Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. № 159. № 3.

Содержаніе: Н. И. Лобачевскій.— Теорія выраженій, содержащихъ квадратные радикалы, въ связи съ теоріей графическихъ задачъ элементарной геометріи, *С. Шатуновскаго.* — Письмо въ редакцію. — Научная хроника. — Изобрѣтенія и открытія. — Разныя извѣстія. — Доставленныя въ редакцію книги и брошюры. — Задачи №№ 446—451. — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 71, 257, 269, 293. — Справ. табл. № XV. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій.—Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій. — Содержаніе научныхъ журналовъ.

Н. И. Лобачевскій.

$^{10}/_{22}$ октября 1893 г. исполнится столѣтіе со времени рожденія знаменитаго русскаго геометра Лобачевскаго.

Николай Ивановичъ Лобачевскій принадлежитъ несомнѣнно къ числу тѣхъ ученыхъ XIX столѣтія, работы которыхъ явились не только цѣннымъ вкладомъ въ науку, но и открыли ей новые пути.

Геніальнымъ умамъ, прокладывающимъ новые пути, часто приходилось отвергать положенія, считавшіяся до нихъ неоспоримою и нетребующею доказательства истиною.

Такая-же почетная роль въ наукѣ выпала и на долю Н. И. Лобачевскаго, этого «Коперника геометріи», какъ назвалъ его покойный Клиффордъ.

Съ тѣхъ поръ какъ Евклидъ построилъ безсмертное зданіе своей геометріи на немногихъ опредѣленіяхъ, аксіомахъ и постулатумахъ, принятыхъ имъ безъ доказательства, истина этихъ основаній геометріи подвергалась сомнѣнію; всѣ усилія ученыхъ всѣхъ странъ и вѣковъ были направлены на сведеніе числа этихъ аксіомъ и постулатумовъ къ наименьшему; наука представляетъ напримѣръ цѣлый рядъ попытокъ вывести такъ называемый постулатумъ Евклида о встрѣчѣ перпендикуляра и наклонной, какъ математическое слѣдствіе прочихъ опредѣленій, аксіомъ и постулатумовъ; истина самого постулатума не подвергалась сомнѣнію.

Лобачевскій первый увидѣлъ здѣсь вопросъ, который можетъ быть рѣшенъ только опытомъ и, прійдя къ убѣжденію, что, утверждая существованіе евклидова постулатума, мы принимаемъ тѣмъ самымъ извѣстныя свойства нашего пространства, которыя могутъ быть провѣрены только путемъ опыта или наблюденія, показалъ возможность построенія геометріи безъ постулатума Евклида. Свою мысль Лобачевскій осуществилъ въ рядѣ мемуаровъ съ послѣдовательностью и точностью «истиннаго геометра», какъ выразился Гауссъ.

Этотъ «princeps mathematicorum» привѣтствовалъ работы Лобачевскаго еще въ 1846 г.; но привѣтствіе Гаусса прошло незамѣченнымъ и нужно было пройти еще извѣстному времени для того, чтобы высокое научное и философское значеніе работъ Лобачевскаго было признано всѣми. Такому признанію работъ Лобачевскаго способствовали труды многихъ первоклассныхъ ученыхъ нашего времени, которые выяснили между прочимъ, что геометрія Лобачевскаго для двухъ измѣреній представляетъ геометрію на поверхности съ постоянною отрицательною кривизною, а геометрія трехъ измѣреній даетъ понятіе о новыхъ протяженностяхъ, пространствахъ, имѣющихъ кривизну.

Изученіе геометріи Лобачевскаго или неевклидовой геометріи образовало въ послѣднія два десятилѣтія особую вѣтвь математическихъ знаній, имѣющую обширную литературу. Къ изслѣдованіямъ по геометріи Лобачевскаго примыкаютъ и составляютъ ихъ непосредственное продолженіе изслѣдованія по геометріи гиперпространствъ, которыя, бросая яркій свѣтъ на многіе вопросы геометріи, въ то-же время являются незамѣнимымъ пособіемъ при изученіи важнѣйшихъ вопросовъ анализа.

Высокому научному значенію изслѣдованій Лобачевскаго соотвѣтствуетъ не менѣе высокое философское значеніе. Съ одной стороны они открываютъ умозрѣнію новый вопросъ объ изслѣдованіи свойствъ пространства; съ другой стороны они бросаютъ новый свѣтъ на вопросъ о происхожденіи нашихъ геометрическихъ аксіомъ и имѣютъ такимъ образомъ высокую важность для теоріи познанія.

Императорскому Казанскому университету выпала завидная доля имѣть Лобачевскаго своимъ воспитанникомъ и своимъ сочленомъ; въ немъ Лобачевскій исполнялъ обязанности профессора съ 1812 по 1846 г. и ректора съ 1827 по 1846 г. Казанскому университету Лобачевскій дорогъ не только по своимъ ученымъ трудамъ и своей преподавательской дѣятельности. Исторія жизни и работъ Лобачевскаго, говоритъ его біографъ, неразрывно связана съ исторіею нашего университета; онъ былъ первый его питомецъ, занявшій профессорскую каѳедру; ему обязанъ Казанскій университетъ постройкою лучшихъ зданій и организацією библіотеки.

Физико-математическое Общество, состоящее при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ, не могло поэтому не обратить особеннаго вниманія на достойное ознаменованіе столѣтней годовщины дня рожденія великаго русскаго математика. Исходатайствовавъ Высочайшее разрѣшеніе на открытіе подписки для образованія капитала съ цѣлью увѣковѣченія имени Н. И. Лобачевскаго, оно обращается теперь къ ученымъ всѣхъ странъ и къ русскому обществу, дорожащему научною славою Россіи, съ просьбою принять участіе въ подпискѣ на составленіе капитала имени Лобачевскаго.

Смотря по величинѣ собранной суммы Общество предполагаетъ или учредить премію имени Лобачевскаго за ученыя сочиненія по математикѣ (преимущественно по тѣмъ отраслямъ ея, которыя находятся въ связи съ работами Лобачевскаго) или поставить его бюстъ въ зданіи университета. Если предложеніе Общества вызоветъ сочувствіе, оно найдетъ возможнымъ осуществить и ту и другую цѣль и Казанскій университетъ будетъ украшенъ изображеніемъ лица, озарившаго его безсмертною славою, и молодые ученые, посвятившіе себя любимой Лобачевскимъ наукѣ, найдутъ въ преміи его имени поддержку и одобреніе.

Предсѣдатель Физико-математическаго Общества
А. Васильевъ.

Товарищъ Предсѣдателя Физико-математическаго Общества
Ѳ. Суворовъ.

Профессора чистой математики въ Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

Взносы адресуются: *Казань, физико-математическое Общество.*

ТЕОРІЯ ВЫРАЖЕНІЙ,

содержащихъ квадратные радикалы,

въ связи

съ теоріей графическихъ задачъ

элементарной геометріи.

ГЛАВА II.

§ 5. Изысканіе условій возможности рѣшенія графической задачи посредствомъ циркуля и линейки привело насъ къ изученію функцій, въ которыхъ данныя количества не связаны никакими ирраціональными дѣйствіями, кромѣ извлеченія квадратныхъ корней. Для краткости мы будемъ называть такія функціи *квадраторадикальными*.

Два радикала $\sqrt{r}$ и $\sqrt{r_1}$ мы будемъ считать одинаковыми и будемъ ихъ принимать за одинъ радикалъ, когда $r=r_1$. Число *различныхъ* радикаловъ, входящихъ въ составъ квадраторадикальной функціи, будемъ называть ея *порядкомъ* *), и вообще, число всѣхъ *различныхъ* радикаловъ, входящихъ въ составъ группы функцій f, F, φ,... будемъ называть *порядкомъ* этой группы. Функція нулеваго порядка есть функція раціональная.

---

*) Это опредѣленіе порядка, данное Абелемъ, сохранено у Мальмстена. Ск. Oeuvres complètes de N. H. Abel. T. I. p. 8.

Каждый радикалъ $\sqrt{r}$ квадраторадикальной функціи имѣетъ два значенія $\pm\sqrt{r}$, поэтому квадраторадикальная функція n-аго порядка имѣетъ 2^n значеній, которыя получаемъ, сочетая каждое значеніе одного радикала съ каждымъ значеніемъ остальныхъ радикаловъ. Такъ выраженіе $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ имѣетъ 4 значенія: $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ и $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Мы будемъ называть радикалами *1-го рода* радикалы, извлекаемые изъ данныхъ количествъ, соединенныхъ раціональными дѣйствіями. Функцію, содержащую радикалы только 1-го рода, будемъ называть функціей *перваго рода*.

Радикалъ, извлекаемый изъ функціи 1-го рода, будемъ называть радикаломъ 2-го рода, а функцію, содержащую радикалы только 2-го и 1-го рода будемъ называть функціей второго рода.

Вообще, радикалъ, извлекаемый изъ функціи $(n-1)$-го рода, будемъ называть радикаломъ n-аго рода, а функція, въ составъ которой входятъ радикалы n-аго рода и не входятъ радикалы высшихъ родовъ, будетъ функція n-аго рода **).

Такимь образомъ выраженіе $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{6-\sqrt{5}}$ будетъ 3-го порядка и 2-го рода.

Мы будемъ говорить, что радикалъ $\sqrt{r_1}$ входитъ въ составъ радикала $\sqrt{r_2}$, если $\sqrt{r_1}$ входитъ въ составъ r_2. Если въ ряду радикаловъ

$$\sqrt{r_1},\quad \sqrt{r_2},\ldots\ldots \sqrt{r_к},\ldots\ldots \qquad (r)$$

радикалъ $\sqrt{r_к}$ не входитъ въ составъ остальныхъ радикаловъ, то $\sqrt{r_к}$ будемъ называть *внѣшнимъ* радикаломъ ряда (r). Сообразно съ этимъ радикалъ $\sqrt{r_к}$, входящій въ составъ всѣхъ или нѣкоторыхъ изъ функцій группы f, F, $\varphi,\ldots$, будетъ внѣшнимъ радикаломъ этой группы функцій, если, выписавъ всѣ радикалы (r), входящіе въ составъ этихъ функцій, найдемъ, что въ ряду (r) радикалъ $\sqrt{r_к}$ есть внѣшній радикалъ. Это распространяется и на тотъ случай, когда группа состоитъ изъ одной только функціи f.

Радикалы наивысшаго рода группы функцій суть внѣшніе радикалы, но обратнаго утверждать нельзя; такъ напримѣръ, въ выраженіи $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{6-\sqrt{5}}$ радикалъ высшаго (2-го) рода $\sqrt{6-\sqrt{5}}$ есть внѣшній радикалъ, но внѣшній радикалъ $\sqrt{6}$ не принадлежитъ къ радикаламъ высшаго рода.

Когда въ функцію f входятъ только такіе радикалы, которые входятъ въ составъ по крайней мѣрѣ одной изъ функцій F, $\varphi,\ldots$ то f будемъ называть функціей *сходною* съ группой функцій F, $\varphi,\ldots$ Если въ

**) Это опредѣленіе рода функціи дано впервые Ліувиллемъ. См. Journal de l'École Polytechnique, XXII cahier, p. 128.

то-же время всѣ радикалы группы F, φ... входятъ въ составъ f, то f и группа F, φ,... будутъ взаимно сходны.

Не трудно усмотрѣть, что, соединяя раціональными дѣйствіями квадраторадикальныя функціи F, φ,... и данныя количества, получимъ функцію, сходную съ группой F, φ,... по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, когда не будемъ соединять въ одинъ радикалъ ни произведенія, ни отношенія различныхъ радикаловъ, что въ послѣдующемъ всюду предполагается. Очевидно, что при такомъ условіи дѣйствія надъ квадратными радикалами будутъ отличаться отъ дѣйствій надъ буквенными количествами только тѣмъ, что будемъ уничтожать радикалъ при возведеніи въ четную степень, замѣняя $(\pm\sqrt{r})^{2m}$ черезъ r^m и $(\pm\sqrt{r})^{2m+1}$ черезъ $\pm r^m\sqrt{r}$. Отсюда слѣдуетъ, что если f есть результатъ соединенія раціональными дѣйствіями функцій F, φ,..., а f_1 есть результатъ соединенія тѣми-же дѣйствіями функцій F_1, φ_1,..., полученныхъ изъ F, φ,... черезъ одновременную перемѣну знаковъ нѣкоторыхъ радикаловъ, то f_1 будетъ отличаться отъ f только знаками этихъ радикаловъ, и если въ f эти радикалы уничтожились, то ихъ нѣтъ и въ f_1, причемъ $f=f_1$.

Слѣдствіе I. Если, совершая рядъ раціональныхъ дѣйствій надъ квадраторадикальной функціей f и данными количествами, получаемъ раціональное количество, то то-же раціональное количество получимъ, совершая этотъ рядъ дѣйствій надъ какимъ угодно значеніемъ функціи f. Такъ напр., замѣчая, что выраженіе $1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$ удовлетворяетъ уравненію $x^4-4x^3+4x^2-2=0$, заключаемъ, что и всѣ значенія функціи $1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$ удовлетворяютъ этому уравненію.

Когда f содержитъ такой радикалъ $\sqrt{r}$, который не входитъ въ составъ ни одной изъ функцій F, φ,..., то говорятъ, что f отличается отъ группы функцій F, φ, ... радикаломъ $\sqrt{r}$. Отсюда вытекаетъ:

Слѣдствіе II. Если функція f отличается отъ группы функцій F,φ,... только радикалами

$$\sqrt{r_1},\ \sqrt{r_2},\ \dots\ \sqrt{r_\kappa},\dots\dots \qquad (r),$$

число которыхъ не меньше 1-цы, то одинъ изъ этихъ радикаловъ есть внѣшній радикалъ функціи f, ибо если $\sqrt{r_1}$ есть внутренній радикалъ функціи f, то пусть $\sqrt{R}$ будетъ такой внѣшній радикалъ функціи f, въ составъ котораго входитъ $\sqrt{r_1}$. Радикалъ $\sqrt{R}$ не можетъ входить въ составъ группы F, φ,...., ибо въ противномъ случаѣ функція f не отличалась бы отъ этой группы функцій радикаломъ $\sqrt{r_1}$. Итакъ, функція f отличается отъ функцій F, φ,... радикаломъ $\sqrt{R}$, который поэтому есть одинъ изъ радикаловъ (r), т. е., одинъ изъ радикаловъ (r) есть внѣшній радикалъ функціи f.

Слѣдствіе III. Если функція f отличается отъ группы функцій F, φ, ... только радикалами

$$\sqrt{r_1},\ \sqrt{r_2},\ \dots\ \sqrt{r_\kappa},\dots\dots \qquad (r),$$

число которыхъ не меньше 2-хъ, и если въ ряду (r) содержится только одинъ внѣшній радикалъ функціи f — пусть это будетъ $\sqrt{r_1}$ —, то одинъ изъ остальныхъ радикаловъ (r) есть внѣшній радикалъ функціи r_1.

По предположенію функція f отличается отъ группы $F, \varphi, \ldots$ внутреннимъ радикаломъ $\sqrt{r_\kappa}$, а въ такомъ случаѣ она отличается отъ $F, \varphi, \ldots$ и внѣшнимъ радикаломъ $\sqrt{R}$, въ составъ котораго входитъ $\sqrt{r_\kappa}$, но f отличается отъ $F, \varphi, \ldots$ только внѣшнимъ радикаломъ $\sqrt{r_1}$, слѣдовательно $\sqrt{R} = \sqrt{r_1}$.

Это значитъ, что въ составъ $\sqrt{r_1}$ входятъ всѣ радикалы

$$\sqrt{r_2},\ \sqrt{r_3}, \ldots\ \sqrt{r_\kappa}, \ldots$$

и что этими радикалами (ихъ число не меньше 1-цы) функція r_1 отличается отъ группы функцій $F, \varphi, \ldots$ Никакими другими радикалами функція r_1 не можетъ отличаться отъ $F, \varphi, \ldots$, ибо въ противномъ случаѣ и f отличалось бы отъ $F, \varphi, \ldots$ этими радикалами. Отсюда слѣдуетъ, что функція r_1 находится въ условіяхъ предыдущаго слѣдствія относительно функцій $F, \varphi, \ldots$ и радикаловъ $\sqrt{r_2}$, $\sqrt{r_3}$, $\sqrt{r_\kappa}$, поэтому одинъ изъ этихъ радикаловъ есть внѣшній радикалъ функціи r_1.

§ 6. Подъ *цѣлой* квадраторадикальной функціей будемъ разумѣть такую, которая не содержитъ радикаловъ въ знаменателяхъ, входящихъ въ ея составъ. Квадраторадикальная функція, не удовлетворяющая этому условію, называется *дробной*. Изъ двухъ функцій $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ первая — цѣлая, вторая — дробная.

Если въ цѣлой квадраторадикальной функціи f порядка n вынесемъ за скобки внѣшній радикалъ $\sqrt{r}$ изъ всѣхъ членовъ, въ составъ которыхъ онъ входитъ множителемъ, то функція представится въ видѣ

$$f = a + b\sqrt{r} \qquad (1)$$

гдѣ a, b, r есть группа функцій $(n-1)$-го порядка, не содержащая радикала $\sqrt{r}$. Представляя квадраторадикальную функцію подъ видомъ $a + b\sqrt{r}$, мы всегда будемъ разумѣть подъ $\sqrt{r}$ внѣшній радикалъ функціи, не входящій въ составъ группы функцій a, b.

Когда кромѣ $\sqrt{r}$ функція f содержитъ еще внѣшній радикалъ $\sqrt{r_1}$, то f напишется въ видѣ

$$f = (a_1 + b_1\sqrt{r_1}) + (a + b\sqrt{r_1})\sqrt{r} \qquad (2),$$

гдѣ a_1, b_1, a, b, r, r_1 есть группа функцій $(n-2)$-го порядка, причемъ двѣ функціи b_1 и b также какъ и двѣ функціи a и b не могутъ быть одновременно равны нулю.

Если въ рав. (1) функція r содержитъ внѣшній рядикалъ $\sqrt{r_1}$, не входящій въ составъ остальныхъ радикаловъ функціи f, то $\sqrt{r_1}$ можетъ входить въ составъ a и b только внѣшнимъ образомъ, поэтому имѣемъ

$$f = a_2 + b_2 \sqrt{r_1} + (a_1 + b_1 r_1) \sqrt{a + b\sqrt{r_1}} \qquad (3)$$

гдѣ группа функцій a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, r_1 порядка $n-2$.

Двѣ цѣлыя квадраторадикальныя функціи $f = a + b\sqrt{r}$ и $f_1 = a - b\sqrt{r}$, отличающіяся другъ отъ друга только знакомъ внѣшняго радикала $\sqrt{r}$, называются *сопряженными* по радикалу $\sqrt{r}$. Сопряженныя функціи суть функціи взаимно сходныя; ихъ сумма $f + f_1 = 2a$ и ихъ произведеніе $ff_1 = a^2 - b^2 r$ суть функціи, коихъ порядокъ по крайней мѣрѣ 1-цей меньше порядка каждой изъ функцій f и f_1. Квадратный корень $\sqrt{ff_1}$ произведенія функцій, сопряженныхъ по радикалу $\sqrt{r}$, называютъ *модулемъ* этихъ функцій по радикалу $\sqrt{r}$. Если функція f не равна тождественно нулю, а модуль ея по радикалу $\sqrt{r}$ равенъ нулю, то порядокъ функціи можетъ быть пониженъ, ибо если $f = a + b\sqrt{r}$ не $= 0$, но $\sqrt{(a + b\sqrt{r})(a - b\sqrt{r})} = 0$, то $b\sqrt{r} = a$ и $f = 2a$.

Въ послѣдующемъ мы всегда будемъ полагать, что изъ цѣлой функціи исключены тѣ внѣшніе радикалы, по которымъ модуль функціи равенъ нулю.

Теорема I. *Модуль μ произведенія двухъ цѣлыхъ квадраторадикальныхъ функцій $F = A + B\sqrt{r}$ и $f = a + b\sqrt{r}$ по общему внѣшнему радикалу $\sqrt{r}$ равенъ произведенію модулей M и m функцій F и f по этому радикалу.*

Такъ какъ

$$M = \sqrt{A^2 - B^2 r}; \quad m = \sqrt{a^2 - b^2 r}; \quad Ff = Aa + Bbr + (Ab + Ba)\sqrt{r};$$

$$\mu = \sqrt{(Aa + Bbr)^2 - (Ab + Ba)^2 r},$$

то непосредственнымъ умноженіемъ убѣждаемся въ справедливости равенства $\mu = Mm$, причемъ однако радикаламъ нужно дать такіе знаки, чтобы это равенство имѣло мѣсто.

Пусть M_0 будетъ квадраторадикальная цѣлая функція порядка n. Разсмотримъ рядъ функцій

$$M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots M_{k-1}, M_k, \ldots\ldots, M_r \qquad (M),$$

гдѣ каждая послѣдующая M_k есть квадратъ модуля предшествующей по радикалу $\sqrt{r_{k-1}}$

Такъ какъ порядокъ каждой послѣдующей функціи по крайней мѣрѣ 1-цей ниже порядка предшествующей, то, продолжая рядъ (M) достаточно далеко, непремѣнно дойдемъ до функціи M_r не содержащей ни одного радикала.

Пусть m_k будетъ функція, сопряженная съ M_k по радикалу $\sqrt{r_k}$. Перемноживъ между собою всѣ равенства, выводимыя изъ равенства

$$M_k \cdot m_k = M_{k+1}$$

черезъ послѣдовательное измѣненіе κ въ 0, 1,... r—1, получимъ

$$M_0 m_0 m_1 \ldots\ldots m_{r-1} = M_\kappa,$$

или, полагая $m_0 m_1 \ldots m_{r-1} = \varphi$, гдѣ φ есть функція сходная съ M_0 и отличная отъ нуля, ибо M_0 по предположенію отлично отъ нуля, получимъ

$$M_0 \varphi = M_\kappa.$$

Отсюда слѣдуетъ

Теорема II. *Цѣлая квадраторадикальная функція, отличная отъ нуля, можетъ быть обращена въ раціональную функцію черезъ помноженіе на сходную съ ней функцію, отличную отъ нуля.*

Опредѣленіе такой функціи φ затрудненій не представляетъ.

§ 7. Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что отношеніе $\frac{f}{f_0}$ двухъ цѣлыхъ квадраторадикальныхъ функцій можетъ быть приведено къ виду цѣлой квадраторадикальной функціи безъ повышенія порядка и введенія новыхъ радикаловъ. Достаточно помножить оба члена отношенія на функцію φ, обращающую f_0 въ раціональное количество,—и это можно сдѣлать, ибо φ отлично отъ нуля, когда f_0 отлично отъ нуля. Отсюда выводится

Теорема. *Дробная квадраторадикальная функція можетъ быть приведена къ виду сходной съ ней цѣлой функціи.*

Это очевидно для функціи перваго рода, ибо такая функція, по совершеніи въ ней всѣхъ раціональныхъ дѣйствій, приводится къ отношенію двухъ цѣлыхъ функцій. Допустимъ, что теорема справедлива для функцій n-аго и нисшихъ родовъ, и пусть f будетъ функція $(n+1)$-го рода. Приведемъ всѣ функціи n-аго и нисшихъ родовъ, входящихъ въ составъ f, къ цѣлому виду. Тогда, по совершеніи въ f всѣхъ раціональныхъ дѣйствій, функція f приведется къ отношенію двухъ цѣлыхъ функцій, и поэтому ее можно будетъ преобразовать въ функцію цѣлую.

Эта теорема освобождаетъ насъ отъ необходимости разсматривать квадраторадикальныя дробныя функціи. Всѣ такія функціи можемъ въ послѣдующемъ предположить цѣлыми. Зная это, рѣшимъ двѣ задачи:

Задача I. Опредѣлить наиболѣе общую квадраторадикальную функцію n-го порядка, содержащую n *данныхъ* радикаловъ.

Когда данъ только одинъ радикалъ $\sqrt{r}$, то наиболѣе общей функціей 1-го порядка будетъ функція $a + b\sqrt{r}$, въ составъ которой входятъ двѣ произвольныя раціональныя функціи a и b. Наиболѣе общая функція, содержащая n данныхъ радикаловъ, будетъ функція

$$f = a + b\sqrt{r},$$

гдѣ $\sqrt{r}$ есть внѣшній между данными радикалами, а каждая изъ функцій a и b есть наиболѣе общая функція, содержащая остальные n—1 радикаловъ. Функція f содержитъ вдвое больше произвольныхъ раціональныхъ функцій, чѣмъ каждая изъ функцій a и b, поэтому число произвольныхъ раціональныхъ функцій, входящихъ въ составъ f, равно 2^n.

Задача II. Опредѣлить наиболѣе общую квадраторадикальную функцію n-го порядка. (Радикалы не даны).

Если $\sqrt{r}$ есть внѣшній радикалъ такой функціи f_n, то $f_n = a + b\sqrt{r}$, гдѣ b отлично отъ нуля, а потому, предположивъ b введеннымъ подъ радикалъ, можемъ писать

$$f_n = a + \sqrt{r},$$

гдѣ a и r образуютъ группу функцій $(n-1)$-го порядка. Въ наиболѣе общемъ слачаѣ a и r должно предполагать содержащими каждая по $n-1$ радикаловъ, а слѣдовательно взаимно сходными, поэтому

$$f_n = a_1 + b_1\sqrt{R} + \sqrt{A + p_{n-1}\sqrt{R}}, \qquad (1).$$

гдѣ $\sqrt{R}$ внѣшній радикалъ функцій a и r. Когда p_{n-1} отлично отъ нуля, то можно положить, не нарушая общности, $p_{n-1} = 1$, ибо въ этомъ случаѣ можемъ положить $p_{n-1}^2 R = R_1$, послѣ чего f_n преобразуется такъ:

$$f_n = a_1 + \frac{b_1}{p^{n-1}}\sqrt{R_1} + \sqrt{A + \sqrt{R_1}},$$

и $\frac{b_1}{p_{n-1}}$ можно преобразовать въ цѣлую функцію. Изъ рав. (1) усматривается, что, умѣя написать наиболѣе общую функцію $(n-1)$-го порядка, можемъ написать и наиболѣе общую функцію n—аго порядка *).

Пусть φ_{n-1} будетъ число произвольныхъ раціональныхъ функцій, входящихъ въ составъ $A + p_{n-1}\sqrt{R}$. Число произвольныхъ раціональныхъ функцій, входящихъ въ составъ $a_1 + b_1\sqrt{R}$ равно 2^{n-1}, ибо въ $a_1 + b_1\sqrt{R}$ радикалы даны, когда функція $A + p_{n-1}\sqrt{R}$ выбрана. Поэтому, полагая φ_n равнымъ числу произвольныхъ раціональныхъ функцій, входящихъ аъ составъ f_n, получимъ $\varphi_n = \varphi_{n-1} + 2^{n-1}$. Измѣняя здѣсь n въ $n-1$, $n-2$,...... 2, складывая полученные результаты и замѣчая, что $\varphi_1 = 2$, находимъ $\varphi_n = 2^n$.

Итакъ, искомая функція f_n содержитъ 2^n произвольныхъ раціональныхъ функцій и $n-1$ коэффиціентовъ p, изъ коихъ каждый равенъ или нулю, или 1-цѣ. Такъ, наиболѣе общія квадратр. функціи 1-го, 2-го и 3-го порядковъ суть:

$$a + \sqrt{r};\ a_1 + b_1\sqrt{r} + \sqrt{a + p_1\sqrt{r}};$$

$$a_3 + b_3\sqrt{r} + (a_2 + b_2\sqrt{r})\sqrt{a + p_1\sqrt{r}} + \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{r} + p_2\sqrt{a + p_1\sqrt{r}}}.$$

*) Для этого припишемъ къ внѣшнему радикалу наиболѣе общей функціи f_{n-1} порядка $n-1$, коэффиціентъ p_{n-1}, разумѣя подъ p_{n-1} нуль или 1-цу, и сложимъ функцію, сходную съ f_{n-1}, съ радикаломъ $\sqrt{f_{n-1}}$.

§ 8. Пусть $\sqrt{r}$ будетъ одинъ изъ радикаловъ квадраторадикальной функціи f; $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \ldots$ тѣ радикалы функціи f, въ составъ которыхъ $\sqrt{r}$ не входитъ. *Если никакое соединеніе радикаловъ $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$, ... и данныхъ количествъ посредствомъ раціональныхъ дѣйствій не способно привести къ функціи φ, равной радикалу $\sqrt{r}$, то говорятъ, что радикалъ $\sqrt{r}$* **неприводимъ** *къ радикаламъ функціи f.* Въ противномъ случаѣ радикалъ $\sqrt{r}$ можетъ быть исключенъ изъ функціи f замѣщеніемъ его функціей φ, причемъ порядокъ функціи f понизится. Когда каждый изъ радикаловъ функціи f неприводимъ относительно остальныхъ радикаловъ, то функцію f называютъ *неприводимой.* Въ неприводимой функціи внѣшній радикалъ не равенъ никакой раціональной совокупности остальныхъ радикаловъ.

Пусть будетъ $\sqrt{r} = \varphi$, гдѣ φ раціональная совокупность, радикаловъ функціи f, въ составъ которыхъ $\sqrt{r}$ не входитъ.

Если родъ функціи φ выше рода n радикала $\sqrt{r}$, то одинъ изъ радикаловъ, коихъ родъ выше n, есть внѣшній радикалъ φ. Пусть это будетъ $\sqrt{r_1}$, такъ что $\sqrt{r} = \varphi = a + b\sqrt{r_1}$; слѣдовательно, радикалъ $\sqrt{r_1}$ можно выразить раціонально въ радикалахъ одного съ нимъ рода и нисшихъ родовъ, ибо $\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{r} - a}{b}$. Поэтому

I. Если каждый радикалъ функціи f неприводимъ къ радикаламъ одного съ нимъ рода и нисшихъ родовъ, то функція не содержитъ совсѣмъ радикаловъ, приводимыхъ къ остальнымъ ея радикаламъ, т. е. f есть неприводимая функція.

II. Если неприводимая функція $f = a + b\sqrt{r}$ равна нулю, то $a = 0$; $b = 0$, ибо въ противномъ случаѣ могли бы выразить радикалъ $\sqrt{r}$ раціональною совокупностью остальныхъ радикаловъ функціи f, именно

$$\sqrt{r} = -\frac{a}{b}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если неприводимая функція n—аго порядка равна нулю, то 2^n коэффиціентовъ, входящихъ въ ея составъ, порознь равны нулю.

III. Если двѣ неприводимыя функціи f и F равны, то будетъ одно изъ двухъ: 1) либо одна изъ функцій, напр. f, несходна съ другой F, и тогда внѣшній радикалъ $\sqrt{r}$, которымъ f отличается отъ F (§ 5, слѣдст. II) будетъ приводимъ къ остальнымъ радикаламъ группы функцій F, f, ибо изъ равенства $f = F$ можно будетъ опредѣлить $\sqrt{r}$; либо 2) функціи f и F взаимно сходны и въ отношеніи общаго внѣшняго радикала $\sqrt{r}$ онѣ могутъ быть представлены въ видѣ $f = a + b\sqrt{r}$; $F = A + B\sqrt{r}$, причемъ $a = A$; $b = B$, что на основаніи предыдущаго выводится изъ равенства $f - F = 0 = (a - A) + (b - B)\sqrt{r}$.

Теорема I. *Для того, чтобы радикалъ $\sqrt{R}$, извлекаемый изъ неприводимой квадраторадикальной функціи $R = p\,(a + b\sqrt{r})$, гдѣ $\sqrt{r}$ внѣшній радикалъ функціи R, былъ приводимъ къ радикаламъ заключа-*

ющимся въ R, необходимо и достаточно, чтобы модуль $\sqrt{m}$ функціи $a+b\sqrt{r}$ по радикалу $\sqrt{r}$ былъ прводимъ къ радикаламъ группы p, a, b, r и чтобы къ радикаламъ этой группы приводился одинъ изъ радикаловъ $\sqrt{\frac{1}{2}p(a+\sqrt{m})}$, $\sqrt{\frac{1}{2}p(a-\sqrt{m})}$

Если радикалъ $\sqrt{R}$ приводимъ къ радикаламъ, входящимъ въ его составъ, то

$$\sqrt{p(a+b\sqrt{r})}=A+B\sqrt{r},$$

гдѣ A и B функціи, сходныя съ группой p, a, b, r. Далѣе имѣемъ

$$p(a+b\sqrt{r})=(A+B\sqrt{r})^2.$$

Сравнивая модули обѣихъ частей по радикалу $\sqrt{r}$, имѣемъ (§ 6, теор. I)

$$\pm p\sqrt{m}=A^2-B^2r \tag{1}$$

Сверхъ того изъ предпослѣдняго равенства получаемъ

$$pa=A^2+B^2r \tag{2}$$

$$pb=2AB \tag{3}$$

Складывая рав. (1) и (2), находимъ

$$A=\pm\sqrt{\frac{1}{2}p(a\pm\sqrt{m})} \tag{4}$$

и, подставивъ въ (3), имѣемъ

$$B=\pm\frac{a\mp\sqrt{m}}{br}\sqrt{\frac{1}{2}p(a\pm\sqrt{m})},$$

поэтому

$$\sqrt{R}=\sqrt{p(a+b\sqrt{r})}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}p(a\pm\sqrt{m})}\left\{1+\frac{a\mp\sqrt{m}}{br}\sqrt{r}\right\}\ldots \tag{5}$$

Изъ рав. (1) усматриваемъ, что $\sqrt{m}$ есть радикалъ, приводимый къ радикаламъ гуппы p, A, B, r, или, a fortiori, къ радикаламъ группы p, a, b, r такъ какъ A и B суть функціи, сходныя съ группой p, a, b, r.

Точно также изъ рав. (4) усматриваемъ, что одинъ изъ радикаловъ $\sqrt{\frac{1}{2}p(a+\sqrt{m})}$; $\sqrt{\frac{1}{2}p(a-\sqrt{m})}$ приводимъ къ радикаламъ группы p, a, b, r, а такъ какъ рав. (5) существуетъ тождественно, въ чемъ убѣждаемся, возвышая обѣ части въ квадратъ, то теорема доказана.

Примѣчаніе. Легко усмотрѣть, что изъ двухъ радикаловъ $\sqrt{\frac{1}{2}p(a+\sqrt{m})}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}p(a-\sqrt{m})}$ только одинъ можетъ быть приводимъ къ радикаламъ группы p, a, b, r, ибо въ противномъ случаѣ и произведеніе $\sqrt{\frac{1}{2}p(a+\sqrt{m})}.\sqrt{\frac{1}{2}p(a-\sqrt{m})}$, равное $\frac{1}{2}pb\sqrt{r}$, было-бы приводимо къ радикаламъ группы p,a,b,r, а въ такомъ случаѣ $\sqrt{r}$ можно было-бы выразить раціонально въ радикалахъ группы p,a, b,r, чего нельзя допустить, когда R неприводимая функція; слѣдовательно, въ рав. (5) радикалъ $\sqrt{m}$ имѣемъ опредѣленный знакъ.

Теорема II. *Пусть R будетъ неприводимая квадраторадикальная функція и $\sqrt{R}$ радикалъ, неприводимый къ радикаламъ*

$$\sqrt{\varrho_1},\ \sqrt{\varrho_2}\ldots\ldots \qquad (\varrho)$$

въ немъ заключающимся. Пусть далѣе

$$\sqrt{r_1},\ \sqrt{r_2},\ldots\ldots\sqrt{r_\kappa},\ldots\ldots\sqrt{r_n} \qquad (r)$$

будутъ радикалы, въ составъ которыхъ $\sqrt{R}$ не входитъ и которые вмѣстѣ съ радикалами (ϱ) составляютъ систему неприводимыхъ радикаловъ. Предположимъ наконецъ, что къ ряду (r) приписаны всѣ внутренніе его радикалы, не входящіе въ составъ радикаловъ (ϱ). Для того, чтобы радикалъ $\sqrt{R}$ былъ приводимъ къ радикаламъ (ϱ) и (r), необходимо и достаточно, чтобы радикалъ $\sqrt{P}$, равный произведенію радикала $\sqrt{R}$ на нѣкоторые изъ радикаловъ (ϱ) и (r), былъ приводимъ къ радикаламъ, заключающимся въ P.

Для того, чтобы радикалъ $\sqrt{R}$, неприводимый къ радикаламъ (ϱ), былъ приводимъ къ радикаламъ (ϱ) и (r), нужно чтобы $\sqrt{R}=\varphi$, гдѣ φ есть раціональная совокупность радикаловъ (ϱ) и (r). Внѣшніе радикалы

$$\sqrt{r_1},\ \sqrt{r_2},\ \ldots.\ \sqrt{r_\kappa}$$

ряда (r) будутъ внѣшними радикалами φ, поэтому

$$\sqrt{R}=\varphi=a_1+b_1\sqrt{r_1},$$

гдѣ b_1 отлично отъ нуля. Отсюда

$$R=a_1{}^2+b_1{}^2r+2a_1b_1\sqrt{r_1},$$

что по § 8, III предполагаетъ $a_1=0$, такъ что

$$\sqrt{R}=\varphi=b_1\sqrt{r_1},$$

т. е. внѣшній радикалъ функціи φ, не входящій въ составъ R, есть множитель функціи φ, поэтому

$$\sqrt{R}=b_\kappa\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\ \ldots.\sqrt{r_\kappa}$$

или

$$\sqrt{Rr_1r_2..r_\kappa}=b_\kappa r_1r_2\ldots.r_\kappa=\varphi_1.$$

Если въ произведеніи $Rr_1r_2\ldots r_\kappa$ не уничтожается ни одинъ изъ радикаловъ, входящихъ въ составъ $R, r_1, r_2, \ldots, r_k$, то φ_1 есть функція, сходная съ $Rr_1 r_2 \ldots r_k$, а потому радикалъ $\sqrt{Rr_1 r_2 \ldots r_k}$, равный произведенію радикаловъ $\sqrt{R}$, $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}, \ldots \sqrt{r_k}$, будетъ приводимъ къ радикаламъ въ немъ заключающимся и теорема доказана. Въ противномъ случаѣ функція φ_1 можетъ отличаться отъ $Rr_1 \ldots r_k$ нѣкоторыми уничтожившимися радикалами $\sqrt{r'_1}$, $\sqrt{r'_2} \ldots$ и тогда докажется, что внѣшніе изъ этихъ радикаловъ суть множители φ_1 и т. д. Такимъ образомъ придемъ къ выводу, что радикалъ $\sqrt{P}$, равный

$$\sqrt{R} \,.\, \sqrt{r_1} \ldots\ldots \sqrt{r_k}\ \sqrt{r'_1} \ldots\ldots \sqrt{r'_{k'}}, \ldots\ldots = \sqrt{Rr_1 \ldots r_k\, r'_1 \ldots r'_{k'} \ldots},$$

приводимъ къ радикаламъ, въ немъ заключающимся, т. е. $\sqrt{Rr_1 \ldots r_k\, r'_1 \ldots r'_{k'}, \ldots} = \psi$, гдѣ ψ есть функція, сходная съ $Rr_1 \ldots r_k\, r'_1 \ldots r'_{k'} \ldots$, откуда $\sqrt{R} = \psi . \dfrac{\sqrt{r_1} \ldots \sqrt{r_k}\ \sqrt{r'_1} \ldots \sqrt{r'_{k'}} \ldots}{r_1 \ldots r_k\, r'_1 \ldots r'_{k'}}$, что и требовалось доказать.

Послѣднихъ двухъ теоремъ вполнѣ достаточно для обращенія квадраторадикальной функціи въ неприводимую. Достаточно показать это на частномъ примѣрѣ.

Примѣръ: Не вводя новыхъ радикаловъ въ функцію

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}},$$

обратить ее въ неприводимую, если она приводима.

α) Радикалы перваго рода $\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$ неизвлекомы и неприводимы другъ къ другу, ибо произведеніе $\sqrt{6} \,.\, \sqrt{10} = \sqrt{60}$ неприводимо къ раціональному числу. (Теор. II).

β) Радикалъ второго рода $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ неприводимъ къ радикалу $\sqrt{6}$, ибо хотя модуль $\sqrt{m}$ (теор. I) функціи $5 + 2\sqrt{6}$ по радикалу $\sqrt{6}$ равенъ раціональному количеству ± 1, но ни одинъ изъ радикаловъ $\sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm 1)}$ неприводимъ къ раціональному числу, какъ это должно быть по теор. I. Радикалъ $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ неприводимъ также къ радикаламъ $\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$ ибо произведеніе $\sqrt{10} . \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$, равное $\sqrt{10(5 + 2\sqrt{6})}$ неприводимо къ радикалу $\sqrt{6}$ (теор. II и I). Точно также убѣдимся, что радикалъ второго рода $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ неприводимъ къ радикаламъ $\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$.

γ) Такимъ образомъ предложенная функція можетъ быть приводима только въ томъ случаѣ, когда радикалы второго рода приводимы взаимно (§ 8, I), что по теор. II возможно только тогда, когда радикалъ $\sqrt{P}$, равный $\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})(7 + 2\sqrt{10})}$, приводимъ къ радикаламъ

$\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$. Примѣняя теор. I, имѣемъ:

$$p=5+2\sqrt{6};\ a=7;\ b=2;\ \sqrt{r}=\sqrt{10};\ \sqrt{m}\ =\pm 3;$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}p(a\pm\sqrt{m})}=\sqrt{\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})(7\pm 3)}.$$

Послѣдній радикалъ приводимъ къ заключающимся въ немъ радикаламъ, когда беремъ передъ 3-мя знакъ (—).

Дѣйствительно, по теор. (1) убѣждаемся, что

$$\sqrt{2(5+2\sqrt{6})}=\pm(2+\sqrt{6}),$$

поэтому по рав. (5) находимъ

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}.\ \sqrt{7+2\sqrt{10}}=\pm(2+\sqrt{6})\,(1+\frac{1}{2}\sqrt{10}).$$

Опредѣливъ отсюда $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, получимъ

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\pm\frac{1}{2}(2-\sqrt{6})\,(2+\sqrt{10})\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$$

Подставивъ это значеніе радикала $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ въ данную функцію, сдѣлаемъ ее неприводимой:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\left\{1\pm\frac{1}{2}(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{10})\right\}\sqrt{5+2\sqrt{10}}.$$

Здѣсь возможно еще дальнѣйшее пониженіе порядка функціи черезъ введеніе новыхъ радикаловъ, но вопросъ о приведеніи порядка и рода квадраторадик. функціи къ minimum'у составитъ предметъ слѣдующихъ главъ.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

С. Шатуновскій (Одесса).

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый Государь
Г. Редакторъ!

Въ № 153 Вѣст. Оп. Физики на стр. 196 приведена поправка, гдѣ говорится, что „частное г. Никульцева не вѣрно". Эти слова относятся къ дѣленію

$$97{,}86:1{,}2=\frac{9786}{100}:\frac{12}{10}=81\frac{11}{20},$$

которое не заключаетъ ошибки. Поэтому позволяю себѣ надѣяться, что въ одномъ изъ ближайшихъ нумеровъ редакція сдѣлаетъ оговорку, что упомянутая поправка должна считаться недѣйствительною. Что касается замѣчанія, сдѣланнаго г. Коваржикомъ на стр. 122 въ № 150 Вѣст. Оп. Физики по поводу сказаннаго дѣленія, что „примѣръ подобранъ г. Никульцевымъ неудачно, потому что въ частномъ именно получается конечная десятичная дробь", то его нельзя признать умѣстнымъ, такъ какъ изъ упоминанія, что десятичныя дроби дѣлятся по правилу дѣленія обыкновенныхъ дробей обыкновенно въ томъ случаѣ, когда частное не можетъ быть выражено конечною десятичною дробью, нельзя заключить, что въ другихъ случаяхъ такой способъ дѣленія десятичныхъ дробей не примѣнимъ и не практикуется. А потому не было основанія требовать отъ автора, чтобы, при примѣненіи къ десятичнымъ дробямъ правила дѣленія обыкновенныхъ дробей, онъ привелъ примѣръ, гдѣ частное выражалось-бы періодическою дробью; не было также основанія упрекать его за то, что онъ помѣстилъ въ своей книгѣ вышеуказанный примѣръ, а не какой-нибудь другой, ибо послѣдній данъ въ видахъ ознакомленія со способами дѣленія десятичныхъ дробей, а не для указанія, какого рода можетъ быть частное при этомъ.

Примите увѣреніе въ искреннемъ къ Вамъ уваженіи.

Инспектирующій учитель Александровскаго Смоленскаго реальнаго училища

П. Никульцевъ.

1893 г. 9 февраля.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый способъ опредѣленія точекъ плавленія неорганическихъ веществъ даетъ проф. Потылицынъ, такъ какъ существующіе до сихъ поръ способы не всегда удобны и часто даютъ ненадежные результаты.

Для опредѣленія точекъ плавленія веществъ, плавящихся не выше 450—460°, способъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ. Берутъ стеклянную трубку около 1/2 цм. въ поперечникѣ и около 5—6 дец. длины. Одинъ конецъ оттягиваютъ въ волосную трубочку, а другой загибается сначала подъ прямымъ угломъ, а затѣмъ — на разстояніи около 15 цм. отъ изгиба—дугообразно и представляетъ открытый манометръ (поэтому способъ и названъ манометрическимъ). Для опредѣленія точки плавл. кончикъ волосной трубки погружается въ каплю расплавленнаго испытуемаго вещества, которое, войдя въ трубку, образуетъ столбикъ въ 3—4 мм. длины; въ манометръ наливаютъ немного ртути, замыкающей воздухъ, заключенный въ трубкѣ между столбикомъ вещества и ртутью. Затѣмъ волосная трубка съ термометромъ вставляется посредствомъ пробки въ широкую пробирку такой длины, чтобы въ ней свободно помѣщался весь главный термометръ. Пробирка, служащая воздушной баней, вмѣстѣ съ волосной трубкой и термометромъ нагрѣвается помощью ванны изъ сплава Вуда или изъ сплава 30 ч. олова съ 70 ч. свинца (точ. пл. около 187°).

При нагрѣваніи воздухъ, заключенный въ трубкѣ, расширяется, давитъ на ртуть въ манометрѣ и уровень ея повышается; въ моментъ же плавленія воздухъ, находящійся подъ давленіемъ столбика ртути въ нѣсколько сантиметровъ, выталкиваетъ вещество изъ кончика волосной трубки и вмѣстѣ съ тѣмъ падаетъ уровень ртути въ открытомъ коленѣ.

Для бромистаго серебра изъ 9 опытовъ получилась средняя температура плавленія 428,60°; средняя погрѣшность отдѣльнаго наблюденія ±0,115°; вѣроятная погрѣшность ±0,077°, а раньше этого Карнелли для точ. пл. бромистаго серебра далъ числа: въ 1876 году 434°±2° и въ 1878 г. — 427°±4,5°.

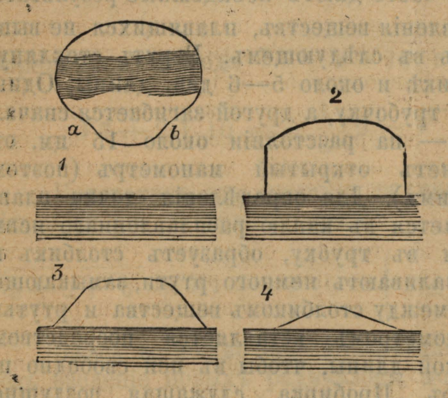
Для опредѣленія точекъ плавленія веществъ, плавящихся при температурахъ выше 450°, употребляется та же трубка, или же волосная частъ ея замѣняется платиновой или серебряной. Воздушной баней служитъ желѣзная открытая съ обоихъ концовъ трубка, нагрѣваемая при помощи особой кольцеобразной ванны изъ сплава олова и свинца.

Верхній конецъ желѣзной трубки снабженъ крышкой съ отверстіемъ, куда вставляется трубка съ волоснымъ кончикомъ и подвѣшивается кусокъ платины на платиновой же проволокѣ, нижній конецъ желѣзной трубки во время нагрѣванія закрывается выдвижной заслонкой. Ванна изъ сплава нагрѣвается (очень медленно около точки плавленія тѣла) кольцеобразной горѣлкой и снабжена мѣшалкой.

Въ моментъ передвиженія ртути въ манометрѣ, т. е. въ моментъ плавленія вещества, нижняя заслонка желѣзной трубки выдвигается и кусокъ нагрѣтой платины падаетъ въ придвинутый подъ нее калориметръ. По нагрѣванію же послѣдняго опредѣляютъ искомую температуру.

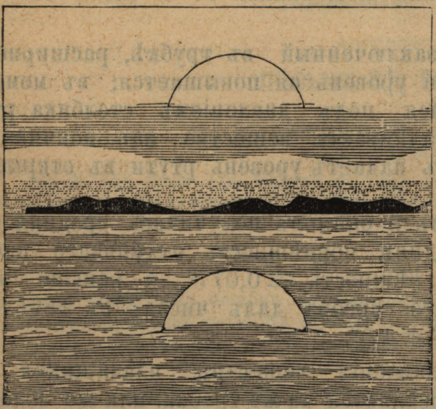
П. П.

Измѣненія контура заходящаго солнца. Въ № 1 жунала *L'Astronomie* напечатано слѣдующее письмо *E. M. Antoniadi* изъ Константинополя.



Фиг. 6.

«Имѣю честь сообщить вамъ объ интересномъ наблюденіи, сдѣланномъ мною надъ солнцемъ, заходившимъ за Мраморное море, къ югу отъ Константинополя. Дневное свѣтило приближалось къ горизонту, когда я замѣтилъ на дискѣ его двѣ вырѣзки, обозначенныя черезъ *a* и *b* на фиг. 6 (1). Дуга *ab*, заключающаяся между этими двумя вырѣзками, отличная по своей кривизнѣ отъ остальной части контура диска, какъ казалось, образовала значительную выпуклость къ горизонту. Когда около трети диска скрылось въ море, общій видъ солнца сталъ такимъ, какъ изображено на фиг. 6 (2). Затѣмъ дискъ принялъ форму трапеціи (3), и, незадолго до захожденія, — равнобедреннаго треугольника со слегка притупленной вершиной (4). Рисунки не заключаютъ никакихъ преувеличеній и вѣрно передаютъ то, что я наблюдалъ.»



Фиг. 7.

Весьма интересный заходъ солнца наблюдался также 29-го іюля (н. с.) 1892 г. съ вершины горы Гамильтонъ, гдѣ расположена обсерваторія Lick. Передъ закатомъ облако скрыло нижнюю половину солнца (фиг. 7); ниже былъ видѣнъ горный хребетъ, выдающійся изъ тумана, покрывавшаго тогда, какъ казалось, всѣ равнины до-

Тихаго Океана. Въ этомъ туманѣ было усмотрѣно второе солнце, совершенно подобное первому, но менѣе блестящее, которое какъ-бы заходило въ туманъ. *В. Г.*

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

Летательный снарядъ Баттея имѣетъ форму сигары, сильно заостренной на концахъ. Остовъ сигары сдѣланъ изъ тонкихъ алюминіевыхъ обручей, на которые натянута плотная шелковая ткань. Впослѣдствіи Баттей думаетъ замѣнить ее цѣльнымъ сфероидомъ изъ алюминія. Наполняется снарядъ водородомъ. Съ боковъ на горизонтальной оси (полый алюминіевый стержень) насажены крылья — одинаковой съ аэростатомъ длины, для регулированія движенія при подъемѣ и спускѣ. Движеніемъ крыльевъ управляютъ воздухоплаватели, находящіеся въ особомъ кузовѣ, при помощи веревокъ. Двигательный снарядъ состоитъ изъ широкой конусообразной трубки, обращенной широкимъ отверстіемъ наружу, а узкій ея конецъ придѣланъ къ горизонтальному стержню, прикрѣпленному къ задней оконечности аэростата. На конической трубкѣ установлена вертикально длинная трубка, начиненная съ низа до верха разрывными пулями. Нижній ея конецъ, входящій въ конусъ, закрывается клапаномъ, который при помощи часового механизма періодически открывается и выпускаетъ по одной пулѣ въ конусъ. Послѣдняя падаетъ на находящуюся подъ ней металлическую ложечку, замыкаетъ токъ, подъ вліяніемъ котораго разрывается. Газы вылетаютъ черезъ широкое отверстіе конуса и силою отдачи толкаютъ летательный снарядъ впередъ, въ горизонтальной плоскости. Съ двигателемъ сообщается система зубчатыхъ колесъ, управляющая направленіемъ снаряда.

Алюминіевые грифели весьма удобны для писанія на аспидныхъ доскахъ, такъ какъ даютъ отчетливые бѣлые штрихи, легко стирающіеся мокрой губкой. Кромѣ того они не ломаются, и не требуютъ точенія. Открытіе это сдѣлалъ нѣкто фонъ-Силихъ въ Мейнингенѣ.

Телефотъ. Такъ называется новый американскій сигнальный аппаратъ, состоящій изъ 106 лампочекъ накаливанія въ 32 свѣчи каждая, расположенныхъ на высокомъ (4 саж.) столбѣ такъ, чтобы изъ нихъ возможно было составить всѣ буквы азбуки Морзе. Лампочки соединены съ клавишами сигнальнаго станка и даютъ возможность передать въ минуту до 70 буквъ алфавита Морзе, видимыхъ днемъ — за 4, а ночью — за 10 и болѣе верстъ.

Гидрофонъ — снарядъ, изобрѣтенный американскимъ капитаномъ Макъ-Эвойемъ и предназначенный возвѣщать о приближеніи къ береговому посту миноноски или какого-либо судна. Снарядъ состоитъ изъ желѣзнаго колокола въ 2 мм. толщины и 50 цм. вышины и ширины, погруженнаго въ воду на глубину 10 — 25 метровъ. Внутри колокола въ воздушной атмосферѣ помѣщена пластинка въ мѣдной рамѣ. Опыты показали, что сотрясенія воды отъ винтового судна, находящагося даже за 800—1600 метровъ отъ колокола, достаточно для возбужденія вибрацій въ пластинкѣ. Вибраціи эти при помощи особаго приспособленія заставляютъ колебаться стрѣлку гальванометра помѣщеннаго на берегу. При усиленіи послѣднихъ колебаній стрѣлка все ближе подходитъ къ имѣющемуся на приборѣ магниту, пока онъ не заставитъ ее уклониться еще дальше, до прикосновенія съ полюсомъ батареи. Тогда замыкается токъ и появляется искра, служащая предупрежденіемъ о приближеніи къ колоколу судна.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ Гёттингенѣ образовался комитетъ изъ профессоровъ Клейна, Рике, Шеринга, Шура, Фойгта и Г. Вебера для сооруженія тамъ **памятника Карлу Фридриху Гауссу и Вильгельму Веберу**. Взносы могутъ быть направляемы до 1 апр. 1893 г. въ банкирскую контору Siegfrid Benfey (Göttingen).

Джорджъ Биддэлль Эри, знаменитый англійскій астрономъ, бывшій директоръ Гринвичской Обсерваторіи, скончался 2-го января (н. с.). Онъ родился 27 іюля 1801 г. и, окончивши Кэмбриджскій университетъ, занялъ сперва каѳедру математики, затѣмъ (1828 г.) астрономіи, сдѣлавшись въ то-же время директоромъ Кэмбриджской Обсерваторіи, а въ 1835 г. былъ назначенъ Королевскимъ Астрономомъ и директоромъ Гринвичской Обсерваторіи; отъ послѣдняго поста онъ отказался 15-го августа 1881 года. Помимо астрономическихъ работъ онъ извѣстенъ изслѣдованіями надъ плотностью земной коры, при помощи наблюденій надъ качаніями маятника въ глубокихъ шахтахъ.

Способъ искусственнаго полученія алмаза открытъ извѣстнымъ французскимъ химикомъ Henry Moissan'омъ. Подробности этого открытія сообщимъ въ одномъ изъ ближайшихъ №№ „Вѣстника Оп. Физики".

Примѣръ волноусмиряющаго дѣйствія масла. Пароходъ „Bourgogne" вышелъ 14-го дек. 1892 г. изъ Нью-Іорка въ Гавръ; въ ночь на 18-е дек. барометръ сильно упалъ и скоро разразилась страшная буря, которая продолжалась болѣе пяти часовъ. Свѣшенные съ боковъ, носа и кормы парусинные мѣшки съ льнянымъ масломъ настолько укротили волны, что пароходъ благополучно продолжалъ плаванье и 23 дек. прибылъ въ Гавръ.

Новое примѣненіе индукціи на разстояніи было испробовано въ Америкѣ для передачи сигналовъ со станціи поѣзду на ходу и обратно. Первоначально подобные опыты были произведены въ Англіи. Тамъ протягивали проволоку между рельсами, нѣсколько выше желѣзнодорожнаго полотна, но проволока эта представляла столько неудобствъ движущемуся поѣзду, что пришлось отказаться отъ примѣненія этого способа. Американцы Пирлъ и Эдисонъ нашли, что проволока можетъ быть установлена и на значительномъ разстояніи отъ рельсовъ (7—8 саж.) на подобіе телеграфной, если только расположить надъ вагонами металлическія пластины, ничѣмъ не соединенныя съ проволокой.

При помощи индуктивныхъ токовъ могутъ быть такимъ образомъ передаваемы сигналы со станціи поѣзду на полномъ ходу и обратно. Опыты, произведенные на одной изъ пригородныхъ линій въ Нью-Іоркѣ, увѣнчались полнымъ успѣхомъ.

Новая электрическая желѣзная дорога будетъ сооружена между Чикаго и Сенъ-Луи. Разсчитываютъ открыть движеніе къ началу всемірной выставки въ Чикаго. Длина линіи, которая предполагается четырехколейной, — 420 верстъ. Поѣзда будутъ прицѣплены къ заостреннымъ спереди локомотивамъ, а токи пройдутъ по воздушнымъ проводамъ, которые въ то-же время будутъ снабжать электричествомъ лежащіе по пути города и села. Средняя скорость новой дороги — 160 верстъ въ 1 часъ, экстренная — 250 верстъ.

Послѣднее полное солнечное затменіе въ текущемъ столѣтіи произойдетъ 16 апр. (н. с.) сего года. Полоса полнаго затменія пройдетъ отъ южной части Великаго океана черезъ Чили (29^0 ю. широты) и Бразилію (до экватора), Атлантическій океанъ, коснется берега Африки подъ 14^0 с. широты между Моалемъ и Дакаромъ и окончится въ сѣверной части Африки. Для наблюденія этого затменія снаряжается рядъ экспедицій: французская экспедиція устраиваетъ станцію на берегу Сенегала въ Жоалѣ, англійское правительство снаряжаетъ двѣ экспедиціи: въ Бразилію и Африку близъ Сенегала, американскія ученыя общества снаряжаютъ рядъ экспедицій въ Чили и Бразилію. Надѣемся въ свое время познакомить читателей съ результатами этихъ наблюденій.

Наивысшее атмосферное давленіе наблюдалось вечеромъ 14-го минувшаго января въ Иркутской Обсерваторіи и равно 807,5 мм. До сихъ поръ за максимумъ давленія принималось число 802,5 мм., наблюдавшееся 17-го декабря 1877 г. въ Барнаулѣ [1]). Правда, около того-же времени, 16-го дек. 1877 г. въ Семипалатинскѣ наблюдалось давленіе 807.7 мм., но число это сомнительно. Максимумъ въ Иркутскѣ имѣлъ мѣсто при — 46^0, 3 С., а при приведеніи давленія къ уровню моря высота Иркутска надъ уровнемъ моря принята въ 491 метръ на основаніи данныхъ Сибирской нивелировки Имп. Рус. Геогр. Общества. Если даже уменьшить эту высоту на 21 метръ на основаніи позднѣйшей нивелировки инженеровъ путей сообщенія, то и тогда, какъ замѣчаетъ г. Срезневскій въ „Обзорѣ погоды за январь 1893 г.“ [2]), наблюдавшееся давленіе будетъ равно 805 мм., т. е. выше Барнаульскаго максимума.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ *).

Празднованіе 300-лѣтней годовщины дня рожденія великаго педагога Я. А. Коменскаго въ тифлисской 2-ой гимназіи. (Прилож. къ Циркуляру по управленію Кавказскимъ Учебн. Округомъ за 1892 годъ, № 10). Тифлисъ. 1892.

---

[1]) А. А. Тилло „О распредѣленіи давленія“ стр. 208—214.
[2]) „Метеорологическій Вѣстникъ“ за 1893 г. № 2, стр. 86.
*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 158, стр. 41.

Увлеченіе математическими теоріями въ современной наукѣ. *И. О. Ярковскаго.* Москва. 1893. Ц. 40 к.

Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи. Составилъ *Н. Рыбкинъ.* 2-е изданіе, исправленное и дополненное. Москва. 1893. Ц. 30 к.

Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи, издаваемыя *Г. Вильдомъ.* 1891 годъ. Часть I. Метеорологическія и магнитныя наблюденія станцій 1 разряда и экстраординарныя наблюденія станцій 2 и 3 разряда. Спб. 1892.

— Часть II. Метеорологическія наблюденія по международной системѣ станцій 2 разряда въ Россіи. Спб. 1892.

Опытъ изысканія законовъ тепловой энергіи химическихъ реакцій. *Н. Умовъ.* Одесса. 1893.

Къ вопросу о катаніи поверхности по поверхности. *Г. Суслова.* (Отт. изъ Университетскихъ Извѣстій за 1892 г.). Кіевъ.

Движеніе по геодезической окружности. *Г. Суслова.* (Отт. изъ Университетскихъ Извѣстій за 1892 г.). Кіевъ.

VIII Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ. Съ рис. и двумя гипсометрическими картами Европейской Россіи. Спб. 1890. Складъ изданія въ конторѣ типографіи В. Ѳ. Демакова. Спб., Новый пер. № 7. Ц. 5 р.

— Т. II дополнительный. Редакція *А. Н. Бекетова.* Спб. 1892. Ц. 2 р.

Труды четвертаго съѣзда русскихъ естествоиспытателей въ Казани. Казань. 1875. Ц. 4 р.

Къ вопросу о нѣкоторыхъ патогенныхъ микроорганизмахъ. Сообщеніе *I. М. Шиховскаго.* Москва. 1893.

Изслѣдованія по математической физикѣ. Ч. I. Общія свойства діэлектриковъ съ точки зрѣнія механической теоріи теплоты. — Ч. II. О лучистой энергіи, Прив.-доц. Имп. Моск. Университета Кн. *Б. Голицына.* Москва. 1893.

Объ абсолютныхъ размѣрахъ молекулъ. Кн. *Б. Голицына.* (Отд. отт. изъ IV т. Трудовъ Отдѣл. Физ. Наукъ Имп. Общ. Любителей Естествознанія). Москва. 1892.

Eine Methode zur Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe und der Ausdehnung von Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen. Von *B. Galitzine.* (Sep.-Abdr. aus den Annalen der Physik und Chemie. N. F. B. XLVII). Leipzig. 1892.

Ueber strahlende Energie. Von *B. Galitzine.* (Sep.-Abdr. aus den Annalen der Physik und Chemie. N. F. B. XLVII). Leipzig.

Note relative à la température critique. Par *B. Galitzine.* (Extrait du Journal de Physique, 3-me série, T. I.) Москва. 1892.

ЗАДАЧИ.

№ 446. Бертранъ допустилъ и Чебышевъ доказалъ, что при $a>1$ между числами a и $2a$ содержится простое число. Зная это, требуется опредѣлить maximum цѣлаго числа А подъ условіемъ, чтобы всякое цѣлое число, меньшее А и взаимно простое съ А, было числомъ абсолютно простымъ.

С. Шатуновскій (Одесса).

№ 447. Показать, что многочленъ

$$a^5-2a^4b+a^3b^2+a^2x^3-2abx^3+b^2x^3$$

дѣлится на

$$ax+a^2-bx-ab,$$

не выполняя дѣленія на самомъ дѣлѣ.

(Заимств.) *Ш.*

№ 448. Изъ точки О, взятой на гипотенузѣ ВС прямоугольнаго треугольника АВС, проведена произвольная сѣкущая, пересѣкающая катеты СА и АВ соотвѣтственно въ точкахъ B' и C'.
Показать что

$$\left(\frac{\beta}{OB'}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{OC'}\right)^2=1,$$

гдѣ β и γ суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки О на катеты СА и АВ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 449. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести двѣ хорды (одну — въ первой окружности, другую — во второй) такъ, чтобы уголъ между этими хордами и произведеніе ихъ были данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 450. Дана прямая и точка, лежащая внѣ прямой. Называя разстоянія отъ данной точки до точекъ, въ которыхъ прямая дѣлится на равныя части по порядку черезъ $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$, показать, что

$$a_1{}^2+2a_4{}^2=a_5{}^2+2a_2{}^2;\quad a_2{}^2+2a_5{}^2=a_6{}^2+2a_3{}^2;$$

$$a_{n-4}^2+2a_{n-1}^2=a_n^2+2a_{n-3}^2.$$

В. Г. (Одесса).

№ 451. До какой температуры долженъ быть нагрѣтъ воздухъ, чтобы открытая труба, издающая при 0^0 тонъ *re*, издавала тонъ *mi*? Удлиненіе трубы отъ нагрѣванія въ разсчетъ не принимается.

Бхм. (Софія).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 71 (2 сер.). Доказать слѣдующій общій признакъ дѣлимости чиселъ на 9 и 11 (а слѣдовательно и на 3, на 33 и на 99). Пусть дано число N; сложимъ число, составленное первыми двумя справа его цыфрами съ третьей цыфрой; полученную сумму (считая таковую всегда за двузначное число) возьмемъ въ обратномъ порядкѣ и сложимъ съ четвертой цыфрой, и т. д.

Если послѣдняя такъ получаемая сумма дѣлится на 9 или на 11, то и все число N должно дѣлиться на 9 или на 11. (Напр. $N=598752$; $52+7=59$; $95+8=103$, $(30+10)+9=49$; $94+5=99$).

Несомнѣнно, что

$$10=\frac{1}{10}\left(99+1\right);\ 10^2=\frac{1}{10}\left(99.10+10\right);\quad 10^3=\frac{1}{10}\left(99.10^2+10^2\right)$$

$$10^4=\frac{1}{10}\left(99.10^3+10^3\right);\ \ldots;\ 10^{n-1}=\frac{1}{10}\left(99.10^{n-2}+10^{n-2}\right)$$

Если данное число изображается черезъ

$a_n\,a_{n-1}\,\ldots.\,a_3\;a_2\;a_1$, то найдемъ

$$a_1=\frac{1}{10}.10a_1$$

$$10a_2=\frac{1}{10}\left(99a_2+a_2\right)$$

$$10^2a_3=\frac{1}{10}\left(99.10a_3+10a_3\right)$$

$$10^3a_4=\frac{1}{10}\left(99.10^2a_4+10^2a_4\right)$$

. . . .

$$10^{n-1}a_n=\frac{1}{10}\left(99.10^{n-2}a_n+10^{n-2}a_n\right)$$

Сложивъ эти равенства почленно, получимъ

$$N=\frac{1}{10}\left\{99\ a_n\,a_{n-1}\ldots a_3\ a_2+\left(a_n\,a_{n-1}\ldots a_3a_2+10a_1\right)\right\}$$

или

$$10\ N=99a_n\,a_{n-1}\ldots a_4\ a_3\ a_2+\left(a_n\,a_{n-1}\ldots a_3\ a_2+10a_1\right)$$

Отсюда видно, что число N дѣлится на 9 и 11 тогда, когда на эти числа дѣлится сумма $a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 + 10a_1$. Но это послѣднее число есть ни что иное, какъ сумма единицъ даннаго числа, принимаемыхъ въ значенiи десятковъ и десятковъ, принимаемыхъ за единицы. Поступая съ этой суммой какъ съ N, получимъ искомое доказательство.

П. Андреяновъ (Москва); *Я. Ястржембовскiй* (Курскъ).

№ 257 (2 сер.). Цилиндрическiй стержень, длина котораго l цм. и удѣльный вѣсъ d, плаваетъ въ двухъ несмѣшивающихся жидкостяхъ, удѣльные вѣса которыхъ равны d_I и d_{II}. Слой верхней жидкости имѣетъ глубину h. Опредѣлить высоту стержня, находящуюся надъ поверхностью болѣе легкой жидкости.

Называя высоту части стержня надъ жидкостью черезъ x, можемъ написать

$$ld = hd_I + d_{II}\,(l-h-x),$$

откуда

$$x = \frac{l\,(d_{II}-d) - h.\,(d_I - d_{II})}{d_{II}}.$$

А. Полозовъ, *В. Костинъ* (Симбирскъ); *П. Андреяновъ* (Москва); *Ч. Рыбинскiй* (Скопинъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Н. Архиповъ* (Пермь).

№ 269. (2 сер.). Найти сумму ряда

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}+2}{2} + \frac{\frac{\frac{1}{2}+2}{2}+3}{2} + \ldots + \frac{\frac{\frac{\frac{1}{2}+2}{2}+3}{2} + \ldots + (n-1)}{2}.$$

Даннный рядъ можно написать такъ:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{17}{8} + \frac{49}{16} + \frac{129}{32} + \cdots + \frac{(n-1)\;2^n + 1}{2^n},$$

или

$$S = \frac{1}{2} + \left(1+\frac{1}{4}\right) + \left(2+\frac{1}{8}\right) + \left(3+\frac{1}{16}\right) + \left(4+\frac{1}{32}\right) + \cdots + \left[(n-1)+\frac{1}{2^n}\right],$$

или

$$S = \left[1+2+3+4+\cdots+(n-1)\right] + \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right],$$

или

$$S = \frac{1+(n-1)}{2}(n-1) + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2^n-1}{2^n}.$$

В. Костинъ (Симбирскъ); *А. П.* (Пенза); *В. Россовская, К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. Рѣзновъ* (Самара).

№ 293 (2 сер.). Показать, что апоѳема правильнаго девятиугольника равна суммѣ разстояній его центра отъ наибольшей и наименьшей изъ его діагоналей.

Пусть ABCDEF...—данный девятиугольникъ; AC меньшая и AF большая діагонали; OL его апоѳема, OM разстояніе центра отъ меньшей діагонали и ON—отъ большей.

Изъ прямоугольнаго тр-ка BOL

$$OL = r \operatorname{Sin} 70^0.$$

Изъ $\triangle$к-а AMO

$$AM = r \operatorname{Sin} 50^0;$$

изъ $\triangle$-ка AON

$$ON = r \operatorname{Sin} 10^0,$$

отсюда

$$OM + ON = r(\operatorname{Sin} 50^0 + \operatorname{Sin} 10^0) = 2r \operatorname{Sin} 30^0 \operatorname{Cos} 20^0 = r \operatorname{Sin} 70^0,$$

слѣдовательно

$$OM + ON = OL.$$

А. П. (Пенза); *О. Озаровская, А. Васильева, В. Бабанская* (Тифлисъ); *Б. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *Х. Едлинъ* (Кременчугъ); *В. Перельцвейгъ* (Полтава); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознесенскъ).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 16 Марта 1893 г.

Центральная типо-литографія, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
ищется

Обложка
пщется