Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. **№ 126.** № 6.

Содержаніе: Краткій очеркъ исторіи задачи о квадратурѣ круга въ связи съ общимъ вопросомъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой, *В. К.*—«Помощь самообразованію», *Р. И.*—Разныя извѣстія, *О. Пергамента.* — Задачи №№ 253—257.—Класcныя упражненія, *Б. У.*—Рѣшенія задачъ №№ 499 (1 сер.) и 24 и 61 (2 сер.).

КРАТКІЙ ОЧЕРКЪ ИСТОРІИ

ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРѢ КРУГА

въ связи съ общимъ вопросомъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой. *)

Въ элементарной геометріи есть четыре вопроса, которые, по справедливости, заслуживаютъ названія камня преткновенія человѣческой мысли. Не потому, что вопросы эти не рѣшены и не по значенію ихъ въ геометріи, но по той массѣ труда и энергіи, которые на нихъ потрачены, по той массѣ безплодныхъ усилій, которыя довели до умопомѣшательства цѣлый рядъ изслѣдователей. Эти четыре вопроса слѣдующіе: 1) трисекція угла, 2) удвоеніе куба, 3) квадратура круга и 4) одиннадцатая аксіома Эвклида. Изъ первыхъ трехъ, по крайней мѣрѣ, самой интересной, но и самой трудной по причинамъ, которыя будутъ указаны далѣе, является задача о квадратурѣ круга. Приступая къ изложенію исторіи этого вопроса, я позволю себѣ нѣсколько словъ о значеніи его въ геометріи и ея приложеніяхъ. Квадрировать криволинейную фигуру—значитъ построить квадратъ, равновеликій площади этой фигуры; элементарная геометрія присоединяетъ еще сюда требованіе, чтобы построеніе было совершено циркулемъ и линейкой. Построить такой квадратъ необходимо для того, чтобы измѣрить площадь кривой принятой квадратной еди-

*) Отвѣтъ на тему, предложенную въ № 60 «Вѣстника».

ницей. Въ частномъ случаѣ измѣреніе площади круга сводится, какъ извѣстно, къ опредѣленію числа π, выражающаго отношеніе окружности къ діаметру. Начиная отъ бондаря, которому нужно изготовить бочку, и до астронома, вычисляющаго малѣйшія измѣненія въ движеніи небесныхъ тѣлъ — всѣмъ и вездѣ необходимо знать это отношеніе. Весь вопросъ въ той степени точности, съ какой должно быть вычислено π для практическихъ его примѣненій. Въ большинствѣ случаевъ вполнѣ достаточно бываетъ трехъ, четырехъ десятичныхъ знаковъ, а между тѣмъ уже нѣсколько вѣковъ тому назадъ Людольфъ опредѣлилъ π съ точностью до 35-го десятичнаго знака, а позднѣе опредѣлены сотни десятичныхъ знаковъ. При такихъ обстоятельствахъ всѣ дальнѣйшія изслѣдованія не могутъ быть интересны. Задачѣ трудно даже приписать серьезное теоретическое значеніе, такъ какъ сама по себѣ она представляетъ весьма частный вопросъ. Однако исторія этого вопроса представляетъ большой интересъ съ другой точки зрѣнія. На это указываютъ слѣдующія слова Montucla, сочиненіе котораго „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle" ложится въ основаніе настоящаго очерка. „Лицъ, занимающихся квадратурой круга,—говоритъ онъ—можно раздѣлить на три группы. Къ первой группѣ я отношу тѣхъ, которые безъ серьезныхъ знаній по математикѣ принимаются за рѣшеніе „курьезной" задачи, не понимая даже хорошенько, въ чемъ она собственно заключается. Они чаще всего приходятъ къ такому результату, что нужно взять веревочку, обвести ею окружность, а затѣмъ растянуть и измѣрить ее."

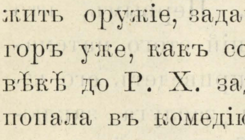
„Вторую группу составляютъ наиболѣе несчастные труженики въ этой области:—они болѣе знакомы съ геометріей и пользуются своими знаніями для того, чтобы созидать огромныя и запутанныя построенія, среди которыхъ бываетъ дѣйствительно трудно розыскать закравшуюся ошибку. Эти люди работаютъ до седьмого пота, а затѣмъ обиваютъ пороги ученыхъ обществъ и академій, требуя разсмотрѣнія своихъ квадратуръ. Одинъ изъ нихъ, нѣкто Chatlet потребовалъ даже „безсмертныхъ" къ суду за то, что они отказались признать его квадратуру."

„Но рядомъ съ этими пигмеями мысли — продолжаетъ Montucla—нашей задачей занимался цѣлый рядъ другихъ людей, приступавшихъ къ проблемѣ во всеоружіи математическихъ знаній со всѣми данными, необходимыми для серьезныхъ изслѣдованій. Они сразу понимали всю трудность вопроса и потому вдавались въ глубокій анализъ и изслѣдованія, которыя привели къ цѣлому ряду крупныхъ открытій. Изслѣдованіе задачи о квадратурѣ круга въ первый разъ натолкнуло математиковъ на мысль о безконечныхъ рядахъ, о математической интерполяціи, о непрерывныхъ дробяхъ и даже—строкѣ Ньютона.“ Съ другой стороны исторія этого вопроса имѣетъ большое значеніе уже потому, что безчисленныя неудачныя попытки квадрировать окружность заставили математиковъ усомниться въ возможности рѣшенія задачи и породили такимъ образомъ общій вопросъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой.

Мы постараемся отвѣтить на него въ настоящемъ очеркѣ. Возникновеніе задачи о квадратурѣ круга относится къ глубокой древности. Какъ только геометрія научилась измѣрять площади всѣхъ прямолинейныхъ фигуръ, естественнымъ и ближайшимъ шагомъ впередъ было измѣреніе площади фигуръ криволинейныхъ—и прежде всего—площади круга, какъ самой извѣстной въ геометріи. Вотъ почему задачей этой уже занимались Ѳалесъ и Пиѳагоръ, и когда эти извѣстные математики должны были сложить оружіе, задача очень быстро пріобрѣла извѣстность. Анаксагоръ уже, какъ сохранилось преданіе, много ею занимался, а въ IV вѣкѣ до Р. Х. задача сдѣлалась столь ходячимъ вопросомъ, что попала въ комедію Аристофана. Но площадныя насмѣшки не помѣшали математикамъ продолжать свои изслѣдованія по этому вопросу. Извѣстный Гиппократъ Хіосскій много трудился надъ этимъ вопросомъ, и его изслѣдованія привели его къ открытію квадратуры луночекъ.

Онъ попытался даже примѣнить свои луночки къ абсолютной квадратурѣ круга — но это было только неудачной попыткой.

Вотъ въ чемъ заключается эта попытка. Впишемъ въ полуокружность (фиг. 16) половину правильнаго шестиугольника. На каждой изъ сторонъ, какъ на діаметрѣ, опишемъ по полуокружности. Каждая изъ послѣднихъ состоитъ изъ луночекъ (L) и сегментовъ (s). Площадь большой полуокружности (C) въ четыре раза больше каждой изъ малыхъ полуокружностей, такъ что $C=4(L+s)$. Но такъ какъ съ другой стороны $C=P+3s$, гдѣ P есть площадь ABCD, то $s=P-4L$, а $C=4(P-3L)$. Такъ какъ луночки квадрировать, повидимому, мы умѣемъ, то послѣднее равенство



Фиг. 16.

даетъ возможность построить квадратуру круга. Гиппократъ не принялъ только во вниманіе, что онъ далъ возможность квадрировать лишь тѣ луночки, которыя описаны на катетахъ прямоугольнаго треугольника.

Однако открытіе Гиппократа, давшаго все таки квадратуру нѣкоторой кривой фигуры, послужило новымъ импульсомъ для математиковъ, подало имъ надежду на разрѣшеніе вопроса. Антифонъ вполнѣ логично разсуждалъ слѣдующимъ образомъ: мы умѣемъ опредѣлять площади всѣхъ прямолинейныхъ фигуръ. Вопросъ, слѣдовательно, будетъ рѣшенъ, когда мы приведемъ квадратуру круга къ квадратурѣ фигуръ прямолинейныхъ. Такая постановка вопроса привела его къ заключенію, что кругъ есть многоугольникъ о безчисленномъ множествѣ сторонъ. Говоря нашимъ языкомъ—онъ впервые пришелъ къ мысли, что кругъ есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Такъ какъ онъ стремился достигнуть точной квадратуры, то идея его, при всей ея плодотворности, не привела его ни къ какому результату. Тѣмъ не менѣе она на много вѣковъ сдѣлалась исходнымъ пунктомъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій. Первымъ, кто воспользовался этой идеей, былъ Архимедъ. Геній этого математика подсказалъ ему, что путь Антифона не приведетъ его къ полному рѣшенію вопроса, и вся его громадная заслуга заключается въ томъ, что онъ задался болѣе скромной задачей—опредѣлить квадратуру по приближенію, когда полное рѣшеніе вопроса оказалось ему не по силамъ. Если—разсуждалъ онъ—окружность есть многоугольникъ о безчисленномъ множествѣ сторонъ, то, чѣмъ болѣе сторонъ мы возьмемъ, тѣмъ болѣе мы будемъ приближаться къ площади круга. Сличеніе вписаннаго и описаннаго многоугольника о 96 сторонахъ привело его къ заключенію, что площадь круга, радіусъ котораго равенъ 1, заключается между $3^{10}/_{70}$ и $3^{10}/_{71}$. Взявъ первое изъ этихъ чиселъ, онъ получилъ приближенное значеніе π, равное $^{22}/_{7}$. Какъ ни грубо это первое приближеніе, оно должно было стоить Архимеду громадныхъ трудовъ, такъ какъ при тогдашней системѣ счисленія было крайне трудно справляться съ радикалами. Дальнѣйшее развитіе теоріи предѣловъ привело Архимеда къ квадратурѣ параболы, но врядъ ли не столь же крупная заслуга съ его стороны заключается въ томъ, что онъ при помощи своей спирали показалъ, что существуетъ прямая, равная по длинѣ любой дугѣ круга. Мы лишены возможности привести здѣсь это доказательство; замѣтимъ только, что этотъ фактъ оспаривался такими авторитетами въ наукѣ, какъ напримѣръ Віэтъ.

Результаты Архимеда составляли уже столь крупный шагъ впередъ, что всѣ послѣдующіе математики древней Греціи ничего къ нимъ не прибавили. Римская исторія, какъ извѣстно, выдвигаетъ мало крупныхъ математиковъ, а затѣмъ начинается великое переселеніе народовъ. Вмѣстѣ съ другими науками падаетъ въ средневѣковой исторіи и геометрія, а съ ней забывается и задача о квадратурѣ круга. Мы снова встрѣчаемся съ нею только въ XV вѣкѣ. Первымъ, кто дѣйствительно подвинулъ впередъ вопросъ о вычисленіи площади круга, былъ Metius. Онъ далъ извѣстное значеніе $\pi = {}^{355}/_{113}$, точное до восьмого десятичнаго знака. Число это опредѣлено имъ также на основаніи принципа Архимеда. Знаменитый Віэтъ, работы котораго пользуются такою извѣстностью въ анализѣ, слѣдовалъ тому же пути. Разница заключалась только въ слѣдующемъ: Архимедъ и другіе, начиная отъ шестиугольника, опредѣляли периметръ 12-ти угольн., 24-хъ угольн. и т. д. одинъ послѣ другого, и если Архимедъ, напримѣръ, опредѣлилъ периметръ 96-ти угольн., то онъ не вычислилъ для него сначала полной формулы—да это и не было возможно при тогдашней системѣ математическихъ символовъ; Віэтъ же вычислялъ сначала выраженія для периметровъ многоугольниковъ въ радикалахъ. Такимъ образомъ онъ получилъ слѣдующія выраженія для периметровъ вписанныхъ многоугольниковъ: (діаметръ принятъ за единицу):

$$P_4 = \frac{2}{\sqrt{{}^1/_2}}$$

$$P_8 = \frac{2}{\sqrt{{}^1/_2} \cdot \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2}}}$$

$$P_{16} = \frac{2}{\sqrt{{}^1/_2} \cdot \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2}} \cdot \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}}}$$

Замѣтивъ эту правильность въ измѣненіи знаменателя, Віэтъ, естественно, заключилъ, что

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{{}^1/_2} \cdot \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2}} \cdot \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2}} \cdot \sqrt{\ldots}}},$$

когда число множителей знаменателя стремится къ безконечности. Такимъ образомъ, былъ составленъ первый безконечный рядъ — вѣрнѣе —первая формула, содержащая безконечно большое число членовъ. Конечно, какъ первый въ своемъ родѣ, онъ далекъ отъ совершенства; самъ Віэтъ могъ съ помощью его вычислить π только съ точностью до 8-го знака. Но разъ идея зародилась, она стала быстро развиваться.

Мы не можемъ не упомянуть здѣсь о Лудольфѣ, этомъ необычайномъ труженикѣ, посвятившемъ полъ жизни на вычисленіе π съ точностью до 36-го знака. Но онъ держался системы Архимеда и никакого улучшенія не внесъ въ теорію вопроса. За то Снелліусъ уже значительно упростилъ безконечный рядъ Віэта тѣмъ, что принялъ за единицу не діаметръ, а радіусъ. Благодаря этому, онъ получилъ слѣдующее выраженіе:

$$\pi = \text{Пр.}\ 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}\,, \quad (\text{при } n = \infty)$$

Но и это выраженіе, хотя и не заключаетъ безконечныхъ произведеній, слишкомъ сложно для практическаго примѣненія.

Снелліусъ, не обладая терпѣніемъ Лудольфа, чтобы потратить столько времени и силъ на вычисленіе π, первый задался мыслію упростить вычисленія, основанныя на принципѣ Архимеда. Послѣ многихъ усилій онъ—правда—внесъ нѣкоторое упрощеніе въ рѣшеніе задачи, но выводы его не были точно обоснованы, и—какъ это обыкновенно бываетъ съ первой попыткой—не имѣли успѣха. За то его ближайшій преемникъ, знаменитый Гюгенсъ не только доказалъ теоремы Снелліуса, но и пошелъ гораздо дальше его. Мысль его заключалась въ томъ, чтобы сузить предѣлы, получаемые по принципу Архимеда. Такъ — онъ показалъ—что окружность больше вписаннаго многоугольника, увеличеннаго третью разности между периметромъ даннаго многоугольника и многоугольника, имѣющаго вдвое меньше сторонъ; и наоборотъ—она меньше периметра описаннаго многоугольника, уменьшеннаго двумя третями разности между периметромъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ. Этими двумя предложеніями предѣлы были сужены уже настолько, что въ три—четыре раза упростили вычисленія. Затѣмъ самъ Гюгенсъ и рядъ другихъ геометровъ разрабатывали этотъ же самый вопросъ о суженіи предѣловъ. Было бы скучно перечислять всевозможные способы, предложенные для этой цѣли, тѣмъ болѣе, что они, хотя и упрощаютъ вычисленія, далеки отъ современныхъ методовъ.

Мало по малу мы дошли до XVII вѣка, когда стала развиваться „Arithmetica infinitorum“ — ариѳметика безконечно малыхъ или — по нашему — начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Fermat, Descartes, Roberval и другіе доказали слѣдующую теорему: Если ордината кривой пропорціональна m-ой степени абсциссы, такъ что $y=kx^m$, то площадь, заключенная между кривой, осью абсциссъ и ординатой, соотвѣтствующей данной абсциссѣ x, равна прямоугольнику, построенному на абсциссѣ и ординатѣ, раздѣленному на $m+1$, т. е.

$$s = \frac{xy}{m+1} = \frac{kx^{m+1}}{m+1}.$$

Отсюда легко было перейти къ болѣе общему предложенію: Если ордината (y) опредѣляется въ зависимости отъ абсциссы уравненіемъ:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_n x^n,$$

то площадь (s) опредѣляется выраженіемъ:

$$s = A_0 x + \frac{A_1}{2}x^2 + \frac{A_2}{3}x^3 + \dots + \frac{A_n}{n+1}x^{n+1} \; ^{*)}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Валлисъ ввелъ въ алгебру отрицательныя степени и безъ труда распространилъ послѣднюю формулу на случай отрицательныхъ показателей. Но дѣло приняло совсѣмъ другой оборотъ, когда онъ захотѣлъ примѣнить свои разсужденія къ квадратурѣ круга, ибо здѣсь ордината не выражается раціональнымъ полиномомъ въ зависимости отъ абсциссы.

Въ самомъ дѣлѣ, если принять за оси координатъ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра, а радіусъ приравняемъ единицѣ, то $y=\sqrt{1-x^2}$. Чтобы рѣшить вопросъ и въ этомъ случаѣ, онъ замѣтилъ прежде всего, что площадь полнаго квадрата соотвѣтствуетъ абсциссѣ равной единицѣ. Далѣе онъ разсуждалъ слѣдующимъ образомъ:

Площади кривыхъ, ордината которыхъ опредѣляется уравненіями $y=(1-x^2)^0$, $y=(1-x^2)$, $y=(1-x^2)^2$ . . . . . (A) при $x=1$ согласно формулѣ (1) имѣютъ слѣдующія значенія:

---

*) Иными словами, былъ найденъ интегралъ цѣлаго раціональнаго полинома.

$$s = 1;\ s = \frac{1\,.\,2}{1\,.\,3};\ s = \frac{1\,.\,2\,.\,4}{1\,.\,3\,.\,5}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (B)$$

Такъ какъ ордината $y=(1-x^2)^{1/2}$ занимаетъ какъ разъ среднее мѣсто между двумя первыми числами ряда (А), то число, выражающее площадь квадранта при радіусѣ равномъ 1, занимаетъ соотвѣтствующее мѣсто въ ряду (В). Вопросъ сводится къ тому, чтобы вставить между двумя числами нѣкотораго ряда промежуточный членъ такимъ образомъ, чтобы послѣдовательные члены образовались одинъ изъ другого по тому же закону, которому слѣдуетъ и самый рядъ. Этотъ процессъ онъ назвалъ „математической интерполяціей". Опредѣляя величину искомаго члена, Валлисъ нашелъ, что онъ заключается между $\frac{2\,.\,4}{3\,.\,3}\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $\frac{2\,.\,4}{3\,.\,3}\sqrt{\frac{4}{5}}$. Далѣе, опредѣляя значеніе радикала, онъ показалъ, что искомая величина заключается между предѣлами

$$\frac{2\,.\,4\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5}\sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{и} \quad \frac{2\,.\,4\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5}\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Продолжая такимъ образомъ сближать предѣлы, между которыми заключается искомое число $\frac{\pi}{4}$ и, замѣтивъ, что оба предѣла стремятся къ одной и той же величинѣ, ибо множитель, которымъ они отличаются другъ отъ друга стремится къ 1, онъ пришелъ къ слѣдующей формулѣ:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Формула Валлиса, совершенно свободная отъ радикаловъ, произвела, можно сказать, фуроръ въ математическомъ мірѣ, и наиболѣе выдающіеся математики стали развивать его принципъ. Между прочимъ, лордъ Бронкеръ также занялся интерполяціей ряда, построеннаго Валлисомъ — только въ силу нѣкоторыхъ соображеній онъ опредѣлилъ обратную величину $\frac{4}{\pi}$. Интерполируя рядъ Валлиса, онъ нашелъ, что это число заключается между $1+{}^1/_3$ и $1+{}^1/_4$. Отсюда онъ заключилъ, что въ знаменателѣ дроби должно быть не 3, а 3 съ нѣкоторой дробью. Опредѣляя этотъ знаменатель, онъ нашелъ, что $\frac{4}{\pi}$ заключается между предѣлами:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{5}} \quad \text{и} \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{6}}$$

Продолжая развивать этотъ методъ изслѣдованія, онъ пришелъ къ заключенію, что

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}$$

Такимъ образомъ была составлена первая непрерывная дробь *).

Но Валлисъ и Бронкеръ, какъ мы видѣли, интерполировали численный рядъ, такъ какъ они старались опредѣлить площадь цѣлаго квадранта. Ньютонъ задался цѣлью опредѣлить площадь круга, отвѣчающую любой абсциссѣ; иными словами, онъ хотѣлъ опредѣлить площадь OCAB въ зависимости отъ радіуса $(=1)$ и отрѣзка OB $(=x)$. Поэтому ему пришлось интерполировать рядъ:

$$s = x, \; s = x - \frac{x^3}{3}, \; s = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \; \ldots \ldots ,$$

состоящій изъ алгебраическихъ выраженій, составленныхъ по формулѣ (1) и опредѣляющихъ площади кривыхъ, у которыхъ ордината выражается уравненіями (А) **) Интерполяція привела его къ извѣстному выраженію для площади круга:

---

*) Замѣтимъ, что новѣшіе историки (Cantor) не признаютъ этого выраженія первой непрерывной дробью. Но считаютъ несомнѣннымъ, что основныя свойства непрерывныхъ дробей были открыты Эйлеромъ именно при изслѣдованіи приведенной выше дроби Бронкера.

**) Иначе Валлисъ, Бронкеръ и друг. интерполировали рядъ опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^0 dx, \quad \int_0^1 (1 - x^2) dx, \quad \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx, \ldots$$

Ньютонъ интерполировалъ рядъ интеграловъ съ перемѣннымъ предѣломъ:

$$\int_0^x (1 - x^2)^0 dx, \quad \int_0^x (1 - x^2) dx, \quad \int_0^x (1 - x^2)^2 dx, \ldots$$

$$s = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2.5}x^5 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\ 2.3.7}x^7 + \ldots$$

или иначе

$$s = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} - \ldots$$

Это уже настоящій безконечный рядъ, сходящійся довольно быстро при значеніяхъ x, заключенныхъ между $+1$ и -1. Такимъ образомъ былъ открытъ законъ, которому слѣдуютъ биноміальные коэффиціенты и примѣненъ къ вычисленію площади круга. Когда было дано выраженіе Ньютона, не замедлила явиться масса другихъ безконечныхъ рядовъ, имѣвшихъ цѣлью главнымъ образомъ увеличить быстроту сходимости. Было бы безъинтересно приводить здѣсь всѣ эти ряды; мы обратимъ только вниманіе на рядъ Лейбница, надѣлавшій въ свое время много шуму и вызвавшій даже обвиненія въ плагіатѣ; онъ имѣетъ видъ:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

Не смотря на внѣшнюю простоту, онъ менѣе самыхъ грубыхъ пріемовъ пригоденъ для вычисленія π *).

Одновременно съ опредѣленіемъ числа π математики предложили рядъ способовъ для графическаго построенія длины окружности и площади круга — конечно — по приближенію. Но всѣ эти построенія не имѣютъ внутренней связи съ самымъ смысломъ задачи. Они представляютъ собой только графическое воспроизведеніе числа, полученнаго вычисленіемъ.

Въ спеціальной статьѣ, помѣщенной въ №№ 73 и 76 „Вѣстника" **), вопросъ этотъ обработанъ настолько подробно, что мы

*) Выводится онъ слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad (\text{при } x < 1)$$

Помножив обѣ части на dx и взявъ интегралъ отъ 0 до x, получимъ:

$$arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Такъ какъ этотъ рядъ сходится при $x=1$, то получимъ для этого предѣльнаго значенія

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

**) В. Полтавцевъ. Къ вопросу о построеніи ирраціональныхъ чиселъ π и $\sqrt{\pi}$.

считаемъ лишнимъ на немъ останавливаться. Но если математики предложили цѣлый рядъ пріемовъ для вычисленія площади круга, то основной вопросъ о построеніи циркулемъ и линейкой квадрата, равновеликаго площади круга, остается нерѣшеннымъ.

Когда сотни математиковъ должны были признаться, что задача выше ихъ силъ, сталъ вырабатываться взглядъ, что рѣшеніе ея вовсе невозможно. Мысль эту высказали уже Віэтъ и Декартъ, но они не умѣли доказать своего положенія—да это врядъ ли и было возможно при тогдашнемъ состояніи науки. Говорили, что невозможно вообще построить прямую, равную по длинѣ кривой, а квадратура круга между тѣмъ приводитъ къ выпрямленію окружности. Но ихъ теорія рушилась, когда съ развитіемъ анализа было открыто множество спрямляемыхъ кривыхъ. Еще меньше успѣха имѣлъ Жакъ Грегори, который основывалъ доказательство непостроеямости π на томъ, что оно выражается безконечнымъ рядомъ; ему было указано, что есть ряды, выражающіе построяемую величину. Такимъ образомъ вопросъ о квадратурѣ круга оставался открытымъ до послѣдняго времени. Правда, въ прошломъ вѣкѣ было доказано Ламбертомъ, что π и квадратъ его суть числа ирраціональныя, но изъ этого все еще нельзя было заключить, что оно непостроямо.

Только въ 1882 году Линдеманъ, основываясь на нѣкоторыхъ положеніяхъ Эрмидта, показалъ окончательно, что π непостроямо циркулемъ и линейкой, а слѣдовательно задача о квадратурѣ круга неразрѣшима. Естественно, что прежде, чѣмъ прійти къ такому доказательству, нужно было рѣшить общій вопросъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой.

Вопросъ этотъ рѣшается аналитически на основаніи слѣдующихъ соображеній. Всѣ величины, входящія въ какое бы то ни было заданіе, могутъ быть измѣрены соотвѣтствующей единицей и выражены числами. Наоборотъ, величины, входящія въ задачу, какъ неизвѣстныя, могутъ быть обозначены буквами $x, y, z\ldots$ и если данныя задачи достаточны для ея рѣшенія, мы всегда сможемъ на основаніи геометрическихъ истинъ составить достаточное число уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ величинъ; онѣ выразятся алгебраическими формулами, и намъ остается только построить эти послѣднія. Необходимо, слѣдовательно, рѣшить, какія формулы построяемы циркулемъ и линейкой. Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служатъ слѣдующія основныя положенія:

I. Всѣ раціональныя формулы перваго измѣренія построяемы въ томъ случаѣ, если входящія въ нихъ перемѣнныя величины получаютъ раціональныя значенія или даны графически.

II. При томъ же условіи построяемы и всѣ формулы, заключающія квадратные корни или радикалы, приводимые къ квадратнымъ корнямъ.

Эти простыя предложенія непосредственно доказываются въ той вѣтви науки, которая занимается построеніемъ алгебраическихъ выраженій и носитъ названіе „Приложенія алгебры къ геометріи". Гораздо сложнѣе и важнѣе для насъ обратная теорема, выражающаяся слѣдующимъ образомъ:

III. Если алгебраическое выраженіе построено циркулемъ и линейкой, то оно можетъ быть представлено въ формулѣ, совершенно свободной отъ радикаловъ, или заключающей только квадратные корни изъ раціональныхъ величинъ, изъ величинъ заданныхъ графически и величинъ совершенно произвольныхъ *).

Мы дословно приведемъ соображенія Ванцеля, доказывающія это предложеніе и помѣщенныя имъ въ классической статьѣ „Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géometrie peut se résoudre avec la règle et le compas". Предположимъ, что геометрическая задача можетъ быть рѣшена пересѣченіями прямыхъ и окружностей. Если соединимъ точки, полученныя такимъ образомъ, съ центрами круговъ и съ точками, опредѣляющими положеніе прямыхъ, то мы составимъ цѣпь треугольниковъ, элементы которыхъ мы сможемъ вычислить помощью тригонометрическихъ формулъ. Но эти послѣднія представляютъ собою алгебраическія уравненія, которыя содержатъ стороны и тригонометрическія линіи только въ первой и во второй степени. Такимъ образомъ главное неизвѣстное задачи будетъ опредѣлено рѣшеніями ряда уравненій второй степени, коэффиціентами которыхъ будутъ служить раціо-

*) Съ точки зрѣнія аналитической геометріи теорема Ванцеля доказывается просто. Идея заключается въ томъ, что опредѣленіе координатъ конечныхъ точекъ построяемаго отрѣзка приводится къ розысканію точекъ пересѣченія прямыхъ, окружностей съ прямыми и двухъ окружностей между собою. Въ послѣднемъ случаѣ мы можемъ искать пересѣченія одной окружности съ радикальной осью обѣихъ окружностей. Вопросъ сводится такимъ образомъ къ рѣшенію различныхъ системъ уравненій, состоящихъ или изъ двухъ уравненій первой степени, или изъ двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, другое второй степени. Подобныя уравненія всегда приводятъ къ такимъ формуламъ, о которыхъ говорится въ предложеніи III.

нальныя функціи данныхъ и корни предыдущихъ уравненій." (Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. deuxième. 1837.)

Изъ приведеннаго предложенія непосредственно вытекаетъ, что формула, которая не можетъ быть выражена квадратными корнями, непостроема циркулемъ и линейкой, а слѣдовательно въ этомъ случаѣ неразрѣшима и задача, которая приводится къ построенію такой формулы. Такъ, рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба приводитъ насъ къ построенію формулы $x=a\sqrt[3]{2}$, гдѣ a сторона даннаго, x — искомаго куба. Такъ какъ $\sqrt[3]{2}$ не можетъ быть выраженъ въ квадратныхъ корняхъ *), то задача объ удвоеніи куба не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой. Съ такимъ же самымъ обстоятельствомъ мы встрѣчаемся при построеніи двухъ средне пропорціональныхъ къ даннымъ величинамъ. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, x и y двѣ средне пропорціональныя къ величинамъ a и b. Изъ пропорцій $a:x=x:y=y:b$ получаемъ уравненія: $x^2=ay$ и $y^2=bx$, откуда x равняется $\sqrt[3]{a^2b}$ Отсюда слѣдуетъ, что задача рѣшается только въ томъ случаѣ, когда a^2b представляетъ собою полный кубъ.

Изложенное выше предложеніе III можетъ быть выражено иначе: формула, заключающая только радикалы второй степени, можетъ служить корнемъ лишь такого уравненія съ раціональными коэффиціентами, степень котораго есть цѣлая степень числа 2. Поэтому, если задача приводитъ къ уравненію, степень котораго отлична отъ 2, 4, 8.... и если это уравненіе по перенесенію всѣхъ членовъ въ одну часть не разлагается на множителей, имѣющихъ раціональные коэффиціенты, то задача не рѣшается циркулемъ и линейкой. Такимъ образомъ, вопросъ о томъ, рѣшается ли задача циркулемъ и линейкой, приводится непосредственно къ изслѣдованію уравненій высшихъ степеней и принадлежитъ собственно къ высшей алгебрѣ.

В. К. (Одесса).

(Окончаніе слѣдуетъ.)

---

*) Положеніе это, впрочемъ, также не можетъ считаться очевиднымъ. Отсылаемъ читателей, интересующихся подробностями вопроса къ указанной статьѣ Ванцеля.

„ПОМОЩЬ САМООБРАЗОВАНІЮ“.

Да развѣ въ Россіи самообразованіе существуетъ?

Къ сожалѣнію, этотъ вопросъ, столь легкій для всякаго, кто хоть сколько нибудь знакомъ съ системою нашего пассивнаго образованія, обыкновенно даже не возникаетъ въ умахъ тѣхъ идеалистовъ, которые во всеоружіи всѣхъ благородныхъ качествъ донкихотства спѣшатъ, съ перомъ въ рукѣ, на помощь несуществующему, увы, у насъ самообразованію. И сколько сгораетъ при этомъ безкорыстнаго увлеченія, сколько тратится энергіи, сколько переживается невзгодъ, лишеній и гнетущей тоски—этого не знать, конечно, тѣмъ, кто въ этихъ подвигахъ печальныхъ рыцарей XIX столѣтія усматриваетъ одну лишь комическую ихъ сторону, кто, прочтя на могилѣ надпись: „жилъ какъ безумецъ, умеръ какъ мудрецъ“, отворачивается съ гордымъ сознаніемъ собственной дѣловитости, произнося одно лишь презрительное слово: „Донъ-Кихотъ!“

Такихъ запущенныхъ, забытыхъ донкихотскихъ могилъ на Руси не мало: въ нихъ покоится воспоминаніе о различныхъ спеціально и популярно-научныхъ журналахъ, редакціи которыхъ, пренебрегая статистикой, не понимали сколькимъ сотнямъ тысячъ онѣ не нужны и не интересны, и сколькимъ десяткамъ единицъ онѣ не особенно нужны, но интересны. Большая часть таковыхъ журналовъ издавалась на скудныя личныя средства редакторовъ, спасаясь до поры до времени отъ голодной смерти различными подачками частныхъ лицъ, иногда единовременными субсидіями самого Правительства; но вся эта система, шаткая какъ карточный домикъ, сплетенная изъ неоплаченныхъ счетовъ типографіи, долговыхъ обязательствъ издателя, несбыточныхъ надеждъ на внезапное увеличеніе числа подписчиковъ, безплатныхъ статей капризныхъ сотрудниковъ и множества невыполненныхъ къ сроку обѣщаній,—должна была рушиться при первомъ неблагопріятномъ натискѣ обстоятельствъ. Затѣмъ, разыгрывался еще послѣдній актъ драмы—редакція произносила сама свою надгробную рѣчь, касаясь излюбленной темы о равнодушіи публики и—умирала во цвѣтѣ лѣтъ, съ достоинствомъ и ложно-смутнымъ убѣжденіемъ, что гдѣ то кто то будетъ жалѣть, что во-время не сдѣлался ея подписчикомъ.

Боюсь быть пророкомъ, но такого смертельнаго исхода должно опасаться теперь въ г. Саратовѣ. Вамъ, быть можетъ, извѣстно, читатель, что въ этомъ городѣ кружокъ благомыслящихъ людей, съ г. Тельнихинымъ во главѣ, основалъ въ прошломъ году весьма симпатичный журналъ подъ заглавіемъ *Помощь Самообразованію* (4 большія книжки въ годъ, подписная плата—6 руб. съ пересылкою, подписчиковъ—162, дефицитъ—болѣе 3000 рублей въ годъ). Послѣдній выпускъ, какой я имѣлъ въ рукахъ (5-й съ начала изданія), выпущенный въ Іюлѣ текущаго года, заключаетъ статьи: „Физіологическія основы памяти“ Д-ра Штейнберга (31 стр. съ таблицею рисунковъ), „Что такое кровь?“ (публ. лекція въ Томскѣ) проф. Догеля (18 стр. съ таблицею рисунковъ), „Растительная клѣточка и ея строеніе“ А. И. К-ва (14 стр.), „Гербаріумъ“ Д. Т-а (18 стр. съ таблицею рисунковъ), „Вредныя для сельскаго хозяйства насѣкомыя“ Г. А. Ко-ва (32 стр. съ двумя таблицами рисунковъ); „Птичьи острова въ Лапландіи“ проф. А. Брэма (17 стр.), „Лучистая теплота“ А. Смирнова (16 стр. съ 1 черт.), „Соль въ культурно-историческомъ и естественно-научномъ отношеніи“ (публ. лекція въ Кенигсбергѣ) Д-ра Моллера (14 стр.), „Новые принципы борьбы съ вредными насѣкомыми“ Я. (6 стр.), „Задачи и значеніе мѣстной этнографіи“ (изъ публичныхъ лекцій) проф. И. И. Смирнова (22 стр.), „О томъ что сдѣлали Финикіяне для дѣла человѣческаго прогресса“ П. Д. Первова (21 стр.), „Дѣятельность Патріарха Фотія въ связи съ исторической миссіей византизма“ (рѣчь) проф. Ѳ. И. Успенскаго (10 стр.), „Россія и Востокъ“ (публ. лекція) А. В. Елисѣева (21 стр.), „Обзоръ исторіи искусствъ (продолженіе) (16 стр. съ табл. рис.), „Автобіографія Генриха Шлимана“ (продолженіе) (39 стр.). Изъ этого перечня нельзя не видѣть, что журналъ отличается богатствомъ содержанія; отъ себя прибавлю, что тѣ статьи, которыя мнѣ пришлось прочесть, какъ изъ числа вышепоименованныхъ, такъ и въ прежнихъ выпускахъ, составлены удачно и интересно. Но, какія бы не расточались похвалы Саратовскому журналу, все это не имѣетъ рѣшительно никакого значенія въ виду того убійственнаго факта, что всѣмъ этимъ богатствомъ матеріала, общедоступно предлагаемаго, интересуется на всю Россію лишь 162 человѣка. Nec Hercules contra nullos!

И хотя мнѣ лично очень жаль, не могу не понимать, что не помогутъ дѣлу никакія здѣсь нареканія. Г. Тельнихинъ жалуется, напримѣръ, въ передовой статьѣ того же 5-го выпуска, что „Нива“ потребовала 360 руб. за однократное объявленіе о подпискѣ на его журналъ, и въ виду такихъ фактовъ обѣщаетъ прійти къ убѣжденію (когда всему уже будетъ конецъ), что „безъ средствъ на рекламу у насъ не можетъ быть осуществлено никакое дѣло, какъ бы оно само по себѣ не было полезно.“ Положимъ, это не совсѣмъ такъ, и „Помощи самообразованію“ не помогла бы и реклама, уже потому во первыхъ, что никакого самообразованія—повторяю—у насъ нѣтъ, и во вторыхъ потому, что создать въ нѣкоторой степени потребность въ такомъ самообразованіи можно отнюдь не рекламами въ „Нивѣ“, а многолѣтней настойчивостью (а эта настойчивость дорого стоитъ!) и не 4-мя книгами въ годъ, хотя бы и претолстыми, а еженедѣльнымъ напоминаніемъ въ видѣ аккуратно выходящихъ нумеровъ. Это была роковая ошибка *), которую—если изданіе журнала продлится—отъ души совѣтую г. Тельникину исправить, преобразовавъ свой журналъ въ еженедѣльный, или по крайней мѣрѣ двухнедѣльный.

Р. П. (Одесса).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Къ тридцатилѣтней годовщинѣ телефона. $^{14}/_{26}$ октября 1891 года исполнилось три десятилѣтія съ тѣхъ поръ, какъ *Филиппъ Рейсъ* демонстрировалъ физическому обществу во Франкфуртѣ свой первый телефонъ. Можетъ быть не безъинтересно будетъ для читателей „Вѣстника“ познакомиться съ краткой исторіей этого столь важнаго открытія.

Въ 1837 году американецъ *Пэджъ* (Page) сдѣлалъ замѣчательное открытіе, впослѣдствіи подтвержденное *Маріаномъ* (1844) и *Вертгеймомъ* (1848), а именно, что желѣзный стержень приводится въ продольныя колебанія и издаетъ звукъ при попеременномъ намагничиваніи и размагничиваніи.

---

*) Кстати замѣчу, что подобную ошибку сдѣлалъ и г. Бобынинъ, сокративъ свой журналъ «Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ» (изд. въ Москвѣ) до 4 выпусковъ въ годъ. Правда, журналъ этотъ, какъ посвященный нынѣ почти исключительно исторіи математики и библіографіи, не могъ бы даже, вслѣдствіе излишней своей спеціальности, разсчитывать на многихъ читателей, но—и помимо этого—ему сильно вредитъ неопредѣленность сроковъ выхода обѣщаемыхъ 4 книгъ въ годъ, и мнѣ, напримѣръ, уже не разъ приходилось разувѣрять нѣкоторыхъ изъ моихъ знакомыхъ, которые считали изданіе журнала г. Бобынина давно прекратившимся. *Р. П.*

Кромѣ упомянутыхъ физиковъ изслѣдованіями о гальваническихъ звукахъ занимались *Де-Ля-Ривъ* (1843), *Маттеучи* (1844) и нѣкоторые другіе *). Но никому изъ нихъ не приходила мысль сдѣлать практическое примѣненіе новаго открытія. Лишь въ 1860 году французскій ученый *Лабордъ* сталъ заниматься вопросомъ о примѣненіи звуковъ стержней къ сигнализаціи **). *Лаборду* дѣйствительно удалось привести при помощи электрическихъ токовъ желѣзные стержни въ колебанія извѣстной продолжительности и передать на разстояніе нѣсколько тоновъ. *Дю-Монсель* сообщаетъ, что *Бурселль* также сталъ заниматься этимъ вопросомъ и даже въ одномъ изъ писемъ къ нему (1854 г.) говорилъ слѣдующее: „Вообразите себѣ человѣка, говорящаго передъ столь чувствительной пластинкой, что ни одно изъ колебаній, произведенныхъ словомъ, не пропадаетъ; представьте себѣ далѣе, что пластинка эта попеременно замыкаетъ и размыкаетъ цѣпь гальванической батареи; что, наконецъ, вторая пластинка, помѣщенная на нѣкоторомъ разстояніи повторяетъ колебанія первой и т. д.“

Хотя *Бурселль* и намѣтилъ путь къ электрической передачѣ рѣчи на разстояніе, но самъ не успѣлъ прійти къ благопріятнымъ результатамъ. Полное разрѣшеніе этого вопроса съ точки зрѣнія перваго практически успѣшнаго примѣненія принадлежитъ *Ф. Рейсу* (1834—1874 г.) Онъ же и ввелъ (ср. Silvanus Thompson: Philipp Reis, inventor of the Telephone) терминъ „телефонъ“. Приборъ его состоялъ изъ передатчика и пріемника. Этотъ послѣдній представлялъ собой деревянный ящичекъ съ круговымъ отверстіемъ, затянутымъ кишечной перепонкой; движеніе этой послѣдней производило замыканіе и прерываніе тока, направленнаго къ передатчику—деревянному ящику, на днѣ котораго лежалъ желѣзный стержень, обвитый спиралью.

Не смотря на сравнительно удачное практическое рѣшеніе вопроса, приборъ *Рейса* не былъ признанъ современниками. Горе и болѣзнь скоро свели несчастнаго изобрѣтателя въ могилу. Тому же забвенію ***) было предано и усовершенствованіе, внесенное

---

*) Ср. *Netoliczka*. Geschichte der Electricität. p. 230; Wien 1886. *Rosenberger*. Geschichte der Physik. Bd. III p. 792, Braunschweig 1887—1890.

**) *Sack*. Die Entwickelung der electrischen Telephonie. p. 6.

***) Впрочемъ Рейсу воздвигли впослѣдствіи члены физическаго общества надгробный памятникъ въ Фридрихсдорфѣ.

въ телефонъ *Рейса* нѣмецкимъ врачемъ *Клэмэнсомъ* и описанное имъ въ „Deutsche Klinik" за 1863 годъ, р. 368 *).

Дальнѣйшей разработкой этого вопроса занимался цѣлый рядъ ученыхъ: *Фанъ-деръ-Вейде* (1868—1870), одновременно съ нимъ *Кромвелль Варлей, Цэцилъ* и *Леонардо Врэй*. Однимъ изъ наиболѣе остроумныхъ усовершенствованій является безспорно примѣненіе вибрацій каммертона, сдѣланное *Ла-Куромъ* и демонстрированное имъ на международномъ телеграфномъ съѣздѣ въ С.-Петербургѣ въ 1875 году. Въ этомъ же направленіи былъ произведенъ рядъ работъ *Э. Греемъ и А. Эдисономъ* **).

Какъ ни остроумны были однако всѣ эти усовершенствованія, ни одно не годилось для практическихъ цѣлей.

Такъ обстояло дѣло, когда въ Европѣ получилось извѣстіе въ началѣ 1877 года, что шотландецъ *А. Г. Белль*, профессоръ въ Америкѣ, придумалъ аппаратъ, который даетъ возможность передавать съ полной отчетливостью человѣческую рѣчь на произвольное разстояніе. Извѣстіе возбудило разные толки. Одни приходили въ восторгъ, другіе относились къ нему съ полнымъ недовѣріемъ.

Первые оффиціальные опыты были произведены во время выставки въ Филадельфіи въ 1876 году. Всѣмъ извѣстно, какими блестящими результатами они увѣнчались. Первое телефонное сообщеніе было устроено частнымъ лицомъ *Вилльямсомъ* между Бостономъ и его дачей на разстояніи 50 километровъ.

Если теперь сравнить телефоны *Рейса* и *Белля*, то мы увидимъ, что *Белль* пошелъ по пути, совершенно обратному тому, которому слѣдовалъ *Рейсъ*.

Въ то время какъ у этого послѣдняго электрическій токъ возбуждалъ магнетизмъ, у *Белля*, напротивъ, магнитъ возбуждаетъ электрическіе токи. Телефонъ Белля шесть разъ превращаетъ одинъ видъ работы въ другой. Колебанія воздушнаго столба, выходящаго изъ нашихъ устъ, сообщаютъ звучащей пластинкѣ разныя колебанія; эти послѣднія переходятъ въ магнитныя

*) *Розенбергеръ* (Bd. III. p. 793) пытается опровергнуть фактъ забвенія, которому преданъ приборъ *Рейса*, приводя въ доказательство то, что весьма многіе стали заниматься усовершенствованіемъ телефона. Такую аргументацію нельзя признать особенно удачной. Большинство утверждаетъ, что приборъ *Рейса* не удостоился никакого вниманія. Ср. прекрасное сочиненіе «Geschichte des electrischen Fernsprechens» Berlin 1880.

**) *Prescott:* Thespeaking telephone. p. 218.

колебанія, которыя, въ свою очередь, съ феноменальной быстротой превращаются въ электрическіе токи. Затѣмъ слѣдуетъ обратный процессъ превращенія.

Эдисонъ также построилъ телефонъ, который не могъ однако же выдержать конкурренціи съ Беллевскимъ.

О. Пергаментъ.

ЗАДАЧИ.

№ 253. Ради упражненія мальчику задавали вписывать мѣломъ табличку умноженія въ клѣтки большой шахматной доски. Вскорѣ онъ испортилъ двѣ изъ этихъ клѣтокъ. При нѣкоторомъ положеніи доски передъ мальчикомъ, сумма чиселъ, вписанныхъ имъ въ испорченныя клѣтки, была наименьшею; при трехъ другихъ положеніяхъ доски, получающихся при поворачиваніи ея (по направленію часовой стрѣлки) на прямой уголъ, сумма этихъ двухъ чиселъ возрастала всякій разъ на 9, т. е. если въ 1-мъ положеніи эта сумма была x, то во второмъ она получалась $x+9$, въ 3-мъ — $x+2.9$ и въ 4-мъ—$x+3.9$.—Предполагая, что при всѣхъ четырехъ положеніяхъ шахматной доски мальчикъ записывалъ на ней числа пиѳагоровой таблички безъ ошибокъ, опредѣлить какія двѣ клѣтки были испорчены. *Ш.*

№ 254. Двѣ окружности радіусовъ r и R касаются внѣшне; линія центровъ пересѣкаетъ ихъ соотвѣтственно въ точкахъ А и В. Изъ точки А проведены касательныя къ окружности радіуса R и изъ точки В — касательныя къ окружности радіуса r. Опредѣлить разстояніе MN между точками пересѣченія этихъ касательныхъ.

А. П. (Пенза).

№ 255. Показать, что $\sin 18^\circ$ есть средняя пропорціональная между $\sin 6^\circ$ и $\sin 66^\circ$.

И. Вонсикъ (Воронежъ).

№ 256. Рѣшить уравненіе

$$(ax + b)^3 + (a'x + b')^3 + x^3 = 3(ax + b)(a'x + b')x,$$

затѣмъ, полагая $a=a'=0$, вывести элементарный пріемъ рѣшенія уравненія третьей степени.

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 257. Цилиндрическій стержень, длина котораго l цм. и удѣльный вѣсъ d, плаваетъ въ двухъ несмѣшивающихся жидкостяхъ, удѣльные вѣса которыхъ равны d' и d''. Слой верхней жидкости имѣетъ глубину h. Опредѣлить высоту части стержня, находящейся надъ поверхностью болѣе легкой жидкости.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

КЛАССНЫЯ УПРАЖНЕНІЯ.

(Квадраты натуральныхъ чиселъ.)

Заученныя въ дѣтствѣ числа помнятся на всю жизнь. Такое знаніе облегчаетъ многія умственныя вычисленія, вознаграждая сторицею за потраченное въ дѣтствѣ время. Въ особенности полезно помнить возможно больше квадратовъ натуральныхъ чиселъ. Ниже приложенныя примѣрныя упражненія направлены къ облегченію усвоенія таблички квадратовъ чиселъ и къ нѣкоторымъ ея примѣненіямъ.

Предполагается, что всѣ ученики класса твердо знаютъ квадраты однозначныхъ чиселъ.

1. Напишите сразу квадратъ 10, 20, ... 90?

2. Составьте квадратъ числа 11 (= 121).

Напишите сразу квадратъ 22 ($=121 \times 4 = 484$).

" " " 33 ($=121 \times 9 = 1089$).

И т. д.

3. Составьте квадратъ 12 (дюжина дюжинъ, гросъ = 144).

NB. Число квадратныхъ дюймовъ въ футѣ.

Назовите сразу квадратъ 21? (въ обр. пор. = 441).

Составьте квадратъ 13 (= 169).

Каковъ квадратъ 31? (=961).

Составьте квадратъ 23 (=529).

Почему квадратъ 32 равенъ не 925, а 1024?

4. Зная квадратъ 12-и, напишите сразу квадратъ 24-хъ? ($144 \times 4 = 576$).

Зная квадратъ 13, напишите сразу квадратъ 26? ($169 \times 4 = 676$).

5. Почему квадратъ 26 больше квадрата 24 ровно на 100? ($25 \times 4 = 100$).

NB. $13^2 = 12^2 + 5^2$ (теор. Пиѳагора).

6. Зная квадратъ 12, напишите квадратъ 36? ($144 \times 9 = 1296$).

Зная квадратъ 13, напишите квадратъ 39? ($169 \times 9 = 1521$. или $1296+225$).

7. Напишите квадратъ 14 ($49 \times 4 = 196$).
„ „ 28 ($196 \times 4 = 784$). И т. д.

8. Напишите квадратъ 15 ($25 \times 9 = 225$).
„ „ 45 ($225 \times 9 = 1800 + 225 = 2025$).
„ „ 135 ($2025 \times 9 = 18000 + 225 = 18225$)

И т. д.

9. Напишите квадратъ 16 ($64 \times 4 = 256$).

NB. Число квадратныхъ вершковъ въ аршинѣ.

Напишите квадратъ 32 ($256 \times 4 = 1000 + 24 = 1024$).
„ „ 64 ($1024 \times 4 = 4096$).
„ „ 48 ($256 \times 9 = 2250 + 54 = 2304$).
„ „ 96 ($2304 \times 4 = 9216$; или $1024 \times 9 = 9216$).

И т. д.

10. Напишите на доскѣ рядъ нечетныхъ чиселъ, начиная съ 1,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...

и, складывая всякій разъ эти числа съ начала, сообразите что получается? какое замѣчается правило?

NB. Для болѣе нагляднаго усвоенія этой зависимости, между рядомъ нечетныхъ чиселъ и квадратами натуральныхъ чиселъ, которую полезно ученикамъ знать какъ можно ранѣе, рекомендую слѣдующій пріемъ:

11. Начертите на доскѣ маленькій правильный треугольникъ (равносторонный) и другой, такой же формы, но со сторонами вдвое длиннѣе. Сколько первыхъ треугольниковъ помѣстится во второмъ? (4—показать на чертежѣ). Если второй треугольникъ имѣетъ стороны втрое длиннѣе, чѣмъ первый, сколько въ немъ разъ помѣстится первый? (9—показать на черт.) и т. д. Изъ такихъ чертежей наглядно видно, что квадратъ какого либо числа есть сумма нечетныхъ чиселъ, начиная съ единицы.

12. Начертите на доскѣ маленькій квадратикъ. Какую фигуру надо къ нему приложить, чтобы образовался квадратъ съ удвоенною стороною? Какую фигуру надо приложить къ этому послѣднему квадрату, чтобы образовался квадратъ съ утроенною стороною? И т. д.

NB. Эти фигуры, состоящія изъ нечетнаго числа такихъ, какъ основной, квадратиковъ, древне-греческіе математики называли *численными гномонами*.

13. Почему разность между квадратами двухъ послѣдовательныхъ чиселъ всегда нечетная? Скажите сразу, какова разность между квадратами чиселъ 48 и 47? ($48 + 47 = 95$).

Какова разность между квадратами чиселъ 48 и 46? ($48 + 47 + 47 + 46 = 95 + 93 = 188$). И т. д.

14. Представьте сумму послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ въ видѣ произведенія двухъ множителей:

$13 + 15 = ?$ ($14 \times 2 = 28$).

$13 + 15 + 17 = ?$ ($15 \times 3 = 45$).

$13 + 15 + 17 + 19 = ?$ ($16 \times 4 = 64$). И т. д.

15. На этомъ основаніи, какъ, напримѣръ, можно еще представить разность квадратовъ чиселъ 48 и 46? (прим. 13)

$$95+93=94\times2=(48+46)(48-46)=188.$$

Напишите по этому правилу разность квадратовъ чиселъ 48 и 45.

$$48+47+47+46+46+45=95+93+91=93\times3=(48+45)(48-45).$$

И т. д. Отсюда какое правило вытекаетъ для представленія разности квадратовъ двухъ чиселъ въ видѣ произведенія двухъ множителей?

16. Зная это правило и имѣя передъ глазами табличку квадратовъ, перемножьте въ умѣ слѣдующія двузначныя числа:

$17\times19 = ?$ $[(18-1)(18+1)=18^2-1^2=324-1=323]$

$13\times19 = ?$ $(16^2-3^2=256-9=247)$.

$28\times16 = ?$ $(22^2-6^2=484-36=448)$.

$37\times17 = ?$ $(27^2-10^2=729-100=629)$.

И т. д.

17. Почему этимъ пріемомъ умноженія неудобно было бы пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда разность между множителями есть число нечетное?

18. Пользуясь табличкою квадратовъ, перемножьте числа:

$15 \times 18 = ?$ $(15^2 + 15 \times 3 = 225 + 45 = 270)$.

или: $(16 - 1)(16 + 2) = 16^2 + 16 - 2 = 256 + 14 = 270$.

$29 \times 32 = [(30 - 1)(30 + 2) = 30^2 + 30 - 2 = 928]$.

И т. д.

Б. У. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 499 (1 серіи). Въ треугольникъ ABC вписана окружность, которая въ точкахъ D, E, F касается его сторонъ; основанія высотъ треугольника DEF служатъ вершинами треугольнику KLM. Доказать, что площадь треугольника KLM относится къ площади треугольника ABC, какъ $r^2 : 4R^2$, гдѣ r — радіусъ окружности DEF, а R—радіусъ окружности ABC.

Называя центръ вписаннаго круга черезъ O, получимъ для угловъ D, E, F величины:

$$d - \frac{A}{2},\ d - \frac{B}{2},\ d - \frac{C}{2}.$$

Треугольникъ KLM ортоцентрическій по отношенію къ треугольнику DEF, поэтому его углы K, L, M равны $2d - 2\left(d - \frac{A}{2}\right)$ $2d - 2\left(d - \frac{B}{2}\right)$, $2d - 2\left(d - \frac{C}{2}\right)$ или A, B, C. Слѣдовательно KLM подобенъ треугольнику ABC. Радіусъ круга, описаннаго около $KLM = \frac{r}{2}$. Поэтому пл. KLM : пл. ABC $=$ $= \left(\frac{r}{2}\right)^2 : R^2 = r^2 : 4R^2$.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва), *Б.* (Полоцкъ).

№ 24 (2 сер). Найти maximum выраженій

$$\frac{(ax+by)^2}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{(ax+by+cz)^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Называя данныя выраженія черезъ A и B, изъ тождествъ

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + $$
$$+ (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$$

находимъ:

$$A = a^2 + b^2 - \frac{(ay - bx)^2}{x^2 + y^2}$$

$$B = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Отсюда ясно, что наибольшая величина выраженія A равна $a^2 + b^2$, т. е. когда $x : a = y : b$.

Наибольшее значеніе B равно $a^2 + b^2 + c^2$ и соотвѣтствуетъ тому случаю, когда

$$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0$$

т. е. когда $x : a = y : b = z : c$.

Я. Эйлеръ (Спб.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *В. Х.* (Курскъ).

№ 61 (2 сер.). Рѣшить уравненія

$$x(y + z - x) = a$$
$$y(x + z - y) = b$$
$$z(x + y - z) = c$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получимъ:

$$(y - x)(z - x - y) = b - a;$$

вставивъ сюда выраженіе $z - x - y = -\frac{c}{z}$, получимъ $(x - y) = \frac{b - a}{c} z$. Подставимъ въ первое уравненіе и найдемъ

$$xz = \frac{ac}{a + c - b}$$

такъ точно

$$xy = \frac{ab}{a + b - c}$$

$$yz = \frac{bc}{b + c - a}$$

Теперь легко найдемъ

$$x = c\sqrt{\frac{a + b - c}{(a + c - b)(b + c - a)}} \text{ и т. д.}$$

И. Л. (Житоміръ), *I. Теплицкій* (Кременчугъ), *Л. Лебедевъ*, *Н. Базилевичъ*, *Л. Карагодинъ*, *П. Писаревъ*, *П. Степановъ* (Курскъ), *В. Моргунъ* (Кіевъ), *А. Протопоповъ* (Спб.). *П. Шимаевъ* (Новочеркасскъ). *Али-Бекъ*, *А. Са.ви*, *В. Вржесстовскій* (Воронежъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 28 Ноября 1891 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа, Тираспольская, № 14.

Обложка
ищется

Обложка
пщется