№№ 80—81.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ:

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій; Гл. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-учебныхъ заведеній.

№№ 1—48 ОДОБРЕНЫ

Уч. Ком. при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

VII Семестра №№ 8-й и 9-й.

ЭКШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Бибиковскій бульваръ, домъ № 8-б.
1889.

Содержаніе № 80.

Содержаніе № 81.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ НА

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ"

СЪ ПЕРЕСЫЛКОЮ:

на годъ—всего 24 №№ . . . . . **6** рублей | на полугодіе—всего 12 №№ . . . **3** рубля.

NB. Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Учителя нач. училищъ и всѣ учащіеся, при непосредственныхъ сношеніяхъ съ редакціей, могутъ подписываться на льготныхъ условіяхъ:

на годъ . . . . **4** рубля | на полугодіе. . . . . **2** рубля.

Годовая подписка принимается только съ 1-го января, а полугодовая—только на учебные семестры, съ 1-го января и съ 20-го августа.

Допускается разсрочка подписной платы.

Отдѣльные комплекты №№ за истекшіе учебные семестры (I, II, III, IV, V и VI) продаются по 2 р. 50 к., а льготнымъ подписчикамъ и книгопродавцамъ по 2 р. за каждый.

Полный комплектъ всѣхъ 72 №№ журнала, вышедшихъ до 20-го авг. 1889 года, продается подписчикамъ и книгопродавцамъ за 12 рублей.

За перемѣну адреса подписчики уплачиваютъ 10 коп.

При покупкѣ собственныхъ изданій редакціи „Вѣстника" подписчики пользуются 20% уступки съ цѣны съ пересылкой, объявленной въ каталогѣ изданій.

Условія помѣщенія объявленій на обертках №№ „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики":

Вся страница—**6** рублей; $^1/_2$ стр.—**3** рубля; $^1/_3$ стр.—**2** рубля; $^1/_4$ стр.—**1** рубъ **50** коп.

При повтореніи объявленій взимается всякій разъ половина этой платы.

Подписчики „Вѣстника" при помѣщеніи своихъ объявленій пользуются 20% уступки.

Условія сотрудничества:

Всѣ читатели журнала приглашаются быть сотрудниками и корреспондентами.

Сотрудничество не даетъ права на даровой экземпляръ журнала.

Денежнаго гонорара за статьи редакія никому не платитъ.

Редакція не беретъ на себя обязательства обратной пересылки присылаемыхъ авторами рукописей, и на вопросы касательно времени печатанія статей, причинъ ихъ непомѣщенія и пр. всегда отвѣчать не обѣщаетъ.

Чертежи къ статьямъ должны быть возможно простые, тщательно исполненные на отдѣльной бумагѣ (а не въ текстѣ рукописи) и возможно малыхъ размѣровъ.

Авторамъ статей, помѣщенныхъ въ журналѣ, высылается, въ случаѣ если они того пожелаютъ, 5 экз. тѣхъ №№ „Вѣстника", въ которыхъ статьи напечатаны, или—взамѣнъ этого—25 отдѣльныхъ оттисковъ безплатно. Отдѣльные оттиски въ большемъ количествѣ экземпляровъ могутъ быть заготовлены за счетъ авторовъ, при условіи своевременнаго о томъ извѣщенія редакціи.

Адресъ: Кіевъ, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики", Паньковская № 23.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 81.

VII Сем. 11 Ноября 1889 г. № 9.

Къ теоріи наибольшихъ и наименьшихъ фигуръ.

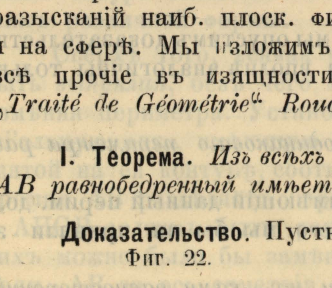
Первый методъ Штейнера.

Первыя изысканія, относящіяся къ теоріи наибольшихъ и наименьшихъ фигуръ, приписываютъ школѣ *Пиѳагора*; эти изысканія, какъ и всѣ геометрическія изслѣдованія древнихъ, производились путемъ синтетическимъ. Въ 1782 г. *Lhuilier* резюмировалъ всѣ открытія, сдѣланныя въ этой теоріи, начиная съ древнихъ грековъ до *R. Simpson'a*; съ удивительной проницательностью исправилъ онъ ошибки своихъ предшественниковъ и много увеличилъ область интересующей насъ теоріи своими собственными открытіями. Наконецъ, въ 1842 г. *Штейнеръ*, въ двухъ мемуарахъ (*Journal de Crelle. t. XXIV*), представляющихъ собой истинный перлъ синтетической геометріи, предложилъ *пять методовъ* для разысканій наиб. плоск. фиг., изъ которыхъ (мет.) первые два примѣнимы и на сферѣ. Мы изложимъ первый изъ этихъ методовъ, превосходящій всѣ прочіе въ изящности и общности. Этотъ методъ помѣщенъ въ „*Traité de Géométrie*" *Rouché* и *Comberousse'a*, откуда я его и перевожу.

I. Теорема. *Изъ всѣхъ треугольниковъ того же периметра и основанія AB равнобедренный имѣетъ наиб. площадь.*

Доказательство. Пусть ADB (фиг. 22) неравноб. тр-къ, при чемъ $AD+DB=AC+CB$. Тр—ки ACB и ADB имѣютъ общую часть AEB, и, слѣдовательно, для доказательства теор. достаточно показать, что тр—къ BED меньше тр—ка AEC; но если отложить на EA и EC соотвѣтственно $EF=EB$ и $EG=ED$, то остается доказать, что точка F упадетъ между A и E и точка G—между C и E.

Фиг. 22.



F уп. между A и E, такъ какъ уголъ β, равный углу α, больше угла γ, и, слѣдов., $EA>EF$.

Далѣе, если G падаетъ между т. E и C, то

$$FG+GE<FC+CE, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n),$$

или, по прибавленiи къ обѣимъ частямъ нерав. по $AF+FE$,

$$AF+FG+GE+FE<AF+FC+CE+EF \ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

но

$$EG=ED,\ FG=BD \text{ и } EF=EB,$$

а потому нерав. (m) обращается въ

$$AD+DB<AF+FC+CB$$

или

$$AC+CB<AF+FC+CB,$$

откуда

$$AC<AF+FC;$$

это неравенство очевидно, и, слѣдоват., справедливо нерав. (n), изъ котораго оно получилось, т. е, точка G лежитъ между C и E. *)

2. Обр. Теорема. *Изъ всѣхъ тр—ковъ того же основанiя и той же площади равнобедренный G имѣетъ наименьшiй периметръ.*

Доказательство. Пусть U неравноб. тр—къ того же основанiя и той же площади, что и G, и G_1 равноб. тр—къ, имѣющiй то же основанiе и тотъ же периметръ, что и U; по предыдущему $G_1>U$, т. е. $G_1>G$; но изъ двухъ равноб. тр—ковъ, построенныхъ на общемъ основанiи, тотъ, который имѣетъ большую площадь, имѣетъ и большiй периметръ; слѣдов., перим. тр—ка G_1, т. е. перим. тр—ка U, больше перим. тр—ка G.

Примѣчанiе. Въ дальнѣйшемъ изложенiи мы опустимъ доказательства обратн. теоремъ; эти доказательства были бы вполнѣ аналогичны только что изложенному.

3. Слѣдствiе. *Между всѣми тр—ками одинаковаго периметра равносторонній имѣетъ наибольшую площадь.*

Въ самомъ дѣлѣ, наибольшiй тр—къ, имѣющiй данный перим. долженъ быть равнобедренный, какую сторону его мы бы ни приняли за основанiе.

На оборотъ, *между всѣми равновеликими тр—ками равносторонній имѣетъ наименьшiй периметръ.*

4. Теорема. *Изъ всѣхъ тр—ковъ, имѣющихъ двѣ данныя стороны, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, въ которомъ эти двѣ стороны образуютъ прямой уголъ.*

---

*) Методъ, который Штейнеръ употребилъ здѣсь для доказательства носитъ названiе *аналитическаго метода Паппуса.* Онъ, какъ видно, состоитъ въ томъ, что данную теор. или задачу, предположивъ ихъ рѣшенными, стараются превратить въ другую теор. или задачу, которыя легче доказывать. Двѣ теоремы, получающiяся одна изъ другой, называются *взаимными.* (Подр. объ этомъ въ „Нач. Эвкл.“ Пр. Ващ -Зах) *С. К.*

Доказательство. Высота относительно одной изъ данныхъ сторонъ постоянно меньше другой стороны до тѣхъ поръ, пока данныя стороны не сдѣлаются взаимно-перпендикулярными; тогда высота достигаетъ maximum'а, а, слѣдов., его достигаетъ и площадь.

5. Слѣдствіе. *Изъ всѣхъ тр—ковъ, коихъ сумма двухъ сторонъ дана, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, въ которомъ эти стороны равны и заключаютъ прямой уголъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, тр—къ, въ составъ котораго входятъ двѣ стороны, на которыя можно разбить данную сумму, имѣетъ наибольшую площадь тогда, когда эти стороны взаимно перпендикулярны; слѣдовательно, для доказательства теоремы остается сравнить прямоугольные тр—ки, сумма катетовъ которыхъ постоянна; пусть одинъ изъ этихъ тр—ковъ будетъ P, на гипотенузѣ его построимъ равнобедренный тр—къ Q, периметръ котораго равнялся бы перим. тр—ка P, наконецъ означимъ черезъ R равноб. прямоугольный тр—къ, катеты котораго равнялись бы равнымъ сторонамъ тр—ка Q. По первой теор. $P<Q$, а по только что доказанной $Q<R$, слѣдовательно, $R>P$.

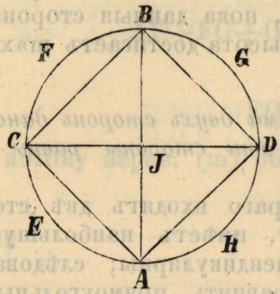
6. Теорема. *Между всѣми плоскими фигурами одного и того же периметра кругъ имѣетъ наибольшую площадь.*

Доказательство. Площадь фигуры даннаго периметра можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, но увеличивать неопредѣленно ее нельзя, потому что эта фигура остается постоянно внутри круга, описаннаго изъ какой либо точки ея контура, какъ центра, радіусомъ, равнымъ половинѣ даннаго периметра; слѣдов., въ ряду плоскихъ изопериметрическихъ фигуръ заключается или одна наибольшая, или нѣсколько наибольшихъ различной формы.

Сверхъ того, всякая наибольшая фигура даннаго периметра должна быть *выпуклая*, безъ чего можно было бы увеличивать ея площадь, не измѣняя периметра. Установивъ это, обозначимъ черезъ EFGH maximi'альную фиг., имѣющую данный перим. Всякой точкѣ A, произвольно взятой на ея контурѣ, соотвѣтствуетъ такая точка B этого контура, что прямая AB раздѣляетъ периметръ на двѣ равныя части. Площади AEFB и AHGB должны быть равны: въ противномъ случаѣ, меньшую изъ нихъ можно было бы замѣнить симетричной частью большей, принимая прям. AB за ось симетріи, и получили бы цѣлую фигуру, изопериметричную съ первой, но имѣющую большую площадь; такимъ образомъ первая фигура не была бы наибольшей (по площ.), что противно положенію.

Изъ этого вытекаетъ, что если въ наибольшей фигурѣ EFGH даннаго периметра часть съ одной стороны AB замѣнить частью, симетричной той, которая находится съ другой стороны AB, то новая цѣлая фигура будетъ одна изъ наибольшихъ. Будемъ разсуждать теперь относительно этой новой фигуры. Положимъ, что часть AHGB (фиг. 2) симетрична къ AEFB относительно прямой AB. Пусть C какая либо точка контура AEFB, возьмемъ ея симетричную точку D и проведемъ прямыя CA, AD, DB и BC. Уголъ ACB—прямой. Въ самомъ дѣлѣ, если бы углы ACB и ADB были отличны отъ прямыхъ, то можно было бы, по тѣмъ же сторонамъ CA, AD, DB и BC построить четы-

Фиг 23.



реугольникъ $\alpha\gamma\beta\delta$, въ которомъ углы γ и δ были бы прямые; этотъ четыреугольникъ былъ бы больше прежняго (теор. 4), и, построивъ соотвѣтственно на сторонахъ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\delta\beta$ и $\alpha\delta$ сегменты AEC, CFB, BGD и DHA, находящіеся теперь на CA, CB, BD и DA, мы получили бы цѣлую фигуру, имѣющую тотъ же периметръ, что и фиг. AECFBGDHA, но большую площадь, и фиг. 23 AECFBGDHA не была бы наибольшей, что противно положенію. Итакъ, изъ всѣхъ точекъ C контура AECFB прямая AB видна подъ прямымъ угломъ, вслѣдствіе чего этотъ контуръ есть половина окружности, описанной на AB какъ на діаметрѣ. Такимъ образомъ, если фигура даннаго периметра есть наибольшая, *ея половина ACB, начинающаяся съ какой либо точки A ея контура, есть половина круга;* цѣлая фигура есть, слѣдовательно, кругъ.

Видно, наконецъ, что не существуетъ болѣе одной фигуры, имѣющей при данномъ периметрѣ наибольшую площадь, и эта фигура есть кругъ.

Штейнеръ назвалъ эту теорему *главной*, потому что ея доказательство заключаетъ въ себѣ наиболѣе необходимыя начала многихъ предложеній теоріи наибольшихъ фигуръ, плоскихъ или сферическихъ.

7. Теорема. *1-е. Если периметръ фигуры состоитъ изъ прямой произвольной длины l и линіи Z произвольной формы и если, въ то же время, длина линіи Z или площадь фигуры дана, фигура имѣетъ наибольшую площадь или линія Z имѣетъ наименьшую длину, когда фигура есть половина круга.*

Въ самомъ дѣлѣ, всякая фигура, входящая въ эту теорему, можетъ быть разсматриваема какъ половина симетричной фигуры, которой прямая l есть ось симетріи, а периметръ, равный $2Z$, данъ; но площадь половины необходимо достигаетъ maximum'a, лишь только этого достигнетъ цѣлая фигура; слѣдов., доказываемая теорема есть слѣдствіе главной. Изъ этого также вытекаетъ, что между всѣми круговыми сегментами, имѣющими равныя по длинѣ дуги или одинакія площади, половина круга имѣетъ наибольшую площадь или наименьшій периметръ.

2-е. Между всѣми фигурами, периметръ которыхъ состоитъ изъ данной прямой a и произвольной линіи Z, круговой сегментъ имѣетъ наибольшую площадь, при равныхъ длинахъ линіи Z, и наим. линію Z, когда площади равны.

Положимъ, что линія Z имѣетъ какую либо форму и что она вмѣстѣ съ a образуетъ периметръ фигуры aZ; на a можно всегда построить круговой сегментъ, дуга α котораго будетъ равна Z; α и Z лежатъ по ту же сторону отъ a.

Дополнимъ кругъ и назовемъ другую дугу черезъ β; тогда кругъ периметра $\alpha+\beta$ больше (по площади) фигуры, ограниченной линіей $Z+\beta$, т. е.

$$a\alpha + a\beta > aZ + a\beta,$$

слѣдов.,

$$aa > aZ,$$

что и требовалось доказать.

Изъ этой теоремы выводимъ слѣдующее общее правило: „Во всякой фигурѣ, площадь которой должна быть наибольшей вслѣдствіе какихъ либо условій, всякая часть периметра, могущая имѣть какую либо форму между двумя точками его (перим.), должна быть дугой круга“.

8. Теорема. *1-е. Многоугольникъ, составленный изъ данныхъ сторонъ, имѣетъ наибольшую площадь, когда онъ вписываемъ въ кругъ.*

Доказательство. Замѣтимъ сначала, что изъ данныхъ сторонъ a, b, c,....., l, наибольшая a изъ которыхъ менѣе суммы всѣхъ прочихъ, всегда можно составить выпуклый вписываемый въ кругъ многоугольникъ и *только одинъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, опишемъ кругъ O достаточно великій для того, чтобы, если проведемъ одну за другой, начиная съ какой нибудь точки A окружности, хорды $AB=a$, $BC=b$,....., $LM=l$, конецъ M послѣдней не достигъ бы точки A. Если допустить, что центръ O непрерывно движется по линіи OZ, перпендикулярной къ AB въ ея серединѣ, приближаясь къ этой серединѣ, или удаляясь отъ нея, смотря по тому, находится ли O внутри сегмента BC.....MA или внѣ его, дуга BC.....MA измѣняющейся окружности, имѣющей центромъ O и проходящей черезъ точки A и B, *уменьшается*, и, такъ какъ она имѣетъ предѣломъ прямую $AB=a$, т. е, длину меньшую чѣмъ $b+c+.....+l$, то видно, что конецъ M ломанной линіи BC.....M приближается къ точкѣ A и совпадетъ съ ней, чтобы затѣмъ за нее перейти; слѣдов., существуетъ только одно положеніе центра O, при которомъ ломанная линія ABC.....M образуетъ вписываемый многоугольникъ.

Установивъ это, назовемъ черезъ P вписываемый многоугольникъ, имѣющій данныя стороны a, b, c,.....l, и черезъ S кругъ, описанный около него; пусть, кромѣ того, P'—какой либо многоугольникъ, образованный изъ данныхъ же сторонъ. Если къ каждой сторонѣ этого многоугольника P' приложимъ круговые сегменты, опирающіеся на соотвѣтственныя стороны многоуг. P, получимъ новую фигуру S', ограниченную круговыми дугами и периметръ которой равенъ окружности круга S. По главной теор. $S>S'$, откуда, если отнять отъ обѣихъ фигуръ равные сегменты, получимъ $P>P'$.

2-е. Между всѣми изопериметрическими многоугольниками того же числа сторонъ наибольшую площадь имѣетъ правильный, и наоборотъ:

Между всѣми равновеликими многоугольниками того же числа сторонъ правильный имѣетъ наименьшій периметръ.

Доказательство. Прежде всего замѣтить, что стороны наибольшаго изъ изопериметрическихъ многоугольниковъ о n сторонахъ должны быть равны.

Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ послѣдовательныя стороны AB и BC не равны, то, замѣнивъ тр—къ ABC равнобедреннымъ тр—комъ $AB'C$ того же основанія и периметра, получили бы изопериметричную фигуру о n сторонахъ, имѣющую большую площадь. Итакъ, стороны наиболшаго многоугольника равны, каждая, слѣдов., равна *n*-ой части периметра, по предыдущей же теор., этотъ многоугольникъ долженъ быть вписываемъ, а равносторонній вписываемый многоугольникъ есть правильный.

9. Слѣдствіе. Изъ всего предыдущаго вытекаетъ, что, когда между *всѣми* многоугольниками ищется такой, который имѣлъ бы наибольшую площадь при постоянномъ периметрѣ или наименьшій периметръ при данной площади, нужно только разсмотрѣть правильные многоугольники, и мы приходимъ къ слѣдующему закону:

Площади правильныхъ изопериметричныхъ многоугольниковъ образуютъ возростающій рядъ, начинающійся треугольникомъ и кончающійся кругомъ, а периметры равновеликихъ правильныхъ многоугольниковъ образуютъ убывающій рядъ, начинающійся съ треугольника и кончающійся кругомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны два правильные изопериметричные многоугольника различнаго числа сторонъ, напр. пятиугольникъ ABCDE и четыреугольникъ abcd; этотъ послѣдній можно разсматривать какъ пятиугольникъ, одна изъ сторонъ котораго равна нулю, или взявъ на одной изъ его сторонъ, напр. на ad, произвольную точку e, его можно разсматривать какъ пятиугольникъ, abcde, котораго уголъ e равенъ двумъ прямымъ; слѣдовательно, правильный четыреугольникъ abcd можно разсматривать какъ неправильный пятиугольникъ abcde, а потому его площадь меньше площади правильнаго пятиугольника ABCDE. *)

С. Кричевскій (Ромны).

О „МОМЕНТАХЪ“.

Нельзя не сочувствовать цѣли „матеріаловъ для физико-математическаго словаря“, которые печатаются редакціей „Вѣстника“. Мнѣ думается только, что для нѣкоторыхъ терминовъ полезно помѣстить исторію возникновенія таковаго, или по крайней мѣрѣ его этимологическое значеніе. Дѣло въ томъ, что многіе термины выражаютъ собою суть даннаго понятія и своимъ этимологическимъ значеніемъ объясняютъ это понятіе. Такое объясненіе особенно важно для начинающихъ. Для иллюстраціи

*) Большая часть доказанныхъ въ этомъ мемуарѣ теоремъ была извѣстна въ древности.—*Главную теорему Монтукла* приписываетъ *Пиѳагору*, но это опровергаетъ Пр. Ващ.-Зах. въ своемъ „*Историч. очеркъ развитія геометріи*“.—Доказательство этой теоремы далъ лишь *Зенодоръ* (по Ващ.-Зах. I в., а по Кантору II в. по Р. Х.), показавъ предварительно, что изъ всѣхъ изопериметричныхъ фигуръ наибольшую площадь имѣетъ выпуклая фигура съ наибольшимъ числомъ сторонъ или угловъ, причемъ она должна быть правильная. Замѣтимъ еще, что Зенодоръ доказалъ аналогичное свойство шара.—Изопериметричными фиг. и равно поверхностными тѣлами занимался и *Паппусъ* въ 1-ой ч. V кн. своихъ „*Математич. коллекцій*“; здѣсь находятся по порядку слѣдующія теор.: 1. Изъ двухъ правильныхъ изопериметричныхъ многоугольниковъ тотъ, который имѣетъ большее число сторонъ имѣетъ и большую площадь; 2. Площадь круга больше площади всякаго изопериметричнаго съ нимъ прав. многоуг., и 3, выраженная у Штейнера подъ № 1. Изъ первыхъ двухъ предложеній слѣдуетъ справедливость *главной*. *С. К.*

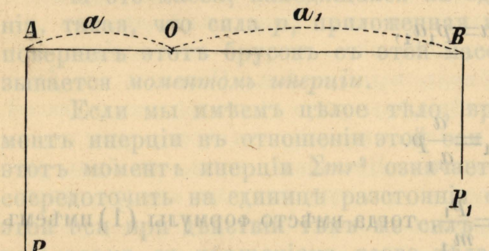
моей мысли я остановлюсь на распространенномъ мехиническомъ терминѣ: „моментъ“.

Momentum имѣетъ два различныя значенія: мгновеніе и важность. Такъ у Цицерона есть выраженіе: rem momento suo ponderare, что значитъ „судить о вещи по ея важности т. е. судить такъ, какъ она заслуживаетъ“. Въ этомъ послѣднемъ смыслѣ терминъ этотъ употребляется и въ механикѣ. Здѣсь „моментомъ“ называютъ такое состояніе силы и пр., при которомъ всего вѣрнѣе, всего лучше можно судить о силѣ.... Понятно, самое удобное такое состояніе тогда, когда величины, входящія въ выраженіе для силы...., принимаются равными единицѣ.

Поэтому за моментъ силы.... принимаютъ обыкновенно величину ея при разстояніи, равномъ единицѣ.

Приведу примѣры:

Фиг. 24.



1) *Моментъ силы* (моментъ статическій). Если имѣемъ (фиг. 24) рычагъ AB съ точкой опоры въ O и на этотъ рычагъ на разстояніяхъ a и a_1 отъ точки O дѣйствуютъ силы p и p_1, то по закону рычага, мы имѣемъ:

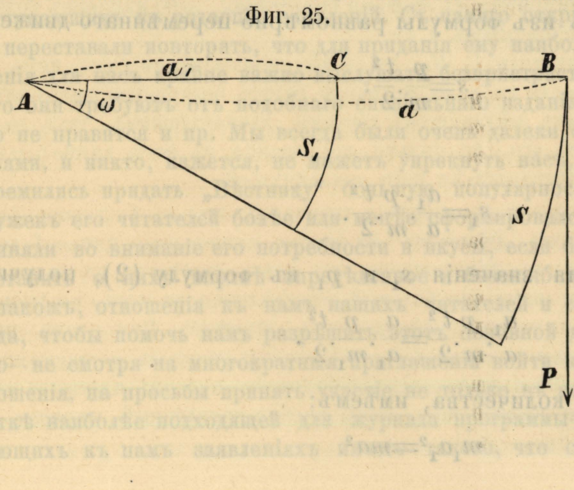
$$pa = p_1 a_1$$

т. е. дѣйствія этихъ силъ, хотя помѣщенныхъ на различныхъ разстояніяхъ отъ точки опоры, будутъ равны и рычагъ будетъ въ равновѣсіи. Дѣйствіе каждой изъ этихъ силъ на рычагъ можно замѣнить дѣйствіемъ силы P, находящейся на разстояніи равномъ единицѣ отъ точки O; т. е.

$$pa = p_1 a_1 = P.1$$

и дѣйствіе на рычагъ силы P на единицѣ разстоянія равно дѣйствію силы p_1 на разстояніи a_1, дѣйствію силы p на разстояніи a и пр. P можно назвать *моментомъ самыхъ силъ* въ томъ смыслѣ, какой указанъ выше.

Фиг. 25.



2) *Моментъ инерціи*. Пусть AB (фиг. 25) невѣсомый брусокъ, могущій вращаться около точки A, какъ около оси. Въ точкѣ B этого бруска сосредоточена масса m, на которую дѣйствуетъ сила p; отъ дѣйствія этой силы, эта масса m пройдетъ во время t дугу s съ угловой скоростью ω. Предложимъ себѣ задачу: какова должна

быть величина массы m_1, которую надо сосредоточить въ другой точкѣ бруска C, чтобы сила p, *дѣйствуя по прежнему на точку* B бруска, заставила этотъ брусокъ съ массою m' въ точкѣ C подвинуться во время t на тотъ же уголъ ω, если, конечно, массы m въ точкѣ B не будетъ.

Назовемъ $AB=a$, $AC=a_1$. Назовемъ дугу, описанную въ этомъ случаѣ точкою C буквою s_1 и, замѣтивъ, что p есть сила постоянная, слѣдовательно движеніе точки C будетъ равномѣрно-ускорительное, будемъ имѣть по формулѣ этого движенія:

$$s_1=q.\frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

гдѣ q ускореніе.

Сила p дѣйствуетъ на точку B. Ея дѣйствіе на точку C, величину котораго означимъ p_1, будетъ, по предыдущему, меньше, потому что

$$pa=p_1a_1,$$

откуда

$$p_1=\frac{a}{a_1}p.$$

Вспомнимъ, что ускореніе $q=\frac{p_1}{m_1}$, тогда вмѣсто формулы (1) имѣемъ:

$$s_1=\frac{p_1}{m_1}.\frac{t^2}{2} \qquad (2)$$

Изъ чертежа имѣемъ

$$s_1:s=a_1:a$$

откуда

$$s_1=\frac{a_1}{a}.s.$$

Значеніе s найдемъ изъ формулы равномѣрно-перемѣннаго движенія:

$$s=\frac{p}{m}.\frac{t^2}{2}.$$

Слѣдовательно

$$s_1=\frac{a_1}{a}.\frac{p}{m}.\frac{t^2}{2}.$$

Вставляя найденныя значенія s_1 и p_1 въ формулу (2), получимъ:

$$\frac{a_1}{a}.\frac{p}{m}.\frac{t^2}{2}=\frac{a}{a_1}.\frac{p}{m_1}.\frac{t^2}{2}.$$

Сокращая равныя количества, имѣемъ:

$$m_1a_1^2=ma^2.$$

Откуда

$$m_1=\frac{a^2}{a_1^2}.m.$$

Такова должна быть масса m_1 на разстоянiи a_1 отъ оси вращенiя А, чтобы сила p, дѣйствуя на точку В невѣсомаго бруска АВ, повернула его на уголъ ω во время t. Такихъ массъ на различныхъ разстоянiяхъ отъ А можно найти сколько угодно, но всегда будетъ:

$$ma^2=m_1a_1^2=m_2a_2^2=m_3a_3^2=\ldots..$$

Мы можемъ писать, что эти выраженiя равны

$$M.1^2=M.$$

М это масса, находящаяся на единицѣ разстоянiя отъ оси вращенiя, такая, что сила p, приложенная въ точкѣ В невѣсомаго бруска АВ, повернетъ этотъ брусокъ съ этой массой на уголъ ω во время t. М называется *моментомъ инерцiи*.

Если мы имѣемъ цѣлое тѣло, вращающееся около оси, то его моментъ инерцiи въ отношенiи этой оси будетъ $\Sigma mr^2=M$. По предыдущему этотъ моментъ инерцiи Σmr^2 означаетъ величину массы, которую надо сосредоточить на единицѣ разстоянiя отъ оси, чтобы вращенiе ея около этой оси при дѣйствiи тѣхъ же силъ было одинаково по своимъ обстоятельствамъ съ вращенiемъ всего тѣла около этой оси. Понятно, что при изученiи вращенiя одного или нѣсколькихъ тѣлъ удобнѣе воображать массу каждаго изъ нихъ сосредоточенною въ одной точкѣ.

Н. Нечаевъ (Казань).

ОТЪ РЕДАКЦIИ.

Нами получено на дняхъ отъ учителя физики и математики *Г. Е.* письмо, являющееся весьма цѣннымъ и прiятнымъ для насъ исключенiемъ среди множества поступающихъ въ редакцiю заявленiй. Съ самаго открытiя (въ 1884 г.) журнала мы не переставали повторять, что для приданiя ему наиболѣе соотвѣтственнаго направленiя для насъ крайне важно выслушать безпристрастные голоса читателей, узнать чего они требуютъ отъ подобнаго спецiальнаго изданiя, что въ немъ имъ нравится что не нравится и пр. Мы всегда были очень далеки отъ заискиванiя передъ читателями, и никто, кажется, не можетъ упрекнуть насъ, что этимъ именно путемъ мы стремились придать „Вѣстнику“ большую популярность; но, разъ малочисленный кружекъ его читателей болѣе или менѣе сформировался, мы бы съ удовольствiемъ приняли во вниманiе его потребности и вкусы, если бы только имѣли возможность составить о нихъ вполнѣ опредѣленное и безошибочное понятiе. До сихъ поръ, однакожъ, отношенiя къ намъ нашихъ читателей и сотрудниковъ были не такого рода, чтобы помочь намъ разрѣшить этотъ основной для всякой редакцiи вопросъ, ибо — не смотря на многократныя приглашенiя войти въ болѣе откровенныя съ нами сношенiя, на просьбы принять участiе не только въ сотрудничествѣ, но и въ выработкѣ наиболѣе подходящей для журнала программы—мы не находили въ поступающихъ къ намъ заявленiяхъ ничего такого, что служило бы доказательствомъ сочувствія нашимъ стремленіямъ и задачамъ. Вмѣсто полезныхъ совѣтовъ, со стороны тѣхъ, кто могъ бы ихъ дать, мы получали только статьи и коротенькія письма, въ которыхъ высказывалось лишь требованіе того или другого количества отдѣльныхъ оттисковъ; вмѣсто какихъ бы то ни было указаній, (хотя бы даже основанныхъ на личномъ вкусѣ читателя) касательно выбора статей и вообще матеріала для журнала—мы опять таки получали только статьи, замѣтки и пр. съ требованіемъ помѣстить таковыя непремѣнно въ ближайшемъ номерѣ. Отсюда—очевидныя слѣдствія: нашъ „Вѣстникъ" пріобрѣлъ больше сотрудниковъ чѣмъ читателей, а его редакція—не мало личныхъ враговъ, въ лицѣ обиженныхъ авторовъ.—Вторая категорія писемъ, получаемыхъ нами, относилась къ „конторѣ", а не къ редакціи: въ нихъ говорится только о подпискѣ, счетахъ, утерянныхъ номерахъ и пр. Изъ этихъ сухо-офиціальныхъ заявленій мы могли однакоже сдѣлать такое заключеніе, что такъ какъ во многихъ учебныхъ заведеніяхъ, получающихъ нашъ журналъ, никто даже не слѣдитъ за сроками подписки, то очевидно содержаніемъ журнала очень мало интересуются, его никто почти не читаетъ, въ особенности тамъ, гдѣ нѣтъ ни одного „сотрудника", и, значитъ, „Вѣстникъ" выписывается по тому только, что онъ „рекомендованъ". Очень грустный результатъ, который..... наврядъ ли способенъ служить для насъ поощреніемъ при дальнѣйшемъ веденіи дѣла.—Наконецъ мы были лишены и послѣдняго средства знать мнѣніе другихъ о цѣлесообразности нашей дѣятельности—отзывовъ печати, которая вообще не интересуется спеціальными журналами. Правда, въ первый годъ существованія „Вѣстника", когда онъ былъ еще новинкою, появилось въ газетахъ и въ одномъ изъ журналовъ два или три отзыва, но въ нихъ было больше общефразія и рекламы, чѣмъ оцѣнки.

Вотъ причины, заставившія насъ въ началѣ текущаго семестра сказать, что „въ борьбѣ съ равнодушіемъ общества редакція наша въ теченіе истекшихъ пяти лѣтъ *рѣшительно* не имѣла успѣха". Дѣло не въ числѣ подписчиковъ—какъ думаетъ г. *Г. Е.*—а въ числѣ читателей, которые не ищутъ на страницахъ „Вѣстника" только своей подписи, въ числѣ сотрудниковъ, которые понимаютъ, что не для нихъ журналъ, а они для журнала существуютъ, въ числѣ доброжелателей, которые, сочувствуя нашей идеѣ коллективнаго труда на пользу подростающему поколѣнію и популяризаціи физико-математическихъ знаній, хоть изрѣдка обнаруживали-бы это сочувствіе на дѣлѣ, а не на словахъ. Вмѣсто всего этого, повторяемъ, мы нашли либо полное равнодушіе и игнорированіе, либо притензіи оскорбленнаго самолюбія, либо заявленія требованій, несоразмѣрныхъ съ нашими средствами, либо наконецъ холодныя фразы поздравленій, комплиментовъ и пр.

Въ виду этого письмо учителя *Г. Е.*, не сотрудничавшаго до сихъ поръ въ журналѣ, въ *первый разъ* занесло въ нашу редакцію голосъ безпристрастнаго читателя. Мы имъ дорожимъ, какъ рѣдчайшимъ гостемъ, заставлявшимъ такъ долго ждать себя и, чтобы почтить его, не только вслушаемся въ него внимательно, но попросимъ и остальныхъ читателей на него откликнуться.

Съ этою цѣлью, доводя нынѣ до свѣдѣнія читателей, что въ будущемъ 1890 году мы рѣшились реформировать „Вѣстникъ" въ такомъ направленіи, какое будетъ указано самими-же читателями, мы приглашаемъ ихъ всѣхъ отвѣтить на нижеслѣдующіе вопросы, поставленные нами для большей опредѣленности какъ по письму г. *Г. Е.*, такъ и на основаніи нашихъ собственныхъ сомнѣній. При этомъ просимъ вѣрить и помнить, что наше намѣреніе преобразовать журналъ согласно ожидаемымъ заявленіямъ мотивируется не погонею за большимъ числомъ платныхъ подписчиковъ, а желаніемъ лучше приноровить нашъ учебно-популярный журналъ къ потребностямъ времени и мѣста.

Г. *Г. Е.* въ своемъ письмѣ пишетъ:

„Кругъ читателей „Вѣстника" не трудно опредѣлить: это главнымъ образомъ „учителя средне-учебныхъ заведеній, студенты-математики и еще десятокъ-другой „россійскихъ обывателей. Что касается *льготныхъ* подписчиковъ (т. е. учениковъ и „учителей начальныхъ училищъ), то на нихъ журналъ рѣшительно не можетъ и не „долженъ разсчитывать."

Отсюда возникаетъ первый и существенно важный вопросъ, на который намъ было бы желательно получить возможно большее число отвѣтовъ:

I. На какихъ читателей можетъ и долженъ разсчитывать „Вѣстникъ"?

Рѣшеніе этого вопроса въ сущности гораздо труднѣе, чѣмъ это предполагалъ, напримѣръ, г. *Г. Е.*, не принявшій въ разсчетъ одного побочнаго, крайне непріятнаго для насъ самихъ, но неустранимаго обстоятельства, а именно, что безъ льготныхъ подписчиковъ, какъ показалъ опытъ, такой спеціальный журналъ (безъ посторонней денежной поддержки) существовать въ Россіи не можетъ. Достаточно вспомнить, что гимназій въ Россіи только 169 (считая и частныя), реальныхъ училищъ—94, прогимназій—67, кадетскихъ корпусовъ—15, учит. институтовъ - 9 и пр., что учителямъ сихъ заведеній нѣтъ надобности выписывать журналъ отдѣльно на свое имя, что любителей физики и матеметики, помимо преподавателей, дѣйствительно наберется на всю Россію десятка два, три не больше,—чтобы убѣдиться, что въ наилучшемъ случаѣ „Вѣстникъ" можетъ разсчитывать только на 400 подписчиковъ, т. е. только на 2400 р. прихода (не считая всякихъ уступокъ книгопродавцамъ, пошлинъ на герб. марки и пр.) А на такія деньги немыслимо изданіе какого бы то ни было журнала, будь онъ вдвое меньше „Вѣстника" по объему.—Итакъ, послѣ нѣсколькихъ лѣтъ безуспѣшнаго опыта, мы ясно увидѣли, что остается одно изъ двухъ: или вторично и окончательно прекратить изданіе, или посредствомъ льготы привлечь къ подпискѣ такихъ частныхъ лицъ, для которыхъ и 6 р. въ годъ составляетъ тяжелый расходъ. Мы и выбрали пока это послѣднее. А разъ мы это сдѣлали, и льготные подписчики увеличили на $\frac{1}{4}$ общее ихъ число, мы не считаемъ себя въ правѣ игнорировать интересы этой четверти.

Далѣе г. *Г. Е.* говоритъ:

„Журналу Вашему тогда лишь можно пророчить успѣхъ среди преподавателей, „если послѣдніе будутъ встрѣчать въ немъ рядомъ съ чисто спеціальными статьями „и такія, въ которыхъ чувствуетъ нынѣ большую потребность *каждый* болѣе или „менѣе интересующійся своимъ дѣломъ преподаватель. Статьи эти должны быть „посвящены разработкѣ, лучшему освѣщенію того, что есть, что уже сдѣлано, при„способленію добытаго уже къ дѣлу преподаванія. Словомъ, отъ журнала должно „порядкомъ таки пахнуть *методикой*. Есть масса вопросовъ, живо интересующихъ „современнаго педагога-физикоматематика. Прочитайте, какіе вопросы чисто элемен„тарнаго характера подымаются и дебатируются въ засѣданіяхъ обществъ учителей „математики и физики въ Петербургѣ и Одессѣ. Къ сожалѣнію мы не имѣемъ воз„можности знакомиться съ ними, ибо тѣ тощія сообщенія, которыя приходится „читать объ этихъ засѣданіяхъ въ газетахъ и въ недавнее время въ Вашемъ жур„налѣ, удовлетворить никого не могутъ.—Вотъ наши pia desideria: a) Крайне же„лательно помѣщеніе въ „Вѣстникѣ" подробныхъ рефератовъ, отчетовъ засѣданій „указанныхъ выше математическихъ обществъ. b) Обстоятельныя рецензіи всѣхъ „выходящихъ руководствъ и пособій по математикѣ и физикѣ, заслуживающихъ, „разумѣется, вниманія. Не мѣшало бы подвергнуть строгой оцѣнкѣ и существую„щія сильно распространенныя руководства Малинина, Краевича и т. д."

Отсюда вытекаетъ второй вопросъ, неразрывно связанный съ первымъ:

II. Желательно ли чтобы „Вѣстникъ“ принялъ характеръ исключительно педагогическаго журнала, или—иными словами—чтобы онъ предназначался исключительно для преподавателей?

(NB. Въ случаѣ положительнаго отвѣта, на основаніи вышеприведеннаго отчета о числѣ *возможныхъ* подписчиковъ, просимъ указать средство для поддержанія существованія въ Россіи такого вдвойнѣ спеціальнаго изданія. Мы сами до сихъ поръ найти его не сумѣли).

Касательно вышевысказаннаго желанія находить въ „Вѣстникѣ“ подробные отчеты о засѣданіяхъ Петербургскаго и Одесскаго физико-математическихъ педагогическихъ обществъ, возникаютъ слѣдующіе частные вопросы: 1) протоколы засѣданій Петербургскаго общества печатаются со всѣми желательными подробностями въ „Педагогическомъ Сборникѣ“; неужели мы должны все это попросту перепечатывать? 2) Когда открылось Одесское общество, редакція наша тотчасъ же предоставила ему право пользоваться страницами „Вѣстника“ по своему усмотрѣнію, и съ тѣхъ поръ печатаетъ *все*, что г. предсѣдателю общества угодно было присылать; если же присылаемые имъ протоколы засѣданій слишкомъ коротки, то—не присутствуя въ засѣданіяхъ—мы сами ихъ удлинять не можемъ, а держать въ Одессѣ особаго стенографа—не имѣемъ средствъ, да и не видимъ надобности, такъ какъ всѣ члены Одесскаго общества очень хорошо знаютъ, что ихъ рефераты, заслуживающіе всеобщаго вниманія, были бы охотно помѣщены въ „Вѣстникѣ“, если бы были для этой цѣли доставлены, (какъ напр. былъ присланъ рефератъ проф. Шведова „Дидактическое значеніе невѣсомыхъ жидкостей“.)

О помѣщеніи рецензій въ журналѣ прибавимъ отъ себя слѣдующее: сотрудники наши шлютъ намъ не рецензіи, а только свои собственныя книги съ требованіями напечатать о нихъ рецензію; изъ *присланныхъ* въ редакцію рецензій новыхъ книгъ только *одна* не была напечатана (объ одномъ учебн. ариѳметики такъ какъ она казалась намъ слишкомъ ѣдкою); остальныя печатались цѣликомъ, безъ какихъ бы то ни было измѣненій съ нашей стороны, что—какъ читатели помнятъ—вызывало подчасъ горячую полемику и довольно непріятныя препирательства. Не смотря на это, а также на странную привычку обижаться за неблагопріятную рецензію не столько на ея автора, сколько на редакцію, мы бы помѣщали всегда добросовѣстные отзывы о новыхъ книгахъ и учебникахъ, если бы только такой матеріалъ къ намъ поступалъ. Но повторяемъ—рецензій никто почти намъ не присылаетъ, а справиться самимъ со всей массой новыхъ сочиненій по физикѣ и математикѣ—мы рѣшительно не въ состояніи. Въ особенности этотъ Сизифовъ трудъ становится ужасающимъ по отношенію къ новымъ учебникамъ и задачникамъ, которые оцѣнить по достоинству можетъ только преподаватель; вылавливать же ошибки и неточности, или перепечатывать рецензіи изъ Журнала Министерства Нар. Просв.,—мы считаемъ безполезнымъ.—Но такъ какъ мы сами сознаемъ, что этотъ отдѣлъ въ „Вѣстникѣ“ очень бѣденъ, главнымъ образомъ вслѣдствіе невозможности найти въ Кіевѣ рецензентовъ по разнымъ спеціальностямъ, то настоящимъ мы приглашаемъ тѣхъ сотрудниковъ и читателей, которые захотѣли бы присылать намъ рецензіи книгъ и учебниковъ, принимая на себя всю отвѣтственность за таковыя, войти съ нами въ сношенія и изложить свои условія относительно гонорара, такъ какъ въ крайнемъ случаѣ мы готовы даже платить за рецензіи, считая это сотрудничество наиболѣе труднымъ и неблагодарнымъ.

Далѣе г. *Г. Е.* говоритъ:

„с) Учителя были бы несказанно благодарны редакціи, если бы встрѣчали въ „журналѣ подробные, связные рефераты важнѣйшихъ открытій и изслѣдованій въ „области физики, касающихся основныхъ вопросовъ науки, а не деталей. Это мож-„но бы дѣлать по полугодіямъ.“

Въ этихъ словахъ заключается, повидимому, упрекъ въ томъ, что помѣщаемые въ „Вѣстникѣ“ коротенькіе отчеты въ отдѣлѣ „Научной Хроники“ страдаютъ подчасъ излишнею спеціальностью. Въ виду этого ставимъ общій вопросъ.

III. Какъ долженъ быть веденъ отдѣлъ „Научной Хроники“ въ журналѣ?

Сюда же относится и слѣдующая выдержка изъ письма г. *Г. Е.*:

„е) Сообщеніе элементарныхъ, оригинальныхъ, остроумныхъ, простыхъ, по-„учительныхъ и т. д., и т. д. физическихъ опытовъ. Даже въ „Нивѣ“ попадаются „опыты, которые не „стыдно“ продѣлать и серьезному учителю. (О нихъ узнаешь „случайно).“

Сознаемся откровенно, что мы никогда не были склонны наполнять страницы „Вѣстника“ мелочами изъ области опытовъ, описаніями и рисунками приборовъ и пр., не считая этого существенно важнымъ, тѣмъ болѣе, что всѣ почти сюда относящіяся новинки, курьезы и рекламы такіе журналы какъ „Нива“—весьма распространенные въ учебныхъ сферахъ—перепечатываютъ (чаще всего изъ франц. „La Nature“) довольно систематично. Такъ, напримѣръ, мы совершенно оставляли въ покоѣ Эдисона и его фонографъ, о которомъ непремѣнно раза 2 въ мѣсяцъ всякій читатель находилъ кое что „удивительно новое“ въ своей газетѣ, мы не видѣли причинъ ликовать, узнавъ о томъ, что Эдисонъ наконецъ пріѣхалъ въ Европу и взобрался на Эйфелеву башню, мы умалчивали о такихъ напримѣръ нелѣпостяхъ какъ „авто-электрическая ночная лампочка Эдисона“, какъ „электрическій камень“ гдѣ то кѣмъ то будто найденный, который даетъ вѣчный токъ и пр пр. Но—быть можетъ—это то именно и не нравится нашимъ читателямъ? Просимъ быть откровенными.—Вообще наше *личное* мнѣніе касательно физическихъ опытовъ и приборовъ мало согласуется съ тѣмъ, которое теперь можно считать общепринятымъ въ сферахъ физическихъ кабинетовъ; такъ напримѣръ мы думаемъ, что въ этой области слишкомъ много еще остатковъ „средневѣкового“ взгляда на опыты, какъ на пріятные для зрителей фокусы, что на физическіе приборы въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ затрачено совершенно непроизводительно излишне много казенныхъ денегъ, что весьма многіе изъ старыхъ и новыхъ физ. приборовъ совершенно не нужны и пр., пр., пр.—Но подобныя мнѣнія, какъ лично намъ принадлежащія, не обязательны, конечно, для чичателей нашего журнала, а потому для насъ важно получить отвѣты и на слѣдующій вопросъ:

IV. Желательно ли и въ какой мѣрѣ описаніе въ „Вѣстникѣ“ физическихъ приборовъ, опытовъ, физическихъ развлеченій, игрушекъ и пр.?

Еще одинъ вопросъ. Читатели замѣтили, вѣроятно, что въ отдѣлѣ задачъ мы почти перестали предлагать задачи изъ физики. Опытъ показалъ, что нѣтъ охотниковъ ни предлагать, ни тѣмъ болѣе рѣшать подобныя задачи. Любители ими не интересуются, а ученики—и не могутъ интересоваться, такъ какъ, благодаря условіямъ гимназической программы и экзаменовъ, они поставлены въ невозможность знать изъ физики основные элементы. Быть можетъ коммисія, работающая теперь надъ преобразованіемъ программъ средне-учебныхъ заведеній, сжалится надъ „физикою“; въ ожиданіи этого просимъ читателей принять участіе въ коллективномъ рѣшеніи вопроса:

V. Слѣдуетъ ли физику вовсе исключить изъ рубрики задачъ, вопросовъ и темъ?

Относительно задачъ вообще г. *Г. Е* пишетъ:

„d) Въ высшей степени желательно помѣщеніе задачъ, разсчитаныхъ на силы „не только выдающихся учениковъ, но и вообще хорошихъ. Присылка рѣшеній такихъ „задачъ въ редакцію была бы нежелательной. Очень хороши „упражненія для „учениковъ“.

Мы сами пришли къ заключенію, что уровень задачъ не слѣдуетъ вообще подымать и, не смотря на протестъ нѣсколькихъ десятковъ любителей, которымъ нравятся лишь задачи трудныя, въ послѣднее время даемъ наибольше задачъ „ученическихъ“. Но мы не вполнѣ понимаемъ, на какомъ основаніи г. *Г. Е.* считаетъ „нежелательнымъ“ присылку учениками рѣшеній задачъ въ редакцію. Правда, въ другомъ мѣстѣ своего письма, г. *Г. Е.* пишетъ:

„Ежели кто изъ нихъ (т. е. учениковъ) выписываетъ журналъ, то, повѣрьте, „хвастовства ради. Онъ просматриваетъ лишь рубрику „задачъ“ и, рѣшивъ (под„часъ при обильномъ содѣйствіи учителя) какую нибудь изъ легчайшихъ задачъ, „посылаетъ рѣшеніе въ редакцію, для того чтобы затѣмъ съ торжествомъ показы„вать всѣмъ и каждому номеръ, гдѣ пропечатана его фамилія“.

Быть можетъ въ частныхъ случаяхъ все это и справедливо, но въ общемъ—это не такъ. Мы имѣемъ безспорныя доказательства, что въ очень многихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ попадаются между учениками выдающіеся любители математики, которые рѣшаютъ задачи не только легчайшія и не для хвастовства. Мы бы могли даже къ концу каждаго учебнаго года назвать по фамиліямъ тѣхъ, которые пріобрѣли большой навыкъ въ рѣшеніи нашихъ задачъ, которые забрасываютъ насъ своими письмами, не жалѣя почтовыхъ марокъ, и изъ которыхъ почти всѣ поступаютъ потомъ на математическіе факультеты. Прекратить сношенія редакціи съ этими молодыми любителями, быть можетъ будущими выдающимися математиками,—мы не видимъ основаній, ибо не считаемъ этихъ сношеній вредными для нихъ. Если же плохенькій ученикъ, который не можетъ рѣшить даже легкой задачи безъ помощи учителя, хвастаетъ потомъ среди товарищей (которыхъ впрочемъ обмануть трудно въ этомъ отношеніи)—бѣда не велика, а вина за нее падаетъ не на журналъ, а на учителя, помогавшаго обмануть редакцію. Что же касается вопроса о „подписяхъ“ учениковъ подъ рѣшеніямя задачъ, то таковой былъ рѣшенъ не нами, а Министерствомъ Нар. Просв., которое въ началѣ еще открытія журнала предложило редакціи печатать не *полныя фамиліи* учениковъ, а лишь иниціалы ихъ имени и фамиліи, что мы съ тѣхъ поръ и дѣлаемъ. Что такими подписями ученики очень дорожатъ—это правда, ибо всякій разъ, когда подпись случайно пропущена, или по нашей ошибкѣ, или потому что письмо до насъ не дошло—авторы рѣшеній спѣшатъ возстановить свои права; но смѣемъ увѣрить всѣхъ, кто въ этомъ усматриваетъ одно только хвастовство, что совершенно такъ же относятся и не ученики: и они точно также спѣшатъ прислать въ редакцію запросъ, почему, дескать, моей фамиліи не было напечатано подъ такимъ то № задачи, когда ея рѣшеніе я послалъ тогда-то. И—по нашему—это совершенно естественно: такъ всегда было и такъ всегда будетъ, что какъ юноша, такъ и взрослый человѣкъ можетъ интересоваться совершеніемъ такихъ лишь *подвиговъ* (хотя бы они заключались только въ рѣшеніи предложенныхъ задачъ), о которыхъ будетъ извѣстно другимъ.

Заканчиваемъ это открытое письмо къ читателямъ общимъ вопросомъ:

VI. Какія измѣненія желательны какъ въ программѣ „Вѣстника“ такъ въ способахъ ея выполненія?

и просьбою поспѣшить отвѣтами въ виду предположеннаго нами преобразованія журнала съ начала будущаго 1890 года.

Здѣсь кстати замѣтимъ, что предстоящій VIII съѣздъ естествоиспытателей въ С.-Петербургѣ можетъ дать возможность тѣмъ лицамъ, интересующимся дальнѣйшею судьбою „Вѣстника", которыя прибудутъ на съѣздъ, высказать лично свои мнѣнія и требованія, если имъ угодно будетъ познакомиться во время съѣзда съ редакторомъ Э. К. Шпачинскимъ, или съ профессорами В. П. Ермаковымъ и Н. Н. Шиллеромъ, или съ капитаномъ А. Л. Корольковымъ, петербургскіе адресы которыхъ будутъ извѣстны въ Бюро съѣзда въ университетѣ.

МЕЛКІЯ СТАТЬИ и ЗАМѢТКИ,

присылаемыя въ редакцію *).

Опредѣленіе изображеній предметовъ въ преломляющихъ срединахъ.

Положимъ, глазъ A разсматриваетъ свѣтлую точку S, находящуюся въ прозрачной жидкости. Изображеніе точки должно находиться на пересѣченіи преломленныхъ лучей, попадающихъ въ глазъ.

Предположимъ, что зрачекъ глаза имѣетъ форму безпредѣльно-узкой щели, не совпадающей съ плоскостью чертежа, но перпендикулярной или наклонной къ ней. Преломленные лучи, попадающіе въ глазъ, должны находиться въ разныхъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ перпендикуляръ SO къ поверхности жидкости. Поэтому они не могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ, а должны близко сходиться около нѣкоторой точки, лежащей на SO. Такимъ образомъ изображеніе точки S для глаза A будетъ не точка, а небольшое пятно T. При малой длинѣ зрачка глазъ увидитъ достататочно ясное изображеніе.

Предположимъ теперь, что зрачекъ глаза расположенъ въ плоскости чертежа. Тогда преломленные лучи, попадающіе въ глазъ, будутъ сходится около нѣкоторой точки I, (фиг. 26) не лежащей на перпендикулярѣ SO. Эта точка есть предѣльное положеніе точки пересѣченія преломленныхъ лучей MN и M′N′, когда падающіе лучи SM и SM′ безпредѣльно приближаются другъ къ другу.

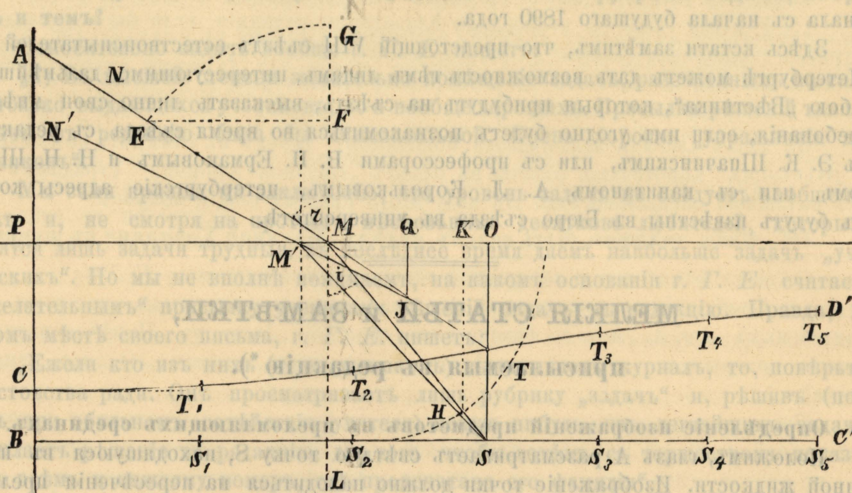
Зрачекъ человѣческаго глаза имѣетъ круглую форму. Его можно разсматривать какъ совокупность узкихъ щелей. Поэтому глазъ долженъ видѣть два изображенія T и J одной и той-же свѣтлой точки S. Изображеніе T образуется большимъ количествомъ лучей и должно быть свѣтлѣе, чѣмъ изображеніе J. Оба эти изображенія находятся на различныхъ разстояніяхъ отъ глаза. Поэтому въ изображеніи T должна являться нѣкоторая неясность тѣмъ большая, чѣмъ далѣе находится глазъ отъ перпендикуляра SO. Когда глазъ находится на этомъ перпендикулярѣ, оба изображенія совпадаютъ.

Покажемъ, какъ построить изображеніе какого-нибудь предмета BC′, находящагося въ жидкости, для глаза A.

Проводимъ черезъ A произвольную прямую AM и разсматриваемъ ее какъ преломленный лучъ. Строимъ соотвѣтствующій падающій лучъ MH на основаніи соотношенія $\mathrm{Sin}\angle HML = n.\mathrm{Sin}\angle AMG$, гдѣ n есть показатель преломленія при пере-

*) Отвѣтственности за содержаніе—редакція на себя не принимаетъ. По усмотрѣнію редакціи статьи подлежатъ сокращенію. Отдѣльные оттиски мелкихъ статей авторамъ не выдаются.

Фиг. 26.



ходѣ лучей изъ жидкости въ воздухъ. Положимъ, что прямая MH и линія BC′ пересѣкаются въ точкѣ S. Изображеніе точки S для глаза A должно находиться въ той точкѣ T, въ которой пересѣкаются прямая AM и перпендикуляръ SO. Подобными построеніями опредѣлимъ на BC′ рядъ точекъ S_1, S_2, S_3,..... и найдемъ ихъ изображенія T_1, T_2, T_3,...... Соединивъ ихъ непрерывной кривой, получимъ изображеніе предмета BC′ для глаза A.

Обозначимъ углы SML и AMG паденія и преломленія луча SM черезъ i и r, разстоянія $\overline{AP}$, $\overline{SO}$, $\overline{TO}$ глаза, свѣтлой точки и ея изображенія черезъ k, y, y' и длину $\overline{PO}$ черезъ x. Тогда

$$\overline{PM}=k\operatorname{tg}r,\quad \overline{MO}=y\operatorname{tg}i=y'\operatorname{tg}r.$$

Отсюда

$$\overline{PM+MO}=x=(k+y')\operatorname{tg}r \text{ и } \operatorname{tg}r=\frac{x}{k+y'}.$$

Такъ какъ $\operatorname{Sin}i=n\operatorname{Sin}r$, то

$$\operatorname{tg}i=\frac{n\operatorname{tg}r}{\sqrt{1+(1-n^2)\operatorname{tg}^2r}}.$$

Слѣдовательно,

$$ny=y'\sqrt{1+\frac{(1-n^2)x^2}{(k+y')^2}}.$$

Такова зависимость между положеніемъ точки и ея изображенія.

Подобнымъ же образомъ опредѣляются изображенія предметовъ, разсматриваемыхъ черезъ прозрачную пластинку, ограниченную параллельными плоскостями.

Свѣшниковъ (Троицкъ).

ЗАДАЧИ.

№ 537. На окружности даны три точки; вписать въ нее треугольникъ, такъ чтобы продолженныя его высоты проходили чрезъ эти точки. Сколько рѣшеній допускаетъ задача? *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 538. Найти сумму

$$S=\frac{1}{\mathrm{Cos}x.\mathrm{Cos}y}+\frac{1}{\mathrm{Cos}y.\mathrm{Cos}z}+\ldots\ldots+\frac{1}{\mathrm{Cos}t.\mathrm{Cos}u}+\frac{1}{\mathrm{Cos}u.\mathrm{Cos}v}$$

если x, y, z,.......t, u, v образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой$=r$. (Заимств.) *Я. Тепляковъ*.

№ 539. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около правильной треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равняется a и каждая сторона основанія равна b. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 540. Въ „Руководствѣ тригонометріи А. Малинина“ (подъ № 289, стр. 77) помѣщена слѣдующая задача:

„Чтобы опредѣлить длину стѣны АВ наблюдатель помѣстился къ югу отъ одного изъ концовъ ея, потомъ къ западу отъ другого конца и стѣна въ обоихъ случаяхъ представлялась подъ угломъ 30°; затѣмъ измѣрилъ разстояніе между станціями и нашелъ его$=$100 саж. Какъ велика длина стѣны?“

Рѣшить эту задачу геометрически. *Н. Дракинъ* (Бѣлгородъ).

№ 541. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между двумя данными прямыми дѣлился третьей данной прямой въ требуемомъ отношеніи. (См. задачу № 479).

З. Колтовскій (Харьковъ).

№ 542. Найти наибольшую величину произведенія цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, если даны ихъ сумма и ихъ число.

В. Ермаковъ.

№ 543. Опредѣлить коэффиціенты a, b, c, d такъ, чтобы многочленъ

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

для всѣхъ значеній x, заключающихся между двумя данными предѣлами $-h$ и $+h$, наименьше уклонялся отъ нуля, т. е. чтобы наибольшая абсолютная величина этого многочлена была возможно малою. (См. задачу № 60). *С. Гирманъ* (Варшава).

РѢШЕНІЕ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ НА ПРЕМІЮ,

предложенной въ № 53 „Вѣстника“.

Составить между четырьмя неизвѣстными x, y, z, t двѣ такія зависимости, чтобы три выраженія

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$\frac{x}{x^2+ax+b}+\frac{y}{y^2+ay+b}+\frac{z}{z^2+az+b}+\frac{t}{t^2+at+b},$$

$$\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{y^2+ay+b}+\frac{1}{z^2+az+b}+\frac{1}{t^2+at+b}$$

обращались въ постоянныя величины.

Рѣшеніе. Обозначимъ чрезъ C, C_1 и C_2 искомыя постоянныя величины:

$$C=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$C_1=\frac{x}{x^2+ax+b}+\frac{y}{y^2+ay+b}+\frac{z}{z^2+az+b}+\frac{t}{t^2+at+b},$$

$$C_2=\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{y^2+ay+b}+\frac{1}{z^2+az+b}+\frac{1}{t^2+at+b}.$$

Пусть трехчленъ x^2+ax+b разлагается на множители:

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(y-\beta)$$

Умножая C_2 сначала на α, потомъ на β и вычитая изъ C_1, найдемъ

$$C_1-C_2\alpha=\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{y-\beta}+\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{t-\beta},$$

$$C_1-C_2\beta=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{y-\alpha}+\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{t-\alpha}.$$

Полагая

$$C_1-C_2\alpha=C',$$
$$C_1-C_2\beta=C'', \qquad (1)$$

мы имѣемъ слѣдующія три уравненія:

$$C=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$C'=\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{y-\beta}+\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{t-\beta} \qquad (2)$$

$$C''=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{y-\alpha}+\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{t-\alpha}.$$

Между четырьмя перемѣнными по требованію задачи должны быть только двѣ зависимости; отсюда слѣдуетъ, что одно изъ послѣднихъ уравненій должно быть слѣдствіемъ двухъ другихъ. Возможна ли задача?

Положивъ

$$S_1=x+y+z+t,$$
$$S_2=xy+xz+xt+yz+yt+zt,$$
$$S_3=xyz+xyt+xzt+yzt,$$
$$S_4=xyzt$$

и приведя уравненія къ одному знаменателю, получимъ:

$$CS_4-S_3=0$$

$$C'S_4-(C'\beta+1)S_3+(C'\beta^2+2\beta)S_2-(C'\beta^3+3\beta^2)S_1+C'\beta^4+4\beta^3=0$$
$$C''S_4-(C''\alpha+1)S_3+(C''\alpha^2+2\alpha)S_2-(C''\alpha^3+3\alpha^2)S_1+C''\alpha^4+4\alpha^3=0.$$

Задача возможна, если, опрдѣливъ изъ двухъ уравненій S_3 и S_4 и подставивъ въ третье уравненіе, въ результатѣ получимъ простое тожество. Исключивъ на самомъ дѣлѣ S_3 и S_4 и приравнявъ нулю въ полученномъ уравненіи коэффиціенты при S_2, S_1 и независимый членъ, мы получимъ три уравненія, вполнѣ достаточныя для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ C, C' и C''. Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ возможности задачи, самое же опредѣленіе постоянныхъ можетъ быть сдѣлано проще.

Если мы въ уравненіяхъ (2) уничтожимъ знаменателей, то два послѣднія уравненія удовлетворяются положеніями $x=y=\alpha$, $z=t=\beta$; тѣ же значенія должны удовлетворять первому уравненію, слѣдовательно

$$C=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}.$$

По уничтоженіи знаменателей крайнія изъ уравненій (2) удовлетворяются положеніемъ $x=y=\alpha$, $z=t=0$; тѣ же значенія должны удовлетворять среднему уравненію, слѣдовательно

$$C'=\frac{2}{\alpha-\beta}-\frac{2}{\beta}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ

$$C''=\frac{2}{\alpha-\beta}-\frac{2}{\alpha}.$$

Далѣе изъ уравненій (1) находимъ

$$C_1=-\frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2},\quad C_2=\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{4}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Замѣнивъ корни α и β чрезъ коэффиціенты a и b, найдемъ

$$C=-\frac{2a}{b},\ C_1=\frac{2a}{a^2-4b},\ C_2=\frac{2}{b}-\frac{4}{a^2-4b}.$$

Примѣчаніе. Задача невозможна въ томъ случаѣ, когда x^2+ax+b обращается въ полный квадратъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 405. Черезъ точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямыя соотвѣтственно параллельныя тремъ сторонамъ. Этими прямыми треугольникъ разобьется на три параллелограма и три треугольника. Требуется доказать, что произведеніе площадей всѣхъ трехъ параллелограмовъ въ 8 разъ больше произведенія площадей трехъ треугольниковъ.

Три прямыя, параллельныя сторонамъ треугольника, дѣлятся ихъ общею точкою на шесть отрѣзковъ. Произведеніе площадей параллелограмовъ равно произведенію этихъ шести отрѣзковъ на синусы трехъ угловъ треугольника, а произведеніе площадей треугольниковъ равняется $\frac{1}{8}$ произведенія тѣхъ же множителей.

Иначе, обозначивъ отрѣзки соотвѣтственно чрезъ $a_1, a_2, \ldots a_6$, найдемъ, что отношенія площадей параллелограмовъ къ площадямъ треугольниковъ будутъ равны

$$\frac{2a_1a_2}{a_4a_5},\ \frac{2a_3a_4}{a_6a_1},\ \frac{2a_5a_6}{a_2a_3}$$

и слѣдовательно произведеніе этихъ отношеній будетъ равно 8.

В. Соллертинскій (Гатчино). Ученики: Курск. г. (6) *В. Х.*, 2-й Кіев. г. (7) *В. М.*, Вят. р. уч. (7) *И. П.*, Троицк. г. (7) *О. Д.* и *К. Е.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*, Оренб. г. (8) *Ан. П.*

№ 408. Какая зависимость существуетъ между a, b и c, если

$$(x-y)(x-z)=ayz,$$
$$(y-z)(y-x)=bzx,$$
$$(z-x)(z-y)=cxy.$$

Такъ какъ

$$(x-y)(y-z)(z-x)=xy(y-x)+yz(z-y)+zx(x-z),$$

то

$$\frac{xy}{(z-x)(z-y)}+\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{xz}{(y-z)(y-x)}=1,$$

или, принимая во вниманіе данныя выраженія:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 27 Ноября 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.