Обложка
пщется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 102.

IX Сем. 11 Октября 1890 г. № 6.

О НАЧАЛЬНОМЪ ПРЕПОДАВАНІИ АЛГЕБРЫ*).

Милостивые государи! Пятнадцать лѣтъ тому назадъ мнѣ пришлось преподавать математику въ Кіевскомъ кадетскомъ корпусѣ. Приступая къ преподаванію алгебры, я пришелъ въ большое смущеніе. Тогда уже были извѣстны у насъ сочиненія Грассмана, Шредера и другихъ нѣмецкихъ педагоговъ. Я ясно сознавалъ недостатки какъ прежнихъ, такъ и новѣйшихъ методовъ преподаванія, но не зналъ, чѣмъ ихъ замѣнить. Уже тогда я поставилъ себѣ цѣлью — выработать наилучшій методъ преподаванія алгебры. Цѣль эта однако заглохла, такъ какъ я скоро оставилъ корпусъ и занялся одною профессорскою дѣятельностью. Въ то время педагогическіе вопросы были поставлены на первомъ планѣ; о нихъ много писали и разсуждали; въ Петербургѣ существовало организованное общество педагоговъ. Вотъ почему я полагалъ, что и наши, и иностранные педагоги выработаютъ наконецъ наилучшіе пріемы преподаванія наукъ. По этой причинѣ я вовсе хотѣлъ было отложить въ сторону педагогическія затѣи. Но оказалось, что я ошибся въ своихъ предположеніяхъ. Оказалось, что педагоги заняты исключительно начальнымъ преподаваніемъ и начальными школами; преподаваніе же въ среднихъ школахъ, не смотря на измѣненіе программъ, осталось почти то же, какое было двадцать лѣтъ тому назадъ. Въ издаваемомъ мною „Журналѣ Элементарной Математики“ я приглашалъ педагоговъ высказать свои соображенія о преподаваніи математики въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Въ отвѣтъ на это приглашеніе я получилъ много статей, посвященныхъ преподаванію ариѳметики, и ни одного самостоятельнаго разсужденія о преподаваніи другихъ отдѣловъ математики. Правда, была прислана одна статья объ основахъ алгебры, но она оказалась передѣлкою методовъ упомянутыхъ выше нѣмецкихъ педагоговъ. Въ виду такого печальнаго состоянія педагогики я осмѣливаюсь высказать, наконецъ, и свои соображенія о преподаваніи начальной алгебры.

Лѣтъ сорокъ тому назадъ педагоги обратили вниманіе на изложеніе основъ алгебры. Въ прежнихъ руководствахъ дѣйствительно встрѣчается неясность въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, особенно въ ученіи объ отрицательныхъ числахъ. Педагоги выяснили природу отрицательныхъ чиселъ и

*) Рѣчь, произнесенная проф. *В. Ермаковымъ* въ собраніи Кіевскаго Физико-Математическаго Общества 22-го ноября 1890 года.

способъ ихъ происхожденія въ алгебрѣ; вмѣстѣ съ тѣмъ было констатировано, что въ алгебрѣ много условнаго, что, давъ другія опредѣленія и условія, мы могли бы получить алгебру, отличную отъ общеупотребительной. Въ этомъ большая заслуга педагоговъ.

Но педагоги на этомъ не остановились Въ настоящее время у педагоговъ является страсть къ составленію теоретическихъ трактатовъ не только по алгебрѣ, но даже и по ариѳметикѣ. Конечно заниматься высшею наукою трудно, да большею частью и невозможно, за недостаткомъ подходящей библіотеки. Но за то какъ легко писать трактаты по ариѳметикѣ и алгебрѣ: прочитайте нѣсколько отечественныхъ и иностранныхъ сочиненій, обдумайте планъ изложенія и—пишите! Вотъ причина, почему педагоги такъ сильно стоятъ за теоретическое изложеніе и за учебники даже по ариѳметикѣ.

Милостивые государи! Я уже имѣлъ случай высказать вамъ свои соображенія по поводу преподаванія ариѳметики. На ариѳметику я смотрю, какъ на практическую науку; теорія изъ начальнаго преподаванія должна быть изгнана, а учебниковъ и вовсе не слѣдуетъ давать ученикамъ. Въ самомъ дѣлѣ всякая теорія созидается на добытыхъ фактахъ; слѣдовательно и теорію ариѳметики можно преподавать только тѣмъ ученикамъ, которые умѣютъ уже считать и рѣшать задачи; но эту теорію можно привесть къ такому незначительному минимуму, который легко можно передать ученикамъ словесно безъ всякихъ учебниковъ.

Позвольте, м. г., припомнить вамъ еще два мѣста изъ моей рѣчи о преподаваніи ариѳметики.

1. Я настаивалъ на томъ, чтобы выбросить изъ ариѳметики скобочныя упражненія. Скобки и формулы спеціально относятся къ алгебрѣ и только тамъ можно выяснить ихъ значеніе и употребленіе. Въ ариѳметикѣ скобки и формулы трудно доступны пониманію учениковъ и служатъ только пугаломъ для учениковъ посредственныхъ.

2. Нѣкоторые подагоги стараются выработать опредѣленные методы для рѣшенія задачъ. Я, напротивъ, рекомендую рѣшать задачи, если возможно, различными пріемами. Разнообразіе методовъ рѣшенія и сравненіе ихъ между собою служитъ важнымъ средствомъ для развитія мышленія. Кромѣ того изъ различныхъ пріемовъ рѣшенія задачи мы заключаемъ, что *рядъ однихъ дѣйствій можетъ быть замѣненъ рядомъ другихъ дѣйствій надъ тѣми же числами*. Въ этомъ свойствѣ, какъ я уже имѣлъ честь заявить вамъ, кроется опредѣленіе алгебры.

Алгебра занимается преобразованіемъ однихъ дѣйствій въ другія.

Около тридцати лѣтъ назадъ, педагоги задались цѣлью—изложить начальную алгебру въ строгой опредѣленной системѣ, вытекающей изъ немногихъ основныхъ положеній. Такую систему изложенія мы имѣемъ въ геометріи, которая дѣйствительно вытекаетъ и послѣдовательно развивается изъ немногихъ аксіомъ. Грассманъ и Шредеръ дѣйствительно создали подобную систему для алгебры; вся алгебра у нихъ вытекаетъ изъ пяти основныхъ законовъ для сложенія и умноженія и изъ опредѣленія вычитанія и дѣленія, какъ обратныхъ дѣйствій. Но эта система изложенія оказалась крайне неудачною въ педагогическомъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ, для выясненія основныхъ свойствъ четырехъ дѣйствій надъ положительными и отрицательными числами по этой системѣ требуется въ извѣстной послѣдовательности болѣе ста теоремъ, опредѣленій и условій; все это составляетъ почти предисловіе къ алгебрѣ, ибо только послѣ этого идетъ рѣчь о коэффиціентахъ и экспонентахъ и дѣйствіяхъ надъ многочленами. Такую массу малосодержательныхъ по существу предложеній въ состояніи запомнить въ данной послѣдовательности развѣ только ученикъ съ сильно развитою памятью, да и то скоро забываетъ. Я думаю, что самъ авторъ подобнаго учебника едва ли въ состояніи словесно изложить всѣ теоремы, опредѣленія и условія въ той послѣдовательности, какая требуется его учебникомъ. На подобное заучиваніе тратится слишкомъ много времени, котораго не хватаетъ для упражненій въ алгебраическихъ трансформаціяхъ; да и самъ преподаватель и его ученики пріучаются цѣнить теорію выше рѣшенія задачъ. Нѣкоторые педагоги доходятъ до такого крайняго заблужденія, что утверждаютъ, будто развивающимъ элементомъ служитъ одна теорія, но не рѣшеніе задачъ. При этомъ сравниваютъ рѣшеніе трудныхъ задачъ съ игрою въ шахматы; говорятъ, что хорошій математикъ можетъ плохо играть въ шахматы, и это ему не мѣшаетъ однако слыть хорошимъ математикомъ; а такъ какъ игра въ шахматы равносильна искусству въ рѣшеніи трудныхъ задачъ, то и сіе послѣднее искусство необязательно для математика. Вотъ до какихъ абсурдовъ могутъ договориться педагоги, забывшіе высшую науку! И въ самомъ дѣлѣ въ числѣ такихъ педагоговъ нѣтъ лицъ извѣстныхъ въ наукѣ. А если о тетическихъ и литическихъ операціяхъ и несоизмѣримыхъ числахъ писали нѣкоторые профессора, какъ Hoüel и Weierstrass, то, во первыхъ, подобныя статьи не предназначались для школьнаго преподаванія и служили лишь введеніемъ въ университетскіе курсы, во вторыхъ эти профессора сами, вѣроятно, не преподавали въ среднихъ школахъ.

Теперь, милостивые государи, я изложу Вамъ планъ преподаванія алгебры.

Цѣль моя—довести теорію алгебры до возможнаго минимума и до возможной простоты, не нарушая логическаго изложенія. Хотя въ предлагаемомъ мною планѣ основныя положенія не приведены къ наименьшему числу, но это не противорѣчитъ логическому изложенію; за то въ педагогическомъ отношеніи получается большой выигрышъ.

Выше я опредѣлилъ алгебру, какъ такую науку, которая занимается преобразованіемъ однихъ дѣйствій въ другія.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что для алгебры безразлично, надъ какими числами производятся дѣйствія. Вотъ по этой причинѣ въ алгебрѣ употребляются буквы, подъ которыми подразумѣваются какія угодно числа.

Изъ того же опредѣленія слѣдуетъ, что свои основныя положенія алгебра беретъ изъ ариѳметики.

Эти основныя положенія такъ просты и ясны, что было бы въ высшей степени неразумно долго останавливаться надъ ними. Этимъ положеніямъ не слѣдуетъ посвящать отдѣльныхъ уроковъ даже въ ариѳметикѣ, иначе мы рискуемъ превратить ариѳметику въ скучнѣйшую науку. Если ученикъ сложныя ариѳметическія задачи умѣетъ рѣшать различными пріемами, то это вполнѣ свидѣтельствуетъ о его знакомствѣ съ основными свойствами четырехъ дѣйствій, хотя бы онъ и не былъ въ состояніи перечислить ихъ.

Итакъ учитель заявляетъ ученикамъ, что основныя положенія алгебры извѣстны имъ уже изъ ариѳметики, и затѣмъ перечисляетъ эти положенія въ слѣдующемъ порядкѣ.

1. Результатъ сложенія не зависитъ отъ порядка сложенія и отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ.

2. Но если нѣсколько чиселъ связаны знаками сложенія и вычитанія, то результатъ *зависитъ* отъ того порядка, въ которомъ производятся указанныя дѣйствія. Для примѣра возьмемъ:

$$10-6+3.$$

Если произведемъ сначала надъ первыми двумя числами дѣйствіе, означенное знакомъ, стоящимъ между ними, и полученный результатъ соединимъ съ третьимъ числомъ, то найдемъ:

$$\overbrace{10-6}+3=4+3=7.$$

Но если сначала произведемъ надъ послѣдними двумя числами дѣйствіе, указанное знакомъ, стоящимъ между ними (сложеніе) и полученный результатъ соединимъ съ первымъ числомъ (при помощи оставшагося знака вычитанія), то получимъ:

$$10-\overbrace{6+3}=10-9=1.$$

3. Если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и вычитанія, то для избѣжанія всякихъ недоразумѣній *условимся* производить дѣйствія въ томъ порядкѣ, какъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны.

4. При соблюденіи этого условія можно дѣлать нѣкоторыя перестановки, отчего результатъ не измѣнится. Такъ изъ ариѳметики извѣстно, что, если мы къ a прибавимъ b и отъ полученной суммы вычтемъ c, то результатъ получился бы тотъ же самый, еслибъ мы сначала отъ a отняли c и къ полученной разности прибавили b:

$$a+b-c=a-c+b.$$

Отсюда легко можно придти къ слѣдующему заключенію: *результатъ сложенія и вычитанія нѣсколькихъ чиселъ, при соблюденіи сказаннаго выше условія, не измѣнится, если переставимъ отдѣльные члены вмѣстѣ съ знаками, стоящими предъ ними.*

5. Перестанавливая указаннымъ способомъ члены, мы можемъ достигнуть того, что впереди будутъ стоять слагаемыя, а позади вычитаемыя; напр.

$$a-b+c-d-e+f=a+c+f-b-d-e.$$

Но чтобы вычесть послѣдовательно нѣсколько чиселъ, можно сразу вычесть ихъ сумму (извѣстно изъ ариѳметики),

$$a+c+f-b-d-e=a+c+f-(b+d+e).$$

Отсюда вытекаетъ такое правило: чтобы простѣйшимъ способомъ найти результатъ сложенія и вычитанія нѣсколькихъ чиселъ, нужно прежде всего сложить всѣ слагаемыя (члены съ предшествующимъ знакомъ $+$), потомъ сложить вычитаемыя (со знакомъ $-$) и изъ первой суммы вычесть вторую.

6. Результатъ перемноженія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки мѣстъ множителей.

7. Но если нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія, то результатъ уже зависитъ отъ того порядка, въ которомъ производятся дѣйствія, указанныя знаками. Для примѣра возьмемъ:

$$24:6\times2.$$

Если мы сначала произведемъ надъ первыми двумя числами дѣленіе (какъ это указано знакомъ, стоящимъ между ними) и полученное частное перемножимъ съ третьимъ членомъ, то найдемъ:

$$\overbrace{24:6}\times2=4\times2=8.$$

Но если мы сначала произведемъ надъ послѣдними двумя числами умноженіе и на полученное произведеніе раздѣлимъ первое число, то найдемъ:

$$24:\overbrace{6\times2}=24:12=2.$$

8. Если нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія, то для избѣжанія недоразумѣній *условимся* производить указанныя дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ какомъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны.

9. При соблюденіи этого условія можно дѣлать нѣкоторыя перестановки, отчего результатъ не измѣнится. Такъ изъ ариѳметики извѣстно, что если мы a умножимъ на b и полученное произведеніе раздѣлимъ на c, то получимъ тотъ же результатъ, если бы мы сначала a раздѣлили на c и полученное частное умножили на b:

$$a\times b:c=a:c\times b.$$

Отсюда легко придти къ слѣдующему заключенію: *результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ, при соблюденіи указаннаго условія, не измѣняется, если мы переставимъ члены вмѣстѣ съ стоящими передъ ними знаками.*

10. Перестанавливая подобнымъ образомъ члены, мы можемъ достигнуть того, что впереди будутъ стоять множители, на концѣ дѣлители, какъ напр.

$$a:b\times c:d:e\times f=a\times c\times f:b:d:e.$$

Но изъ ариѳметики извѣстно, что раздѣлить послѣдовательно на нѣсколько чиселъ—все равно, что раздѣлить на ихъ произведеніе, а потому

$$a\times c\times f:b:d:e=a\times c\times f:(b\times d\times e).$$

Итакъ чтобы найти результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ, нужно сначала перемножить всѣ множители, потомъ перемножить всѣ дѣлители и первое произведеніе раздѣлить на второе.

11. Условимся вмѣсто знака умноженія ставить точку или же и вовсе не писать знака умноженія, а лишь его подразумѣвать, если отъ этого, конечно, не произойдетъ недоразумѣнія. Далѣе условились результатъ дѣленія писать въ формѣ дроби. Поэтому

$$a\times c\times f:(b\times d\times e)=\frac{acf}{bde}.$$

Къ такой формѣ условились въ алгебрѣ всегда приводить результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ.

12. Положимъ теперь, что даны нѣсколько чиселъ, соединенныхъ знаками всѣхъ четырехъ дѣйствій. Какъ производить эти дѣйствія? Математики условились прежде всего производить дѣйствія надъ числами, стоящими рядомъ и соединенными знаками умноженія и дѣленія.

Совокупность чиселъ, соединенныхъ знаками умноженія и дѣленія, принято называть одночленомъ.

Нѣсколько одночленовъ, соединенныхъ знаками $+$ и $-$, составляютъ многочленъ.

Итакъ математики условились вычислять сначалу величину каждаго члена. Замѣнивъ каждый членъ найденнымъ числомъ, остается еще произвести по даннымъ выше правиламъ сложенія и вычитанія дѣйствія, указанныя знаками, соединяющими члены.

Ученики могутъ спросить: на какомъ основаніи производятъ сначала умноженія и дѣленія и уже потомъ сложенія и вычитанія? На это можно отвѣтить, что такъ поступать нашли удобнымъ математики; но что можно поступать и иначе. Можно было бы условиться сначала производить сложенія и вычитанія и уже потомъ умноженія и дѣленія. Это вполнѣ зависитъ отъ нашего произвола. Но при новомъ условіи мы получили бы и новую алгебру, отличную отъ теперешней. Надо сознаться, что эта новая алгебра была бы сложнѣе настоящей.

13. Теперь мы знаемъ, какъ производить дѣйствія надъ числами, соединенными всѣми четырьмя знаками. Но иногда случается, что по смыслу задачи нужно произвести дѣйствія не въ томъ порядкѣ, какъ это сказано въ нашихъ правилахъ. Въ такомъ случаѣ употребляются скобки. Для примѣра возьмемъ:

$$3+5\times 4.$$

По даннымъ выше правиламъ прежде всего нужно перемножить послѣднія два числа и полученное произведеніе прибавить къ 3:

$$3+5\times 4=3+20=23.$$

Но если по смыслу задачи требуется сначала произвести сложеніе надъ первыми двумя числами и полученную сумму умножить на третье число, то для этой цѣли первыя два числа заключаются въ скобки:

$$(3+5)\times 4=8\times 4=32.$$

Общее правило при употребленіи скобокъ таково, что прежде всего нужно вычислить содержимое скобокъ и замѣнить его однимъ числомъ, послѣ чего скобки можно отбросить.

Я рекомендую ограничиться на первое время только простыми скобками. Сложныя же скобки слѣдуетъ употреблять лишь въ крайней необходимости.

Вотъ, милостивые государи, сколько нужно сообщить ученикамъ свѣдѣній, чтобы они имѣли правильное понятіе не то что о скобкахъ, а даже о дѣйствіяхъ надъ числами, соединенными разными знаками. Теперь, надѣюсь, вамъ ясна причина, почему я возсталъ противъ употребленія скобокъ и формулъ въ ариѳметикѣ.

14. Перейдемъ теперь къ сложенію многочленовъ.

Изъ ариѳметики извѣстно: 1) чтобы прибавить сумму, нужно прибавить каждое слагаемое; 2) чтобы прибавить разность, нужно прибавить уменьшаемое и отъ суммы отнять вычитаемое:

$$a+(b+c)=a+b+c,$$
$$a+(b-c)=a+b-c.$$

Отсюда легко приходимъ къ общему правилу: чтобы прибавить многочленъ, нужно приписать его члены съ стоящими предъ ними знаками.

15. Два равные члена съ противоположными знаками взаимно уничтожаются:

$$a+b-b=a.$$

16. На основаніи этого послѣдняго положенія и на опредѣленіи вычитанія, какъ дѣйствія обратнаго сложенію, доказывается правило для вычитанія многочленовъ: нужно къ уменьшаемому приписать члены вычитаемаго съ обратными знаками.

17. Перейдемъ теперь къ умноженію.

Изъ ариѳметики извѣстно: чтобы умножить сумму на какое нибудь число, нужно на это число умножить каждое слагаемое:

$$(a+b+c)\times d=ad+bd+cd.$$

Правило умноженія разности на одночленъ,

$$(a-b)c=ac-bc,$$

можно считать извѣстнымъ изъ ариѳметики, или же его можно выводить изъ предыдущаго правила для умноженія суммы.

18. Правило для умноженія многочлена на многочленъ доказывается извѣстнымъ способомъ. Вотъ это правило: нужно каждый членъ множимаго умножить на каждый членъ множителя, при чемъ одинаковые знаки даютъ $+$, разные $-$.

19. До сихъ поръ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ мы говорили о вычитаніи, мы предполагали это дѣйствіе возможнымъ, т. е. уменьшаемое больше вычитаемаго. Но въ алгебрѣ встрѣчается часто и такой случай, когда уменьшаемое меньше вычитаемаго, напр.

$$5-8.$$

Подобное выраженіе мы *условимся называть отрицательнымъ числомъ*. Разъ у насъ явились новые символы, мы по нашему произволу можемъ подчинить ихъ какимъ угодно правиламъ и даже создать для нихъ новыя дѣйствія. Но для большей простоты предположимъ, что новые символы подчиняются тѣмъ же дѣйствіямъ и даннымъ выше правиламъ. Посмотримъ, какія слѣдствія вытекаютъ изъ этого предположенія.

Во первыхъ разность не измѣнится, когда мы отъ уменьшаемаго и вычитаемаго отнимемъ одно и то же число, слѣдовательно

$$5-8=0-3.$$

Опуская во второй части 0, имѣемъ

$$5-8=-3$$

такъ выражается отрицательное число.

20. Предполагая, что правила для сложенія и вычитанія многочленовъ остаются всегда вѣрными, имѣемъ

$$a+(0-b)=a+0-b=a-b,$$

$$a-(0-b)=a-0+b=a+b.$$

Отсюда вытекаетъ правило для сложенія и вычитанія отрицательныхъ чиселъ.

21. Если одинъ изъ множителей обращается въ нуль, то, какъ извѣстно изъ ариѳметики, и все произведеніе обращается въ нуль,

$$a.0=0.$$

22. Предполагая, что правило для умноженія многочленовъ во всѣхъ случаяхъ остается неизмѣннымъ, имѣемъ

$$(0-a)b=0.b-ab=-ab,$$

$$(0-a)(0-b)=0.0-a.0-0.b+ab=+ab.$$

Отсюда вытекаетъ правило для умноженія отрицательныхъ чиселъ.

23. Теперь мы можемъ выраженіе

$$a-b+c-d-e+f$$

разсматривать какъ сумму положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, и въ такомъ случаѣ называемъ его *алгебраической суммою*.

24. До сихъ поръ мы подразумѣвали подъ буквами положительныя числа. Далѣе мы будемъ подъ буквами подразумѣвать не только положительныя, но и отрицательныя числа Едва ли нужно доказывать, что и при этомъ обобщеніи данныя выше правила остаются въ силѣ. Во всякомъ случаѣ эти доказательства ненужны въ школѣ.

Послѣ этого можно перейти къ опредѣленію коэффиціента и экспонента, и дальнѣйшее изложеніе извѣстно.

Если ученикъ въ сложную формулу умѣетъ подставить вмѣсто буквъ данныя числа, дробныя и отрицательныя, и найти вѣрный результатъ, то это служитъ ручательствомъ, что данныя выше правила поняты.

Говоря объ отрицательныхъ числахъ, необходимо выяснить ученикамъ и ихъ реальное значеніе. Нужно выяснить ученикамъ, что величины бываютъ *абсолютныя* и *относительныя*. Абсолютныя величины могутъ быть отсчитываемы до безконечности только въ одну сторону; относительныя величины могутъ быть отсчитываемы до безконечности въ двѣ противоположныя стороны. Если идетъ рѣчь объ абсолютной величинѣ, то нуль есть отсутствіе величины. Если же говорится объ относительной величинѣ, то нуль есть произвольная условная величина. Величины, отсчитываемыя въ одну сторону отъ произвольнаго мѣста выражаются положительными числами, въ другую сторону—отрицательными.

Вотъ, милостивые государи, мой планъ преподаванія. Если по понятіямъ нѣкоторыхъ педагоговъ онъ не удовлетворяетъ строго научнымъ требованіямъ, съ чѣмъ я впрочемъ не согласенъ, за то въ педагогическомъ отношеніи предлагаемый мною планъ безукоризненъ, ибо онъ простъ, кратокъ и удобопонятенъ для учениковъ.

ИЗЪ МЕТОДОЛОГІИ АЛГЕБРЫ.

Выдѣленіе нѣкоторыхъ законовъ алгебры и образованіе понятія о новомъ числѣ.

(Окончаніе) *).

V. До сей поры мы допускали, что въ разсматриваемой системѣ чиселъ всегда существуетъ число, удовлетворяющее уравненію $x_\circ b=a$. Предположимъ теперь, что такого числа нѣтъ. Тогда лизисъ вообще невозможенъ. Однако эта невозможность, разсматриваемая съ высшей точки зрѣнія, вовсе не принадлежитъ къ числу безусловныхъ и неустранимыхъ. По крайней мѣрѣ намъ ничто не препятствуетъ принять, что встрѣченная нами невозможность указываетъ только на неполноту нашего численнаго ряда и что она исчезнетъ, коль скоро расширимъ понятіе о числѣ и пополнимъ первоначальный рядъ новыми членами. Если примемъ такую точку зрѣнія, то дальнѣйшая наша задача будетъ состоять въ расширеніи области чиселъ въ томъ смыслѣ, какой указывается обратной операціей. Сдѣлаемъ это слѣдующимъ образомъ.

Если въ первоначальной системѣ нѣтъ числа, которое удовлетворяло бы уравненію $x_\circ b=a$, то принимаемъ въ формѣ постулата, что существуетъ одно, и притомъ только одно, число новой природы, не принадлежащей къ прежней системѣ и удовлетворяющее требованію. Означивъ это число символомъ $x=a\cup b$, получимъ:

$$(a\cup b)_\circ b=a,$$

*) См. „Вѣстникъ" № 101.

Такъ какъ новыя числа не обладаютъ пока никакими дальнѣйшими свойствами, то можемъ приписать ихъ произвольно, наблюдая при этомъ только, чтобы эти свойства не заключали въ себѣ логическаго противорѣчія. Но чтобы не вводить новыхъ правилъ и доставить полную общность ранѣе установленнымъ формуламъ, лучше всего дать такія опредѣленія, которыя не нарушали бы прежнихъ свойствъ чиселъ и включали бы въ себѣ извѣстные законы и условія операцій надъ числами первоначальнаго ряда. Вытекающій отсюда основной руководящій принципъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *операціи надъ числами могутъ привести къ новымъ числамъ, для которыхъ должны имѣть мѣсто прежніе законы; такъ что, если существуетъ какое либо соотношеніе между двумя формами, выраженными прежними знаками, то оно должно существовать также и въ томъ случаѣ, когда знаки перестанутъ выражать прежнія числа, а самыя операціи получатъ иной смыслъ.* Это начало, носящее характеръ постулата, лежитъ въ основѣ всей алгебры и названо Ганкелемъ *принципомъ перманентности* или *постоянства формальныхъ законовъ.* Примѣняя этотъ принципъ, мы въ сущности только расширяемъ или обобщаемъ наши прежнія понятія о числѣ и операціи. Но извѣстно, что при переходѣ отъ низшаго понятія къ однородному высшему всегда утрачивается часть содержанія низшаго понятія. Въ силу этого, обобщая какое нибудь понятіе, устанавливая, напр., общее опредѣленіе операціи, необходимо всякій разъ убѣдиться, сохранился-ли тотъ минимумъ необходимыхъ и достаточныхъ признаковъ, которымъ характеризуется эта операція.

Изложенныя начала помогутъ намъ вполнѣ логически и изящно установить всѣ новыя понятія, связанныя съ расширеніемъ первоначальной идеи о числѣ. Прежде всего возникаетъ вопросъ о равенствѣ и неравенствѣ новыхъ чиселъ. Мы замѣтили выше, что если $a \smile b$ и $c \smile d$ суть числа первоначальнаго ряда, то

$$a \smile b \gtreqless c \smile d, \quad \text{когда } a_{\circ} d \gtreqless b_{\circ} c.$$

Теперь, руководствуясь принципомъ перманенціи, мы, для обобщенія предыдущаго, принимаемъ слѣдующія опредѣленія:

Два числа формы $a \smile b$ и $c \smile d$ называются равными, когда $a_{\circ} d = b_{\circ} c$. Изъ двухъ чиселъ $a \smile b$ и $c \smile d$ первое называется большимъ или меньшимъ второго, когда $a_{\circ} d$ больше или меньше $b_{\circ} c$.

Что эти опредѣленія имѣютъ вполнѣ ясный смыслъ, это не можетъ подлежать сомнѣнію, ибо числа $a_{\circ} d$ и $b_{\circ} c$ принадлежатъ къ первоначальной системѣ. Поэтому остается провѣрить, удовлетворяютъ ли эти опредѣленія необходимымъ формальнымъ требованіямъ. Къ такимъ требованіямъ относятся:

1) Если $A = B$, то и $B = A$, т. е. стороны равенства можно перемѣстить.

2) Если $A = B$ и $C = B$, то $A = C$, т. е. два числа, порознь равныя третьему, равны между собою.

3) Если $A = B$, $B = C$, то $A = C$, т. е. вообще, если въ рядѣ членовъ каждый предыдущій равенъ своему послѣдующему, то первый членъ равенъ каждому изъ остальныхъ до послѣдняго включительно.

4) Если $A=B$, $B>C$, то $A>C$.

5) Если $A>B$, $B>C$, то $A>C$, и т. д.

Что данное выше опредѣленіе равенства удовлетворяетъ первому требованію,—это ясно. Покажемъ теперь, что если $a\cup b=c\cup d$ и $c\cup d=e\cup f$, то $a\cup b=e\cup f$.

Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$a\circ d=b\circ c, \qquad c\circ f=d\circ e;$$

Поэтому

$$(a\circ d)\circ(c\circ f)=(b\circ c)\circ(d\circ e)$$

или

$$(a\circ f)\circ(d\circ c)=(b\circ e)\circ(d\circ c)$$

и, слѣдовательно

$$a\circ f=b\circ e,$$

т. е.

$$a\cup b=e\cup f.$$

Такимъ же образомъ убѣдимся, что если

$$a\cup b>c\cup d, \qquad c\cup d>e\cup f,$$

то

$$a\cup b>e\cup f.$$

И т. д.

Чтобы установить *понятіе о тезисѣ*, мы, руководствуясь принципомъ перманенціи, обращаемся къ равенству

$$(a\cup b)\circ(c\cup d)=(a\circ c)\cup(b\circ d),$$

справедливость котораго была доказана для того случая, когда числа $a\cup b$ и $c\cup d$ принадлежали къ первоначальной системѣ. Мы доставимъ этому равенству полную общность, если будемъ разсматривать его, какъ *опредѣленіе* тетической операціи надъ числами обобщеннаго ряда. Это опредѣленіе имѣетъ вполнѣ ясный смыслъ, ибо числа $a\circ c$ и $b\circ d$ принадлежатъ къ прежней системѣ. Легко, сверхъ того, видѣть, что при такомъ выборѣ опредѣленія *основные законы тезиса остаются въ силѣ*. Дѣйствительно, пусть $A=a\cup b$, $B=c\cup d$, $C=e\cup f$. Тогда

$$A\circ B=(a\cup b)\circ(c\cup d)=(a\circ c)\cup(b\circ d),$$
$$B\circ A=(c\cup d)\circ(a\cup b)=(c\circ a)\cup(d\circ b),$$
$$=(a\circ c)\cup(b\circ d),$$

т. е.

$$A\circ B=B\circ A.$$

Далѣе,

$$A\circ(B\circ C)=(a\cup b)\circ[(c\cup d)\circ(e\cup f)]=(a\cup b)\circ[(c\circ e)\cup(d\circ f)]$$
$$=(a\circ c\circ e)\cup(b\circ d\circ f),$$
$$(A\circ B)\circ C=[(a\cup b)\circ(c\cup d)]\circ(e\cup f)=[(a\circ c)\cup(b\circ d)]\circ(e\cup f)$$
$$=(a\circ c\circ e)\cup(b\circ d\circ f);$$

слѣдовательно,

$$A\circ(B\circ C)=(A\circ B)\circ C.$$

И т. д.

Послѣ этого можемъ сказать, что всѣ свойства тезиса справедливы также и для чиселъ обобщеннаго ряда, потому что при выводѣ этихъ свойствъ мы опирались на основные законы, которые по доказанному выше, остаются въ силѣ и при общемъ опредѣленіи тезиса.

Съ установленіемъ понятія о равенствѣ, неравенствѣ и тезисѣ новыя числа получаютъ, такъ сказать, всѣ права гражданства, наравнѣ съ прежними, и остается только реализировать значеніе этихъ чиселъ и ихъ отношеній.

Предыдущее разсмотрѣніе въ достаточной мѣрѣ освѣщаетъ въ методологическомъ отношеніи одинъ изъ важнѣйшихъ моментовъ въ изложеніи алгебры: образованіе понятія о новомъ числѣ и связанное съ нимъ расширеніе понятія объ операціи. Если вѣрна мысль, что развивающимъ элементомъ при изученіи математики служитъ не только практика въ рѣшеніи задачъ, но также и строго-логическая теорія, то изложенныя начала могутъ найти нѣкоторое приложеніе и въ элементарномъ преподаваніи алгебры. *П. Матковскій* (Кіевъ).

РѢШЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ

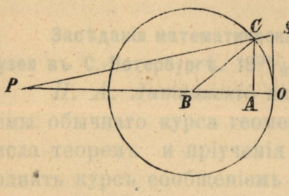
безъ помощи тригонометрическихъ таблицъ.

1. Въ журналѣ „Mathesis" за прошлый и нынѣшній годъ появилось нѣсколько замѣтокъ, посвященныхъ формулѣ, служащей для опредѣленія въ градусахъ величины остраго угла прямоугольнаго треугольника по сторонамъ его. Именно, если B будетъ уголъ меньшій 45° въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, то очень близко имѣемъ

$$B^{\circ}=172\frac{b}{2a+c}.$$

Эту любопытную формулу первоначально приписывали извѣстному математику Озанаму, но потомъ оказалось, что она дана была Снелліусомъ (Snellius) въ 1621 году въ формѣ таблицъ. Вотъ на чемъ былъ основанъ ея выводъ (Mathesis, 1890, № 2).

Фиг. 12.



Данъ треугольникъ ABC (фиг. 12). Изъ B радіусомъ равнымъ гипотенузѣ BC опишемъ кругъ; на продолженіи AB отъ B отложимъ BP=2BC и соединимъ P съ C. Линію PC продолжимъ до встрѣчи съ касательной OS въ S. Въ этомъ случаѣ, оказывается, часть касательной OS можно безъ большой погрѣшности, для угловъ B меньшихъ 45°, принять равной дугѣ OC.

Но OS:AC=OP:AP, откуда

$$\mathrm{OS}=\frac{b.3a}{c+2a}.$$

Дуга

$$\mathrm{OC}=\frac{2\pi.a}{360}.\mathrm{B}^{\circ}.$$

Допуская, что дуга OC=OS имѣемъ

$$\frac{2\pi a.\mathrm{B}^{\circ}}{360}=\frac{b.3a}{2a+c}$$

$$\mathrm{B}^{\circ}=\frac{3.360}{2\pi}.\frac{b}{2a+c}=171,9\frac{b}{2a+c}.$$

2. Приведемъ сравнительную таблицу величинъ угла B, найденную: 1) точно тригонометрически по даннымъ сторонамъ, и 2) по формулѣ

$$\mathrm{B}_1=172\frac{b}{2a+c}$$

b	c	a	B°_1	B°
1	1	$\sqrt{2}$	44,92	45
3	4	5	36,856	36,87
161	240	289	33,85	33,85
1	$\sqrt{3}$	2	30,0067	30
8	15	17	28,08	28,07
1	$\sqrt{15}$	4	14,487	14,478
1	$\sqrt{63}$	8	7,19	7,18
1	$\sqrt{80}$	9	6,384	6,379
1	$\sqrt{143}$	12	4,783	4,780

3. Положимъ

$$\mathrm{B}^{\circ}=k\frac{b}{2a+c}$$

и посмотримъ въ какихъ предѣлахъ будетъ измѣняться k при измѣненіи B отъ 0° до 45°.

$$k=\frac{B(2a+c)}{b}.$$

Такъ какъ

$$b=a\operatorname{Sin}B;\quad c=a\operatorname{Cos}B,$$

то

$$k=\frac{B(2+\operatorname{Cos}B)}{\operatorname{Sin}B}.$$

Теперь опредѣлимъ k для разныхъ величинъ B.

B	k	B	k	B	k
0°	171,887	20°	171,902	40°	172,128
5°	171,887	25°	171,923	45°	172,279
10°	171,888	30°	171,962		
15°	171,892	35°	172,026		

Очевидно, наиболѣе подходящая величина для $k=172$.

Примѣчаніе. Величина k при B=0 опредѣлена такъ: дуга β, соотвѣтствующая углу B, будетъ

$$\beta=\frac{2\pi.B^\circ}{360};\quad B^\circ=\frac{360\beta}{2\pi}$$

$$\operatorname{Sin}B=\operatorname{Sin}\beta;\quad \operatorname{Cos}B=\operatorname{Cos}\beta$$

$$k=\frac{360}{2\pi}\frac{\beta}{\operatorname{Sin}\beta}(2+\operatorname{Cos}\beta)$$

при

$$\beta=0;\quad \lim\left(\frac{\beta}{\operatorname{Sin}\beta}\right)=1;\quad \operatorname{Cos}\beta=1,$$

а потому

$$k=\frac{360.3}{2\pi}=171,887.$$

Примѣръ. (Изъ тригонометріи Малинина на стр. 59, задача 6)

$$a=363,\qquad b=217$$

$$B=172\frac{217}{2.363+\sqrt{363^2-217^2}}=36^\circ,7=36^\circ 42'.$$

По отвѣту B=36°42′42″.

И. Пламеневскій (Темиръ-Ханъ-Шура).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданія математическаго отдѣла Учебно-Воспитательнаго Комитета Педагогическаго Музея въ С.-Петербургѣ. $18^{90}/_{91}$ учебнаго года, 4 октября.

П. А. Литвинскій находитъ полезнымъ въ старшихъ классахъ частныя теоремы обычнаго курса геометріи замѣнять болѣе общими, какъ съ цѣлью сокращенія числа теоремъ и пріученія учащихся къ обобщенію, такъ равно и съ цѣлью пополнить курсъ сообщеніемъ геометрическихъ истинъ въ надлежащей полнотѣ. Какъ примѣръ такихъ обобщеній докладчикъ привелъ слѣдующія теоремы:

1) Около всякаго многоугольника можно описать кругъ, если діагонали, соединяющія вершины съ концами одной стороны, образуютъ равные углы. (Частные случаи: правильный многоугольникъ, прямоугольникъ, равнобочная трапеція и т. д.).

2) Во всякій многоугольникъ можно вписать кругъ, если биссекторы угловъ взаимно пересѣкаются въ общей точкѣ. (Прав. многоугольникъ, ромбъ, квадратъ).

3) Во всякомъ треугольникѣ можно отсѣчь треугольникъ подобный данному, проведя сѣкущую черезъ вершину угла подъ угломъ равнымъ одному изъ двухъ угловъ остальныхъ. При этомъ общая сторона треугольниковъ будетъ средняя пропорціональная сторонъ, совпадающихъ по направленію. (Частные случаи: теорема о касательной и сѣкущей, сторона десятиугольника, теорема о катетѣ и его проэкціи на гипотенузу, о хордѣ полу-дуги).

Изъ преній по поводу этого доклада выяснилось, что большинство находитъ нужнымъ просмотрѣть весь обычный курсъ геометріи, какъ далеко несоотвѣтствующій современнымъ воззрѣніямъ на преподаваніе. По приглашенію директора Педагогическаго Музея образовалась комиссія изъ лицъ, выразившихъ готовность поработать надъ этимъ вопросомъ въ текущемъ учебномъ году.

С. В. Пѣвницкій весьма подробно и обстоятельно ознакомилъ собраніе съ содержаніемъ оригинальнаго сочиненія Брокмана: Materialien zur Dreiecksconstructionen.

1 ноября. *Л. А. Монкевичъ* ознакомилъ съ употребленіемъ таблицъ Вронскаго, называемыхъ „логариѳмическими канонами“, вывелъ формулу, лежащую въ основѣ устройства таблицъ, и ознакомилъ съ біографіей и перечнемъ важнѣйшихъ математическихъ трудовъ этого забытаго современниками философа—математика.

П. М. Новиковъ: 1) указалъ въ какихъ случаяхъ примѣнимъ способъ множителей (равныхъ) къ опредѣленію maxima; 2) предложилъ поправки въ опредѣленіяхъ прямой и угла, неточно формулируемыхъ въ русскихъ учебникахъ геометріи.

А. Н. Крыловъ показалъ практическій пріемъ вычисленія кубичныхъ корней изъ чиселъ по приближенію.

С. В. Пѣвницкій обратилъ вниманіе на мало извѣстный признакъ не полнаго квадрата (если сумма цифръ при дѣленіи на число 3 даетъ въ остаткѣ 2).

П. А. Литвинскій указалъ на отсутствіе раціональныхъ корней въ приведенномъ алгебраическомъ уравненіи, если алгебраическая сумма коэффиціентовъ и извѣстный членъ одновременно суть числа нечетныя.

Секретарь отдѣла математики *П. А. Литвинскій.*

Засѣданіе Матем. Отд. Новор. Общ. Естеств. по вопросамъ элементарной математики и физики. 2 ноября 1890 г.

Были сдѣланы сообщенія:

Х. І. Гохмана: „Объ углѣ“. Находя общепринятое опредѣленіе объ углѣ, какъ части плоскости, неудовлетворительнымъ, референтъ предлагалъ опредѣлять уголъ какъ одну или нѣсколько частей оборота прямой при вращеніи ея въ плоскости вокругъ нѣкоторой точки. Собраніе, находя также нѣкоторыя неудобства въ общепринятомъ опредѣленіи, находило, что предложенное референтомъ опредѣленіе страдаетъ отсутствіемъ ясности.

И. В. Слешинскаго: „О положительныхъ и отрицательныхъ числахъ". Референтъ излагалъ теорію алгебраическихъ чиселъ съ точки зрѣнія Grassmann'а, сдѣлавъ въ ней необходимыя для школы упрощенія и разъясненія. Такъ законъ перемѣстительный для суммы былъ данъ безъ доказательства. Такъ какъ методъ Grassmann'а синтетическій, то собраніе полагало, что для класса онъ врядъ-ли удобенъ, хотя по строгости своихъ выводовъ имѣетъ преимущество передъ методомъ аналитическимъ, болѣе старымъ, но менѣе обработаннымъ.

И. Занчевскій (Одесса).

Засѣданіе Мат. Отд. Новор. Общ. Естеств. по вопросамъ элементарной математики и физики 16 ноября 1890 года.

И. М. Занчевскій сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ „элементарный выводъ разложенія силы на касательную и нормальную слагающую", въ которомъ послѣ изложенія теоріи выяснилъ на нѣсколькихъ примѣрахъ понятіе о центробѣжной силѣ съ точки зрѣнія раціональной механики. При обсужденіи сообщенія особое вниманіе было обращено на примѣръ равномѣрнаго движенія по кругу въ томъ случаѣ, когда движущееся тѣло соединено нерастяжимою нитью съ неподвижнымъ центромъ. Было высказано по отношенію къ этому примѣру мнѣніе, что натяженіе нити происходитъ вслѣдствіе сообщенной первоначальнымъ толчкомъ скорости, сохраняющей величину и стремящейся сохранить направленіе. Стремленіе сохранить направленіе, уравновѣшивающееся прочностью нити и представляетъ такъ называемую центробѣжную силу.

И. Слешинскій (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 104. Въ „Элементарной Геометріи" А. Давидова (въ концѣ главы V-ой) дана задача: „Описать кругъ, проходящій черезъ точку A и касательный къ прямой MN и къ данному кругу". Показать, что рѣшеніе этой задачи, помѣщенное въ томъ же учебникѣ (въ концѣ), сбивчиво, ибо приводитъ учениковъ къ предположенію существованія только двухъ отвѣтовъ, между тѣмъ какъ въ общемъ случаѣ задача имѣетъ четыре рѣшенія.

Ш.

№ 105. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Прямол. Тригонометріи Пржевальскаго"):

„Угловая высота горы AB въ точкѣ C, находящейся съ B въ одной горизонтальной плоскости, равна 60°. Изъ точки C идутъ къ вершинѣ A по тропинкѣ, составляющей съ горизонтомъ уголъ въ 30° и, пройдя километръ, останавливаются въ точкѣ D. Найти высоту горы, если $\angle ADC = 135°$.

Н. Николаевъ (Пенза)

№ 106. Четырьмя построеніями найти

$$x=\frac{a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6}{(a-b)^5}.$$

П. Андреяновъ (Москва).

№ 107. Рѣшить систему:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=a$$

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=b$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 108. Опредѣлить истинную величину выраженія

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}}{n-2}$$

при $n=2$. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 109. Въ кругъ вписанъ треугольникъ ABC, сторона котораго BC остается неизмѣнной, а вершина A движется по окружности. Найти геометрическое мѣсто проекцій средины стороны AB на сторону AC.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

№ 110. Показать, что произведеніе сторонъ гармоническаго четыреугольника равно четырехкратному произведенію его медіанъ*).

И. Пламеневскій (Темиръ-ханъ-Шура).

Упражненія для учениковъ.

Выполнить слѣдующія вычисленія, избѣгая по возможности, промежуточныхъ записей:

1. $10^3/_4+5^1/_2+3^7/_{12}=$
   $10^3/_4+5^1/_2-3^7/_{12}=$
   $10^3/_4-5^1/_2+3^7/_{12}=$
   $10^3/_4-5^1/_2-3^7/_{12}=$

2. $10^3/_4+(5^1/_2+3^7/_{12})=$
   $10^3/_4+(5^1/_2-3^7/_{12})=$
   $10^3/_4-(5^1/_2+3^7/_{12})=$
   $10^3/_4-(5^1/_2-3^7/_{12})=$

3. $(8^7/_{10}+3^1/_4)+(1^3/_4+{}^3/_{10})=$
   $(8^7/_{10}+3^1/_4)+(1^3/_4-{}^3/_{10})=$
   $(8^7/_{10}+3^1/_4)-(1^3/_4+{}^3/_{10})=$
   $(8^7/_{10}+3^1/_4)-(1^3/_4-{}^3/_{10})=$

4. $15^5/_{24}-3^1/_2+5^1/_6-2^3/_8=$
   $(15^5/_{24}-3^1/_2)+5^1/_6-2^3/_8=$
   $15^5/_{24}-(3^1/_2+5^1/_6)-2^3/_8=$
   $15^5/_{24}-3^1/_2+(5^1/_6-2^3/_8)=$

*) См. прим. къ задачѣ № 101, въ № 101 „Вѣстника“.

5. $2^4/_5.6+2^4/_5.5+2^4/_5.4=$
$2^4/_5.6+2^4/_5.5-2^4/_5.4=$
$2^4/_5.6-2^4/_5.5+2^4/_5.4=$

6. $6^5/_{12}.31+6^5/_{12}.23-6^5/_{12}.13-6^5/_{12}.29=$
$7^7/_{12}.61-7^7/_{12}.51+7^7/_{12}.43-7^7/_{12}.38=$

7. $3^1/_4:13+5^3/_4:13+7^3/_4:13+9^1/_4:13=$
$3^1/_4:13+5^3/_4:13+7^3/_4:13-9^1/_4:13=$

8. $9^3/_{25}:24+7^{11}/_{25}:24+5^7/_{25}:24+3^3/_{25}:24=$
$9^3/_{25}:24-7^{11}/_{25}:24+5^7/_{25}:24-3^3/_{25}:24=$

9. $\dfrac{467-332+433-268}{^1/_2+^2/_3+^1/_4-^1/_6}=$

10. $\dfrac{527^1/_2-303+272^3/_4-397^1/_4}{1^1/_4+2^1/_3+3^3/_4+2^3/_4}=$

А. Гольденбергъ (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 8 (2-й серіи). Найти общій видъ такихъ трехзначныхъ чиселъ, коихъ число сотенъ есть среднее ариѳметическое чиселъ десятковъ и единицъ, опредѣлить сколько можетъ быть такихъ чиселъ и найти ихъ общаго дѣлителя.

Общій видъ трехзначнаго числа вообще будетъ

$$100a+10b+c,$$

но, по условію, $a={}^1/_2(b+c)$,

значитъ число, удовлетворяющее условію задачи, имѣетъ видъ

$$60b+51c.$$

Условіе $a={}^1/_2(b+c)$

требуетъ, чтобы b и c были одновременно или четныя цыфры, или нечетныя. Четныхъ цыфръ пять: 0, 2, 4, 6 и 8, нечетныхъ тоже пять, слѣд. разныхъ размѣщеній (съ повтореніями), удовлетворяющихъ условію задачи, будетъ 49 (для b и c нечетныхъ 25, а для четныхъ—24, ибо случай $b=c=0$ надо исключить). Слѣдовательно искомыхъ чиселъ можетъ быть 49. Наконецъ общій дѣлитель чиселъ вида

$$60b+51c,$$

очевидно, будетъ 3.

И. Склобовскій (Воронежъ), *И. Соляниковъ* (Полтава). Ученики: 1-й Спб. г. (8) *К. К.*, Кіевск. к. к. (7) *П. З.* и *С. Т.*

№ 34 (2-ой серіи). На сторонѣ AC треугольника ABC дана точка касанія D внутри вписаннаго круга. Доказать, что при

$$AB.BC=2AD.DC$$

треугольникъ будетъ прямоугольный.

(Отсюда слѣдуетъ, что площадь прямоугольнаго треугольника равна произведенію отрѣзковъ гипотенузы, опредѣляемыхъ точкою касанія вписаннаго круга).

Пусть E точка касанія на сторонѣ AB и F—на сторонѣ BC. По условію

$$AB.BC=2AD.DC, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

но

$$AB=AD+BE \quad \text{и} \quad BC=DC+BE,$$

то

$$BE^2+AC.BE-AD.DC=0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно BE, и замѣняя 4AD.DC черезъ 2AB.BC изъ (1), получимъ

$$BE=\frac{-AC+\sqrt{AC^2+2AB.BC}}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Легко видѣть, что периметръ даннаго $\triangle$-ка$=2AC+2BE$, слѣд.

$$2(AC+BE)=AB+BC+AC \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Исключая изъ (2) и (3) BE, находимъ

$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

С. Карновичъ, *Н. Волковъ* и *А. Кочанъ* (Воронежъ), *С. Блажко* (Хотимскъ), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ). Ученикъ 1-й Спб. г. (8) *К. К.*

№ 375. Рѣшить уравненіе

$$x^3-px+\sqrt{p-1}=0.$$

Полагая

$$x=y\sqrt{p-1}$$

приведемъ уравненіе къ виду

$$(p-1)y^3-py+1=0.$$

Послѣднее же легко представить въ такой формѣ:

$$(y-1)[(p-1)y^2+(p-1)y-1]=0.$$

Рѣшая это уравненіе и опредѣляя x, найдемъ:

$$x=\sqrt{p-1} \quad \text{и} \quad x=\tfrac{1}{2}[-\sqrt{p-1}\pm\sqrt{p+3}].$$

А. Шульженко (Кіевъ), *Г. Ульяновъ* (Воронежъ). Ученики: Курск. г. (7) *М. И.* Ворон. к. к. (7) *Н. В.*

№ 458. Показать, что сумма n первыхъ дробей ряда

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ \frac{1}{4.5},\ldots\ldots$$

менѣе единицы и отличается отъ нея на $\frac{1}{n+1}$.

Пишемъ тождество

$$a-a_n=(a-a_1)+(a_1-a_2)+\ldots\ldots+(a_{n-2}-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_n)$$

и, полагая здѣсь

$$a=1,\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{3},\ldots a_{n-2}=\frac{1}{n-1},\quad a_{n-1}=\frac{1}{n},\quad a_n=\frac{1}{n+1},$$

получимъ $$1-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

А. Охитовичъ (Спб.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Кричевскій* (Ромны), *Я. Эйлеръ* (Спб.), *А. Шульженко* и *В. Моргунъ* (Кіевъ), *Н. Соболевскій* и *С. Блажко* (Москва), *Г. Ульяновъ* (Ворон.). Ученики: Кам.-Под. г. (8) *К. К.* и *Я. М.* Камыш. р. уч. (7) *А. З.*

№ 481. Показать, что всякое число вида

$$a^{b-1}+b^{a-1}-1,$$

гдѣ a и b суть числа простыя, должно дѣлиться на произведеніе ab.

Такъ какъ

$$b^{a-1}-1=(b-1)(b^{a-2}+b^{a-3}+\ldots\ldots+b+1),$$

то $b^{a-1}-1$ при дѣленіи на b даетъ въ остаткѣ $b-1$. По теоремѣ Фермата a^{b-1} при дѣленіи на b должно дать въ остаткѣ единицу. Поэтому все число

$$a^{b-1}+b^{a-1}-1$$

при дѣленіи на b должно дать въ остаткѣ нуль.

Точно также докажемъ, что это число должно дѣлиться безъ остатка на a, а потому оно дѣлится на произведеніе ab.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ). Ученики: Тверск. р. уч. (7) *М. Н.* Короч. г. (8) *Г. С.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Декабря 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
пщется