Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. **№ 131.** № 11.

ПОСТУЛАТЫ ИЛИ ТРЕБОВАНІЯ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

(Продолженіе) *)

Говоря о постулатахъ геометріи, нельзя не указать, хоть въ краткихъ словахъ, на преобладающее въ этой наукѣ значеніе нагляднаго *чертежа,* и притомъ чертежа *плоскаго*.

Вездѣ и во всѣ времена, вплоть до нашихъ дней, геометрія находилась и находится подъ властью чертежа на плоскости. Всѣмъ извѣстно, напримѣръ, какое существенно важное значеніе имѣлъ чертежъ въ геометріи индусовъ, замѣняя собою всякіе доказательства и разсужденія; въ періодъ начальнаго развитія греческой геометріи, подъ вліяніемъ заимствованнаго у древнихъ египтянъ метода, различныя новыя геометрическія соотношенія *усматривались* на чертежѣ; его наглядная убѣдительность дѣлала лишнимъ всякія доказательства, придуманныя только впослѣдствіи. Въ этотъ періодъ развитія геометріи, который можно назвать періодомъ *конструктивной геометріи,* число *аксіомъ* было весьма значительно, ибо, благодаря чертежу, принимались за очевидныя многія изъ такихъ геометрическихъ истинъ, которыя нынѣ, въ современныхъ систематическихъ курсахъ, отнесены къ категоріи теоремъ.

*) См. № 121 В. О. Ф.

Не подлежитъ почти сомнѣнію, что такимъ именно конструктивнымъ способомъ была напр. установлена впервые Пиѳагорова теорема для площадей (извѣстная въ Египтѣ раньше эпохи Пиѳагора), золотое сѣченіе и пр., не говоря уже о такихъ очевидныхъ соотношеніяхъ, какъ напр. равенство вертикальныхъ угловъ и проч. Вообще можно сказать, что *чертежъ создалъ геометрію*, — и не перестаетъ ее создавать въ умѣ каждаго изъ насъ и теперь.

Первообразомъ геометрическаго чертежа была система кольевъ и веревокъ древне-египетскихъ гарпедонавтовъ (землемѣровъ); переходъ отъ фигуръ размежеванныхъ полей къ настоящему чертежу, будь то на папирусѣ, или на дощечкахъ, покрытыхъ воскомъ, либо выполненныхъ палкой на пескѣ, — былъ, конечно, не труденъ. Что такой чертежъ выполнялся на поверхности ровной, *плоской* — это весьма естественно, такъ какъ за таковую принималась и поверхность почвы. Да и само названіе *плоскости*, когда оно уже понадобилось позднѣе для геометрическихъ отвлеченныхъ представленій, было заимствовано отъ названія поля, равнины — и вообще земной поверхности (напр. греческое ἐπίπεδος *). Такимъ образомъ *геометрическій чертежъ сдѣлался* навсегда *обязательно плоскимъ*, хотя это условіе никогда, какъ прежде такъ и теперь, не отмѣчается какъ существенное, а въ силу вѣковой привычки — принимается лишь какъ само собою подразумѣваемое.

Между тѣмъ это обязательство наложило неизгладимую печать на всѣ позднѣйшія завоеванія геометріи, исторія которой могла бы по справедливости быть названа исторіей плоскаго чертежа. Къ этому послѣднему мы и нынѣ пріурочиваемъ всѣ наши пространственныя представленія: мы почти *не умѣемъ думать внѣ плоскости*. Если одной такой плоскости оказывается недостаточнымъ, мы прибѣгаемъ къ двумъ (начерт. геом.), къ тремъ (Анал. геом. 3-хъ изм.) и путемъ искусственнымъ, въ концѣ концовъ, все сводимъ обязательно къ плоскимъ чертежамъ, хотя бы и вообра-

---

*) Тутъ невольно напрашивается замѣчаніе, что даже у Эвклида для плоскости и прямой линіи даны такія неточныя опредѣленія (см. кн. I опр. 7 и 4), которыя въ равной мѣрѣ относятся и къ сферѣ, и окружностямъ ея большихъ круговъ, а именно: «плоская поверхность есть такая, которая одинаково расположена относительно всѣхъ прямыхъ линій на ней лежащихъ» и — «прямая линія есть такая, которая одинаково лежитъ относительно всѣхъ своихъ точекъ». Не даетъ ли это намъ право сказать, что въ эпоху Эвклида, и тѣмъ болѣе [illegible] ея, никто изъ геометровъ и не помышлялъ о геом. фигурахъ и построеніяхъ на иной поверхности кромѣ плоской?

жаемымъ. Даже Алгебра тѣмъ же пріемомъ наносится на плоскость; даже мнимыя величины графически изображаются на плоскости. Однимъ словомъ наша математика, благодаря господству чертежа, есть *математика плоскости,* а не пространства.

Но, быть можетъ, въ этомъ пріурочиваніи къ плоскости всего, что понимается нами въ пространствѣ, есть нѣчто обязательное для нашего ума? Быть можетъ, наше воображеніе не можетъ обходиться безъ всѣхъ этихъ сѣченій по плоскостямъ, проекцій на плоскости и пр. пр.? Вовсе нѣтъ, и чтобы убѣдиться въ отрицательномъ отвѣтѣ на всѣ подобные вопросы, достаточно вообразить существа, способныя разсуждать также-же какъ и мы, но надѣленныя отъ природы организмами столь большихъ, по сравненію съ нами, размѣровъ, что доступныя ихъ созерцанію и искусственно воспроизводимыя ими части горизонтальной поверхности, составляли бы въ цѣломъ замѣтно выпуклую часть сферической поверхности. Для такихъ разумныхъ существъ не плоскость, а сферическая поверхность казалась бы простѣйшей и удобнѣйшей, и потому къ ней были бы пріурочены и всѣ ихъ пространственныя представленія, и ихъ математика, при столь-же естественномъ, какъ и наша, развитіи, была бы *математикой сферической.*

Итакъ — хотя на первый взглядъ это и кажется нѣсколько страннымъ — *весь строй* нашей Эвклидовской *геометріи обусловливается* прежде всего *отношеніемъ размѣровъ нашего тѣла къ радіусу земнаго шара,* и преобладающее значеніе плоскости есть лишь слѣдствіе того *случайнаго* факта, что это отношеніе выражается слишкомъ малою дробью, на столько малою, что мы сочли себя въ правѣ части горизонтальныхъ (т. е. сферическихъ) поверхностей нашихъ рабочихъ столовъ, а стало быть и нашихъ геометрическихъ чертежей, считать сливающимися всѣми своими точками съ плоскостями касательными къ шару. Но, строго говоря, это вѣдь не вѣрно, ибо плоскость и поверхность сферы могутъ имѣть лишь одну общую точку. Слѣдовательно, принимая за плоскую ту поверхность, которая на небольшомъ протяженіи, вывѣренная напр. нивелиромъ, оказывается строго горизонтальной, мы уже ошибаемся, и то *понятіе о плоскости,* которое мы вводимъ въ геометрію, есть лишь понятіе объ идеальномъ предѣлѣ, къ которому стремится сферическая поверхность по мѣрѣ возрастанія ея радіуса до ∞.

Такого, какъ мнѣ кажется, взгляда слѣдуетъ вообще придерживаться въ вопросѣ объ эмпирическомъ происхожденіи основъ геометріи.

Обращаю вниманіе еще на одно обстоятельство. Область элементарно-геометрическихъ построеній, какъ говорилось еще во время Эвклида и говорится и понынѣ, ограничивается употребленіемъ линейки и циркуля. Но вѣдь это не вѣрно! *Не двумя*, *а тремя* механическими приспособленіями мы вправѣ пользоваться въ тѣсныхъ предѣлахъ этой области, ибо для выполненія какого-бы то ни было элем.-геом. построенія, намъ не только нужны линейка и циркуль, но еще — и прежде всего — нуженъ тотъ столъ, та доска, или бумага и пр. — т. е. вообще *та поверхность, на которой построеніе должно быть выполнено.* Если даже рѣчь идетъ о воображаемыхъ построеніяхъ, то и здѣсь, помимо права мысленно проводить прямыя линіи и окружности, необходимо должна быть задана поверхность. Тѣмъ болѣе непозволительно забывать объ этомъ третьемъ и необходимѣйшимъ геометрическомъ *приборѣ,* что имъ точно такъ же характеризуется область доступныхъ построеній, какъ и линейкой и циркулемъ. Какъ линейка можетъ быть *прямолинейная* либо иная, какъ циркуль можетъ быть *круговой*, либо иной, такъ и поверхность построенія можетъ быть *плоская* либо иная. Слѣдовательно элементарно-геометрическими построеніями мы должны называть лишь тѣ, которыя: во 1-хъ выполнимы на плоской поверхности, во 2-хъ при помощи прямолинейной линейки и въ 3-хъ — кругового циркуля. Измѣните любое изъ этихъ трехъ условій, и всякій разъ предѣлы доступныхъ построеній существенно измѣнятся. Напримѣръ расположите бумагу не на плоскомъ столѣ, а хотя бы на боковой поверхности кругового цилиндра, котораго радіусъ вамъ извѣстенъ, и вы сами убѣдитесь, если захотите, что на такой бумагѣ, при помощи обыкновенной, но достаточно гибкой линейки и обыкновеннаго циркуля, задача квадратуры круга можетъ быть рѣшена точно.

Изъ всего вышесказаннаго достаточно ясно видно, какъ деспотически господствуетъ въ нашей геометріи плоскій чертежъ, какъ глубоко онъ проникъ во всѣ наши представленія, составляя какъ бы обязательный ихъ фонъ, существованіе котораго подразумѣвается всегда и вездѣ само собою. Не удивительно поэтому, что и въ эпоху Эвклида, въ эпоху болѣе близкую къ періоду господства конструктивнаго метода въ геометріи, никто и не помышлялъ о чертежахъ иныхъ чѣмъ плоскіе и не заботился о точной формулировкѣ этого существеннаго условія. Вотъ почему и у Эвклида нѣтъ особаго постулата, ограничивающаго геометрическія построенія условіемъ, что они должны быть выполнены на плоской, а не на иной поверхности.

Что касается приведенныхъ имъ трехъ постулатовъ, то, кромѣ даннаго въ предыдущей бесѣдѣ разъясненія, я позволю себѣ сдѣлать здѣсь еще нѣкоторыя замѣчанія.

Можно задаться вопросомъ: почему во времена Эвклида геометры сочли нужнымъ ограничить употребленіе циркуля столь стѣснительнымъ условіемъ, разрѣшая при построеніяхъ пользоваться этимъ приборомъ только для вращенія данныхъ (въ плоскости) конечныхъ прямыхъ, но не для ихъ перенесенія, какъ это теперь общепринято? *) Мнѣ кажется, что причины этого надо искать въ частыхъ придиркахъ аѳинскихъ софистовъ, вынудившихъ геометровъ того времени, при весьма вѣроятномъ еще несовершенствѣ самаго механическаго изготовленія циркулей, отказаться отъ употребленія этого прибора, какъ инструмента длиноотлагательнаго, на томъ основаніи, что въ промежутокъ времени, необходимый для совершенія самого процесса перенесенія отмѣренной циркулемъ длины изъ одного мѣста въ другое, нельзя дѣйствительно поручиться, что растворъ его останется строго неизмѣннымъ, подъ вліяніемъ внѣшнихъ причинъ, какъ напр. температуры руки, ея прикосновенія и пр. И хотя такое-же возраженіе могло бы быть сдѣлано и по поводу примѣненія того-же циркуля при описываніи окружности вращеніемъ данной конечной прямой, но въ этомъ послѣднемъ случаѣ представляется возможность нѣкоторой повѣрки, такъ какъ при измѣненіи раствора циркуля во время самого процесса вращенія, это обнаружилось бы несовпаденіемъ концовъ вычерчиваемой окружности, что уже сразу бросается въ глаза.

Первые два постулата Эвклида, а именно:

1) Допускается, что отъ одной точки до какой нибудь другой можно провести прямую линію,

и 2) Допускается, что конечную прямую можно продолжить неопредѣленно,

обыкновенно замѣняются нынѣ однимъ: „чрезъ двѣ данныя точки можно провесть прямую линію неопредѣленной длины“.

---

*) См. часть первую настоящей статьи въ № 121 В. О. Ф.

Всѣ три постулата Эвклида относятся — какъ было сказано ранѣе — исключительно къ построеніямъ на плоскости и притомъ къ построеніямъ *реальнымъ* на практикѣ, а не воображаемымъ. Это между прочимъ видно еще и изъ того, что въ началѣ книги XI, переходя къ стереометріи, Эвклидъ вовсе не считаетъ нужнымъ устанавливать какихъ либо постулатовъ: онъ не дѣлаетъ напр. допущенія, что „черезъ три данныя точки можно провесть плоскость“ (или черезъ двѣ пересѣкающіяся либо параллельныя прямыя, или черезъ данную точку и данную прямую), не устанавливаетъ права „данную конечную плоскость продолжать неопредѣленно“, не говоритъ, что „около данной точки, какъ изъ центра, можно произвольнымъ радіусомъ описать шаръ“. Онъ считаетъ, очевидно, совершенно лишнимъ принимать какіе бы то ни было законы для тѣхъ построеній, которыя на самомъ дѣлѣ не могутъ быть выполнены на плоскомъ чертежѣ. Согласно Эвклиду — воображеніе наше не нуждается ни въ какихъ постулатахъ.

Укажу еще на одинъ примѣръ, подтверждающій вышесказанное. Въ 3-мъ своемъ постулатѣ — какъ было указано выше — Эвклидъ устанавливаетъ право пользоваться при построеніяхъ циркулемъ лишь для вращенія (въ данной плоскости) данныхъ конечныхъ прямыхъ. Не трудно видѣть, что этимъ стѣснительнымъ условіемъ всѣ геометрически возможныя построенія ограничиваются предѣлами *одной* плоскости; иными словами, оно равносильно требованію, чтобы *всѣ данныя величины находились въ одной плоскости*, и въ той именно, *въ которой должны быть найдены построеніемъ и всѣ величины искомыя.* Эвклидъ показалъ, что при такомъ условіи, его трехъ постулатовъ достаточно для рѣшенія всѣхъ элем. задачъ; но ихъ недостаточно для самаго простого построенія во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда хотя одна изъ величинъ данныхъ лежитъ въ другой плоскости, а не въ плоскости чертежа. Такъ напр., по Эвклиду, мы не умѣемъ построить въ плоскости MN угла равнаго углу, данному въ плоскости PR, ибо никакая длина, заданная въ этой послѣдней, не можетъ быть перенесена на плоскость MN. Слѣдовательно вся плоская геометрія по Эвклиду есть *геометрія монографическая* или *одночертежная*, т. е. такая, въ которой всѣ данныя и искомыя построенія связаны однимъ чертежемъ, что, повидимому, всегда упускалось изъ виду. — А между тѣмъ тотъ-же Эвклидъ въ книгѣ XI-ой своихъ „Началъ“, рѣшая напр. такія задачи: „при данной прямой AB и при данной на ней точкѣ В построить тѣлесный уголъ равный данному тѣлесному углу D" (предл. 26), или: „На данной прямой АВ построить параллелепедъ подобный и подобно расположенный параллелепипеду CD" (предл. 27), говоритъ, не стѣсняясь своими постулатами, о построеніи угла равнаго углу, данному въ другой плоскости, о перенесеніи изъ одной плоскости въ другую данныхъ отрѣзковъ и пр. Чѣмъ же объясняется такая, повидимому, непослѣдовательность? Очевидно тѣмъ, что постулаты относятся только къ физически выполнимымъ построеніямъ, а здѣсь, въ стереометріи, рѣчь идетъ о воображаемыхъ лишь построеніяхъ, отложеніяхъ и пр., которыя ни въ какихъ приборахъ не нуждаются.

То-же относится и къ предложенію 4-му книги I-ой, въ которомъ, какъ я уже упомянулъ, Эвклидъ пользуется методомъ наложенія для доказательства равенства треугольниковъ. Такое наложеніе одной фигуры на другую, какъ процессъ лишь воображаемый, не имѣетъ ничего общаго съ реальными геом. построеніями и потому—по Эвклиду—не подлежитъ ограниченію никакими постулатами. Съ нашей точки зрѣнія это, конечно, не такъ, ибо наше право пользованія въ геометріи методомъ наложенія основывается (неявно) на двухъ постулатахъ, а именно во 1-хъ на допущеніи равнозначности, непрерывности и однородности пространства, въ которомъ возможны какія угодно перемѣщенія тѣлъ абсолютно твердыхъ (т. е. неизмѣнныхъ) безъ измѣненія при такомъ перемѣщеніи ихъ размѣровъ, и во 2-хъ на допущеніи, что воображаемыя наши геометрическія величины обладаютъ всѣми свойствами тѣлъ абсолютно твердыхъ и неизмѣнныхъ. Это второе условное допущеніе, такъ явно доказывающее экспериментальное происхожденіе одного изъ наиболѣе могущественныхъ методовъ нашей геометріи, повидимому, весьма часто упускается изъ виду.

Еще одно замѣчаніе, относящееся скорѣе къ терминологіи. Одиннадцатую аксіому Эвклида обыкновенно называютъ *Эвклидовскимъ постулатомъ*. Нельзя не пожалѣть объ этой глубоко укоренившейся привычкѣ, не имѣющей въ свое оправданіе никакихъ основаній. Эвклидъ нигдѣ не называетъ *требованіемъ* того, что отнесено имъ къ числу геометрическихъ *аксіомъ*. Его постулаты, какъ мы только что видѣли, представляютъ собою только поименованіе тѣхъ трехъ (или, въ сущности, двухъ) наиболѣе элементарныхъ построеній, къ которымъ могутъ быть сведены рѣшенія всѣхъ геом. задачъ на плоскости. Относить къ числу построеній знаменитую 11-ую аксіому — рѣшительно не имѣетъ смысла, тѣмъ болѣе что, говоря напр. о необходимости встрѣчи перпендикуляра и наклонной, при достаточномъ ихъ продолженіи, мы понимаемъ *воображаемое*, а не выполнимое на чертежѣ ихъ продолженіе; сама же возможность продолженія на чертежѣ этихъ двухъ прямыхъ основывается на 2-мъ постулатѣ Эвклида. Если мы формулируемъ эту аксіому иначе, напр. такимъ предложеніемъ: „черезъ данную точку можно провести *только одну* прямую параллельную данной прямой", то и въ этомъ видѣ непозволительно причислять ее къ постулатамъ; позволительно было бы, напр., принять—если угодно — такой постулатъ для геом. построеній: „черезъ данную точку *возможно провести* прямую параллельную данной прямой", (чѣмъ мы разрѣшили бы употребленіе новаго механическаго приспособленія — параллельныхъ раздвижныхъ линеекъ), но утвержденіе, что можно провесть *только одну* такую параллельную прямую, съ такимъ постулатомъ не могло бы имѣть ничего общаго, ибо имъ характеризуется только свойство плоскости. Поэтому—если угодно — можно 11-ую аксіому назвать *опредѣленіемъ плоскости*, но ни въ какомъ случаѣ не постулатомъ. Точно также говоря: „черезъ двѣ точки возможно провести прямую", мы не утверждаемъ еще, что „черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую"; первое есть Эвклидовскій постулатъ, разрѣшающій употребленіе при выполненіи геом. построеній прямолинейной линейки, второе — есть аксіома, заключающая въ себѣ опредѣленіе прямой линіи.

Оставляю въ сторонѣ вопросъ о возможности замѣны Эвклидовскихъ постулатовъ другими какими либо. Читателю извѣстно, что напр. при современномъ взглядѣ на право пользованія циркулемъ, всѣ задачи геом. на плоскости могутъ быть рѣшены при помощи линейки и одного опредѣленнаго раствора циркуля *), или—наоборотъ—что при помощи циркуля съ произвольно измѣняемымъ растворомъ можно вовсе обойтись безъ линейки во всѣхъ случаяхъ, гдѣ не требуется проведеніе прямой какъ непрерывнаго ряда точекъ **), что вмѣсто циркуля можно вводить тѣ либо другія приспособленія, напр. параллельныя линейки, наугольники и пр.

---

*) См. напр. статью *А. Шнейдера:* «Рѣшеніе геом. задачъ при помощи линейки и одного раствора циркуля» въ № 1 «Журн. Эл. Матем.» за 188⁵/₆ уч. годъ.

**) См. напр. статью *С. Шатуновскаго*: «О рѣшеніи задачъ безъ помощи линейки» въ № 125 В. О. Ф.

Итакъ, мы пришли къ слѣдующимъ выводамъ:

1) Благодаря стѣснительному ограниченiю употребленiя циркуля, Эвклидовскiе постулаты достаточны лишь для одночертежныхъ построенiй.

2) Нынѣ принимаемые постулаты для элементарно-геометрическихъ построенiй сводятся къ праву употреблять при ихъ выполненiи: 1) плоской поверхности, 2) прибора для проведенiя прямыхъ линiй, 3) прибора для вычерчиванiя окружностей и 4) прибора для перенесенiя отмѣренной длины. (Послѣднiе два прибора мы привыкли соединять въ одномъ—циркулѣ).

3) Тѣ допущенiя, которыя мы привыкли, благодаря популярности „Началъ" Эвклида, называть „геометрическими постулатами", вовсе не представляютъ собою научныхъ постулатовъ геометрiи.

4) Подъ этими послѣдними, которыхъ до сихъ поръ нельзя считать установленными, слѣдуетъ понимать такiя основныя положенiя, коими обусловливается законность всѣхъ нашихъ пространственныхъ представленiй и всѣхъ умозаключенiй о соотношенiяхъ между геометрическими величинами.

Попыткѣ формулированiя этихъ основныхъ положенiй элементарной геометрiи будетъ посвящена третья и послѣдняя часть этой статьи. *Ш.*

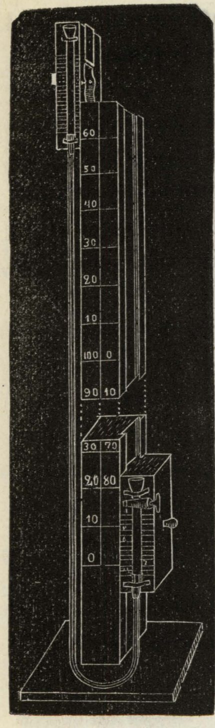
(Окончанiе слѣдуетъ).

Приборъ для доказательства закона Марiотта *).

Въ виду недостатковъ и неудобствъ, которые представляютъ приборы Марiотта, служащiе для доказательства закона Марiотта-Бойля, предлагается вниманiю преподавателей физики приборъ, вполнѣ удовлетворяющiй требованiямъ класснаго преподаванiя физики.

Устройство прибора.—На горизонтальной подставкѣ укрѣпленъ вертикальный четыреугольный столбъ вышиною въ 2 метра,

*) Весьма сходный съ нижеописаннымъ по устройству и для той же цѣли предназначенный лекцiонный приборъ былъ предложенъ, сколько намъ помнится, въ 1879 году *В. В. Лермантовымъ* и демонстрированъ тогда же на Съѣздѣ Русск. Естеств. и Врачей въ С.-Петербургѣ. Къ сожалѣнiю, приборъ этотъ не получилъ надлежащаго распространенiя, и теперь о немъ мало кто и знаетъ. Съ цѣлью возстановленiя преданнаго незаслуженному забвенiю принципа, помѣщаемъ здѣсь описанiе прибора г. *Каминскаго*, устроеннаго имъ самостоятельно, и, подобно прибору г. Лермантова, вполнѣ пригоднаго и желательнаго для физическихъ кабинетовъ среднихъ учебныхъ заведенiй. *Прим. ред.*



Фиг. 28.

шириною въ 6 и толщиною въ 4 центиметра. Передняя сторона столба раздѣлена продольною чертою пополамъ и, начиная съ высоты 30 цнтм. надъ основаніемъ, нанесены дѣленія на разстояніи 10 цнтм. одно отъ другого; номера этихъ дѣленій слѣва отъ продольной черты идутъ снизу вверхъ, такъ что на нижнемъ дѣленіи стоитъ 0 и затѣмъ послѣдовательно вверхъ 10, 20 . . . 170; справа же отъ продольной черты номера дѣленій идутъ въ обратномъ порядкѣ, при чемъ 0 стоитъ противъ 100 съ лѣвой стороны. Вдоль обѣихъ боковыхъ сторонъ столба въ выемкахъ могутъ двигаться два деревянныхъ бруска длиною въ 30 и шириною въ 3 цнтм.; чтобы эти бруски своею тяжестью не сдвигались внизъ, въ промежутокъ между брускомъ и столбомъ вставляется изогнутая стальная пластинка (какъ показано на чертежѣ вверху), къ серединѣ пластинки прикрѣпленъ стержень, проходящій черезъ отверстіе въ брускѣ и оканчивающійся ручкою; изогнутая пластинка, упираясь въ столбъ, препятствуетъ сдвигаться бруску, но если взять за ручку, пластинка выпрямляется и брусокъ можно свободно передвигать вдоль столба. Къ правому бруску прикрѣплена стеклянная трубка длиною 25 цнтм., толщиною 1 цнтм. въ діаметрѣ; вверху трубка снабжена притертымъ краномъ, а нижній конецъ вытянутъ; на трубкѣ нанесено 12 дѣленій равной емкости; номера дѣленій идутъ отъ крана внизъ. Такъ какъ дѣленія на трубкѣ издали могутъ быть незамѣтны, то соотвѣтственно имъ нанесены дѣленія и на брускѣ. Точно такая же трубка, только безъ крана, прикрѣплена и къ лѣвому бруску, на которомъ нанесены дѣленія въ центиметрахъ. Обѣ стеклянныя трубки соединены длинною (2 метра), толстостѣнною каучуковою трубкою съ возможно малымъ діаметромъ просвѣта. Въ трубки наливается столько ртути, чтобы уровень ея достигалъ приблизительно середины обѣихъ трубокъ; для этого требуется около 1 фунта ртути.

Опытъ производится слѣдующимъ образомъ. Открывъ кранъ, сдвигаемъ обѣ трубки внизъ на столько, чтобы уровень ртути въ правой былъ на 12-мъ ея дѣленіи, а 6-е было противъ нулевой черты внизу на столбѣ; закрывъ кранъ, будемъ имѣть въ трубкѣ 12 равныхъ объемовъ воздуха подъ давленіемъ 1 атмосферы. Затѣмъ подымаютъ лѣвую трубку вверхъ до тѣхъ поръ, пока воздухъ въ правой не займетъ въ 2 раза меньшаго объема, т. е. пока уровень ртути въ ней не станетъ на 6-мъ дѣленіи. Высота ртутнаго столба въ лѣвомъ колѣнѣ опредѣляется дѣленіями на столбѣ и на лѣвомъ брускѣ. Продолжая опытъ, подымаемъ лѣвую трубку выше, пока воздухъ въ правой не займетъ $^1/_3$ начальнаго объема, т. е. пока уровень ртути въ ней не достигнетъ 4-го дѣленія ея, а чтобы начать измѣреніе высоты ртутнаго столба въ лѣвомъ колѣнѣ, опять съ нулевой черты на столбѣ, устанавливаемъ предварительно 4-е дѣленіе трубки противъ этой черты.

Чтобы доказать справедливость закона Маріотта при уменьшеніи давленія, начиная съ 1 атмосферы, устанавливаемъ обѣ трубки (открывши кранъ) около середины столба такъ, чтобы уровень ртути въ правой былъ напр. на 3-мъ ея дѣленіи, а 6-е дѣленіе приходилось противъ 0 на столбѣ справа отъ продольной черты. Закрывъ кранъ, опускаемъ лѣвую трубку, пока воздухъ въ правой не займетъ въ 2 раза большаго объема, т. е. пока уровень ртути не опустится до 6-го дѣленія ея; затѣмъ измѣряемъ разность высотъ ртутныхъ столбовъ въ обоихъ колѣнахъ, пользуясь указаніями на правой сторонѣ столба. Такимъ же образомъ продолжаемъ опытъ и дальше.

Этотъ приборъ можетъ служить и для другихъ опытовъ:

1) Помѣстимъ правую трубку противъ середины столба (открывши кранъ) и подымемъ лѣвую трубку на столько, чтобы ртуть стала выше крана; закрывъ затѣмъ кранъ и опустивъ лѣвую трубку центм. на 90, будемъ имѣть барометръ.

2) Имѣя указанный барометръ, можно наблюдать испареніе жидкости въ пустотѣ и опредѣлять упругость образовавшихся паровъ; для этого стоитъ только помощью крана впускать жидкость по каплѣ въ барометрическую пустоту.

3) На этомъ приборѣ можно выяснить идею устройства ртутнаго насоса.

Н. Каминскій (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Жидкое и твердое соединеніе желѣза съ окисью углерода. (Proc. of the chem. Soc. 1891). Кромѣ газообразнаго соединенія желѣза съ окисью углерода — $Fe(CO)_4$ *), получены въ настоящее время Mond'омъ и Langer'омъ жидкое соединеніе — $Fe(CO)_5$ и твердое — $Fe_2(CO)_7$. Первое получается, если оставить на 24 часа при обыкновенной температурѣ мелко раздробленное желѣзо въ атмосферѣ окиси углерода, а затѣмъ нагрѣть до 120^0, и представляетъ янтарнаго цвѣта жидкость, уд. вѣса 1,4666, замерзающую ниже — 21^0 и кипящую при 102^0,8. Соединеніе $Fe_2(CO)_7$ получается при дѣйствіи свѣта на $Fe(CO)_5$ и представляетъ золотистые кристаллы, разлагающіеся при 80^0 на $Fe(CO)_5$, желѣзо и окись углерода.

Новыя видоизмѣненія сѣры. (Comptes rendus 112. 866). Какъ извѣстно, существуетъ нѣсколько видоизмѣненій сѣры: 1) октаэдрическая сѣра, 2) призматическая, 3) мягкая или пластическая, 4) аморфная. Berthelot сводитъ всѣ эти видоизмѣненія къ двумъ — октаэдрической и аморфной сѣрѣ, такъ какъ и призматическая сѣра и пластическая переходятъ подъ вліяніемъ времени въ октаэдрическую. Въ настоящее время Engel'ю удалось получить еше два новыхъ видоизмѣненія сѣры: 1) кристаллическую сѣру, которая подъ вліяніемъ времени переходитъ въ аморфную, и 2) сѣру, растворимую въ водѣ. Новая кристаллическая сѣра плотнѣе октаэдрической: ея плотность 2,13, а плотн. октаэдрической — 2,045, и отличается отъ нея по цвѣту.

Новый способъ опредѣленія упругости пара растворовъ. (Wiedem. Ann. 1891). Весьма остроумнымъ способомъ опредѣленія упругости пара водныхъ растворовъ пользуется Dieterici. Растворъ помѣщается въ небольшой сосудъ, верхняя часть котораго соединена при помощи трубки съ другимъ большимъ сосудомъ. Сосудъ съ растворомъ имѣетъ температуру 0^0, а 2-ой сосудъ,—нѣсколько высшую температуру, но постоянную впродолженіе всего опыта. Сосудъ этотъ наполнится очевидно парами, упругость которыхъ равна упругости пара раствора при 0^0, послѣ чего его разъединяютъ съ первымъ сосудомъ и соединяютъ съ другимъ, помѣщеннымъ въ ледяной калориметръ Бунзена и содержащимъ воду при 0^0. Такъ какъ упругость пара раствора при 0^0, а значитъ и упругость пара, наполняющаго большой сосудъ, меньше упругости пара воды при 0^0, то часть воды испаряется и паръ переходитъ въ большой сосудъ. При испареніи воды поглощается теплота, количество которой и опредѣляется калориметромъ, а по этому

*) См. Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат. № 127 стр. 152.

количеству вычисляется разность давленій пара воды и раствора. Точность этого способа доходитъ, по Dieterici, до 0.003 мм. ртутнаго столба.

Почему химически чистый цинкъ трудно растворяется въ кислотахъ? Еще въ 1830 г. De-la Rive замѣтилъ, что химически чистый цинкъ почти нерастворимъ въ слабой сѣрной кислотѣ, тогда какъ нечистый сравнительно легко растворяется. Тоже наблюдается и для другихъ химически чистыхъ металловъ и кислотъ, кромѣ азотной. Это различное отношеніе чистыхъ и нечистыхъ металловъ къ кислотамъ объясняютъ обыкновенно существованіемъ мѣстныхъ токовъ въ послѣднихъ; если-же тока нѣтъ, то не должно быть и растворенія. Существуютъ однако факты, противорѣчащіе такому объясненію. Такъ извѣстно, что чистый цинкъ лучше растворяется въ кислотахъ при ихъ кипяченіи, что онъ хорошо растворяется въ азотной кислотѣ. По этому Weeren даетъ другое объясненіе. Чистый цинкъ потому трудно растворимъ въ кислотахъ, что въ моментъ погруженія въ кислоту онъ покрывается тонкимъ слоемъ сгущеннаго водорода, препятствующимъ дальнѣйшему дѣйствію кислоты на цинкъ. При нечистомъ цинкѣ этого нѣтъ, такъ какъ водородъ притягивается примѣсями цинка, болѣе электроотрицательными, чѣмъ цинкъ. Въ азотной кислотѣ водородъ окисляется въ моментъ выдѣленія. Если это такъ, то всякая причина, способствующая удаленію водорода съ поверхности цинка, будетъ ускорять его раствореніе. Weeren и нашелъ, что въ разрѣженномъ пространствѣ, при кипяченіи, при вытираніи поверхности цинка щеткой, въ присутствіи окислителей (хромовой кислоты и перекиси водорода) растворимость химически чистаго цинка значительно увеличивается, тогда какъ растворимость нечистаго почти не измѣняется, либо измѣняется сравнительно мало. Это видно изъ слѣд. таблицы, гдѣ сопоставлены среднія данныя для растворимости чистаго и нечистаго цинка въ слабой сѣрной кислотѣ (1:20). За 1 принято въ обоихъ случаяхъ количество цинка, растворяющагося въ кислотѣ при 18°

	Химич. чист цинкъ	Нечистый цинкъ.
Сѣрная кислота (1:20)	1	1
Тоже въ пустотѣ	6.6	0.89
Тоже при кипяченіи.	24.4	4.4
Тоже при 100°, но безъ кипѣнія . . .	1.6	4.5
Сѣрная кислота + хромовая	175 0	6.5
Сѣрная кислота + перекись водорода . . .	.030	3.5

Тоже самое имѣетъ мѣсто для кадмія, никеля, кобальта, алюминія и желѣза.

Интересно, только-ли водородъ обладаетъ способностью защищать металлы отъ дѣйствія кислотъ? (Berl. Ber. XXIV 11) *).

Искусственные кристаллы. Въ Парижѣ обществомъ „Societé" anonyme des Manufactures de produits chimiques du Nord" взятъ патентъ на способъ приготовленія кристалловъ любой формы и величины такихъ солей, которыя содержатъ кристализаціонную воду. Способъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ: Данное вещество измельчается, нагрѣвается до той температуры, при которой оно начинаетъ выдѣлять свою кристаллизаціонную воду и растворяться въ ней, и затѣмъ прессуется въ куски требуемой формы. До прессованія можно подмѣшивать красящія, пахучія и др. вещества, а для кристалловъ, вывѣтривающихся на воздухѣ — растворимое стекло, препятствующее вывѣтриванію.

(Monit scient. 1892, мартъ).

— M. Berthelot присуждена обществомъ d'Encouragement премія въ 12.000 франковъ за его труды, имѣющіе отношеніе къ химической промышленности. (Le mercure scient. 1892, мартъ). *В. Г.*

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Одесское Общество Элем. Мат. и Физики. 3-ье очер. засѣданіе (1-го ноября) Предсѣдат. И. М. Занчевскій. Сообщенія:

1) *И. В. Слешинскаго:* „О линейныхъ уравненіяхъ".

2) *Х. І. Гохманъ* изложилъ способъ приближеннаго вычерчиванія кривыхъ въ точкахъ возврата, гдѣ методъ соприкасающихся круговъ оказывается неудовлетворительнымъ.

3) *Н. Б. Завадскій* представилъ элем. формулы зависимости между измѣненіемъ преломляющаго угла призмы и отклоненіемъ луча свѣта.

4) *С. В. Житковъ* — о длинѣ окружности круга.

4-ое очер. засѣданіе (15 ноября), подъ предсѣд. И. В. Слешинскаго, было посвящено выслушанію рѣчи *И. Ю. Тимченко:* „Объ основныхъ началахъ ариѳметики и геометріи по Гельмгольтцу и Риману".

5-ое очер. засѣданіе (29 ноября) Предсѣд. И. М. Занчевскій. Сообщенія:

---

*) См. по этому вопросу также статью Шпачинскаго: «Амальгамированіе цинка» въ № 77 В. О. Ф (Сем. VII стр. 92).

1) *Н. А. Каменскій:* „О приборѣ для доказательства закона Маріотта“ *).

2) *К. Ф. Дубискій* указалъ на упрощеніе при опредѣленіи поверхности шара **).

3) *Г. Г. Де-Метцъ:* „О механическомъ эквивалентѣ работы“, съ демонстраціей прибора Пулуя и его примѣненія къ опытному опредѣленію мех. эквив. теплоты.

4) *И. Ю. Тимченко* — изъ исторіи тригонометріи ***).

5) *Г. Г. Де-Метцъ* обратилъ вниманіе присутствующихъ на задачу о маятникѣ проф. Пильчикова, предложенную въ № 125 „Вѣстника Оп. Физики“.

6) *С. В. Житковъ* — изложилъ содержаніе статьи г-жи Литвиновой: „О вліяніи точныхъ наукъ на образованіе слога“, помѣщенной въ „Педагогическомъ Сборникѣ“ (за 1890 г. въ сентябрской кн. и за 1891 г. въ кн.: янв., февр., апр., майской и сентябрской).

6-ое очер. засѣданіе (14 декабря). Предсѣд. И. В. Слешинскій. Сообщенія:

1) *Ѳ. Н. Шведовъ* — демонстрировалъ и объяснилъ теорію изобрѣтеннаго и устроеннаго имъ новаго лекціоннаго электрометра ****).

2) *С. В. Житковъ* изложилъ свой взглядъ на преподаваніе начальнаго курса геометріи *****).

3) *Н. Б. Завадскій* — о выводѣ формулы Ньютона.

ЗАДАЧИ.

№ 280. Найти число кратное 16, которое равнялось бы суммѣ всѣхъ девяти своихъ дѣлителей, считая въ числѣ послѣднихъ единицу и не считая самого искомаго числа. *Ш.*

---

*) Помѣщено въ наст. № В. О. Ф.

**) Было помѣщено въ № 130 В. О. Ф. стр. 214.

***) Будетъ помѣщено въ В. О. Ф. (въ № 135).

****) Будетъ помѣщено въ В. О. Ф. (въ № 134).

*****) Взгляды референта будутъ изложены болѣе подробно въ рядѣ статей подъ заглавіемъ: «Какъ слѣдуетъ начинать преподаваніе геометріи?», который начнется съ № 133 В. О. Ф.

№ 281. На сторонахъ произвольнаго треугольника ABC построены (внѣшніе или внутренніе) равносторонніе треугольники ABL, BCM, CAN. Показать, что, соединивъ центры этихъ треугольниковъ O_1, O_2, O_3, получимъ всегда равносторонній треугольникъ $O_1O_2O_3$. (Заимств.) *Ш.*

№ 282. На прямой даны послѣдовательно четыре точки A, B, C и D. Черезъ A и B и черезъ C и D проведены двѣ окружности, касающіяся въ точкѣ M. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки M. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 203. Показать, что

$$(\mathrm{Sin}\alpha + \mathrm{Cos}\alpha)^2 + (\mathrm{Sin}2\alpha + \mathrm{Cos}2\alpha)^2 + \ldots + (\mathrm{Sin}n\alpha + \mathrm{Cos}n\alpha)^2 =$$

$$= n + \frac{\mathrm{Sin}n\alpha \,.\, \mathrm{Sin}(n+1)\alpha}{\mathrm{Sin}\alpha}.$$

Г. Ширинкинъ (Воронежъ).

№ 284. Рѣшить систему:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = al$$

$$mx^2 + nxy + py^2 = ml.$$

М. Фридманъ (Кіевъ).

№ 285. Опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots$$

при условіи, что $x < 1$. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 100 (2 сер.). Построить вписуемый въ кругъ четыреугольникъ, зная двѣ прямыя, соединяющія средины противоположныхъ сторонъ, уголъ между ними и уголъ между діагональю и одной стороной.

Положимъ, что четыреугольникъ ABCD вписанъ; m, n, p и q средины его сторонъ. Извѣстно, что $mnpq$ параллелограмъ, стороны котораго параллельны діагоналямъ. $\angle BDC = \angle np\mathrm{C}$ и $\angle BAC = \angle nm\mathrm{B}$. $\angle CAB = \angle BDC$.

Построеніе: по даннымъ діагоналямъ и углу между ними строимъ параллелограмъ $mnpq$. Чрезъ m и p проводимъ прямыя

AB и CD, наклоненныя къ сторонамъ mn и pn подъ углами равными другому данному. Чрезъ n проводимъ прямую BC, дѣлящуюся въ n пополамъ. Изъ B и C проводимъ параллельно np и nm линіи BD и CA. Четыреугольникъ ABCD будетъ искомый.

Н. Николаевъ (Пенза), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *А. Рубиновскій, И. Бискъ* (Кіевъ), *А. Плетневъ* (Спб.), *М. Аренштейнъ, А. Дукельскій* (Кременчугъ), *В. Рубцовъ* (Уфа), *В. Россовская* (Курскъ).

№ **109** (2 сер.). Въ кругъ вписанъ треугольникъ ABC, сторона котораго BC остается неизмѣнной, а вершина A движется по окружности. Найти геометрическое мѣсто проекцій средины стороны AB на сторону AC.

Обозначимъ черезъ M проекцію средины стороны AB на сторонуAC и черезъ D проекцію точки B на AC. Тогда $DM=AM=$ $= {}^1/_2 AD$. При перемѣщеніи точки A углы треугольника ABD остаются безъ измѣненія, а потому отношеніе AD : AB сохраняетъ постоянную величину, слѣдовательно и AM : AB тоже сохраняетъ постоянную величину. Это показываетъ, что всѣ три угла треугольника MAB остаются безъ измѣненія. Отсюда слѣдуетъ, что точка M находится на окружности, проходящей чрезъ точки B и C.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *В. Рубцовъ* (Уфа), *И. Бискъ* (Кіевъ), *В. Россовская* (Курскъ).

№ **112** (2 сер.). Внутри угла α° взята точка M въ разстояніяхъ m и n отъ сторонъ угла. Чрезъ эту точку проведена окружность касательная къ сторонамъ угла. Найти радіусъ этой окружности.

Пусть A вершина даннаго угла, AZ биссекторъ, $MB = m$ и $MC = n$. Изъ M опустимъ на AZ перпендикуляръ MP и продолжимъ его до пересѣченія со стороной AB въ точкѣ F, а со стороной AC въ G. Отложимъ на немъ $M'P=MP$ (M', очевидно, принадлежитъ искомой окружности). OK — перпендикуляръ изъ центра на AB, а KN—на AZ.

Изъ △△ MBF и CMG

$$FM = \frac{m}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}, \quad MG = M'F = \frac{n}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}.$$

По свойству касательной и сѣкущей

$$FK = \pm \frac{\sqrt{mn}}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}.$$

Изъ $\triangle$ OKN

$$R = OK = \frac{KN}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}},$$

а изъ подобныхъ $\triangle\triangle$ AFP и AKN

$$AF : PF = (AF \pm FK) : KN$$

Но

$$PF = \frac{FM + FM'}{2} = \frac{m+n}{2\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}},$$

$$AF = \frac{m+n}{2\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}$$

$$AF \pm FK = \frac{m+n \pm 2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\sqrt{mn}}{2\operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}}$$

слѣдовательно

$$KN = \frac{m+n \pm 2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\sqrt{mn}}{2\operatorname{Cos}\alpha}$$

$$R = \frac{m+n \pm 2\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\sqrt{mn}}{2\operatorname{Cos}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

И. Глумковъ (Пермь), *П. Андреяновъ* (Москва), *А. Дукельскій* (Кременчугъ).

№ **114** (2 сер.). Рѣшить слѣдующую задачу безъ помощи тригонометріи (пред. въ Харьк. Учебн. Округѣ въ 1878 г. на испыт. зрѣлости): „Видны двѣ равновысокія заводскія трубы. Наблюдатель, стоящій между ними на прямой, соединяющей ихъ основанія, видитъ высоту ближайшей къ нему трубы, подъ угломъ въ 60°; отойдя на 80 фут. по направленію перпендикулярному къ прямой, соединяюшей основанія, онъ видитъ высоту одной подъ угломъ въ 45°, а другой подъ угломъ въ 30°. Опредѣлить высоту и разстояніе трубъ.

Обозначимъ основанія трубъ черезъ A и F, вершины черезъ B и E, точку перваго наблюденія черезъ C, а второго—D. Пусть $AC = x$, $\angle BCA = 60°$, и $\angle ADB = \angle DBA = 45$, а потому

$$AB = AD = x\sqrt{3}\,.$$

Изъ $\triangle$ ACD

$$AD^2 - AC^2 = CD^2 \text{ или } x = 40\sqrt{2}\,.$$

Поэтому

$$AB = EF = 40\sqrt{6}$$

Изъ прямоугольнаго $\triangle$ DEF получимъ

$$DF = 3x = 120\sqrt{2}$$

Наконецъ изъ $\triangle$ CDF

$$CF = 40\sqrt{14}, \text{ а } AF = AC + CF = 40(\sqrt{2} + \sqrt{14}).$$

П. Андреяновъ (Москва). *А. П.* (Пенза), *В. Россовская*, *К. Щиголевъ* (Курскъ), *В. Тюнинъ* (Уфа), *В. Чулковъ* (Воронежъ), *М. Акопянцъ*, *О. Озаровская* (Тифлисъ), *Ю. Новицкій* (Винница), *А. Дукельскій* (Кременчугъ).

№ 118 (2 сер.). Опредѣлить сумму n членовъ

$$a^p + b^p + c^p + \ldots + u^p + v^p\,,$$

если a, b. c . . . . u, v образуютъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой равенъ q.

Обозначая сумму черезъ s, имѣемъ

$$s = a^p + (aq)^p + (aq^2)^p + \ldots + (aq^{n-1})^p$$

или

$$s = a^p(1 + q^p + q^{2p} + \ldots + q^{(n-1)p})\,;$$

но рядъ въ скобкахъ составляетъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой q^p, а потому

$$s = \frac{a^p(q^{np} - 1)}{q^p - 1}.$$

А. Шульженко, *И. Бѣлянкинъ* (Кіевъ), *Г. Ширинкинъ*, *А. Коганъ*, *И. Вонсикъ*, *А. Семеновъ* (Воронежъ), *А. П.* (Пенза), *В. Шидловскій* (Полоцкъ), *В. Россовская* (Курскъ), *А. Охитовичъ* (Спб.), *А. Даниловъ*, *В. Тюнинъ* (Уфа), *К. Шеткевичъ* (Пермь), *А. Витковскій* (Великолуцкъ), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ), *П. Θедосъевъ*, *А. Мельниковъ* (Троицкъ), *А. Дукельскій* (Кременчугъ), *В. Апостоловъ* (Донск. К. К.), *К. К...ли* (Кам. Подольскъ), *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

№ 154 (2 ср.). Показать, что

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}2a} + \frac{1}{\mathrm{Sin}4a} + \frac{1}{\mathrm{Sin}8a} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{Sin}2^n a} = \mathrm{Ctg}a - \mathrm{Ctg}2^n a.$$

Извѣстно, что $\mathrm{Ctg}a = \frac{1 + \mathrm{Cos}2a}{\mathrm{Sin}2a}$ или

$$\mathrm{Ctg}a = \mathrm{Cosec}2a + \mathrm{Ctg}2a,$$

откуда

$$\mathrm{Cosec}2a = \mathrm{Ctg}a - \mathrm{Ctg}2a,$$

$$\mathrm{Cosec}4a = \mathrm{Ctg}2a - \mathrm{Ctg}4a,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{Cosec}2^n a = \mathrm{Ctg}2^{n-1}a - \mathrm{Ctg}2^n a.$$

Складывая почленно, находимъ

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}2a} + \frac{1}{\mathrm{Sin}4a} + \frac{1}{\mathrm{Sin}8a} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{Sin}2^n a} = \mathrm{Ctg}a - \mathrm{Ctg}2^n a.$$

А. Охитовичъ (Спб.), *А. П.* (Пенза), *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

ОПЕЧАТКИ.

Въ № 130: 1) На стр. 216 въ 5-й стр. снизу вмѣсто словъ: «болѣе $4\pi R^2$ на $(2\pi R - 2\pi\alpha)2R$» должно быть: «болѣе $4\pi R$ на $2\pi r^2$, а поверхность вписаннаго тѣла вращенія менѣе $4\pi R^2$ на $(2\pi R - 2\pi\alpha)2R^2$».

2) На стр. 223 въ 4-й стр. сверху вмѣсто $\frac{b-c}{b}r$ должно быть $\frac{b-c}{6}r$.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 24 Марта 1892 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

Обложка
пщется

Обложка
пщется