Обложка
пщется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. № 127. № 7.

О КОЭФФИЦІЕНТАХЪ

ТРЕХЧЛЕНА px^2+qx+r.

(Окончаніе.)

Въ 1887 году академикъ А. А. Марковъ предложилъ мнѣ рѣшить элементарно задачу профессора Д. И. Менделѣева относительно трехчлена px^2+qx+r и редактировалъ ее такъ, какъ она ниже изложена. Онъ же при этомъ добавилъ, что задача Д. И. Менделѣева соприкасается съ общимъ вопросомъ высокоуважаемаго учителя нашего, академика П. Л. Чебышева, о функціяхъ, весьма мало отклоняющихся отъ нуля, когда данъ первый коэффиціентъ полинома n-й степени. Разсмотрѣнные мною вопросы въ № 123 В. О. Ф. дали возможность рѣшить задачу Д. И. Менделѣева и затѣмъ задачу академика Чебышева относительно только трехчлена px^2+qx+r средствами элементарной алгебры. Изъ всѣхъ задачъ, мною рѣшенныхъ, наивысшій интересъ по мысли представляетъ задача академика Чебышева, которая изложена ниже, и безъ рѣшенія ея моя работа казалась бы незаконченною.

Задача Менделѣева.

Если въ трехчленѣ px^2+qx+r мѣнять значеніе x отъ a до b, то требуется опредѣлить высшіе точные численные предѣлы для p, q и r такъ, чтобы значенія трехчлена не превышали $\pm$D.

Рѣшеніе:

Изъ условія задачи видно, что p, q и r должны удовлетворять двумъ условіямъ: во 1-хъ) p, q и r должны быть таковы, чтобы значенія трехчлена не превышали $\pm$D и во 2-хъ) хотя одно изъ чиселъ p, q и r должно имѣть наибольшее численное значеніе. На основаніи рѣшенія 6-й зад. (См. № 123 В. О. Ф.) трехчлены $p_1x^2 + q_1x + r_1$ и $p_2x^2 + q_2x + r_2$ удовлетворять первому условію, если въ коэффиціентахъ

$$p_1 = \frac{(\sqrt{A-C}+\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2},$$

$$q_1 = -\frac{2(\sqrt{A-C}+\sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C}+a\sqrt{B-C})}{(a-b)^2}$$

$$\text{и} \quad r_1 = \frac{(b\sqrt{A-C}+a\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2} + C$$

значенія A, B и C не превышаютъ $\pm$D, а въ коэффиціентахъ

$$p_2 = \frac{(\sqrt{A-C}-\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2},$$

$$q_2 = -\frac{2(\sqrt{A-C}-\sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C}-a\sqrt{B-C})}{(a-b)^2}$$

$$\text{и} \quad r_2 = \frac{(b\sqrt{A-C}-a\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2} + C$$

только значенія A и B не превышаютъ $\pm$D.

Прежде чѣмъ найти коэффиціенты p, q и r, удовлетворяющіе второму условію, покажу, что коэффиціенты p_1, q_1 и r_1 вообще болѣе коэффиціентовъ p_2, q_2 и r_2, если значенія трехчленовъ при данныхъ предѣлахъ a и b одинаковы.

Возьмемъ отношеніе

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\sqrt{A-C}+\sqrt{B-C})^2}{(\sqrt{A-C}-\sqrt{B-C})^2}$$

1) Если здѣсь A, B и C въ числителѣ равны A, B и C въ знаменателѣ, то $\frac{p_1}{p_2} > 1$, потому что числитель есть сумма, а знаменатель есть разность тѣхъ же количествъ. 2) Хотя по

условію задачи въ числителѣ C не превышаетъ $\pm D$, а въ знаменателѣ C можетъ стремиться къ $-\infty$. но все таки $\frac{p_1}{p_2} > 1$ и въ этомъ случаѣ, потому что, какъ сейчасъ покажу, p_2 стремится къ нулю, когда C стремится къ $-\infty$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$p_2 = \frac{(\sqrt{A - C} - \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{A - C} - \sqrt{B - C})^2 (\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2 (\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2} =$$

$$= \frac{(A - B)^2}{(a - b)^2 (\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2}.$$

Здѣсь послѣдняя формула, очевидно, обращается въ нуль при $C = -\infty$. Итакъ вообще $p_1 > p_2$. Теперь чтобы удовлетворить второму условію, нужно найти наибольшее численное значеніе p_1.

Изъ общей формулы $p_1 = \frac{(\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2}$ видно, что наибольшая величина p_1 не зависитъ отъ знаменателя, куда входятъ только данные предѣлы a и b, но зависитъ отъ числителя, который представляетъ сумму перемѣнныхъ слагаемыхъ A, B и C. Наибольшая же численная величина суммы получится тогда, когда каждое слагаемое достигнетъ наибольшаго численнаго своего значенія съ такимъ знакомъ, чтобы всѣ слагаемыя были одного между собой знака. Въ силу этого соображенія здѣсь нужно положить $A = B = +D$ и $C = -D$, тогда получится наибольшее численное значеніе $p_1 = \frac{8D}{(a - b)^2}$, при этомъ другіе коэффиціенты будутъ $q_1 = -\frac{8(a + b)D}{(a - b)^2}$ и

$$r_1 = \frac{D(a + b)^2 + 4abD}{(a - b)^2}.$$

Вотъ тотъ трехчленъ, въ которомъ p_1 и вообще p достигаетъ наибольшаго численнаго значенія при всякихъ a и b, потому что числитель p_1 не зависитъ отъ a и b.

Не желая увеличивать статью, я ограничиваюсь розысканіемъ наибольшаго численнаго значенія только p; но считаю нужнымъ привести полный отвѣтъ на задачу Менделѣева въ слѣдующей формѣ:

1) Когда a и b одного между собой знака, то всѣ три коэффиціента p, q и r достигаютъ своего наибольшаго численнаго значенія въ одномъ трехчленѣ (параболѣ), опредѣляемомъ коэффиціентами:

$$\text{Наибольшее численное значеніе } p = \frac{8D}{(a-b)^2}.$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } q = -\frac{8D(a+b)}{(a-b)^2} \text{ и}$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}.$$

2) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно $a > 3b$ или $b > 3a$, то только p и q достигаютъ наибольшаго численнаго значенія въ одномъ трехчленѣ, опредѣляемомъ коэффиціентами:

$$\text{Наибольшее численное значеніе } p = \frac{8D}{(a-b)^2},$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } q = -\frac{8(a+b)D}{(a-b)^2} \text{ и}$$

$$r = \frac{D(a+b)^2 + 4ab}{(a-b)^2}.$$

При этомъ наибольшее численное значеніе r получается въ другомъ трехчленѣ съ коэффиціентами $p = 0$, $q = 0$ и наиб. числ. знач. $r = -D$.

3) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно $b < a < 3b$ или $a < b < 3a$, то всѣ три коэффиціента достигаютъ наибольшаго численнаго значенія въ трехъ разныхъ трехчленахъ:

α) Трехчленъ съ наиб. числ. зн. p опредѣляется коэффиц. наиб. чис. зн. $p = \frac{8D}{(a-b)^2}$, $q = -\frac{8D(a+b)}{(a-b)^2}$ и $r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}$.

β) Трехчленъ съ наиб. числ. знач. q опредѣляется коэффиц. $p = \frac{D}{2a^2}$, наиб. числ. зн. $q = \frac{D}{a}$, $r = -\frac{D}{2}$, это при

$a < b < 3a$; или $p = \frac{D}{2b^2}$, наиб. числ. зн. $q = \frac{D}{b}$ и $r = -\frac{D}{2}$ это при $b < a < 3b$.

γ) Трехчленъ съ наиб. ч. зн. r опредѣляется коэффиціентами $p = 0$, $q = 0$ и наиб. числ. зн. $r = -D$.

4) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно равны между собою, то p и r достигаютъ своего наиб. значенія въ одномъ трехчленѣ, опредѣляемомъ коэффиціентами: наибольшее численное зн. $p = \frac{2D}{a^2}$, $q = 0$ и наиб. ч. зн. $r = -D$; а наиб. знач. q получаетъ въ трехчленѣ съ коэффиціентами $p = \frac{D}{2a^2}$, наиб. числен. зн. $q = \frac{D}{a}$ и $r = -\frac{D}{2}$.

Замѣчаніе. Въ отвѣтахъ D имѣетъ уже только абсолютное значеніе, но предѣлы a и b сохраняютъ за собой знаки.

Частный случай вопроса академика П. Л. Чебышева.

Если въ трехчленѣ $px^2 + qx + r$ данъ коэффиціентъ p, то требуется опредѣлить другіе два коэффиціента q и r такъ, чтобы наибольшее численное значеніе трехчлена было наименьшимъ для всѣхъ значеній x, лежащихъ между предѣлами a и b.

Рѣшеніе:

Положимъ, что D есть наибольшееe значеніе трехчлена $px^2 + qx + r$, т. е. при переходѣ x отъ a до b значеніе трехчлена не превышаетъ $\pm D$. Тогда на основаніи рѣшенія задачи 6-й (См. № 123 В. О. Ф.) коэффиціентъ p выразится такъ:

$$p = \frac{(\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2},$$

гдѣ A, B и C не должны превышать $\pm D$. Ясно, что въ этой формулѣ A, B и C можно выразить черезъ D съ нѣкоторымъ перемѣннымъ коэффиціентомъ Z. Такъ что вообще

$$p = ZD$$

Но на основаніи рѣшенія задачи Менделѣева

$$\text{наиб. числен. знач. } p = \frac{8D}{(a - b)^2}.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ заключаемъ, что

$$\text{наибольшее числ. знач. } Z = \frac{8}{(a-b)^2}.$$

Теперь положимъ, что въ уравненіи

$$p = ZD$$

неизвѣстная величина $p = N$ данному количеству; тогда изъ уравненія

$$ZD = N$$

получаемъ $D = \frac{N}{Z}$. Изъ этого равенства заключаемъ, что наибольшее значеніе D будетъ наименьшимъ, когда Z получитъ высшее численное значеніе $= \frac{8}{(a-b)^2}$; слѣдовательно

$$D = \frac{N}{\frac{8}{(a-b)^2}} = \frac{N(a-b)^2}{8}$$

это есть наименьшее число для наибольшаго значенія D.

Такъ какъ на основаніи рѣшенія задачи Менделѣева наиб. числен. знач. $p = \frac{8D}{(a-b)^2}$ сопровождается другими коэффиціентами

$$q = -\frac{8D(a+b)}{(a-b)^2} \text{ и } r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2},$$

то, подставляя сюда найденное значеніе для D, получимъ слѣдующій трехчленъ, удовлетворяющій условіямъ академика Чебышева:

$$\begin{cases} p = N \text{ (данное количество)} \\ q = -N(a+b) \\ r = \dfrac{N(a+b)^2 + 4abN}{8} \end{cases}.$$

при всякихъ предѣлахъ a и b.

Преп. мат. 5-й Спб. гимн. *И. Травчетовъ.*

КРАТКІЙ ОЧЕРКЪ ИСТОРІИ

ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРѢ КРУГА

въ связи съ общимъ вопросомъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой.

(Окончаніе.)

Мы приведемъ здѣсь только нѣкоторыя практическія указанія, которыя во многихъ случаяхъ могутъ служить для рѣшенія вопроса.

Если задача сводится къ рѣшенію линейныхъ уравненій или къ системѣ двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, другое второй степени, то уравненія рѣшаются въ квадратныхъ корняхъ и графическое воспроизведеніе этого рѣшенія не можетъ представлять затрудненія. Болѣе сложныя задачи приводятся къ уравненіямъ 3-й степени или къ системѣ двухъ уравненіи съ двумя неизвѣстными второй степени. Но легко показать, что и въ послѣднемъ случаѣ вопросъ о построяемости рѣшенія также приводится къ изслѣдованію уравненія 3-й степени.

Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что задача приведена къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F &= 0 \\ A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Намъ удастся выразить корни этихъ уравненій въ радикалахъ второй степени, если мы сведемъ нашу систему къ другой системѣ, въ которой одно изъ уравненій будетъ линейное. Помножимъ для этого второе уравненіе на неопредѣленный множитель h и сложимъ съ первымъ. Выберемъ затѣмъ множитель h такимъ образомъ, чтобы въ полученномъ уравненіи:

$$(A+hA_1)x^2+2(B+hB_1)xy+(C+hC_1)y^2+2(D+hD_1)x+ \\ 2(E+hE_1)y+F+hF_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

лѣвая часть разлагалась на два множителя, а для этого должно удовлетворяться уравненіе:

$$\{(B+hB_1)(D+hD_1)-(A+hA_1)(E+hE_1)\}^2-[(B+hB_1)^2- \\ -(A+hA_1)(C+hC_1)][(D+hD_1)^2-(A+hA_1)(F+hF_1)]=0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

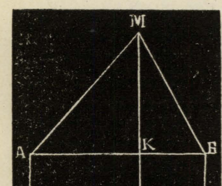
(См. „Разложеніе многочленовъ на множителей.“ „Журналъ Эл. Мат.“ II. 1.).

Лѣвая часть уравненія (3) носитъ названія дискриминанта уравненій (2). Если совершимъ указанныя дѣйствія, то уравненіе (3) послѣ надлежащихъ сокращеній представится въ видѣ:

$$Kh^3 + Lh^2 + Mh + N = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

гдѣ коэффиціенты K, L, M и N выражаются въ зависимости отъ коэффиціентовъ данныхъ уравненій. Но мы уже замѣтили выше, что уравненія высшихъ степеней, къ которымъ приводится рѣшеніе геометрическихъ задачъ, должны разлагаться на множителей, степень которыхъ имѣетъ видъ 2^n. Это замѣчаніе должно быть справедливо и для уравненія (4), ибо корни его не должны содержать радикаловъ 3-й степени. При такихъ условіяхъ лѣвая часть уравненія (4) должна разлагаться на два множителя, изъ которыхъ одинъ первой, другой второй степени. Такое разложеніе производится обыкновенно довольно просто, послѣ чего одинъ изъ корней дискриминанта будетъ найденъ; и если подставимъ его въ ур. (2), то лѣвая часть послѣдняго разложится на два множителя первой степени. Приравнивая каждый изъ нихъ нулю, мы получимъ два уравненія первой степени. Рѣшая каждое изъ нихъ съ однимъ изъ данныхъ уравненій, мы получимъ четыре системы рѣшеній, построяемыхъ циркулемъ и линейкой, если они выражаются дѣйствительными величинами.

Пояснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ: Квадратъ, построенный на діагонали даннаго прямоугольника ABCD въ 3 раза больше площади прямоугольника. Найти точку M, равноотстоящую отъ вершины A и стороны CD такимъ образомъ, чтобы разстояніе MB = AB.



Фиг. 17.

Пусть MN (фиг. 17) — перпендикуляръ, опущенный изъ точки M на основаніе CD. Согласно условію задачи имѣемъ:

$$MB = AB \text{ и } MA = MN,$$

откуда

$$MB^2 = AB^2 \text{ и } MA^2 = MN^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Если примемъ во вниманіе, что

$$AM^2 = AK^2 + MK^2$$
$$MB^2 = MK^2 + KB^2,$$

то мы представимъ равенства (A) въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} MK^2 + KB^2 &= AB^2 \\ AK^2 + MK^2 &= MN^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $AK = x$, $MK = y$, тогда $BK = a - x$, $MN = y + b$. Если подставимъ эти выраженія въ равенства B, то получимъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ x^2 - 2ax + y^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C)$$

Замѣтимъ при этомъ, что согласно условію задачи имѣетъ мѣсто соотношеніе $a^2 + b^2 = 3ab$.

Для этой системы условное ур. (4) выразится слѣдующимъ образомъ:

$$b^2h^3 + 2b^2h^2 + b^2h + a^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Но легко убѣдиться тождественнымъ преобразованіемъ, что

$$b(b^2h^3 + 2b^2h^2 + b^2h + a^2) =$$
$$= (bh + a)\{b^2h^2 + b(2b - a)h + (b - a)^2\} + a(a^2 + b^2 - 3ab)$$

и такъ какъ $a^2 + b^2 - 3ab = 0$, то уравненіе (5) имѣетъ корень $-\dfrac{a}{b}$. Дѣйствительно, если подставимъ это значеніе въ уравненіе $x^2(1 + h) - 2bhy - 2ax + y^2 - hb^2 = 0$, то лѣвая часть его разложится на два множителя:

$$\{y + a + k(x + \sqrt{ab})\}\{y + a - k(x + \sqrt{ab})\} = 0,$$

гдѣ $k = \sqrt{\dfrac{a-b}{b}}$, и система (B) замѣнится двумя системами:

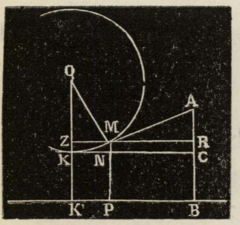
$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ y + a + k(x + \sqrt{ab}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ y + a - k(x + \sqrt{ab}) &= 0 \end{aligned}$$

Задача очевидно разрѣшима и дальнѣйшее рѣшеніе ея не представляетъ затрудненія.

Но если намъ не удастся разложить дискриминанта на множителей, то задача можетъ и не рѣшаться циркулемъ и линейкой. Однако, чтобы въ этомъ убѣдиться, мы должны доказать, что корни ур. (4) не могутъ быть выражены безъ радикаловъ третьей степени. Распорядимся для этого входящими въ условіе перемѣнными величинами такимъ образомъ, чтобы коэффиціенты L и M ур. (4) обратились въ 0. Тогда $h = -\sqrt[3]{\frac{N}{K}}$. Если $\frac{N}{K}$ не представляетъ полнаго куба, то задача въ этомъ частномъ случаѣ неразрѣшима, а слѣдовательно она подавно не рѣшается въ общемъ видѣ. При такихъ условіяхъ изслѣдованіе дискриминанта даетъ однако возможность опредѣлить рядъ частныхъ случаевъ, въ которыхъ задача можетъ быть рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, если распорядимся перемѣнными величинами такимъ образомъ, чтобы $K = 0$, то корни ур. (4) будутъ выражаться въ радикалахъ 2-й степени. Точно также задача будетъ разрѣшима, если данныя въ ней величины удовлетворяютъ соотношенію $N=0$, такъ какъ при этомъ дискриминантъ имѣетъ корень равный 0 и одно изъ уравненій непосредственно разлагается на линейные множители. Вообще, задача рѣшается во всѣхъ тѣхъ частныхъ случаяхъ, при которыхъ входящія въ заданіе величины удовлетворяютъ соотношенію

$$Km^3 + Lm^2 + Mm + N = 0,$$

гдѣ m произвольное построяемое выраженіе.



Фиг. 18.

Пояснимъ все сказанное на примѣрѣ. Положимъ, что намъ дана слѣдующая задача:

На данной окружности найти точку, равноотстоящую отъ данной прямой и данной точки *). Пусть A данная и M искомая точка (фиг. 18). Опустимъ изъ нихъ перпендикуляры AB и MP на данную прямую и черезъ середину C отрѣзка AB и черезъ точку M проведемъ прямыя MR ‖ CN ‖ BP. Изъ прямоугольнаго треугольника MAR имѣемъ:

$$MA^2 = AR^2 + RM^2,$$

и такъ какъ по условію задачи AM=MP, то

$$AR^2 + RM^2 = MP^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

*) Инымм словами требуется розыскать точки пересѣченія параболы съ произвольной окружностью.

Опустимъ теперь изъ центра O перпендикуляръ OK на прямую CN и продолжимъ линію RM до пересѣченія съ OK въ точкѣ Z. Тогда изъ прямоугольнаго треугольника MOL получаемъ:

$$MO^2 = OZ^2 + MZ^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

Обозначимъ теперь AB черезъ p, OK черезъ a и CK черезъ b; за неизвѣстныя примемъ $CN = x$ и $MN = y$. Тогда $AR = \frac{p}{2} - y$, а $MP = \frac{p}{2} + y$. Далѣе $MZ = PK = b - x$, $OZ = a - y$. Если всѣ эти величины подставимъ въ равенства (A) и (B), то получимъ систему уравненій:

$$\left(\frac{p}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 + x^2$$

$$(a + x)^2 + (b - y)^2 = r^2$$

гдѣ r—радіусъ даннаго круга. По совершеніи надлежащихъ передѣлокъ эта система представится въ видѣ:

$$x^2 - 2py = 0; \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0,$$

гдѣ $a^2 + b^2 - r^2 = k$. Если помножимъ ур. 1-е на неопредѣленный множитель h и сложимъ со второмъ, мы получимъ уравненіе, дискриминантъ котораго имѣетъ видъ:

$$p^2h^3 + p(p - 2b)h^2 + (b - 2pb - k)h + b^2 + a - k = 0.$$

Распорядимся теперь величинами p и k такимъ образомъ, чтобы $p - 2b = 0$ и $b^2 - 2pb - k = 0$. Тогда дѣйствительный корень дискриминанта равенъ $\sqrt[3]{\frac{r^2}{a^2 - r^2}}$. Задача очевидно неразрѣшима, если подкоренная величина не представляетъ собой полнаго куба. Въ частныхъ случаяхъ задача рѣшается, когда $p = 0$, т. е. когда данная точка лежитъ на данной прямой; или если $a^2 + b^2 - k = 0$; но въ этомъ случаѣ $r = 0$, окружность обращается въ точку и задача теряетъ смыслъ *). Если, наконецъ, положимъ въ дискриминантѣ $h = -1$ и полученное выраженіе приравняемъ нулю, то найдемъ, что задача рѣшается также при $a = 0$, т. е. когда центръ данной окружности лежитъ на перпендикулярѣ, опущен-

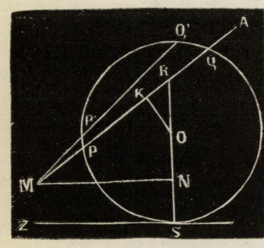
---

*) Задача въ этомъ случаѣ сводится къ тому, чтобы опредѣлить условія, при которыхъ данная точка лежитъ на данной параболѣ.

номъ изъ данной точки на данную прямую. Такихъ частныхъ случаевъ можно найти безконечное множество.

Изслѣдуемъ еще слѣдующую задачу:

Провести окружность, касающуюся данной прямой и отсѣкающую отъ двухъ другихъ прямыхъ хорды данной величины. (Фиг. 19.)



Фиг. 19.

Пусть O центръ искомой окружности. Проведемъ радіусъ OS въ точку касанія и изъ центра опустимъ перпендикуляръ OK на одну изъ хордъ. Изъ точки пересѣченія M двухъ данныхъ прямыхъ проведемъ MN параллельно третьей прямой и примемъ отрѣзки MN и ON за неизвѣстныя x и y. Введемъ также слѣдующія обозначенія: данную длину хорды PQ обозначимъ черезъ $2l$, а уголъ AMN черезъ ϑ, разстояніе между параллелями MN и ZS черезъ a. Тогда легко видѣть, что

$$OK = OR\,\mathrm{Cos}\vartheta = (RN - ON)\mathrm{Cos}\vartheta = (MN\mathrm{tg}\vartheta - ON)\mathrm{Cos}\vartheta =$$
$$= MN\mathrm{Sin}\vartheta - ON\,\mathrm{Cos}\vartheta = x\mathrm{Sin}\vartheta - x\mathrm{Cos}\vartheta.$$

Съ другой стороны, согласно нашему обозначенію $PO = y + a$.

Подставивъ эти выраженія въ равенство $PK^2 + OK^2 = PO^2$, получимъ уравненіе:

$$l^2 + (x\mathrm{Sin}\vartheta - y\mathrm{Cos}\vartheta)^2 = (y + a)^2.$$

Такимъ же точно образомъ второй хордѣ P_1Q_1 будетъ соотвѣтствовать такое же уравненіе

$$l_1{}^2 + (x\mathrm{Sin}\vartheta_1 - y\mathrm{Cos}\vartheta_1)^2 = (y + a)^2.$$

Послѣ надлежащихъ преобразованій эти уравненія примутъ слѣдующій видъ:

$$x^2 - y^2 - 2xy\mathrm{Ctg}\vartheta - 2by + m = 0$$
$$x^2 - y^2 - 2xy\mathrm{Ctg}\vartheta_1 - 2b_1y + m = 0, \text{ гдѣ}$$

$$m = \frac{l^2 - a^2}{\mathrm{Sin}^2\vartheta},\ m_1 = \frac{l_1{}^2 - a^2}{\mathrm{Sin}^2\vartheta_1},\ b = \frac{a}{\mathrm{Sin}^2\vartheta},\ b_1 = \frac{a}{\mathrm{Sin}^2\vartheta_1}.$$

Если теперь помножимъ второе уравненіе на множитель h, сложимъ съ первымъ и приравняемъ нулю дискриминантъ полученнаго уравненія, то найдемъ въ результатѣ:

$$b^2 + m\mathrm{Cosc}^2\vartheta + (2bb_1 + b^2 + 2m\mathrm{Ctg}\vartheta\mathrm{Ctg}\vartheta_1 + 2m + m_1\mathrm{Cosc}^2\vartheta_1)h +$$
$$+(b_1{}^2 + 2bb_1 + 2m_1\mathrm{Ctg}\vartheta\mathrm{Ctg}\vartheta_1 + m\mathrm{Cosc}^2\vartheta + 2m)h^2 + (b_1{}^2 + m\mathrm{Cosc}^2\vartheta_1)h^3 = 0.$$

Распорядимся теперь величинами m и m_1 такимъ образомъ, чтобы коэффиціенты при h и h^2 обратились въ нуль и для большей простоты положимъ $\mathrm{Ctg}\vartheta = \mathrm{Ctg}\vartheta_1 = 1$. Тогда условныя уравненія будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$b^2 + 2bb_1 + 2m + m_1 = 0$$
$$b_1{}^2 + 2bb_1 + 2m + 2m_1 = 0$$

Отсюда получимъ:

$$m_1 = b^2 - b_1{}^2;\ m = -\frac{b^2 + 2bb_1 + m_1}{2} = \frac{b_1{}^2 - 2b^2 + 2bb_1}{2},$$

$$\text{откуда } h = \sqrt[3]{-\frac{b_1{}^2}{2bb_1 - b_1{}^2 + b^2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что задача въ общемъ случаѣ неразрѣшима. Впрочемъ, если $b^2 + m\mathrm{Cosc}^2\vartheta = 0$, или если $b_1{}^2 + m_1\mathrm{Cosc}^2\vartheta = 0$, то задача можетъ быть рѣшена.

Но предложенный нами методъ не всегда ведетъ къ цѣли, ибо не всегда мы можемъ распорядиться данными величинами такимъ образомъ, чтобы коэффиціенты L и M дискриминанта обратились въ нуль. Можетъ также случиться, что задача въ томъ частномъ случаѣ, когда эти коэффиціенты обращаются въ нуль, разрѣшима, хотя она не можетъ быть рѣшена въ общемъ случаѣ. Здѣсь остается только подыскать такія значенія коэффиціентовъ L и M, при которыхъ рѣшеніе уравненія третьей степени не представляло бы затрудненій. Чтобы выяснить это на примѣрѣ, обратимся къ задачѣ о трисекціи угла. Задача эта непосредственно приводится къ уравненію 3-й степени слѣдующимъ образомъ:

Пусть 3Q данный уголъ. Намъ извѣстно, что

$$\mathrm{Cos}3Q = 4\mathrm{Cos}^3Q - 3\mathrm{Cos}Q.$$

Полагая здѣсь $2\mathrm{Cos}Q = x$, мы приведемъ рѣшеніе задачи къ уравненію:

$$x^3 - 3x + a = 0,$$

гдѣ $a = 2\mathrm{Cos}3Q$. Здѣсь мы не можемъ уничтожить члена, содержащаго неизвѣстное въ первой степени. Но, положивъ въ этомъ уравненіи $x = u + \frac{1}{u}$, приведемъ его къ биквадратному урав.

$$u^6 + au^3 + 1 = 0; \text{ откуда } u = \sqrt[3]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}}$$

и такимъ образомъ задача неразрѣшима. Задачи, которыя приводятся къ уравненіямъ болѣе высокихъ степеней, обыкновенно очень сложны и требуютъ въ каждомъ частномъ случаѣ спеціальнаго изслѣдованія.

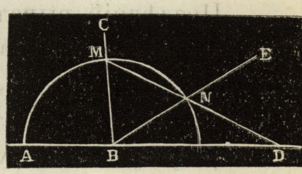
Кромѣ изложеннаго способа распознаванія, разрѣшима ли задача циркулемъ и линейкой, мы приведемъ еще одну теорему, которая даетъ возможность рѣшить этотъ же вопросъ на основаніи чисто геометрическихъ соображеній. Теорема эта заключается въ слѣдующемъ:

IV. Не существуетъ другихъ кривыхъ, кромѣ прямой и окружности, пересѣченіе которыхъ съ произвольной окружностью можетъ быть построено циркулемъ и линейкой.

Поэтому, если задача сводится къ розысканію точекъ пересѣченія окружности съ какимъ нибудь геометрическимъ мѣстомъ, если намъ удастся при этомъ обнаружить, что это геометрическое мѣсто не есть ни прямая, ни окружность, то мы можемъ утверждать, что задача неразрѣшима, если только положеніе данной окружности относительно геометрическаго мѣста вполнѣ произвольно. Такъ, одна изъ предыдущихъ задачъ приводитъ къ розысканію точки пересѣченія окружности съ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноотстоящихъ отъ данной точки и данной прямой. Если даже неизвѣстно, что геометрическое мѣсто есть парабола, то всегда легко убѣдиться въ томъ, что это не прямая и не окружность; задача, слѣдовательно, неразрѣшима.

Чтобы подчеркнуть еще разъ то обстоятельство, что эти задачи неразрѣшимы только циркулемъ и линейкой, т. е. прямой и окружностью, тогда какъ съ помощью другихъ кривыхъ онѣ рѣшаются подчасъ очень просто, мы приведемъ рѣшеніе задачи о трисекціи угла, предложенное древнимъ геометромъ Никомедомъ. Для этой цѣли, равно какъ и для построенія двухъ средне пропорціональныхъ имъ предложена кривая, носящая его имя (Конхоида Никомеда). Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую точку O и прямую AB. Черезъ точку O проведемъ произвольную прямую, и отложимъ на ней отъ точки ея пересѣченія съ данной прямой

AB по обѣ стороны равные отрѣзки MC и MC_1 постоянной длины. Геометрическое мѣсто, описанное точками C и C_1 при вращеніи прямой OM вокругъ точки O, носитъ названіе конхоиды. Точку O называютъ полюсомъ, прямую AB осью и разстояніе MC параметромъ конхоиды. Слѣдующія соображенія даютъ возможность примѣнить эту кривую къ рѣшенію задачи о трисекціи угла. Пусть ABC $= 3Q$—данный уголъ (фиг. 20) EBD $=$ Q, искомая треть даннаго угла, построенная съ другой стороны. Изъ точки B радіусомъ равнымъ BM описываемъ окружность и проводимъ сѣкущую MN до пересѣченія съ AB въ точкѣ D. Легко видѣть, что



Фиг. 20.

$\angle MNB + \angle BMN = 2\angle BNM = \angle ABC + \angle EBD = 4Q$, откуда $BNM = 2Q$, а $\angle BDM = \angle BNM - \angle NBD = Q = NBD$: отсюда слѣдуетъ, что $\triangle$ NBD равнобедренный и BN $=$ ND. Точка N опредѣляется слѣдовательно, какъ пересѣченіе окружности съ конхоидой, для которой точка M служитъ полюсомъ, прямая AD осью и отрѣзокъ MB параметромъ.

Послѣ этого длиннаго отступленія возвратимся къ оставленному нами вопросу о квадратурѣ круга.

Изслѣдованіе этого вопроса по существу гораздо сложнѣе, и ни одинъ изъ предложенныхъ выше методовъ сюда неприложимъ, потому что величина π опредѣляется не изъ уравненія, а на основаніи чисто геометрическихъ соображеній. Но Линдеману удалось доказать, что число π не только не удовлетворяетъ уравненію 1-й, 2-й, 4-й и т. д. степени, но не можетъ служить корнемъ никакого, вообще, алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами. Само собою разумѣется, что тѣмъ самымъ доказывается невозможность квадрировать кругъ циркулемъ и линейкой.

Мы не имѣемъ возможности привести здѣсь доказательства этого предложенія, а потому ограничимся указаніемъ идеи, на которой основывается это доказательство.

Даже въ элементарныхъ сочиненіяхъ по алгебрѣ доказывается, обыкновенно, слѣдующія соотношенія:

$$\mathrm{Cos}z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}; \ \mathrm{Sin}z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ. Если положимъ здѣсь $z = \pi$, то получимъ $e^{\pi i} = -1$, или $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Если мы теперь докажемъ, что $e^{xi} + 1$ не можетъ равняться нулю, если x есть корень алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, то тѣмъ самымъ будетъ доказано, что π не можетъ быть корнемъ такого уравненія.

Послѣдній выводъ будетъ тѣмъ болѣе справедливъ, если мы докажемъ, что произведеніе

$$\Pi = (e^{x_1 i} + 1)(e^{x_2 i} + 1)(e^{x_3 i} + 1) \dots (e^{x_n i} + 1),$$

гдѣ $x_1\ x_2\ x_3 \dots$ суть корни какого нибудь уравненія n-ой степени съ раціональными коэффиціентами, не можетъ равняться нулю ни при какомъ значеніи n.

При помощи ряда леммъ, основывающихся на формулахъ интегральнаго исчисленія, Линдеманъ показалъ, что при всякомъ какъ угодно маломъ δ и любомъ значеніи n, можемъ найти два цѣлыхъ числа K и L такимъ образомъ, чтобы

$$0 < K\Pi - L < \delta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе $K\Pi$ (а слѣдовательно и Π) не только не можетъ равняться нулю, но и никакому вообще цѣлому числу, ибо разность двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть безконечно малой величиной. Это доказательство является послѣднимъ словомъ науки по вопросу, о которомъ мы говорили.

В. К. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Летучее соединеніе желѣза съ окисью углерода (Ber. d. deutsch. Chem. Ges., 1891, 2248), получено Mond'омъ и Quincke, и—одновременно съ ними—Berthelot. Если надъ мелко раздробленнымъ желѣзомъ (получающимся возстановленіемъ щевелево-кислаго желѣза въ струѣ водорода при 400°) пропускать окись углерода, то часть желѣза улетучивается въ видѣ соединенія съ окисью углерода. Это доказывается и потерей въ вѣсѣ взятаго желѣза, и тѣмъ, что если прошедшую надъ желѣзомъ окись углерода пропускать затѣмъ черезъ стекляныя трубки при 200°—350°, то изъ нея выдѣляется желѣзо въ видѣ зеркальнаго налета на трубкѣ. 12 grm.

желѣза потеряли въ струѣ CO въ теченіе 6-и недѣль 2 grm. Удалось установить составъ этого соединенія, воспользовавшись тѣмъ, что тяжелыя минеральныя масла его вполнѣ поглощаютъ и въ такомъ растворѣ можетъ быть произведенъ анализъ. Анализъ показываетъ, что по составу соединеніе желѣза съ окисью углерода аналогично никкельтетракарбонилу и можетъ быть выражено формулой $Fe(CO)_4$.

(Naturwiss. Rundsch. 1891, 510).

Періодическія измѣненія высоты солнечныхъ протуберанцевъ, подобныя періодическимъ измѣненіямъ широты солнечныхъ пятенъ, обнаружилъ Riccо въ Палермо (Comptes rend. 1891. 255.). Spörer по своимъ наблюденіямъ установилъ, что въ 11-и лѣтніе періоды среднія геліографическія широты солнечныхъ пятенъ постепенно уменьшаются, пятна приближаются къ экватору солнца; затѣмъ пятна удаляются отъ экватора въ высшія широты, во время слѣдующаго періода снова опускаются къ экватору и т. д.

Наблюденія Riccо надъ протуберанцами обнимаютъ періодъ въ 11 лѣтъ (1880—1890 г.). За это время наблюдались 7663 протуберанца въ 30″ и больше высоты. Всѣ наблюденія произведены съ однимъ и тѣмъ же рефракторомъ и спектроскопомъ и поэтому совершенно сравнимы между собой. Выводъ же изъ этихъ наблюденій такой, что если графически выразить среднія широты пятенъ и среднія широты протуберанцевъ, то обѣ пары кривыхъ (одна пара для сѣвернаго полушарія солнца, другая—для южнаго) проходятъ почти параллельно другъ другу на разстояніи 14° одна отъ другой.

(Naturwiss. Rundsch. 1891. 509).

В. Г.

ЗАДАЧИ.

№ 258. Нѣкто получилъ 465 рублей сторублевыми, десятирублевыми и рублевыми бумажками. Всѣхъ бумажекъ было 42. Сколько было каждаго сорта?

NB. Требуется найти всѣ рѣшенія этой задачи простымъ разсужденіемъ, не прибѣгая къ помощи алгебры.

I. Клейберъ (Ницца).

№ 259. Къ окружности радіуса r проведена въ M касательная, на которой взяты точки A и B въ разстояніяхъ a и b отъ M.

Вычислить радіусъ окружности, проходящей черезъ точки A и B и касающейся данной окружности.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 260. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Тригонометріи Верещагина, Спб. 1883, стр. 307, № 1463):

„Изъ двухъ мѣстъ A и B отправляются одновременно два поѣзда, соотвѣтственно по направленіямъ AD и BE, пересѣкающимся въ точкѣ C подъ угломъ 60°; оба поѣзда движутся равномѣрно и проходятъ каждый часъ: первый 20 верстъ, а второй 30 верстъ. Черезъ сколько часовъ со времени ихъ отправленія, разстояніе между ними сдѣлается равнымъ первоначальному (AB), если извѣстно, что разстояніе AC = 50 верстъ, а разстояніе BC = 40 верстъ?"

Г. Ширинкинъ (Воронежъ).

№ 261. Найти точку пересѣченія трехъ плоскостей: плоскости параллельной оси проекцій, плоскости перпендикулярной къ оси проекцій и плоскости, проходящей черезъ ось проекцій и составляющей данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцій.

М. Добровольскій (Тамбовъ).

№ 262. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x+2}{6x-4a}+\frac{3}{x+3a}=\frac{10x-3a}{3x^2+7ax-6a^2}+1.$$

І. Каменскій (Пермь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 66 (2 сер.). Стороны угла M пересѣчены параллельными прямыми AB и CD. Требуется провести окружности, одну черезъ точки A и B, другую черезъ точки C и D такъ, чтобы онѣ пересѣклись на сторонахъ угла и чтобы общая ихъ хорда имѣла данную длину a.

Въ произвольной точкѣ N, взятой на сторонѣ MBD, строимъ $\angle MNP=\angle MAB$ и на прямой NP откладываемъ $NF=a$; изъ точки F проводимъ прямую параллельно MB до пересѣченія со стороной даннаго угла въ точкѣ G и изъ G проводимъ GH параллельно NF до пересѣченія съ MB въ точкѣ H; тогда $GH=NF=a$. Окружность, проведенная черезъ A, G и B, пройдетъ и черезъ точку H; дѣйствительно, называя точку пересѣченія прямыхъ HG и AB черезъ K, изъ подобія $\triangle\triangle$ AGK и HKB имѣемъ:

$$GK \cdot KH = AK \cdot KB,$$

т. е. AB и GH хорды одной окружности.

Другая окружность, проведенная черезъ G, D и C пройдетъ и черезъ точку H, слѣдовательно проведенныя окружности — искомыя.

Еслибы данная хорда не пересѣкала линій AB и CD, то въ четыреугольникахъ CDHG и ABHG сумма противуположныхъ угловъ была бы равна $2d$, слѣдовательно около нихъ можно было бы описать окружности.

А. П. (Пенза), *И. Бискъ* (Кіевъ), *Г. Теплицкій* (Кременчугъ), *Л. Лебедевъ*, *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ **86** (2 сер.). Раздѣлить площадь сектора въ крайнемъ и среднемъ отношеніи дугою окружности, концентрической съ дугою сектора.

Пусть радіусъ $OB = R$, $OD = x$; дуга $AB = a$ и дуга $CD = y$; $\frac{a}{y} = \frac{R}{x}$; $y = \frac{ax}{R}$. Площадь сектора $AOB = \frac{aR}{2}$,

$$COD = \frac{x}{2} \cdot y = \frac{ax^2}{2R}; \text{ площадь } ACDB = \frac{aR}{2} - \frac{ax^2}{2R} =$$

$$= \frac{a}{2R}(R^2 - x^2).$$

Пусть ACDB большая часть площади сектора; поэтому

$$\frac{a^2}{4R^2}(R^2 - x^2)^2 = \frac{a^2x^2}{4}, \text{ или } x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Слѣдовательно, нужно описать дугу большею частью радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

А. П., *Н. Николаевъ* (Пенза), *П. Андреяновъ*, *Н. Фекличевъ* (Москва), *Е. Пригоровскій*, *Н. Волковъ* (Спб.), *М. Пряслов*ъ (Ревель), *Г. Ширинкинъ*, *В. Чулковъ* (Воронежъ), *В. Россовская* (Курскъ), *О. Озаровская* (Тифлисъ), *Г. Теплицкій*, *А. Дукельскій* (Кременчугъ), *Х. Лурье* (Кіевъ), *В. Тюнинъ* (Уфа).

№ **93** (2 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Триг. Пржевальскаго, изд. 3-е, 1884 г. № 14):

„Съ корабля, находящагося въ A видятъ два маяка B и C на западъ; чрезъ часъ плаванія къ сѣверу оба эти маяка уже видны: одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ отъ корабля. Зная разстояніе между маяками (ВС $= a$), найти скорость корабля."

Пусть черезъ часъ корабль находился въ точкѣ А' и пусть АА' $= x$, А'С $= y$, ВА' $= z$; тогда АВ $= x - a$. Изъ $\triangle$ СА'А

$$y = x\sqrt{2}.$$

Въ треугольникѣ АА'С линія А'В есть биссекторъ угла при А', а потому:

$$a : (x - a) = y : z$$

$$\text{откуда } x = \frac{a\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2}$$

А. П. (Пенза), *В. Россовская* (Курскъ), *А. Семенченковъ*, *В. Апостоловъ* (Донск. К. К.), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ), *В. Тюнинъ*, *А. Даниловъ* (Уфа), *А. Витковскій* (Великолуцкъ), *Н. Карповъ* (Златополь), *Е. Григоровскій* (Спб.), *А. Рубиновскій* (Кіевъ).

№ **95** (2 сер.). Рѣшить уравненія:

$$x^5 = mx + ny$$
$$y^5 = my + nx$$

Складывая и вычитая почленно, находимъ

$$x^5 + y^5 = (m + n)(x + y) \text{ и } x^5 - y^5 = (m - n)(x - y),$$

откуда

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = m + n$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = m - n$$

слѣдовательно

$$x^4 + x^2y^2 + y^2 = m, \text{ или } (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = m$$
$$x^3y + xy^3 = -n, \text{ или } xy(x^2 + y^2) = -n$$

Полагая $xy = u$, $x^2 + y^2 = v$, находимъ для опредѣленія u и v два уравненія:

$$u^4 + mu^2 - n^2 = 0$$
$$uv = -n.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *А. П.* (Пенза), *П. Вонсикъ*, *А. Семеновъ*, *Г. Ширинкинъ* (Воронежъ), *И. Бискъ* (Кіевъ), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ), *Н. Соловьевъ* (Москва), *Н. Карповъ* (Златополь), *В. Соколовъ* (Кострома), *В. Рубцовъ* (Уфа), *А. Охитовичъ* (Спб.).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 28 Ноября 1891 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

1858—92. Годъ изданія тридцать четвертый. **1858—92.**

Открыта подписка на 1892 годъ

на еженедѣльный политическій, литературно-художественный и юмористическій журналъ съ каррикатурами

„РАЗВЛЕЧЕНІЕ".

Наши читатели могли достаточно убѣдиться, въ какой мѣрѣ новая редакція прилагаетъ усилія для совершенствованія журнала во всѣхъ отношеніяхъ, что и засвидѣтельствовано многими благодарственными письмами гг. подписчиковъ и читателей. Для участія въ журналѣ привлечены всѣ лучшія силы литературныя и художественныя, работающія въ желательномъ направленіи.

Журналъ даетъ въ годъ **пятьдесятъ №№**, въ которыхъ помѣщается болѣе **восьмисотъ** прекрасно исполненныхъ рисунковъ извѣстныхъ каррикатуристовъ-художниковъ, при чемъ въ каждомъ номерѣ многіе изъ каррикатуръ являются въ раскрашенномъ видѣ. Литературный отдѣлъ вмѣщаетъ въ себѣ массу художественныхъ разсказовъ, сценъ, очерковъ, стихотвореній и всякаго рода юмористическихъ мелочей, трактующихъ злобу дня. **Въ то же время редакція, проникнутая горячимъ стремленіемъ стоять на стражѣ общественныхъ интересовъ и рисовать полную картину нравовъ современнаго общества**, даетъ въ журналѣ мѣсто различнымъ статьямъ и фельетонамъ, обсуждающимъ въ серьезномъ и сатирическомъ тонѣ **всѣ общественныя дѣла столицъ и провинціи**, а также помѣщаетъ **большіе романы, повѣсти и драматическія произведенія** нравоописательнаго характера.

Ради возможно хорошаго и изящнаго изготовленія литографскихъ работъ по печатанію и раскрашиванію рисунковъ, редакція поручила эти работы лучшей въ Москвѣ литографіи—художника **В. А. Симова.**

Въ виду значительно увеличивающейся подписки, — въ наступающемъ 1892 году издательница нашла возможнымъ дать всѣмъ **годовымъ** подписчикамъ

ТРИ ПРЕМІИ,

изъ которыхъ двѣ главныя—гравюры съ картинъ знаменитыхъ французскихъ художниковъ Котта и Фэрье.

Первая премія: **ОФЕЛІЯ И ГАМЛЕТЪ.**

Вторая премія: **ВЪ БУРЮ.**

Каждая въ размѣрѣ около $^{14}/_{9}$ вершковъ.

Третья премія составляетъ изъ себя художественно исполненный **альбомъ портретовъ знаменитыхъ артистовъ** съ ихъ автографами, подъ названіемъ:

НАШИ ТАЛАНТЫ.

Эти портреты будутъ разсылаться, по мѣрѣ ихъ отпечатанія, въ видѣ приложеній къ журналу.

Двѣ главныя преміи высылаются немедленно по подпискѣ.

Для ознакомленія публики съ выдающимися достоинствами нашихъ премій, какихъ не выдавало подписчикамъ еще ни одно изданіе, они выставлены въ окнахъ извѣстныхъ книжныхъ, эстампныхъ и писчебумажныхъ магазиновъ столицъ и провинціи.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ (съ доставкою и пересылкою):

На годъ	шесть (6) руб.	На три мѣсяца .	одинъ (1) руб. 50 к.
› полгода	три (3) ›	› одинъ мѣсяцъ	— › 50 ›

За преміи годовые подписчики уплачиваютъ 1 руб.

Уплата подписныхъ денегъ марками не принимается.

Пробный номеръ высылается за три семикопѣечныя марки.

Подписка принимается въ главной конторѣ журнала: **Москва, Цвѣтной бульваръ, Знаменскія пер., домъ Соѣдовой, въ конторѣ Н. Печковской (Петровскія линіи), а также во всѣхъ книжныхъ магазинахъ столицъ и провинціи.** 3—1

Издательница *А. Соѣдова.* Редакторъ *Н. Соѣдовъ.*

БИБЛІОГРАФЪ

1892. ИЗДАНІЕ ПЕРІОДИЧЕСКОЕ Годъ VIII.

(12 №№ въ годъ.)

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія рекомендованъ для основн. библіотекъ всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній мужскихъ и женскихъ.— Ученымъ Комитетомъ при Св. Синодѣ одобренъ для пріобрѣтенія въ фундаментальныя библіотеки духовныхъ семинарій и училищъ.—По распоряженію Военно-Учебнаго Комитета помѣщенъ въ основной каталогъ для офицерскихъ библіотекъ.

Отд. 1 й. Историческіе, историко-литературные и библіографическіе матеріалы. статьи и замѣтки; разборы новыхъ книгъ; исторія, теорія и практика книговѣдѣнія; библіотечное, издательское и книжноторговое дѣло прежде и теперь; хроника книговѣдѣнія. Вопросы и отвѣты.

Отд 2-й (справочный). Лѣтопись книгопечатанія: 1) каталогъ новыхъ книгъ; 2) указатель статей въ періодическихъ изданіяхъ; Rossica (указатель иностранныхъ сочиненій о Россіи); 4) правительственныя распоряженія по дѣламъ печати; 5) библіографическія извѣстія и объявленія

Съ основанія „Библіографа" въ немъ принимали участіе:

В. А. Алексѣевъ, И. Ѳ. Анненскій, А. И. Барбашевъ. проф. Н. И. Барсовъ. Я. Ѳ. Березинъ-Ширяевъ. проф. К. Н Бестюжевъ-Рюминъ, В. Ѳ. Боцяновскій, С. Н. Брайловскій. С. К. Буличъ, П. В. Быковъ, Е. А. Бѣловъ, Н. Н. Вакуловскій, А. Васильевъ, К. П. Галлеръ, Н. В. Губерти, И. Ѳ. Дмитровскій. Г. В. Дружининъ, проф. М. А. Дьяконовъ. І. І. Змигродзскій, К. А. Ивановъ, Е. Ц. Кавелина, проф. Н. И. Карѣевъ, Д. Ѳ. Кобеко, И. А. Козеко, М. А. Куплетскій, проф. А. С. Лаппо-Данилевскій, Н. Ф. Леонтьевъ. И. А. Линниченко, Н. П. Лихачевъ, Х. М. Лопаревъ, акад. Л. Н. Майковъ, А. И. Малеинъ, В. И. Межовъ, графъ Г. А. Милорадовичъ, А. Е. Молчановъ. И. Я. Морошкинъ, Н. Н. Оглоблинъ. проф. С. Ѳ. Платоновъ, Н. И. Позняковъ, С. И. Пономаревъ, С. Л. Пташицкій. Э. Л. Радловъ, А. И. Савельевъ, А. А. Савичъ, А. Ѳ. Селивановъ, С. М. Середонинъ, проф. А. И. Соболевскій, С. Л. Степановъ. В. Н. Сторожевъ. А. А. Титовъ, И. Ѳ. Токмаковъ, П. М. Устимовичъ, Н. Д. Чечулинъ. И. А. Шляпкинъ. проф. Е. Ф. Шмурло, Д. Д. Языковъ.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА:

за годъ съ доставкой и пересылкой въ Россіи **5** р.; за границу **6** р

отдѣльно нумеръ 50 коп., съ перес. 60 коп.

Плата за объявленія: страница—8 руб.; $^3/_4$ стр.—6 р. 50 к.; $^1/_2$ стр. 4 р. 50 коп.; $^1/_4$ стр.—2 р. 50 к.; $^1/_8$ стр.—1 р. 50 к.

О новыхъ книгахъ, присылаемыхъ въ редакцію, печатаются безплатно объявленія или помѣщаются рецензіи.

Подписка и объявленія принимаются въ книжномъ магазинѣ «Новаго времени» А. Суворина (Спб., Невскій просп., д. № 38) и въ редакціи. Кромѣ того подписка принимается во всѣхъ болѣе извѣстныхъ книжныхъ магазинахъ.—Гг. иногородные подписчики и заказчики объявленій благоволятъ обращаться непосредственно въ редакцію.

Адресъ редакціи: Спб., Забалканскій (Обуховскій) просп. д. № 7, кв. 13.

Оставшіеся въ **ограниченномъ числѣ** полные комплекты **«Библіографа»** за прошлое время съ 1885 г. продаются по **5** р. (съ дост. и перес.) за годовой экземпляръ. Также имѣются въ продажѣ изданныя редакціей брошюры: 1) Сборникъ рецензій и отзывовъ о книгахъ по русской исторіи, №№ 1, 2 и 3. Ц. по 60 коп. 2) Библіографич. указатель книгъ и статей о св. Кириллѣ и Меѳодіи, ц. 40 коп. 3) Александръ Николаевичъ Сѣровъ. I. Библіографическій указатель произведеній Сѣрова. II. Библіографическій указатель литературы о Сѣровѣ и его произведеніяхъ. Вып. I и II. Сост. А. Е. Молчановъ, Ц. по 1 р. за вып. 4) Библіографическій списокъ литературныхъ трудовъ К. Н. Бестужева-Рюмина. Составилъ И. А. Козеко. Ц. 75 коп — Книгопродавцамъ обычная уступка.

2—1 Редакторъ **Н. М. Лисовскій.**

Обложка
ищется

Обложка
ищется