Обложка
пщется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. № 165. № 9.

Содержаніе: О безконечности, *М. Попруженко.*—Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ, *К. Чернышева.*—Замѣтка по электростатикѣ, проф. *Н. Слугинова.*—Теорія выраженій, содержащихъ квадратные радикалы, въ связи съ теоріей графическихъ задачъ элементарной геометріи, *С. Шатуновскаго.*—О постановкѣ преподаванія черченія и задачахъ, преслѣдуемыхъ имъ, *Г. Рябкова.*—Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ, *И. Косаногова.*—Матеріалы для упражненій, *Ш.* — Разныя извѣстія.—Задачи №№ 484 — 490. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 83, 90, 138, 371. — Справ. табл. № XVII. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій. — Содержаніе научныхъ журналовъ.

О БЕЗКОНЕЧНОСТИ.

(Продолженіе).*

IV.

Переведенное на современный языкъ и нѣсколько уточненное опредѣленіе *Архита* представится въ слѣдующемъ видѣ:

Перемѣнная величина называется безконечно-большою, если, при данномъ процессѣ ея измѣненія, оно дѣлается и затѣмъ остается болѣе всякаго даннаго значенія, какъ бы велико это значеніе ни было.

Подобнымъ же образомъ:

Перемѣнная величина называется безконечно-малою, если, при данномъ процессѣ ея измѣненія она дѣлается и затѣмъ остается меньше всякаго даннаго значенія какъ бы мало это значеніе ни было.

Почти въ такихъ редакціяхъ опредѣленія эти приводятся во многихъ курсахъ и, слѣдовательно, хорошо извѣстны.

Маленькая особенность этихъ формулировокъ заключается только въ прибавленіи словъ „и затѣмъ остается". Совершенно очевидно, что прибавка эта необходима и если не всегда дѣлается, то всегда подразумѣвается. Чрезвычайно важно отмѣтить, что приведенныя опредѣленія совершенно чужды метафизическаго характера и отличаются полною ясностью и простотой, которыя сохраняются и во всѣхъ приложеніяхъ. Такъ, если говорятъ, что при $x = \infty$

$$f(x) = \infty,$$

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 162.

то это просто значитъ, что, какъ бы велико ни было данное число A, x-у можно дать значеніе столь большое, что $f(x)$ сдѣлается больше A. Если рѣчь идетъ о безконечномъ рядѣ чиселъ, то подразумѣваютъ, что число членовъ этого ряда можетъ превзойти всякое данное число и т. д. и т. д. Другое обстоятельство, на которое слѣдуетъ обратить вниманіе,—это то, что безконечныя величины *конечны* въ каждый моментъ своего измѣненія. Другими словами: безконечныя величины суть настоящія или, если угодно, обыкновенныя величины и, какъ таковыя, подлежатъ всѣмъ математическимъ операціямъ.

„Was das mathematische Unendliche anbetrifft, — говоритъ Cantor [1]), — soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, *aber stets endlich bleibenden Grösse* aufzutreten". Если безконечнымъ величинамъ дали особое названіе и выдѣлили ихъ въ особую группу, то исключительно въ цѣляхъ упрощенія словеснаго и письменнаго изложенія мыслей. „Слово „безконечность", — говоритъ Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія [2]), — и соотвѣтствующій ему знакъ ∞, употребляются въ математикѣ только для сокращенія рѣчи или письма". Съ точки зрѣнія точной терминологіи небезполезно, можетъ быть, отмѣтить, что термины „безконечность" и „безконечно-большая величина", не тождественны, но практика безразлично замѣняетъ ихъ однимъ другимъ, въ чемъ легко убѣдиться, перелиставъ любой учебникъ алгебры или трактатъ по анализу.

V.

Вышеприведенныя опредѣленія безконечныхъ величинъ вызываютъ, сколько мнѣ извѣстно, только слѣдующія возраженія.

Находятъ страннымъ, что приходится, напримѣръ, называть конечную хорду безконечно-малою величиною только въ силу того обстоятельства, что эта хорда способна уменьшаться до 0 [3]).

Находятъ еще страннымъ, что, напримѣръ, тангенсъ угла есть одновременно и безконечно-большая и безконечно-малая величина.

Странности эти, однако, при ближайшемъ разсмотрѣніи, исчезаютъ. Какъ выше было замѣчено, безконечныя величины *конечны* во всякій моментъ своего измѣненія, и слѣдовательно каждое значеніе безконечной величины есть величина конечная. Въ приведенномъ примѣрѣ разсматривается перемѣнная, уменьшающаяся до 0 хорда и, какъ таковая, она есть, конечно, величина безконечно-малая, а каждое частное значеніе перемѣнной хорды представляется, разумѣется, хордой конечной.

---

[1]) *Cantor*. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Стр. 1 и 2.

[2]) Журн. Министерства Народн. Просвѣщенія. 1884 г., Май, стр. 61.

[3]) Журналъ Элементарной Математики, Т. 2-й, стр. 85 и 210.

Что-же касается до того обстоятельства, что одна и та же величина является и безконечно-малой и безконечно-большой, то и въ этомъ ничего удивительнаго нѣтъ, такъ какъ обстоятельство это имѣетъ мѣсто при разныхъ процессахъ измѣненія перемѣнной величины. Такъ тангенсъ является безконечно-малой величиной при неопредѣленномъ уменьшеніи угла и безконечно-большой при увеличеніи его до 90^0. Конечно, въ каждомъ частномъ случаѣ процессъ измѣненія долженъ быть точно и подробно указанъ (точнѣе и подробнѣе, чѣмъ это сдѣлано въ сейчасъ приведенномъ примѣрѣ).

VI.

Приведенныя возраженія имѣютъ, повидимому, въ основѣ другое опредѣленіе безконечно-малыхъ величинъ и именно подобное слѣдующему: „Перемѣнную величину, стремящуюся къ 0, называютъ безконечно-малою, когда она достигаетъ такихъ значеній, которыя, взятыя независимо отъ знака, могутъ быть разсматриваемы менѣе всякой данной величины“ [1]).

Но что же это за таинственныя значенія, которыя могутъ быть разсматриваемы менѣе всякой данной величины? Гдѣ они начинаются? Какіе ихъ признаки? Ясно, что на эти вопросы нельзя отвѣтить, не впадая въ противорѣчіе.

„Ce qui est incompréhensible, говоритъ *Mansion* [2]), ce sont les pseudo-infiniment petits, parce que leur définition implique contradiction. Les pseudo-infiniment petits sont de soi-disant quantités qui sont différentes de zéro et qui, cependant,sont plus petites que toute quantité donnée! Evidemment, il n'y a que zéro qui soit inférieur à toute quantité donnée.

Опредѣленій, указывающихъ на особую малость безконечно-малыхъ величинъ, можно привести сколько угодно, и изъ прошлаго, и изъ настоящаго.

Такъ *Лейбницъ* [3]) считаетъ, что безконечно-малыя величины относятся къ конечнымъ, „comme des grains de sable par rapport à la mer“.

Ньютонъ [4]) подъ моментами разумѣетъ только что возникающіе зачатки конечныхъ величинъ.

Гегель [5]) выражается такимъ образомъ: Qu'est-ce que l'élément infinitésimal? C'est la grandeur décroissante jusqu'à s'evanouir, et prise au moment où elle s'evanouit, car avant, se serait trop tôt, et après ce se-

---

[1]) *Рощинъ.* Записки по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. 1888 г.

См. также *Коши.* Алгебраическій анализъ, стр. 4.

[2]) *Mansion.* Méthode des infiniment petits. Стр. 1.

[3]) *Freycinet.* De l'analyse infinitesimale. Etude sur la métaphysique du haut calcul. 1881 г., стр. 217.

[4]) Principia, кн. II, отд. II. Переводъ г. Маракуева (*Ньютонъ*, его жизнь и труды).

[5]) *Rebière.* Mathématiques et mathématiciens. Стр. 211.

rait trop tard. C'est la grandeur prise au moment où cessant d'être quelque chose, elle n'est pas encore rien du tout, c'est-à-dire au moment où elle participe à la feconde identité de l'être et du neant.

Буняковскій [1]) называетъ безконечно-малыми извѣстныя перемѣнныя величины, разсматриваемыя въ то мгновеніе, когда онѣ обращаются въ 0.

Г. *Маракуевъ* [2]), авторъ новѣйшаго и весьма солиднаго учебника алгебры, выражается такъ: „перемѣнная величина, неограниченно приближающаяся къ 0, получаетъ названіе безконечно-малой, если ее разсматриваютъ въ состояніи близкомъ къ нулю".

Приведенныя цитаты, принадлежащія великимъ ученымъ или высоко-почтеннымъ педагогамъ, убѣдительно доказываютъ, что неясность понятій въ опредѣленіи безконечно-малыхъ царила и царитъ до настоящаго времени.

Я говорю—неясность, потому что нельзя-же, въ самомъ дѣлѣ, считать отчетливымъ представленіе о величинахъ, перестающихъ быть чѣмъ нибудь и вмѣстѣ съ тѣмъ не обращающихся въ ничто, и т. п.

Это именно та метафизика, о которой такъ удачно выразился *Вольтеръ*: [3]) „Когда тотъ, кто слушаетъ, не понимаетъ, о чемъ ему говорятъ, а тотъ, кто говоритъ, не понимаетъ, что говоритъ — c'est de la métaphysique".

VII.

Сила приведенныхъ именъ такъ велика, что невольно возникаетъ сомнѣніе: да можетъ быть дѣйствительно наука нуждается въ особомъ представленіи о малости безконечно-малыхъ величинъ? Вѣдь хлопотали изъ-за чего нибудь Лейбницъ, Ньютонъ и др. Авторитетамъ надо противопоставить авторитеты, потому что разобрать вопросъ по существу въ журнальной статьѣ невозможно да и неудобно: читатель можетъ заподозрить компетентность автора, хотя бы ужъ въ томъ отношеніи, что какой нибудь уголокъ, въ которомъ-то и заключается вся сила, ускользнулъ отъ его вниманія.

Въ качествѣ авторитетовъ другого лагеря я укажу на *Бертрана* [4]), *Дюгамеля* [5]), *Freycinet* [6]), *Carnot* [7]) и *Имшенецкаго* [8]).

Если *Бертранъ* могъ построить свой извѣстный курсъ, не прибѣгая къ метафизическому воззрѣнію на безконечно-малыя величины, стало быть можно съ большимъ вѣроятіемъ заключить, что въ такомъ воззрѣніи нѣтъ дѣйствительной надобности.

---

[1]) *Буняковскій*. Лексиконъ чистой и прикладной математики, стр. 399.

[2]) *Маракуевъ*. Элементарная Алгебра. 1886 г.

[3]) *Соловьевъ*. Гегель.

[4]) *Bertrand*. Traité de calcul différentielle et de calcul integral. Стр. 1.

[5]) *Дюгамель*. Основанія исчисленія безконечно-малыхъ. Стр. 6.

[6]) *Freycinet*. De l'analyse infinitésimale.

[7]) *Carnot*. Réflexions и пр.

[8]) См. приложеніе къ переводу дифференціальнаго исчисленія *Тотгентера*.

Въ интересахъ еще большей убѣдительности я позволю себѣ закончить этотъ параграфъ двумя выписками изъ классическихъ сочиненій *Carnot* [1]) и *Freycinet* [2]).

„Les quantités appelées *infiniment petites* en Mathématiques ne sont point des quantités actuellement nulles, ni même des quantités actuellement moindres que telles ou telles grandeurs determinées, mais seulement des quantités auxquelles les conditions de la question proposée et les hypothèses sur lesquelles le calcul est établi permettent de demeurer variables, jusqu'à ce que le calcul soit entièrement achevé, en décroissant continuellement, jusqu'à devenir aussi petites qu'on le veut, sans que l'on soit obligé de changer en même temps les valeurs de celles dont on veut obtenir la relation. C'est en cela uniquement que réside le véritable caractère des quantités auxquelles on a donné le nom d'infiniment petites, et non dans la ténuité dont leur dénomination semble supposer qu'elles sont effectivement douées ni dans la nullité absolue qu'on pourrait leur attribuer, et la notion, comme on le voit, en est parfaitement simple et dégagée de toute idée vague contentieuse".

„L'infiniment petit n'est pas une quantité très petite, ayant une valeur actuelle, susceptible de détermination. Son caractère est d'être éminemment variable et de pouvoir prendre une valeur moindre que toutes celles qu'on voudrait préciser. Il serait beaucoup mieux nommer *indéfiniment petit*; mais la première appellation ayant prévalu dans le langage, nous avons cru devoir la conserver".

М. Попруженко (Оренбургъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

Опыты и наблюденія.

(Продолженіе [3])

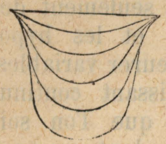
II. Свойства пленки.

Будемъ наблюдать, какъ вода вытекаетъ изъ трубки или какой либо щели, настолько узкой, что вмѣсто непрерывной струи образуются капли, падающія одна за другой болѣе или менѣе часто въ зависимости отъ величины отверстія.

Возьмемъ для опыта малое отверстіе; тогда каждая капля образуется медленно, и можно видѣть весь процессъ этого образованія. Капля постепенно увеличивается въ объемѣ и не падаетъ до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ нѣкоторой опредѣленной величины, всегда одной и

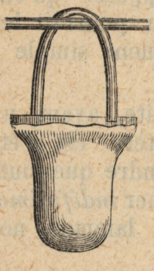
[1]) *Carnot.* Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal, стр. 22.
[2]) *Freycinet.* De l'analyse infinitésimale, стр. 21.
[3]) См. „В. О. Ф." № 163.

той же. Еслибы отверстіе было больше, капли падали бы чаще, но величина капли въ моментъ паденія остается неизмѣнной. Какъ бы ни была мала капля, она имѣетъ вѣсъ и всегда стремится упасть; но окружающая пленка поддерживаетъ ее до тѣхъ поръ, пока вѣсъ капли не превзойдетъ прочность пленки. Если вѣсъ капли въ моментъ паденія остается постояннымъ, то и прочность пленки должна имѣть постоянную величину. Наблюдая послѣдовательныя формы капли, мы замѣчаемъ, что мѣшокъ изъ пленки, въ который заключена капля, растягивается подъ вліяніемъ вѣса капли, какъ каучуковый. (Рис. 45 представляетъ послѣдовательныя формы капли).



Фиг. 45.

2. Слѣдующій опытъ (W. Tomson'a) наглядно показываетъ, что формы капли должны быть именно таковы, какъ онѣ наблюдаются, если только жидкость окружена упругимъ и растяжимымъ мѣшкомъ. На тонкій и достаточно широкій каучуковый листъ наливаемъ сверху воду *). Подъ ея давленіемъ листъ вытягивается (рис. 46) и послѣдовательно принимаетъ формы капли отъ начала ея образованія до самаго момента паденія: въ послѣдней формѣ мѣшокъ вытягивается и въ точности воспроизводитъ падающую каплю. Вытягивая воду обратно сифономъ, мы можемъ наблюдать тѣ же явленія въ обратномъ порядкѣ: каучуковый листъ сокращается и поднимаетъ воду.



Фиг. 46.

Сравнимъ результаты 1 и 2 опытовъ. Въ послѣднемъ случаѣ мы имѣемъ видимый эластичный (упругій и растяжимый) мѣшокъ, въ первомъ (въ каплѣ)—мы его не видимъ. Но такъ какъ всѣ обстоятельства измѣненія формы и движенія мѣшка и капли одинаковы, то естественно предположить, что поверхностная пленка обладаетъ свойствами каучуковой: упругостью, гибкостью, растяжимостью — и притомъ въ высокой степени совершенства.

Замѣтимъ далѣе, что вѣсъ воды есть сила, растягивающая пленку; такъ какъ дѣйствіе вызываетъ равное ему противодѣйствіе, то сила противодѣйствія пленки должна быть такова, какъ будто бы пленка стремилась сократиться, какъ натянутый каучуковый листъ. Сила, съ которой пленка стремится сократиться, (уменьшить свою поверхность), называется поверхностнымъ натяженіемъ.

3. Слѣдующее явленіе есть одно изъ хорошо намъ извѣстныхъ. Для того, чтобы собрать вмѣстѣ волоски кисточки, мы обмакиваемъ кисточку въ воду. Можно было бы думать, что волоски слиплись, потому что между ними проникла вода. Однако, наблюдая кисточку, погруженную въ воду, мы замѣчаемъ, что волоски ея расходятся также, какъ если бы между ними не было воды. Когда же кисточка вынута

*) Каучуковый листъ слѣдуетъ взять такой толщины, какой употребляется въ пузыряхъ (игрушечныхъ воздушныхъ шарахъ) и не меньше 50 ст. діаметромъ. Онъ натягивается на деревяное кольцо съ желобомъ на внѣшней поверхности и крѣпко прижимается проволокой, обматываемой по желобу.

изъ воды, то на поверхности ея образуется пленка, которая и собираетъ волоски, сжимая ихъ силой поверхностнаго натяженія.

4. Сложимъ изъ бумаги ящичекъ въ 15 ст. длиной и въ 1 ст. вышиной и шириной (рис. 47). Смочимъ извнутри его стѣнки кисточкой или просто мокрой рукой и нальемъ въ него до половины воды. Пленка натянется между стѣнками, боковыя стѣнки нагнутся и закроютъ ящикъ (Van der Mensbrugghe).

Фиг. 47.

Описанные опыты показываютъ, въ какой формѣ проявляется дѣйствіе молекулярныхъ силъ на поверхности жидкости. Поверхность обладаетъ свойствами чрезвычайно тонкой натянутой каучуковой пленки, съ тѣмъ однако различіемъ, что она въ совершенствѣ упруга и безконечно растяжима; такими качествами никакая матеріальная пленка обладать не можетъ, а потому и не слѣдуетъ думать, что на поверхности жидкости мы имѣемъ дѣло съ чѣмъ либо инымъ, кромѣ формы, въ которой проявляется дѣйствіе молекулярныхъ силъ.

5. Плоскую поверхность куска парафина посыпаютъ плауновымъ сѣменемъ (ликоподіемъ) и обрызгиваютъ водой. Такая поверхность не смачивается и вода образуетъ на ней капли различной величины. Легко замѣтить, что чѣмъ меньше капля, тѣмъ болѣе она по своей формѣ приближается къ шару. Форму свою капля принимаетъ подъ дѣйствіемъ двухъ причинъ. Во первыхъ, подъ вліяніемъ собственнаго вѣса капля стремится разлиться тонкимъ слоемъ по поверхности; во вторыхъ, подъ дѣйствіемъ натянутой поверхности пленки жидкость стремится собраться вмѣстѣ такимъ образомъ, чтобы поверхность ея была возможно меньше. Такъ какъ объемъ жидкости измѣниться не можетъ, то пленка, сжимая жидкость, стремится только стянуть частицы жидкости въ шаръ, такъ какъ именно въ этомъ случаѣ поверхность того же количества жидкости будетъ наименьшая. Въ большихъ капляхъ преобладаетъ сила тяжести и потому онѣ оказываются сплющенными сверху и снизу; въ малыхъ преобладаетъ сила поверхностнаго натяженія и потому форма ихъ мало отличается отъ шарообразной.

6. Дѣти умѣютъ складывать закрытыя коробочки изъ цѣльнаго листа бумаги для наполненія ихъ водою. Эту коробочку можно бросить; она разорвется только тогда, когда ударится о какой-либо предметъ. Если изъ бумаги той-же прочности сдѣлать такую же большую коробку, то она разорвется прежде, чѣмъ будетъ налита до полна. Совершенно подобнымъ же образомъ поверхностная пленка, имѣя одинаковую прочность, удерживаетъ маленькую каплю въ формѣ шара и не въ силахъ противостоять вѣсу большого количества воды.

7. Естественно предположить, что, уничтоживъ силу тяжести, мы тѣмъ самымъ приведемъ въ шарообразную форму любое количество жидкости, такъ какъ тогда жидкость будетъ находиться только подъ дѣйствіемъ стягивающей силы своей поверхностной пленки, которая, какъ мы видѣли, стремится придать шарообразную форму жидкости. Извѣстный опытъ Плато (Plateau) оправдываетъ такое предположеніе.

III.

Величина натяженія.

1. Пусть изъ тонкой трубки, которую мы употребляли въ 1-мъ (II) опытѣ, вытекаетъ вмѣсто воды—спиртъ. Весь процессъ образованія капли и ея послѣдовательныя формы останутся совершенно такими-же, только капли спирта будутъ падать, не достигая величины водяныхъ капель. Характеръ явленія остается тотъ-же: всѣ спиртовыя капли имѣютъ одинаковую величину и падаютъ не прежде, чѣмъ эта величина будетъ достигнута. Отсюда дѣлаемъ заключеніе, что силы, поддерживающія каплю спирта до ея паденія, того же характера, какъ и для воды, только имѣютъ меньшую величину, другими словами—эластичный мѣшокъ, въ которомъ заключена спиртовая капля имѣетъ меньшую прочность, такъ какъ онъ прорывается меньшимъ вѣсомъ капли. Чтобы судить о вѣсѣ капли, нужно кромѣ ея объема принять во вниманіе еще плотность жидкости. Такъ какъ спиртъ легче воды, то вѣсъ капли спирта сравнительно съ вѣсомъ капли воды будетъ еще меньше, чѣмъ какъ можно было бы думать, судя по ихъ объему, а слѣдовательно и прочность пленки спирта тѣмъ болѣе незначительна.

2. Если повторимъ опытъ 5 (I), замѣнивъ воду спиртомъ, то обнаружится, что поверхностная пленка имѣетъ значительно меньшую прочность. Съ эѳиромъ опытъ совсѣмъ не удается; но изъ этого нельзя еще заключить, что эѳиръ не имѣетъ пленки. Неудача опыта покажетъ только, что мы пользуемся слишкомъ грубымъ пріемомъ для обнаруженія пленки весьма малой прочности. Для опытовъ со спиртомъ и эѳиромъ, имѣющимъ иную плотность сравнительно съ водой, нужно было бы сдѣлать другіе поплавки меньшаго вѣса; однако можно, пользуясь тѣмъ же поплавкомъ, сдѣлать опытъ слѣдующимъ образомъ: когда поплавокъ весь погруженъ въ воду, а сѣтка его выпирается изъ воды, натягивая ея пленку, то стоитъ только осторожно налить на поверхность воды нѣсколько капель спирта, чтобы поплавокъ сейчасъ же вытолкнулъ сѣтку. Въ этомъ случаѣ образуется на поверхности воды спиртовая пленка, такъ какъ спиртъ, будучи легче воды, остается на ея поверхности. Эта пленка уже не въ силахъ удержать сѣтки, выталкиваемой вверхъ поплавкомъ.

3. Еще легче сдѣлать такой же опытъ съ эѳиромъ, Для этого поступаютъ слѣдующимъ образомъ: нѣсколько капель эѳира вольемъ на дно стакана; черезъ нѣсколько мгновеній эѳиръ испарится. — Тогда надъ сѣткой, сдерживаемой подъ водой ея пленкой, опрокинемъ стаканъ съ парами эѳира. Послѣдніе быстро сгустятся на поверхности воды и образуютъ тонкую эѳирную пленку. Тогда поплавокъ сейчасъ же вытолкнетъ сѣтку наружу.—Этотъ опытъ показываетъ во первыхъ, что эѳирная пленка имѣетъ меньшую прочность, и во вторыхъ, что свойствами пленки обладаетъ только свободная поверхность жидкости.

4. Можно вызвать борьбу между пленками двухъ жидкостей.—На поверхность воды бросимъ колечко изъ нитки такъ, чтобы оно легло неправильной кривой линіей съ изгибами.—Поверхностная пленка тянетъ каждую часть нитки съ одинаковой силой внутрь и наружу и потому нитка остается въ покоѣ, въ томъ видѣ, какъ мы ее бросили.

Но стоитъ только на поверхность воды внутри контура нитки опустить каплю спирта, какъ равновѣсіе натяженій нарушится: натяженіе внутри контура уменьшится и снаружи водяная пленка потянетъ во всѣ стороны нитку такимъ образомъ, что послѣдняя приметъ форму круга.

5. На дно плоскаго жестяного ящика наливаемъ тонкій слой воды, подкрашенный кякой-либо краской, или настой кофе. На средину опускаемъ нѣсколько капель спирта; первое мгновеніе спиртъ вытѣснитъ воду до дна на томъ мѣстѣ, куда мы его опустили, что понятно самособой, такъ какъ слой воды тонокъ, а дно сосуда близко. Чрезъ нѣсколько мгновеній часть дна, покрытая спиртомъ, окажется сухою. Онъ не испарился, но разлился по всей поверхности воды: водяная пленка, сокращаясь, потянула за собою спиртъ и такимъ образомъ на мѣстѣ послѣдняго осталось сухое дно. Этотъ опытъ также, какъ и предъидущій, показываетъ борьбу пленокъ воды и спирта *).

6. Посыпавъ тонкій слой воды въ жестяномъ ящикѣ ликоподіемъ, вмѣсто того, чтобы прибавить спирта, подложимъ палецъ подъ средину дна ящика: результатъ окажется подобный предъидущему: ликоподій потянется къ краямъ ящика и поверхность воды надъ пальцемъ очистится. Мы уже видѣли изъ предъидущаго опыта, что движеніе ликоподія къ краямъ вызывается въ томъ случаѣ, когда по срединѣ уменьшается поверхностное натяженіе,—въ данномъ случаѣ это уменьшеніе послѣдовало отъ нагрѣванія воды теплотою руки: поверхностное натяженіе одной и той же жидкости сохраняетъ свою величину только при постоянной температурѣ и уменьшается съ ея повышеніемъ.

7. Извѣстно, что если бросить на поверхность воды кусокъ калія, то онъ будетъ „бѣгать" по водѣ. Онъ выдѣляетъ водородъ и образуетъ щелочь.—Эта щелочь, растворяясь въ окружающей водѣ, измѣняетъ поверхностное натяженіе частей пленки смежныхъ съ кускомъ калія;—щелочная пленка распространяется и увлекаетъ калій въ тѣхъ направленіяхъ, въ которыхъ, по мѣрѣ растворенія щелочи, измѣняется поверхностное натяженіе.

Изъ приведенныхъ опытовъ можно видѣть, что величина поверхностнаго натяженія измѣняется: 1) въ зависимости отъ природы жидкости; 2) въ зависимости отъ температуры; 3) отъ примѣси и растворенія постороннихъ веществъ.

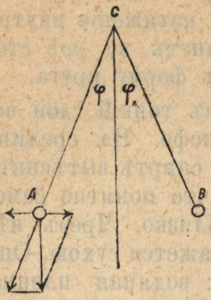
К. Чернышевъ (Юрьевъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ЗАМѢТКА ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКѢ.

1. *Примѣнимость къ электрическимъ силамъ основного ньютоновскаго закона дѣйствія и воздѣйствія* можетъ быть доказана слѣдующимъ опытомъ:

*) Чтобы лучше видѣть движеніе спирта и воды, можно поверхность воды посыпать плауновымъ порошкомъ: онъ соберется сокращающеюся пленкой по краямъ сосуда.



Фиг. 48.

Взять два шарика изъ проводящаго вещества и равнаго вѣса, подвѣсить ихъ на непроводящихъ нитяхъ AC и BC и сообщить имъ электрическіе заряды. Шары оттолкнутся такъ, что нити привѣса съ вертикальной линіей будутъ образовать углы φ и φ_1. Пусть сила дѣйствія шара B на A будетъ f, а сила дѣйствія шара A на B будетъ f_1, пусть вѣсъ каждаго шара будетъ p. Имѣемъ условія равновѣсія:

$$f = p\operatorname{tg}\varphi \text{ и } f_1 = p\operatorname{tg}\varphi_1.$$

Опытъ показываетъ, что $\varphi = \varphi_1$, слѣдов.

$$f = f_1,$$

т. е. примѣнимость доказана.

2. Два шарика на нитяхъ могутъ служить *электрометромъ*.

Пусть количество электричества на каждомъ изъ шаровъ есть q, разстояніе между центрами шаровъ R, имѣемъ

$$p\operatorname{tg}\varphi = \frac{q^2}{R^2}.$$

Пусть потенціалъ заряда есть v, пусть радіусъ шаровъ есть r, l длина нити привѣса, если шары полые, и d поверхностная плотность ихъ вещества, то

$$p = 4\pi r^2 d \, . \, g \text{ и } q = v \, . \, r,$$

слѣдов.

$$v^2 = 2\pi \frac{dg}{l} \, . \, R^3$$

Въ случаѣ сплошного шара, называя ϱ объемную плотность, получимъ

$$v^2 = \sqrt{\frac{2}{3}\pi \frac{r}{l} \varrho \, . \, g} \, . \, R^{\frac{3}{2}}$$

Проф. *Н. Слугиновъ* (Казань).

ТЕОРІЯ ВЫРАЖЕНІЙ,

содержащихъ квадратные радикалы,

въ связи

съ теоріей графическихъ задачъ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

(*§ 11, продолженіе*) *).

VII. Всѣ корни несократимаго квадраторадикальнаго уравненія $M=0$ степени p порядка q принадлежатъ несократимому раціональному уравненію $M_t=0$ степени $2^t\,p$, гдѣ $t \leqslant q$.

Разсмотримъ рядъ уравненій

$$M=0;\ M_1=0;\ M_2=0; \ldots\ldots M_{s-1}=0;\ M_s=0; \ldots\ldots;\ M_t=0,$$

составленныхъ такимъ образомъ, что лѣвая часть M_s каждаго послѣдующаго есть квадратъ модуля лѣвой части предшествующаго уравненія $M_{s-1}=0$ по внѣшнему его радикалу $\sqrt{r_{s-1}}$. По § 11, V всѣ эти уравненія несократимы; степени ихъ выражаются соотвѣтственно черезъ

$$p;\ 2\,p;\ 2^2\,p; \ldots\ldots\ 2^{s-1}\,p;\ 2^s\,p; \ldots\ldots 2^t\,p;$$

корни каждаго предшествующаго уравненія принадлежать всѣмъ послѣдующимъ, а порядокъ каждаго послѣдующаго по крайней мѣрѣ одною единицею меньше порядка предшествующаго. Отсюда слѣдуетъ, что, продолжая рядъ нашихъ уравненій достаточно далеко, необходимо придемъ къ раціональному несократимому уравненію $M_t=0$ степени $2^t\,p$, и это случится при $t=q$, когда при переходѣ отъ одного уравненія къ другому уничтожается всякій разъ только одинъ радикалъ, и при $t<q$, если хоть одинъ разъ уничтожается больше одного радикала.

Изъ сказаннаго выводятся весьма важныя заключенія:

Пусть $N=0$ будетъ раціональное несократимое уравненіе степени p, удовлетворяющееся при $x=f_1$, гдѣ f_1 есть одно изъ значеній квадраторадикальной функціи f порядка q. Уравненіе $M=0$, гдѣ подъ M разумѣемъ разность $x-f_1$, есть несократимое уравненіе, удовлетворяющееся при $x=f_1$, а потому f_1 будетъ корнемъ каждаго изъ несократимыхъ уравненій

$$M=0;\ M_1=0; \ldots\ldots; M_s=0; \ldots\ldots\ldots; M_t=0,$$

составляемыхъ одно изъ другаго вышеуказаннымъ способомъ, причемъ уравненіе $M_t=0$ будетъ несократимымъ раціональнымъ уравненіемъ

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 158, 159 и 163.

степени 1.2^t. Такъ какъ оба уравненія $N=0$ и $M_t=0$ несократимы, то $N=M_t$ (§ 11, III слѣдствіе) и $p=2^t$. Мы знаемъ также, что, удовлетворяясь при $x=f_1$, уравненіе $N=0$ удовлетворяется каждымъ изъ 2^q значеній функціи f (§ 5, слѣдств. I.). Далѣе, такъ какъ $M=x-f_1$, то $M_1=(x-f_1)(x-f_2)$, гдѣ f_2 отличается отъ f_1 только знакомъ внѣшняго радикала $\sqrt{r}$ функціи f_1. Точно также

$$M_2=(x-f_1)(x-f_2)(x-f_3)(x-f_4),$$

гдѣ $(x-f_3)(x-f_4)$ отличается отъ произведенія $(x-f_1)(x-f_2)$ только знакомъ внѣшняго радикала этого произведенія, и вообще

$$M_t=(x-f_1)(x-f_2)\ldots\ldots(x-f_s)\ldots\ldots(x-f_t),$$

гдѣ $f_1, f_2, \ldots\ldots$ суть значенія функціи f. Уравненіе $M_t=0$ или $N=0$ удовлетворяется такимъ образомъ только значеніями функціи f, а такъ какъ несократимое уравненіе не имѣетъ равныхъ корней (§ 11, II), то функція f необходимо имѣетъ 2^t различныхъ (по величинѣ) значеній, и ея порядокъ не можетъ быть сдѣланъ менѣе t. Такимъ образомъ оправдана слѣдующая теорема:

Теорема I. *Если несократимое раціональное уравненіе разрѣшимо въ квадратныхъ радикалахъ, то степень его есть степень числа 2, положимъ 2^t. Оно удовлетворяется только значеніями (и притомъ всѣми неравными значеніями) квадраторадикальной функціи, которой порядокъ не можетъ быть сдѣланъ менѣе t.*

Слѣдствіе I. Такъ какъ число *различныхъ* (неравныхъ между собою) значеній неприводимой квадраторадикальной функціи равно степени несократимаго раціональнаго уравненія, которому эта функція удовлетворяетъ, то число различныхъ значеній такой функціи есть степень числа 2. Порядокъ n неприводимой квадраторадикальной функціи, которой всѣ 2^n значеній различны, не можетъ быть пониженъ, ибо въ противномъ случаѣ одно изъ этихъ значеній удовлетворяло-бы двумъ несократимымъ раціональнымъ уравненіямъ различныхъ степеней.

Слѣдствіе II. Квадраторадикальная функція, всѣ значенія которой равны между собой, можетъ быть обращена въ раціональную функцію, такъ какъ несократимое раціональное уравненіе, которому такая функція удовлетворяетъ, будетъ первой степени.

Теорема II. *Если несократимое квадраторадикальное уравненіе $M=0$ степени p порядка q удовлетворяется при $x=f_1$, гдѣ f_1 есть значеніе квадраторадикальной функціи f порядка n, и если 2^s есть степень несократимаго раціональнаго уравненія, которому f_1 удовлетворяетъ, то $p=2^\kappa$, гдѣ $\kappa+q\leqslant s\leqslant n$.*

Дѣйствительно, мы видѣли, что, исходя изъ равенства $x-f_1=0$, можно составить раціональное несократимое уравненіе степени 2^s, удовлетворяющееся при $x=f_1$ и въ которомъ $s\leqslant n$. Удовлетворяя же несократимому уравненію $M=0$ степени p порядка q, функція f_1 удовлетворяетъ также несократимому раціональному уравненію $M_t=0$ степени $2^t.\ p$, гдѣ $t \leqq q$ (§ 11, VII), поэтому (§ 11. III, слѣдствіе.) $2^t.\ p=2^s$, откуда $p=2^k$, гдѣ $k=s-t$. Изъ этого равенства и неравенствъ $t\leqq q$; $s\leqq n$ получаемъ $k+q\leqq s\leqq n$.

§ 12. Установленныя двумя послѣдними теоремами необходимыя условія разрѣшимости раціональныхъ и квадраторадикальныхъ уравненій въ квадратныхъ радикалахъ даютъ въ примѣненіи къ геометріи слѣдующія двѣ теоромы:

Графическая задача, которая не можетъ быть приведена къ алгебраическому несократимому квадраторадикальному или раціональному уравненію, степень котораго есть степень числа 2, не можетъ быть рѣшена посредствомъ циркуля и линейки, ибо всякая квадраторадикальнаи функція можетъ быть корнемъ такого уравненія.

Графическая задача, приводящая къ несократимому алгебраическому раціональному или квадраторадикальному уравненію, степень котораго не есть степень числа 2, не можетъ быть разрѣтена посредствомъ циркуля и линейки.

Примѣры: Задача о кубатурѣ параллелепеда, приводящая къ кубичному уравненію $x^3-abc=0$, которое сократимо только при существованіи особыхъ соотношеній между a, b и c, не можетъ быть вообще рѣшена посредствомъ циркуля и линейки. Въ частности нельзя посредствомъ циркуля и линейки удвоить кубъ. Дѣйствительно, если a есть ребро даннаго, b ребро искомаго куба и x—отношеніе b къ a, то b, равно какъ и x, должно быть квадраторадикальной функціей длины a. Но x есть корень несократимаго уравненія третьей степени $x^3-2=0$, слѣдовательно, задача неразрѣшима посредствомъ циркуля и линейки. Задача о трисекціи угла приводитъ къ несократимому (вообще) уравненію $4x^3-3x-p=0$, гдѣ p есть косинусъ даннаго угла, а x есть косинусъ его третьей части. Третья часть даннаго угла α можетъ быть построена посредствомъ циркуля и лиіейки только въ томъ случаѣ, когда для этого угла $\cos\alpha=p=4a^3-3a$, гдѣ a есть квадраторадикальная функція нѣкоторыхъ данныхъ длинъ, ибо только при этомъ условіи уравненіе $4x^3-3x-p=0$ будетъ сократимымъ квадраторадикальнымъ уравненіемъ. Радикалъ $x=\sqrt[3]{(c^2+2ab)(a+b)}$, будучи корнемъ кубичнаго уравненія $x^3-(c^2+2ab)(a+b)=0$, которое несократимо для произвольныхъ a, b и c, можетъ быть построенъ посредствомъ циркуля и линейки только при существованіи особыхъ соотношеній между a, b и c. (§ 4) и т. д.

Такимъ образомъ намъ остается только установить признаки невозможности рѣшенія въ квадратныхъ радикалахъ несократимыхъ квадраторадикальныхъ и раціональныхъ уравненій, степени которыхъ суть степени числа 2, и указать способы опредѣленія такихъ рѣшеній въ случаѣ ихъ существованія. Къ рѣшенію этихъ вопросовъ, основанному на приведеніи къ minimum'у порядка квадраторадикальной функціи, мы теперь и переходимъ.

С. Шатуновскій (Одесса).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

О постановкѣ преподаванія черченія и задачахъ, преслѣдуемыхъ имъ.

Замѣтка, вызванная рецензіей г. Даниловскаго.

(*Окончаніе**).

Перейдемъ къ частностямъ и посмотримъ, каково назначеніе и конечная цѣль черченія, какъ общеобразовательнаго предмета въ реальныхъ училищахъ, а, соотвѣтственно этому, каково въ частности назначеніе курса техническаго черченія и какимъ требованіямъ поэтому должно удовлетворять преподаваніе его.

Назначеніе и характеръ техническаго черченія опредѣляются общимъ курсомъ черченія, на что съ достаточной полнотой и ясностью указываетъ примѣрная программа, гдѣ говорится: «черченіе въ III классѣ реальныхъ училищъ должно имѣть цѣлью выработку техническаго навыка въ немъ, достаточнаго для перехода къ дальнѣйшему, собственно геометрическому черченію; учащіеся должны ознакомиться съ употребительнѣйшими чертежными инструментами и съ практическими пріемами проведенія и дѣленія линій, а также построенія плоскихъ фигуръ на бумагѣ». При этомъ указанъ цѣлый рядъ упражненій, при помощи которыхъ, по мнѣнію составителя примѣрной программы, достигаются означенные результаты. Если къ этому присовокупить, что въ IV, V и VI классахъ должно проходится геометрическое черченіе съ вычерчиваніемъ наиболѣе употребительныхъ кривыхъ (въ VI классѣ), а въ III проекціонное черченіе, то конечная цѣль курса черченія опредѣляется вполнѣ. Если мы присоединимъ ко всему сказанному, что реальныя училища предназначаются для подготовки молодыхъ людей къ поступленію въ высшія спеціальныя учебныя заведенія, то назначеніе черченія въ реальныхъ училищахъ пріобрѣтаетъ полную опредѣленность и ясность; преподаватель черченія долженъ подготовить молодого человѣка на столько, чтобы онъ не встрѣтилъ серьезныхъ затрудненій при прохожденіи курса въ спеціальномъ высшемъ учебномъ заведеніи, гдѣ черченіе занимаетъ весьма видное мѣсто. Такая подготовка сама собой распадается на двѣ части: теоретическую и практическую; теоретическая часть должна сообщить ему извѣстный запасъ теоретическихъ познаній изъ элементарной и начертательной геометріи; практическая должна дать ему хорошій навыкъ и умѣнье выражать результаты разнаго рода вопросовъ въ формѣ чертежа; послѣдняя задача и составляетъ конечную цѣль черченія въ реальныхъ училищахъ. Задача преподаванія состоитъ въ томъ, чтобы путемъ послѣдовательнаго перехода отъ легкаго къ болѣе трудному выработать въ учащемся умѣнье рѣшать съ одной стороны разнаго рода вопросы и задачи, а съ другой умѣло, точно и аккуратно заносить рѣшеніе ихъ на бумагу.

Преслѣдовать при преподаваніи одновременно двѣ цѣли, теорію и практику въ ея первичной формѣ (техническое черченіе) оказалось неудобнымъ, а потому курсъ техническаго черченія выдѣленъ изъ общаго курса черченія и составляетъ какъ-бы самостоятельный отдѣлъ; раньше чѣмъ учащійся приступитъ къ изученію геометріи и рѣшенію геометрическихъ задачъ на построеніе, онъ долженъ пройти курсъ техническаго черченія, который исключительно предназначается для выработки техники черченія, т. е. навыка владѣть чертежными инструментами.

Если мы присоединимъ къ этому, что собственно на черченіе въ IV, V и VI классахъ отводится только четвертая доля всего учебнаго времени, то значеніе

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 163.

техническаго черченія выдѣлится еще рельефнѣе; въ указанныхъ классахъ нѣтъ времени и мѣста для выработки техники черченія, а потому ученикъ долженъ въ III классѣ пріобрѣсть такія солидныя познанія по техникѣ, чтобы не встрѣтить серьезныхъ затрудненій во всѣхъ остальныхъ классахъ.

Что-же рекомендуетъ г. Даниловскій?

Выполненіе всѣхъ чертежей „Школы техническаго черченія" перомъ отъ руки.

Тотъ, кто сколько нибудь знакомъ съ требованіями программы, а также и съ назначеніемъ и задачами черченія въ реальныхъ училищахъ, пойметъ всю несостоятельность и нелѣпость такого требованія, а также и тотъ вредъ, какой явится несомнѣнно результатомъ принятія подобнаго совѣта.

Ко всему сказанному прибавлю, что въ реальныхъ училищахъ нѣтъ надобности замѣнять черченіе рисованіемъ, такъ какъ въ теченіе семилѣтняго курса на послѣдній предметъ программа отводитъ 21 часъ; если ученикъ не въ состояніи за это время развить въ достаточной мѣрѣ глазомѣръ и твердость руки, то два часа, отведенные на техническое черченіе этой бѣдѣ не помогутъ, а только принесутъ непоправимый вредъ ученику, такъ какъ онъ не въ состояніи будетъ выполнить требованій, предъявляемыхъ къ нему во всѣхъ послѣдующихъ классахъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ на построеніе и прохожденіи курса проекціоннаго черченія.

Обратимъ вниманіе еще на одну сторону, чисто утилитарную, затронутаго вопроса. Во всѣхъ высшихъ спеціальныхъ заведеніяхъ черченіе занимаетъ весьма видное мѣсто какъ по своему значенію, такъ и по количеству отводимаго времени, тогда какъ рисованію въ большинствѣ изъ нихъ отводится весьма скромное мѣсто. Это и понятно; рисованіе по преимуществу удовлетворяетъ чувству изящества, составляетъ предметъ роскоши, тогда какъ черченіе удовлетворяетъ существеннымъ нуждамъ и потребностямъ человѣка; безъ него не можетъ обойтись ни одно открытіе, ни одно изобрѣтеніе или усовершенствованіе въ области техники. Оно и понятно; чертежъ—языкъ техники; языкъ, обладающій математической точностью, опредѣленностью, языкъ общечеловѣческій. Благодаря этому въ настоящее время всякое изобрѣтеніе, открытіе разносится съ поразительной быстротой во всѣ концы цивилизованнаго міра и дѣлается достояніемъ всего человѣчества; это объясняется тѣмъ, что идея изобрѣтателя путемъ чертежа пріобрѣтаетъ осязательную и вполнѣ понятную, практически осуществимую форму. Черченіе достигло такого совершенства только потому, что совершенно отдѣлилось отъ рисованія, пошло по самостоятельному пути и выработало особые методы и пріемы. Стремиться къ сліянію его съ рисованіемъ значитъ идти назадъ, въ чемъ нѣтъ никакой надобности и пользы. Если мы присоединимъ къ этому, что выработать хорошаго практика - чертежника гораздо легче и меньше стоитъ труда и времени, чѣмъ выработать соотвѣтствующаго ему практика рисовальщика, то и въ этомъ отношеніи перевѣсъ окажется на сторонѣ черченія. Въ настоящее время рисованіе преподается во всѣхъ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, а черченіе только въ нѣкоторыхъ, но нужно надѣяться, что скоро настанетъ время, когда черченіе завоюетъ себѣ должное мѣсто среди предметовъ преподаванія въ этихъ учебныхъ заведеніяхъ, такъ какъ значеніе, польза и относительная легкость его несомнѣнно обратятъ на себя должное вниманіе и найдутъ защитниковъ, съумѣющихъ отстоять его значеніе какъ общеобразовательнаго и весьма полезнаго предмета.

Мнѣ остается еще сказать нѣсколько словъ о частностяхъ, которыя по существу не представляютъ особаго интереса, но во всякомъ случаѣ заслуживаютъ вниманія. Г. Даниловскій совѣтуетъ (10 строка сверху стран. 478) заливку площадей тушью и краской производить малыхъ перомъ, большихъ—кистью.

Отъ заливки тушью или краской въ чертежныхъ работахъ требуется, чтобы залитая поверхность представляла гладкую, однородную по цвѣту, безъ всякихъ царапинъ и бугровъ поверхность; удовлетворить этимъ условіямъ при заливкѣ перомъ невозможно; помимо этого заливка перомъ потребуетъ больше времени, чѣмъ заливка рейсфедеромъ и никогда не можетъ дать хорошихъ результатовъ въ особенности въ рукахъ ученика. Что-же касается заливки краской, то ее можно въ чертежныхъ работахъ производить только кистью, а никакъ не рейсфедеромъ, а тѣмъ болѣе перомъ.

Дѣленіе линій геометрическими пріемами (стран. 478, 18 строка сверху) хорошо въ рукахъ опытнаго чертежника, но и онъ въ большинствѣ случаевъ прибѣгаетъ къ провѣркѣ полученнаго результата, такъ какъ ошибка всегда возможна и контроль надъ нею затруднителенъ; помимо этого предлагаемый пріемъ можетъ примѣняться далеко не ко всѣмъ случаямъ дѣленія; давать его начинающему незнакомому съ геометріей какъ то не приходится, тѣмъ болѣе, что онъ не можетъ принести никакой существенной пользы въ III классѣ, а только повлечетъ за собой рядъ ошибокъ, зависящихъ отъ весьма многихъ повидимому ничтожныхъ обстоятельствъ, главнымъ же образомъ отъ неточной и неправильной установки чертежныхъ инструментовъ и выбора вспомогательныхъ точекъ и линій.

Способъ отложенія равныхъ отрѣзковъ (стр. 478, стр. 8 снизу), предлагаемый рецензентомъ, требуетъ слишкомъ большой затраты времени и можетъ повлечь за собой несравненно большую ошибку, чѣмъ даже тотъ, который, по его предположенію будетъ избранъ ученикомъ, такъ какъ при отложеніи 40, 50 равныхъ дѣленій ученику прійдется 40, 50 разъ измѣнять разстояніе между остріями ножекъ циркуля; при каждомъ изъ нихъ онъ можетъ сдѣлать ошибку, которая, суммируясь въ окончательномъ результатѣ, дастъ весьма чувствительную погрѣшность; помимо этого предлагаемый способъ окажется несостоятельнымъ при отложеніи 50 полусантиметровъ. Главный-же недостатокъ этого способа состоитъ въ томъ, что нельзя ручаться за равенство отлагаемыхъ частей, что особенно важно при построеніи сѣти квадратовъ, отъ правильности построенія которой зависитъ главнымъ образомъ правильность и вѣрность всего чертежа. Г. Даниловскій говоритъ, что при двукратномъ наложеніи острія циркуля въ одну точку можетъ получиться вмѣсто точки — площадь; что-же получится при 50 кратномъ наложеніи того-же острія въ начальную точку при отложеніи дѣленій по предлагаемому имъ способу?

На мой взглядъ гораздо лучше отложеніе равныхъ отрѣзковъ производить такъ: взявъ въ циркуль по масштабу полъ сантим., поставимъ остріе A ножки циркуля въ начальную точку, а остріе B на данную линію и сдѣлаемъ легкій уколъ; затѣмъ, держа головку циркуля въ правой рукѣ, легонько поворотимъ циркуль такъ, чтобы остріе B осталось на мѣстѣ, а остріе A стало-бы на продолженіи отложеннаго отрѣзка и вновь сдѣлаемъ уколъ; эту операцію будемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока требуемое число дѣленій не будетъ отложено на данной линіи. При такомъ отложеніи можно съ большой увѣренностью сказать, что отлагаемые отрѣзки будутъ равны. Такое отложеніе имѣлось въ виду при описаніи построенія рамки.

Увеличеніе, о которомъ я говорю, не требуетъ употребленія масштаба; для этого служитъ сѣть квадратовъ; если ученику приходится увеличить данный чертежъ или составные элементы его, то онъ вмѣсто каждаго входящаго квадрата сѣти возьметъ два, три и т. д., смотря по заданію или надобности. Само собой понятно, что линейный масштабъ долженъ быть выясненъ ученикамъ, незнакомымъ съ нимъ; но трудно предположить, чтобы ученикъ, хорошо знакомый съ метрической системой (курсъ ариѳм. 2-го класса), не умѣлъ оперировать съ линейкой, раздѣленной на сантиметры и его части.

Г. Рябковъ (Одесса).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевское Физико-Математическое Общество.*)

8-е очередное засѣданіе (15-го марта). Предсѣдатель В. П. Ермаковъ.

Сообщенія:

1) *Н. Ф. Хруцкій.* — О конической рефракціи.

2) *Г. Г. Де-Метцъ.* — Объ опредѣленіи ускоренія силы тяжести машиною Атвуда.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 163.

3) *П. М. Покровскій.* — Объ алгебраическихъ уравненіяхъ въ связи съ функціями Вейерштрасса.

Въ члены общества предложенъ А. И. Богуславскій; предложили Б. Я. Букрѣевъ и Г. К. Сусловъ:

Въ члены общ. избранъ Г. И. Челпановъ.

9-е очередное засѣданіе (12 апрѣля). Предсѣд. Н. Н. Шиллеръ.

Сообщенія:

1) *Г. Г. Де-Метцъ.* — Демонстраціи по отраженію свѣта отъ плоскихъ и сферическихъ зеркалъ, по преломленію свѣта въ сферическихъ стеклахъ и въ призмѣ и инверсія линіи D натрія.

2) *Н. Н. Шиллеръ.* — Объ эталонѣ времени по Липманну.

3) *Р. Н. Савельевъ.* — О нѣкоторыхъ результатахъ актинометрическихъ наблюденій.

Въ члены общества избранъ А. И. Богуславскій.

10-е очередное засѣданіе (26 апрѣля). Предсѣдатель Н. Н. Шиллеръ.

Сообщенія:

1) *А. И. Богуславскій.* — Объединеніе методовъ аналитической и высшей геометріи при помощи исчисленія положенія.

2) *Г. И. Челпановъ.* — О природѣ времени.

Въ члены общества избранъ А. М. Ачкасовъ.

Предложенъ въ члены общества Ник. Несторов. Янжинскій. Предложили Я. П. Мишинъ и П. Т. Матложенко.

І. Косоноговъ.

Матеріалы для упражненій.

Системы счисленія.

I. Чтобы изобразить какое нибудь цѣлое число N, написанное по десятичной системѣ счисленія, въ нѣкоторой другой системѣ, за основаніе которой принято число a, надо дѣлить столько разъ, сколько это окажется возможнымъ, данное число N на число a, представленное тоже въ десятичной системѣ, и записывать всѣ остатки и послѣднее частное. Пусть

$$\begin{array}{rr|r|r|rr|l}
 & N & a & & & & \\
\text{1-ый ост.} & r & N_1 & a & & & \\
\text{2-ой ост.} & & r_1 & N_2 & a & & \\
\text{3-ій ост.} & & & r_2 & N_3 \ldots & & \\
 & & & & & \ldots N_{n-1} & a \\
\text{посл. ост.} & & & & & r_{n-1} & N_n
\end{array}$$

гдѣ уже $N_n < a$. Тогда данное число изобразится въ системѣ a такъ:

$$N_n \, r_{n-1} \ldots\ldots r_2 \, r_1 \, r \ldots\ldots \quad (1)$$

Почему?

Если $a < 10$, то для изображенія (1) можно довольствоваться обыкновенными нашими цыфрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . до $a-1$.

Если $a > 10$, обыкновенныхъ десяти цыфръ будетъ вообще недостаточно для изображенія (1); тогда надо еще будетъ, кромѣ нихъ, принять условныя обозначенія чиселъ больше 9-ти помощью одного знака, напримѣръ такъ:

$$10 = 0',\ 11 = 1',\ 12 = 2' \ . \ . \ . \ . \ 20 = 0'',\ 21 = 1'', \text{ и т. д.}$$

Примѣры: 1) Представить въ 7-иричной системѣ числа: 10, 100, 2814, 2160, 16807,... *Отв.*: 13, 202, 11130, 6204, 100000,...

Какія числа въ этой системѣ оканчиваются на 0, на два нуля, на три нуля, и т. д.? Написать сразу по этой системѣ число $= 7^{15}$.

2) Изобразить въ 11-иричной системѣ числа: 359, 4532 и 9007 и послѣ этого сложить ихъ. *Отв.*: 0′495.

Какія числа въ этой системѣ (11) имѣютъ сумму цыфръ, дѣлящуюся на 10?

Какой въ этой системѣ признакъ дѣлимости числа на 5?

Показать, что въ этой системѣ четныя числа суть тѣ, коихъ сумма цыфръ есть четная, и нечетныя — тѣ, коихъ сумма цыфръ нечетная.

3) Въ какой системѣ число 86 представится въ видѣ 68? *Отв.:* въ 13-иричной.

Найти двузначное число, которое въ десятичной и 7-иричной системѣ изображается тѣми же цыфрами, но обратно расположенными. *Отв.* 23 и 46.

4) Показать, что въ 8-иричной системѣ признакъ дѣлимости на 3 и на 9 точно такой-же, какъ въ десятичной системѣ—на одиннадцать.

Доказать справедливость слѣдующаго признака дѣлимости на 7: надо данное число представить въ 8-иричной системѣ счисленія и если тогда сумма его цыфръ на 7 раздѣлится, то и все число раздѣлится.

Найти въ 6-иричной системѣ признаки дѣлимости на 3 и на 9. *Отв.*: если единицы дѣлятся на 3, то и все число раздѣлится; если двѣ послѣднія цыфры (т. е. шестерки + единицы) дѣлятся на 9, то и все число раздѣлится.

II. Если дано нѣкоторое число [N], изображенное въ системѣ a, то чтобы его прочесть, т. е. чтобы представить его въ обыкновенной десятичной системѣ, надо дѣлить столько разъ, сколько это окажется возможнымъ это число на *десять*, представленное въ той-же системѣ a, и записать всѣ остатки и послѣднее частное.

Выписавъ затѣмъ это частное и всѣ остатки, начиная съ послѣдняго и кончая первымъ, получимъ искомое число.

Почему?

Если $a < 10$, то остатки при такомъ послѣдовательномъ дѣленіи и послѣднее частное могутъ получаться не только одно, но и многозначные, но всѣ они, переведенные на десятичную систему, дадутъ очевидно числа однозначныя. Если $a > 10$, и данное число изображено при помощи десяти нашихъ обыкновенныхъ цыфръ и нѣкоторыхъ еще лишнихъ символовъ (для чиселъ отъ 10 до $a-1$), то остатки и послѣднее частное при такомъ дѣленіи сразу дадутъ искомыя цыфры, ибо всѣ будутъ однозначны и <10.—

Примѣръ. Прочесть число 51604, написанное въ семиричной системѣ.

```
51604 | 13
42    |3454 | 13
 66    26   |240 | 13
 55     55   13  |15 | 13
 110    55   110  13 |
 101      4  101   2 | 1
   64          6
   55
    6
```

Отв.: 12646.

Интересно замѣтить, что такимъ *дѣленіемъ*, требующимъ, однакожъ, при отсутствіи навыка, достаточнаго вниманія, *можно замѣнить дѣйствіе возвышенія въ степень*. Въ самомъ дѣлѣ, если требуется возвысить нѣкоторое число a въ n-ую степень, то очевидно искомое число a^n, изображенное по системѣ счисленія съ основаніемъ a, будетъ равно 10000....00, гдѣ число нулей$=n$. Чтобы затѣмъ прочесть такое число, надо поступить какъ показано выше.

Для примѣра, найдемъ по этому способу 7^{12}. Искомая степень представится въ семиричной системѣ единицею съ двѣнадцатью нулями. Дѣля это число 1-й разъ на 13 (т. е. на десять), получимъ 1-й остатокъ $=1$; этотъ остатокъ даетъ намъ сразу число единицъ искомой степени. Дѣля полученное частное на 13, найдемъ 2-й остатокъ $=0$, что дастъ намъ число десятковъ искомой степени. Третье дѣленіе даетъ 3-й остатокъ $=2$ (число сотенъ); продолжая далѣе, найдемъ: 4-й ост. $=7$, 5-й ост. $=8$; 6-й ост. $=2$; 7-й ост. $=1$; 8-й ост. $=4$; 9-й ост. $=8$; 10-й и посл. ост. $=3$ и послѣднее частное $=1$. Итакъ:

$$7^{12}=13841287201.$$

Такая замѣна обыкновеннаго умноженія довольно необыкновеннымъ дѣленіемъ, наврядъ-ли можетъ имѣть какое-нибудь практическое значеніе. Ради упражненій, однакожъ, можно предложить этотъ пріемъ ученикамъ, показавъ, что если при вычисленіи высокой степени какого нибудь небольшого числа посредствомъ логариѳмическихъ таблицъ результатъ получается лишь приближенный, съ точностью до нѣкотораго разряда 10^{κ}, то всѣ остальныя цыфры низшихъ разрядовъ, начиная съ единицъ и кончая разрядомъ $10^{\kappa-1}$, могутъ быть найдены путемъ вышеуказаннаго дѣленія.

Примѣры: 1) Прочесть по десятичной системѣ слѣдующія числа, изображенныя по 12-ичной системѣ: 1000, 1728, 1419811′87854. (Знаки 0′ и 1′ соотвѣтствуютъ здѣсь числамъ *десять* и *одиннадцать*). *Отв.:* 1728, 2768, 10^{12}.

2) Показать, что если въ 12-ичной системѣ число оканчивается двумя цыфрами: 54, то на какую бы степень десяти мы его не умно-

жили, произведеніе тоже будетъ имѣть на концѣ тѣ же двѣ цыфры: 54.

3) Найти, не производя умноженія, 3^{10}. *Отв.* 59049.

NB. Можно свести задачу на опредѣленіе 9^5, т. е. дѣленіе числа 10000000000 въ тройственной системѣ на 101, можно замѣнить дѣленіемъ числа 100000 въ 9-ичной системѣ на 11.—

4) Найти, не производя умноженія, сумму ряда:

$$5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^{10}.$$

Отв. 12207030.

NB. Всѣ слагаемыя этого ряда скрыто содержатся въ томъ рядѣ чиселъ, которыя выписываются при выполненіи вышепоказаннаго дѣленія въ 5-иричной системѣ числа 10000000000 на 20 (т. е. на десять). Въ самомъ дѣлѣ, чтобы найти 5^{10} надо, какъ сказано, взять послѣднее частное и всѣ остатки; получимъ—9765625; взявъ-же не все послѣднее частное (14 т. е. 9), а лишь первую его цыфру, и не послѣдніе остатки, а предпослѣдніе, получимъ, очевидно, $5^9 = 1953125$. Уничтоживъ двѣ послѣднія цыфры и беря третьи съ конца остатки, находимъ $5^8 = 390625$ и т. д.

5) Найти помощью логариѳмовъ и вышепоказаннаго дѣленія 2^{64}.

Отв.: 18446744073709551616.

Ш.

(Продолженіе слѣдуетъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Объединеніе суточнаго времени. Мы сообщали уже о предложеніи француза Эрнеста Пакьэ пренебрегать разностью мѣстнаго времени въ предѣлахъ $^1/_{24}$ части поверхности земнаго шара, ограниченной двумя меридіанами *). Этотъ проэктъ уже осуществляется. Европейскій материкъ дѣлится на 3 пояса: западный, центральный и восточный. Западно-европейскій часъ, по гринвичскому меридіану, введенъ уже въ Англіи, Бельгіи и Голландіи. Съ 1-го апрѣля настоящаго года въ Германіи, Австро-Венгріи, Босніи, Швеціи, Сербіи и Македоніи введенъ центрально-европейскій часъ, опережающій гринвичскій на 60 минутъ. Сюда-же скоро присоединятся вѣроятно Швейцарія, Италія и Данія. Въ остальныхъ государствахъ Зап. Европы, до Турціи включительно, введенъ восточно-европейскій часъ, опережающій гринвичскій на 120 минутъ.

Гигантскій микроскопъ изготовленъ одной изъ фабрикъ оптическихъ приборовъ въ Мюнхенѣ для выставки въ Чикаго. Микроскопъ этотъ освѣщается электричествомъ, даетъ увеличеніе въ 16,000 разъ и проэктируетъ изображеніе на экранъ. При микроскопѣ устроено особое приспособленіе для искусственнаго охлажденія металлическихъ частей при помощи углекислоты, сжатой до 24 атмосферъ. Безъ этого приспо-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 153, стр. 189.

собленія происходитъ перемѣщеніе фокуса вслѣдствіе нагрѣванія металлическихъ частей прибора отъ электрическаго свѣточа.

Новый способъ освѣщенія улицъ предложенъ электротехникомъ Смитомъ изъ Санъ-Франциско. Способъ заключается въ подвѣшиваніи электрическихъ лампъ съ рефлекторами къ привязнымъ аэростатамъ изъ алюминія сигарообразной формы.

Вопросъ объ искусственномъ производствѣ дождя вновь привлекаетъ къ себѣ вниманіе въ Америкѣ. Въ день открытія всемірной выставки въ Чикаго, послѣ пушечнаго салюта полилъ дождь, хотя состояніе неба и не предвѣщало его, а до открытія выставки (7-го мая н. с.) въ Чикаго и во всемъ штатѣ Иллинойсѣ была въ продолженіи 2-хъ мѣсяцевъ засуха, и американцы не желаютъ объяснять дождя 1-го мая случайностью. Въ скоромъ времени будутъ вѣроятно произведены опыты съ сильными электрическими разрядами въ верхнихъ слояхъ атмосферы.

Электрическія свойства вѣтра въ пустынѣ были подмѣчены покойнымъ электротехникомъ Вернеромъ Сименсомъ. Находясь на вершинѣ Хеопсовой пирамиды, Сименсъ замѣтилъ, что всякій разъ, когда онъ поднималъ вверхъ палецъ, слышится протяжный звукъ и чувствуется непріятное ощущеніе въ пальцѣ. Желая выпить вина изъ бутылки, отъ почувствовалъ легкій электрическій ударъ. Когда бутылка съ виномъ была обернута сырой бумагой, то она обратилась въ лейденскую банку и было достаточно подержать ее надъ головой, чтобы она стала давать большія электрическія искры. Опытъ этотъ показался колдовствомъ арабамъ, сопровождавшимъ путешественниковъ, и они старались силой совлечь колдуна съ пирамиды. Но Сименсъ быстро поднесъ заряженную вышеописаннымъ способомъ бутылку къ носу арабскаго шейха, который, почувствовавъ ударъ, упалъ на землю, и всѣ арабы обратились въ бѣгство.

Девятое соисканіе преміи Брессе, объявлено туринской академіей наукъ. Премія присуждается лицу, сдѣлавшему за время съ 1-го января 1891 г. по 31 декабря 1894 года изобрѣтеніе, которое будетъ признано наиболѣе полезнымъ, или написавшему за тотъ же срокъ выдающееся сочиненіе изъ области физическихъ и естественныхъ наукъ, чистой и прикладной математики, химіи, физіологіи и паталогіи, геологіи, исторіи, географіи и статистики. Размѣръ преміи 10,416 франковъ. Печатные труды посылаются съ письменнымъ заявленіемъ на имя президента туринской академіи наукъ.

ЗАДАЧИ.

№ 484. На сторонахъ какого либо треугольника построены внѣшніе квадраты. Доказать, что 1) каждая изъ прямыхъ, соединяющихъ центръ одного изъ этихъ квадратовъ съ противоположной вершиной треугольника, равна прямой, соединяющей центры остальныхъ двухъ квадратовъ, и 2) что прямыя, соединяющія центры квадратовъ съ противоположными вершинами треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 485. Показать, что двугранный уголъ правильнаго октаэдра и двугранный уголъ правильнаго тетраэдра составляютъ вмѣстѣ два прямыхъ двугранныхъ угла.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 486. Помощью одного циркуля найти двѣ точки, принадлежащія сторонамъ прямого угла, вершина котораго лежитъ въ данной точкѣ A.

А. Рѣзновъ (Самара).

№ 487. Рѣшить уравненіе

$$4x^4+6x^3+3x^2+{}^9/_{16}x-14{}^1/_2=0.$$

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 488. Рѣшить уравненіе

$$2^x=x+2.$$

С. Конюховъ (Тамбовъ).

№ 489. Показать, что

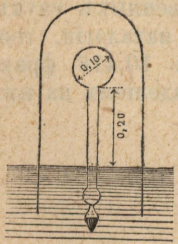
$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a.\cos b.\cos c=$$

$$=\sin p.\sin(p-a).\sin(p-b).\sin(p-c),$$

гдѣ $2p=a+b+c$.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 490. Ареометръ, трубка котораго заканчивается сверху стекляннымъ шарикомъ (фиг. 49) діаметра 0,1 m., плавающій въ сосудѣ съ сѣрной кислотой плотности 1,8, покрытъ колоколомъ. Высота трубки надъ уровнемъ жидкости равна 0,2 m., а температура $=0^0$. Находящійся подъ колоколомъ воздухъ замѣщаютъ углекислотой (плотность ея $=1,52$), сохраняя прежнія условія температуры и давленія. Спрашивается, на сколько перемѣстится ареометръ.



Фиг. 49.

Наполненный углекислотой колоколъ нагрѣваютъ до 80^0, сохраняя прежнее давленіе. Какъ и на сколько перемѣстится приборъ?

Сѣченіе трубки равно 1 mmq., атмосферное давленіе $=0,760$ m. Капиллярныя явленія, расширеніе стекла и сѣрной кислоты въ разсчетъ не принимаются.

(Заимств.), *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 83 (2 сер.). Показать, что въ гармоническомъ четыреугольникѣ разстоянія точки пересѣченія его діагоналей отъ сторонъ пропорціональны соотвѣтственнымъ сторонамъ (почему эту точку, по аналогіи, можно назвать *точкою Лемуана* четыреугольника). Обратно: если внутри вписаннаго четыреугольника есть точка, разстоянія которой отъ сторонъ пропорціональны этимъ сторонамъ, то эта точка представляетъ пересѣченіе діагоналей и четыреугольникъ будетъ гармоническій.

Пусть діагонали AC и BD гармоническаго четыреугольника ABCD пересѣкаются въ точкѣ E. Опустимъ изъ E перпендикуляры EA', EB' EC' и ED' соотвѣтственно на стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$, а изъ D — перпендикуляры $D\alpha$ и $D\beta$ на AB и BC. Такъ какъ $\triangle\, DA\alpha \sim \triangle\, DC\beta$. то

$$D\alpha : D\beta = d : c,$$

а такъ какъ $D\alpha : D\beta = EA' : EB'$, то $EA' : EB' = d : c$; но въ гармонич. четыреугольникѣ $d : c = a : b$, поэтому

$$EA' : EB' = a : b, \text{ а также } EB' : EC' = b : c \text{ и } EC' : ED' = c : d.$$
т. е. $EA' : a = EB' : b = EC' : c = ED' : d$.

Пусть внутри вписаннаго четыреугольника есть точка F, удовлетворяющая условію

$$FA'' : a = FB'' : b = FC'' : c = FD'' : d,$$

гдѣ FA'', FB'', FC'', FD'' суть перпендикуляры, опущенные соотвѣтственно изъ F на AB, BC, CD, DA. Сравнивая равенство $FA''.c = FC''.a$ съ равенствомъ $EA'.c = EC'.a$, находимъ

$$FA'' : EA' = FC'' : EC',$$

т. е. точка F лежитъ на прямой EM, гдѣ M есть пересѣченіе сторонъ AB и CD. Также докажемъ, что F лежитъ на прямой EN, гдѣ N—пересѣченіе BC и DA. Поэтому F совпадаетъ съ E, а такъ какъ

$$EA'.c = EB'.d \text{ и } EA' : a = EB' : b,$$

то $ac = bd$, т. е. четыреугольникъ будетъ гармоническій.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ); *В. Рубцовъ* (Уфа); *И. Бискъ* (Кіевъ).

№ 90 (2 сер.). Показать что число α, опредѣленное рядомъ

$$\alpha = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^a} + \frac{1}{q^{a^2}} + \frac{1}{q^{a^3}} + \ldots\ldots,$$

гдѣ q и a суть цѣлыя положительныя числа, большія 1, есть число несоизмѣримое.

См. рѣшеніе задачи № 103 (2 сер.) въ № 160 «Вѣстника Оп. Физики», стр. 88.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 138 (2 сер.). Въ данномъ прямоугольномъ треугольникѣ найти простымъ построеніемъ среднюю гармоническую его обоихъ катетовъ.

Не трудно показать, что искомая средняя гармоническая есть діагональ квадрата, сторона котораго равна биссектору прямого угла даннаго треугольника.

В. Россовская (Курскъ); *И. Вонсикъ, Г. Ширинкинъ, В. Андреевъ-Бѣлостоцкій, Бодиско-Михайлова* (Воронежъ).

№ 371 (2 сер.). Рѣшить систему

$$x+y+z=a\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{xz\,(z+x-y)}{x+z}+\frac{xy\,(x+y-z)}{x+y}=b^2\ldots\ldots(2)$$

$$y^2+z^2-x^2=0.\ldots\ldots(3)$$

Второе уравненіе по раскрытіи скобокъ приводится къ виду

$$x^2\,[z^2+y^2+x\,(z+y)]=b^2\,(x+y)\,(x+z).$$

Подставляя сюда $a-x$ вмѣсто $z+y$, $a-y$ вмѣсто $x+z$ и x^2 вмѣсто z^2+y^2, получимъ

$$ax^3=b^2\,(x+y)\,(a-y)\ldots\ldots(\alpha)$$

Замѣняя въ ур. (3) z черезъ $a-(x+y)$, приведемъ его къ виду

$$2\,(y+x)\,(a-y)=a^2,\text{ откуда }(y+x)\,(a-y)=a^2:2.$$

Поставляя $a^2/_2$ вмѣсто $(x+y)\,(a-y)$ въ ур. (α), получимъ

$$ax^3=\frac{a^2\,b^2}{2};\ x=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{2}}.$$

Зная x, легко найдемъ y и z.

А. П. (Пенза); *В. Шишаловъ* (Ив.-Возн.); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *М. Павловъ П. Ивановъ* (Одесса); *А. Рѣзновъ* (Самара).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 12-го Іюня 1893 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
ищется

Обложка
ищется