказательствахъ.

III.

Для того чтобы этотъ критерій могъ быть съ успѣхомъ примѣненъ, необходимы извѣстныя условія.

Первое—это возможно полное спокойствіе. Волненія, возбужденіе или подавленность—сильно вліяютъ на умственную дѣятельность. Они всегда ослабляютъ логическія способности; способность же догадки можетъ быть иногда ненормально усилена умѣреннымъ возбужденіемъ, притомъ далеко не у всѣхъ и не въ одинаковой степени. Слѣд. правильное примѣненіе критерія при этихъ условіяхъ не возможно.

Второе условіе—свободная голова. Я разумѣю подъ этимъ отсутствіе загроможденія памяти массой идей, оживленныхъ въ короткое время и получившихъ новыя механическія связи, благодаря которымъ онѣ тѣснятся всѣ въ сознаніе, готовыя ворваться въ него по малѣйшему случайному поводу, спутывая и перебивая другъ друга.

Третье условіе—достаточное количество времени, чтобы можно было вдуматься въ предложенный вопросъ и осмотрительно сдѣлать всѣ нужныя заключенія.

Четвертое условіе — возможность своевременнаго вмѣшательства преподавателя. Рѣшеніе математическаго вопроса не то, что исполненіе перевода или составленіе сочиненія. Часто одна ошибка, случайный недосмотръ могутъ такъ спутать всѣ выводы, что и знающій ученикъ не дойдетъ до удовлетворительнаго рѣшенія. Будь этотъ недосмотръ своевременно указанъ, все остальное было бы рѣшено совершенно вѣрно, и рѣшеніе получилось бы не только удовлетворительное, но хорошее, гораздо лучшее, чѣмъ у другого ученика, который подобной ошибки не сдѣлалъ, но въ общемъ значительно уступаетъ первому.

Пятое условіе—отсутствіе утомленія. Очень усталый человѣкъ не въ состояніи уже разсуждать, когда можетъ еще многое припомнить.

IV.

Достаточно назвать всѣ эти условія, чтобы стало яснымъ, что на экзаменахъ они неосуществимы. Вопросъ въ томъ, до какой степени они неосуществимы и какая въ этомъ отношеніи разница между экзаменами и ежедневными уроками.

Первый вопросъ мы можемъ рѣшить только по личнымъ впечатлѣніямъ и сослаться на личныя впечатлѣнія читателя. Всѣ экзаменаторы могутъ быть раздѣлены, на нашъ взглядъ, на двѣ категоріи. Одни прилагаютъ истинный критерій къ оцѣнкѣ познаній учениковъ. Они исходятъ изъ взглядовъ, изложенныхъ выше, въ гл. I и II. Къ другой категоріи принадлежатъ преподаватели, держащіеся самыхъ различныхъ взглядовъ на способы преподаванія математики и физики и на значеніе экзаменовъ; но всѣ они сходятся въ томъ, что на экзаменахъ нужно только убѣдиться, знаютъ-ли ученики курсъ. Совершенно раздѣляя взгляды первыхъ, я не могъ не убѣдиться, что они часто дѣлаютъ болѣе грубыя ошибки, чѣмъ вторые. Причина та, что условія на экзаменахъ совершенно неблагопріятны для примѣненія истиннаго критерія и болѣе благопріятны для примѣненія второго. Въ самомъ дѣлѣ, экзаменаторы первой категоріи вскорѣ убѣждаются, что на экзаменахъ можно предлагать для самостоятельнаго рѣшенія только самые простые вопросы, такъ какъ сколько нибудь сложный вопросъ, который безъ труда рѣшается въ классѣ, на экзаменѣ ставитъ въ тупикъ лучшихъ учениковъ и ученицъ. Понемногу они спускаются до такихъ вопросовъ, которые при нормальныхъ условіяхъ доступны и плохимъ ученикамъ, а потому лучшіе отвѣты даютъ не тѣ, кто больше понимаетъ, а тѣ, кто посмѣлѣе и не теряется. Но на работу памяти возбужденіе, недостатокъ времени и проч. не такъ неблагопріятно дѣйствуютъ, какъ на работу мышленія; а такъ какъ большею частью бываетъ, что кто больше понимаетъ, тотъ больше и помнитъ, то сужденіе о первомъ по послѣднему даетъ все таки болѣе удовлетворительные результаты, чѣмъ непосредственное изслѣдованіе пониманія.

Результаты экзаменовъ обыкновенно значительно исправляются тѣмъ, что экзаменаторы принимаютъ въ соображеніе годовую отмѣтку. Этого не бываетъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда между преподавателями нѣтъ согласія и очень сильно желаніе поучить другъ друга. Всякій не разъ слышалъ разсказы о подобныхъ эпизодахъ и о негодныхъ результатахъ такихъ экзаменовъ.

На письменныхъ экзаменахъ возбужденіе не такъ велико, какъ на устныхъ, хотя все же можетъ быть очень значительно. Есть время обдумать предложенный вопросъ. Съ этой стороны условія письменныхъ экзаменовъ болѣе благопріятны, чѣмъ устныхъ. Но съ другой стороны письменные экзамены не представляютъ возможности преподавателю своевременно вмѣшаться и устранить случайное затрудненіе. Въ этомъ отношеніи условія письменныхъ экзаменовъ хуже, чѣмъ устныхъ.

Но если письменные и устные экзамены даютъ неудовлетворительные результаты, то быть можетъ комбинація тѣхъ и другихъ, благодаря взаимной поправкѣ, можетъ дать лучшіе результаты? Комбинація устныхъ и письменныхъ экзаменовъ можетъ ослабить вліяніе такихъ вредныхъ условій, которыя бываютъ при однихъ экзаменахъ и отсутствуютъ при другихъ, но никакъ не можетъ ослабить вліяніе условій, общихъ тѣмъ и другимъ. Поэтому можно было бы разсчитывать только на то, что эта комбинація дастъ нѣсколько лучшіе результаты, чѣмъ тѣ и другіе экзамены въ отдѣльности, если бы здѣсь не присоединялось новое вредное условіе— увеличеніе числа экзаменовъ, а слѣд. и переутомленія. Даже теперь, послѣ уменьшенія числа экзаменовъ въ отдѣльныхъ классахъ въ мужскихъ гимназіяхъ, всякій добросовѣстный и наблюдательный экзаменаторъ скажетъ, что если экзаменъ по математикѣ назначенъ на вторую половину мая, то на этомъ экзаменѣ о познаніяхъ учениковъ, а подавно ученицъ женскихъ гимназій, нельзя себѣ составить ровно никакого понятія.

Теперь перейдемъ къ другому поставленному нами въ началѣ этой главы вопросу: какая разница между экзаменами и ежедневными уроками по отношенію къ условіямъ, необходимымъ для успѣшнаго примѣненія истиннаго критерія познаній учащихся?

Что касается до перваго условія, то на урокахъ оно выполняется если и не совершенно, все же гораздо лучше, чѣмъ на экзаменахъ, и причины, мѣшающія его выполненію, могутъ быть устранены при улучшеніи способовъ обученія. Трудно ожидать при теперешнихъ условіяхъ, чтобы ученикъ выходилъ отвѣчать къ доскѣ совершенно спокойно: ему угрожаетъ дурная отмѣтка, неудовольствіе преподавателя, насмѣшка товарищей. Но если вызванный къ доскѣ ученикъ не можетъ быть совершенно спокоенъ, то тѣ, которые сидятъ на мѣстахъ, могутъ совершенно спокойно обдумывать предложенный вопросъ, за исключеніемъ тѣхъ рѣдкихъ случаевъ, когда преподаватель наводитъ страхъ на весь классъ. И дѣйствительно, сидя на мѣстѣ, ученики оказываются способными сообразить болѣе трудную вещь, чѣмъ стоя у доски. Но представимъ себѣ, что отмѣтки упразднены, что преподаватель занятъ не выспрашиваніемъ у одного ученика выученнаго урока, а занимается съ цѣлымъ классомъ, проходитъ новое или повторяетъ старое, и не съ тѣмъ, чтобы сейчасъ же поставить за это баллъ и наставить ихъ какъ можно больше — вѣдь этимъ теперь измѣряется прилежаніе учителя,—а съ единственною цѣлью, чтобы это старое не забылось, или чтобы убѣдиться, не осталось-ли въ немъ что нибудь не понято: понятно, что тогда вредное безпокойство совсѣмъ исчезнетъ и замѣнится необходимымъ оживленіемъ.

Второе условіе и въ настоящее время выполняется удовлетворительно, за исключеніемъ тѣхъ рѣдкихъ случаевъ, когда преподаватель требуетъ, чтобы учащіеся постоянно знали весь курсъ, или, что случается чаще, передъ экзаменами задаетъ повторять сплошь цѣлые отдѣлы.

Третье условіе для всякаго ученика вполнѣ выполнимо только при домашнемъ обученіи. Въ классѣ же невозможно всѣхъ задерживать надъ однимъ вопросомъ до тѣхъ поръ, пока слабые ученики самостоятельно дойдутъ до его рѣшенія. Но на урокахъ все таки больше представляется возможности обождать, чѣмъ на экзаменѣ. Только при письменныхъ работахъ каждый можетъ остановиться надъ отдѣльнымъ вопросомъ такъ долго, какъ нужно. Но классная письменная работа имѣетъ то преимущество передъ экзаменной, что она не исключаетъ возможности своевременнаго вмѣшательства преподавателя для устраненія случайнаго недоразумѣнія, если только эта работа не представляетъ своего рода экзамена, какъ наши extemporalia. Такимъ образомъ 3-е и 4-е условія болѣе выполнимы при классныхъ работахъ, чѣмъ на экзаменахъ.

Что касается до послѣдняго условія, то въ настоящее время на послѣднихъ урокахъ ученики бываютъ утомлены. Это утомленіе еще усилится, когда выполнятся благія въ другихъ отношеніяхъ пожеланія министерства, чтобы ученики работали въ классѣ, а не дома. Не странно-ли, въ самомъ дѣлѣ, что для студентовъ университета, людей взрослыхъ, послѣ 40-минутной лекціи признается необходимой 20-минутная перемѣна, а для дѣтей послѣ 55-минутнаго урока признается достаточной 5—10-минутная перемѣна. Очевидно, такой порядокъ могъ установиться только въ разсчетѣ на то, что добрую часть урока дѣти будутъ отдыхать. Правильныя занятія могутъ установиться только тогда, когда сокращено будетъ учебное время и увеличено время рекреацій и если, къ тому же, во время рекреацій меньше будутъ усердствовать по части водворенія тишины и спокойствія, по крайней мѣрѣ въ младшихъ классахъ.

Итакъ ни письменные, ни устные экзамены не представляютъ необходимыхъ условій для правильнаго сужденія объ успѣхахъ учениковъ. Эти условія гораздо лучше осуществляются на урокахъ уже теперь и могутъ быть осуществлены еще полнѣе при нѣкоторыхъ коренныхъ улучшеніяхъ въ постановкѣ обученія.

Вѣрно оцѣнить познанія учащихся можно только на урокахъ, а не на экзаменахъ.

Если экзамены такъ плохо достигаютъ той прямой цѣли, для которой они предназначены, и неизбѣжныя ошибки при нихъ устраняются только тѣмъ, что при выставленіи самой экзаменной отмѣтки въ извѣстной степени принимается въ соображеніе годовая отмѣтка, естественно заключить, что они не нужны. Должны быть очень вѣскія общія соображенія, которыя побуждали бы сохранить это орудіе, такъ плохо приспособленное къ измѣнившимся цѣлямъ, или должны быть особыя причины, постороннія существу дѣла, и потому очевидно временныя, которыя заставляли бы не довѣрять другимъ способамъ убѣдиться въ познаніяхъ учениковъ. Чтобы защитить экзамены по математикѣ и физикѣ, надо доказать, что наши учебныя заведенія еще не доросли до отмѣны ихъ.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 580. Данъ уголъ, точка на одной изъ его сторонъ и прямая, перпендикулярная къ той же сторонѣ угла. Найти на этой прямой такую точку, чтобы разстоянія ея отъ данной точки и отъ другой стороны угла были въ данномъ отношеніи (превышающемъ единицу).

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 581. Рѣшить уравненіе

$$2\sin^2 x + 2\cos 2x - \sqrt{2}\cos x - 2\cos x + \sqrt{2} = 0.$$

И. Ок—чъ (Варшава).

№ 582. Построить треугольникъ, если извѣстенъ радіусъ внутренняго вписаннаго круга, и двухъ внутреннихъ круговъ, касательныхъ каждый къ первому и къ двумъ сторонамъ треугольника.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 583. Показать, что каждыя двѣ вершины треугольника и основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нихъ на противоположныя стороны, лежатъ на одной окружности. По даннымъ сторонамъ треугольника вычислить радіусы трехъ получающихся такимъ образомъ окружностей и разстоянія ихъ центровъ.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 584. Къ сторонѣ AC треугольника ABC проведена антипараллель $A'C'$ (точка C' на прямой AB). Найти зависимость между AC', $A'C$ и сторонами a и c треугольника ABC.

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 585. Объективъ астрономической трубы разрѣзанъ пополамъ по плоскости, проходящей чрезъ оптическую ось трубы, такъ что обѣ половины его могутъ раздвигаться по направленію, перпендикулярному къ оси, на разстояніе a. Устанавливаютъ трубу на свѣтящійся кругъ діаметра h, параллельный плоскости краевъ объектива, и раздвигаютъ обѣ половины объектива до тѣхъ поръ, пока два изображенія круга (получающіяся каждое отъ одной изъ половинъ объектива), сдѣлаются касательными другъ къ другу. Зная фокусное разстояніе f объектива, опредѣлить разстояніе свѣтящагося круга отъ трубы.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 468 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$ab=(a-x)(b+\sqrt{x^2-b^2}).$$

Данное уравненіе легко привести къ виду

$$x^2(a-x)^2+2b^2x(a-x)-a^2b^2=0,$$

или

$$y^2+2b^2y-a^2b^2=0,$$

гдѣ $y=x(a-x)$. Отсюда

$$y=-b(b\mp\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}}{2}.$$

К. Геншель (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *В. Шишаловъ* (с. Середа).

№ 474 (2 сер.). Данъ кубъ, ребро котораго равно a. Проведенъ шаръ, касательный ко всѣмъ ребрамъ куба. Опредѣлить часть объема шара, заключенную внутри куба.

Искомый объемъ есть разность между объемомъ шара радіуса $a:\sqrt{2}$, и ушестереннымъ объемомъ сегмента, высота котораго есть $(a:\sqrt{2}\,)-{}^a/_2$, отсѣченнаго отъ шара гранью куба. Поэтому

$$V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi a^3(4\sqrt{2}-5)}{4}=\frac{\pi a^3(15-8\sqrt{2}\,)}{12}.$$

В. Баскаковъ (Ив.-Вознес.); *М. Абрамовъ* (Житоміръ); *И. Ок—чъ* (Варшава); *П. Ивановъ* (Одесса); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Васильева* (Тифлисъ).

№ 531 (1 сер.). Рѣшить уравненія;

$$x^{2n}(y^n-z^n)=a,$$
$$y^{2n}(z^n-x^n)=b,$$
$$z^{2n}(x^n-y^n)=c.$$

Пусть $x^n=x_1,\ y^n=y_1,\ z^n=z_1$; тогда

$$x_1^2(y_1-z_1)=a;\ y_1^2(z_1-x_1)=b;\ z_1^2(x_1-y_1)=c.$$

Дѣля 1-ое ур. на x_1, 2-ое на y_1, 3-ье не z_1 и складывая, получимъ:

$$\frac{a}{x_1}+\frac{b}{y_1}+\frac{c}{z_1}=0 \text{ или } a+b\frac{x_1}{y_1}+c\frac{x_1}{z_1}=0\ldots\ldots(1)$$

Дѣля 1-ое ур. на x_1^2, 2-ое на y_1^2, 3-ье на z_1^2 и складывая, получимъ:

$$\frac{a}{x_1^2}+\frac{b}{y_1^2}+\frac{c}{z_1^2}=0 \text{ или } a+b\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2+c\left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2=0\ldots\ldots(2).$$

Изъ (1) и (2) находимъ:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{-ab\pm\sqrt{-abc(a+b+c)}}{b(b+c)};\ \frac{x_1}{z_1}=\frac{-ac\pm\sqrt{-abc(a+b+c)}}{c(b+c)}.$$

Перемножая полученные результаты, опредѣлимъ отношеніе

$$\frac{x_1^2}{y_1z_1}, \text{ а слѣдовательно и } \frac{x_1^3}{x_1y_1z_1}.$$

Затѣмъ точно также найдемъ:

$$\frac{y_1^3}{x_1y_1z_1} \text{ и } \frac{z_1^3}{x_1y_1z_1}.$$

Перемножая данныя ур—нія, получимъ:

$$x_1^2y_1^2z_1^2[x_1^2(z_1-y_1)+y_1^2(x_1-z_1)+z_1^2(y_1-x_1)]=abc,$$

откуда

$$x_1y_1z_1=\pm\sqrt{-\frac{abc}{a+b+c}}.$$

Зная $x_1y_1z_1$, по найденнымъ раньше отношеніямъ легко опредѣлимъ x_1, y_1 и z_1, а слѣдовательно и x, y, z.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 23-го Декабря 1893 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
пщется

Обложка
ищется