№№ 53—54.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія

для среднихъ учебныхъ заведеній

и Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній

для военно-учебныхъ заведеній.

V Семестра №№ 5-й и 6-й.

ЭКШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Елисаветинская ул., домъ Михельсона.
1888.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ"

(съ 20-го августа 1886 года)

выходитъ книжками настоящаго формата, не менѣе 24 стр. каждая, съ рисунками и чертежами въ текстѣ, **три раза въ мѣсяцъ**, исключая каникулярнаго времени, по 12 №№ въ полугодіе, считая таковыя съ 15-го января по 15-ое мая и съ 20-го августа по 20-ое декабря.

Подписная цѣна съ пересылкою:

на годъ—всего 24 №№ . . . . . **6 рублей** | **на одно полугодіе**—всего 12 №№—**3 рубля**

Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Журналъ издается по полугодіямъ (семестрамъ), и на болѣе короткій срокъ подписка не принимается.

Текущіе №№ журнала отдѣльно не продаются. Нѣкоторые изъ разрозненныхъ №№ за истекшія полугодія, оставшіеся въ складѣ редакціи, продаются отдѣльно по 30 коп съ пересылкою

Комплекты №№ за истекшія полугодія, сброшюрованные въ отдѣльные тома, по 12-ти №№ въ каждомъ, продаются по 2 р. 50 к. за каждый томъ (съ пересылкою)

Книжнымъ магазинамъ 20% уступки.

За перемѣну адреса приплачивается всякій разъ 10 коп. марками.

На оберткѣ журнала печатаются

ЧАСТНЫЯ ОБЪЯВЛЕНІЯ

о книгахъ, физическихъ, химическихъ и др. приборахъ, инструментахъ, учебныхъ пособіяхъ и пр

на слѣдующихъ условіяхъ:

За всю страницу . . . . 6 руб.	За 1/3 страницы . . . . 2 руб.
„ 1/2 страницы . . . . 3 руб.	„ 1/4 страницы . . . . 1 р. 50 к.

При повтореніи объявленій взымается всякій разъ половина этой платы. Семестровыя объявленія—печатаются съ уступкою по особому соглашенію.

Объявленія о новыхъ сочиненіяхъ или изданіяхъ, присылаемыхъ въ редакцію для рецензіи и библіографическихъ отчетовъ, печатаются одинъ разъ безплатно.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 54.

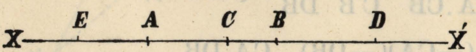
V Сем. 11 Октября 1888 г. № 6.

ПРОЭКТИВНЫЕ РЯДЫ И ПУЧКИ.

Отвѣтъ на тему, предложенную въ № 32 „Вѣстника Оп. Физики и Элем. Математики.“

1. *Опредѣленіе точки на прямой.* Для опредѣленія положенія какой нибудь точки B прямой XX′ относительно данной точки A на той-же прямой необходимо и достаточно знать: 1) разстояніе отъ A до B и 2) направленіе, въ которомъ это разстояніе измѣряется (на фиг. 33—вправо). Букву, стоящую въ точкѣ, отъ которой начинается измѣреніе,

Фиг. 33.



при обозначеніи разстоянія ставятъ первою; такъ AB означаетъ разстояніе отъ A до B, BA—наоборотъ отъ B до A. Въ 1-мъ случаѣ на фиг. 33 измѣреніе производится вправо, во 2-мъ влѣво. Чтобы различать направленія, одно обозначаютъ знакомъ $+$, а прямо-противоположное—знакомъ $-$. Принимая направленіе вправо съ $+$, разстояніе между точками A и B на фиг. 33 можемъ обозначить или черезъ $+AB$ или черезъ $-BA$.

На основаніи сказаннаго, *на прямой есть только одна точка, разстояніе которой отъ данной точки той-же прямой равно данной величинѣ* a, при чемъ a можетъ имѣть всѣ значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$.

2. Пусть точки A и B даны (фиг. 33); какая нибудь третья точка той-же прямой находится или внѣ ихъ, какъ D и E, или между ними, какъ C. Въ 1-мъ случаѣ разстоянія этой точки отъ A и B имѣютъ одинаковые знаки и отношеніе ихъ положительно, во 2-мъ—разные и отношеніе ихъ отрицательно. Отсюда слѣдуетъ, что *на прямой есть одна только точка, отношеніе разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ на той-же прямой равно данной величинѣ* a, при чемъ a можетъ имѣть всѣ значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$.

3. *Ангармоническое отношеніе.* Частное отъ дѣленія отношеній разстояній двухъ точекъ отъ двухъ другихъ точекъ на той-же прямой, по предложенію французскаго геометра Шаля, наз. ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ. Напр.

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

есть ангармоническое отношеніе точекъ A, B, C, D; для сокращенія въ письмѣ его обозначаютъ символомъ (ABCD). *На прямой есть одна только точка, которая съ тремя данными точками на той-же прямой составляетъ ангармоническое отношеніе данной величины a;* при чемъ a можетъ имѣть всѣ значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$. Въ самомъ дѣлѣ, если точки A, B, C даны, то изъ условія

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=a=\frac{CA.DB}{CB.DA}$$

слѣдуетъ, что отношеніе разстояній точки D отъ A и B

$$\frac{DA}{DB} \text{ имѣетъ данную величину } \frac{1}{a}.\frac{CA}{CB}.$$

(Въ частныхъ случаяхъ D можетъ совпадать съ одною изъ данныхъ точекъ). *Величина символа не измѣняется, если, переставивъ двѣ буквы одну на мѣсто другой, сдѣлаемъ то же съ остальными двумя буквами;* т. е.

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA);$$

потому что

$$(BADC)=\frac{DB}{DA}:\frac{CB}{CA}=\frac{DB.CA}{DA.CB}=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=(ABCD),$$

$$(CDAB)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{AC.BD}{AD.BC}=\frac{(-CA)(-DB)}{(-DA)(-CB)}=\frac{CA.DB}{CB.DA}=(ABCD),$$

$$(DCBA)=\frac{BD}{BC}:\frac{AD}{AC}=\frac{BD.AC}{BC.AD}=\frac{(-DB)(-CA)}{(-CB)(-DA)}=\frac{CA.DB}{DA.CB}=(ABCD).$$

Изъ теоріи соединеній извѣстно, что изъ 4 буквъ можно составить 24 перестановки; но по предыдущему, символъ ( ), заключающій какую нибудь перестановку изъ буквъ A, B, C, D имѣетъ три равныхъ себѣ; слѣдовательно, для четырехъ точекъ можно составить 24 ангармоническія отношенія, изъ которыхъ 6 не равны между собой.

4. *Проэктивные ряды и пучки.* Система точекъ на одной прямой наз. *рядомъ*. Штейнеръ называетъ ряды *проэктивными*, если ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ одного ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ другого ряда. (Такіе ряды Шаль называетъ гомографическими, Мёбіусъ—коллинеарными). Точки, буквы которыхъ занимаютъ одинаковое положеніе въ символѣ ( ), называютъ *соотвѣтственными;* если, напр.

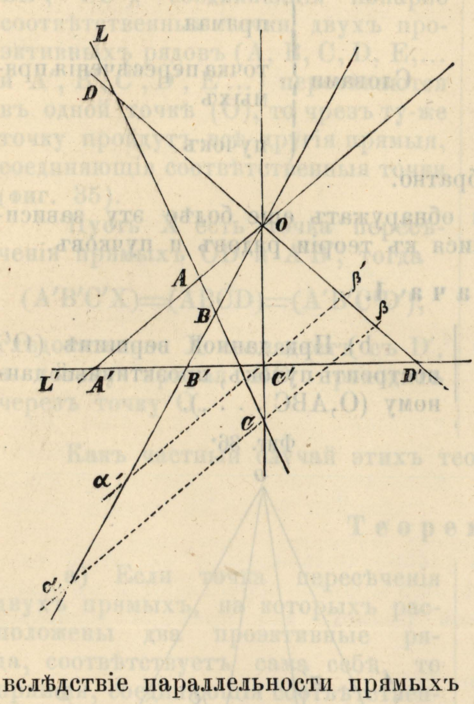
$$(ABCD)=(A'B'C'D'),$$

то ряды A, B, C, D и A′, B′, C′, D′ проэктивны и пары соотвѣтственныхъ точекъ суть A и A′, B и B′, C и C′, D и D′.

Система прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, называется *пучкомъ*, самыя прямыя—*лучами*, а общая точка ихъ—*вершиной*.

Теорема I, a. Точки пересѣченія прямыхъ съ лучами одного пучка составляютъ проэктивные ряды, соотвѣтственныя точки которыхъ лежатъ попарно на одномъ лучѣ.

Фиг. 34.



Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' суть точки пересѣченія пучка, имѣющаго вершину въ O, съ прямыми L и L' (фиг. 34), Черезъ точки C и C' проведемъ прямыя, параллельно AO; точки пересѣченіями ихъ съ лучами OB и OD назовемъ α, β и α', β'. Изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ ABO и CBα, AOD и CβD находимъ

$$\frac{BA}{BC}=\frac{AO}{C\alpha},\ \frac{DA}{DC}=\frac{AO}{C\beta};$$

отсюда

$$\frac{BA}{BC}:\frac{DA}{DC}=(ACBD)=\frac{C\beta}{C\alpha};$$

точно также найдемъ

$$(A'B'C'D')=\frac{C'\beta'}{C'\alpha'};$$

вслѣдствіе параллельности прямыхъ $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$

$$\frac{C\beta}{C\alpha}=\frac{C'\beta'}{C'\alpha'}$$

слѣдовательно $(ACBD)=(A'C'B'D')$; равенство это выражаетъ нашу теорему. (Взявъ вмѣсто точекъ C и C' какую нибудь другую пару соотвѣтственныхъ точекъ и вмѣсто луча AO какой нибудь изъ остальныхъ трехъ, точно также можно доказать равенство другихъ ангармоническихъ отношеній рядовъ A,B,C,D и A', B', C', D').

Ангармоническое отношеніе точекъ пересѣченія четырехъ лучей пучка съ какой нибудь прямой называется ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ этихъ лучей; въ этомъ случаѣ его обозначаютъ символомъ (O,ABCD) гдѣ O вершина, A, B, C, D—точки пересѣченія лучей съ прямой, такъ что (O,ABCD)=(ABCD)—есть тождество.

Пучки называются проэктивными, если ангармоническое отношеніе четырехъ лучей одного пучка равно ангармоничаскому отношенію четырыхъ лучей другаго. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

Теорема I, b. Прямыя, соединяющія какія нибудь точки съ точками одного ряда, составляютъ проэктивные пучки, т. е. если A, B, C, D суть точки ряда, то, соединивъ ихъ съ произвольными точками O и O'. получимъ (O,ABCD)=(O',ABCD).

Теорема I a, была извѣстна древнимъ и встрѣчается въ сочиненіяхъ Паппуса Александрійскаго, относящихся къ концу IV в. Сопоставляя обѣ доказанныя теоремы, легко видѣть, что одна изъ нихъ получается изъ другой черезъ замѣну

Словъ	точка	Словами	прямая
	прямая, соединяющая точки		точка пересѣченія прямыхъ
	рядъ		пучокъ

и обратно.

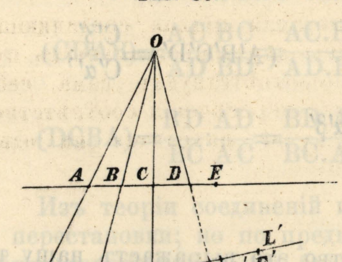
Слѣдующія теоремы и задачи обнаружатъ еще болѣе эту зависимость между теоремами, относящимися къ теоріи рядовъ и пучковъ.

Задача 1.

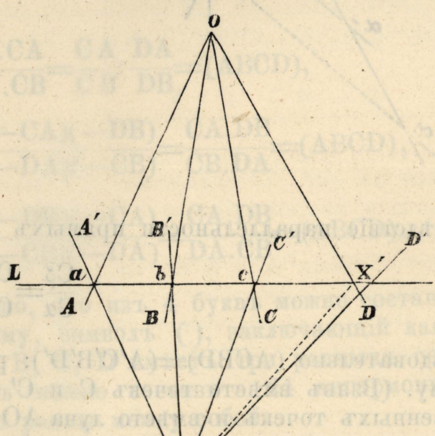
5. a). На данной прямой (L′) опредѣлить рядъ, проэктивный данному (A, B, C, . . .).

b) При данной вершинѣ (O′) построить пучокъ, проэктивный данному (O,ABC . . . .).

Фиг. 35.



Фиг. 36·



Соединивъ прямыми произвольную точку O (фиг. 35) съ точками даннаго ряда, найдемъ точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямой L′; точки эти образуютъ искомый рядъ A′, B′, C′, . . . (Теор. I, a).

Пересѣкая произвольной прямой L (фиг. 36) данный пучокъ, соединимъ прямыми точки пересѣченія съ вершиной O′; прямыя эти образуютъ искомый пучекъ O′,A′B′C′. . . . (Теор. I, b).

Вслѣдствіе произвольности

точки O | прямой L

задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

Теорема II.

a) Если три прямыя (AA′, BB′, CC′), соединяющія попарно соотвѣтственныя точки двухъ проэктивныхъ рядовъ (A, B, C, D, E,... и A′, B′, C′, D′, E′...) пересѣкаются въ одной точкѣ (O), то чрезъ ту-же точку пройдутъ всѣ другія прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки (фиг. 35).

Пусть X есть точка пересѣченія прямыхъ OD и A′B′; тогда

$$(A'B'C'X)=(ABCD)=(A'B'C'D'),$$

слѣдовательно X совпадаетъ съ D′, а потому прямая DD′ проходитъ черезъ точку O.

b) Если три точки пересѣченія (*a*, *b*, *c*) трехъ паръ соотвѣтственныхъ лучей двухъ проэктивныхъ пучковъ (O,ABCD....) и (O′,A′B′C′D′....) находятся на одной прямой (L), то на той-же прямой находятся и всѣ другія точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей (фиг. 36).

Пусть O′X есть прямая, соединяющая точку пересѣченія прямыхъ OD и L съ вершиной O′; тогда

$$(0,A'B'C'X)=(0,ABCD)=(0',A'B'C'D')$$

слѣдовательно O′X совпадаетъ съ O′D′, а потому пересѣченіе OD и OD′ находится на прямой L.

Какъ частный случай этихъ теоремъ получается

Теорема III.

a) Если точка пересѣченія двухъ прямыхъ, на которыхъ расположены два проэктивные ряда, соотвѣтствуетъ сама себѣ, то прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки, пересѣкаются въ одной точкѣ.

b) Если прямая, соединяющая вершины двухъ проэктивныхъ пучковъ, соотвѣтствуетъ сама себѣ, то точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей находятся на одной прямой.

Задача 2.

a) На прямой L данъ рядъ A, B, C, D; на прямой L′ даны три точки A′, B′, C′; найти на этой прямой такую точку D′, чтобы ряды A, B, C, D и A′, B′, C′, D′ были проэктивны.

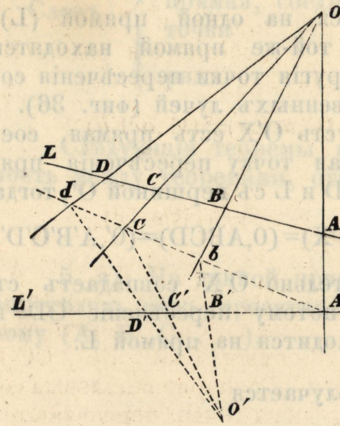
При произвольной точкѣ O (фиг. 37) прямой AA′ строимъ пучокъ O,ABCD; пересѣченіе лучей его съ произвольной прямой, проходящей черезъ точку A′, образуетъ рядъ A′*bcd*; черезъ точку пересѣченія O′ прямыхъ *b*B′ и *c*C′ проводимъ прямую O′*d*; пересѣченіе ея

b) При вершинѣ O данъ пучокъ O,ABCD; при вершинѣ O′ даны три луча O′,A′B′C′; найти при этой вершинѣ такой лучъ O′D′, чтобы пучки O,ABCD и O′,A′B′C′D′ были проэктивны.

Произвольная прямая, проходящая черезъ пересѣченіе *a* лучей OA и O′A′ (фиг. 38), пересѣкаясь съ лучами пучка O,ABCD, образуетъ рядъ *a*, *b*, *c*, *d*; соединивъ эти точки съ произвольной точкой *o* прямой O′A′, получимъ пучокъ *o*,*abcd*; прямая, соединяющая точки пересѣченія лучей *ob* съ O′B′ и *oc* съ L′ есть искомая точка D′, ибо

$(ABCD)=(A'bcd)=(A'B'C'D')$.

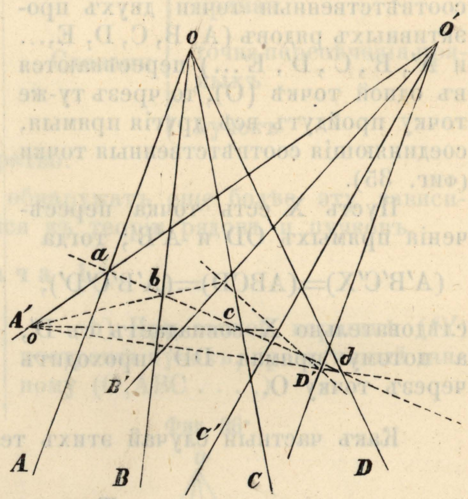
Фиг. 37.



съ O′C′ пересѣчетъ od въ D′; лучъ O′D′ есть искомый, ибо

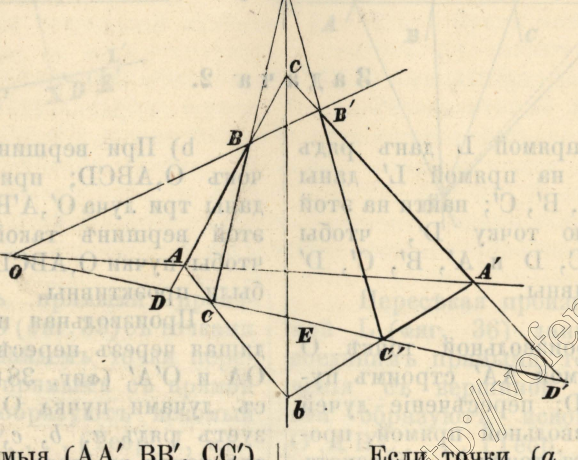
$(O,ABCD)=(o,abcd)=(O',A'B'C'D')$.

Фиг. 38



6) Теоремами II и III весьма удобно пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится доказывать, что прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ или точки находятся на одной прямой; для примѣра докажемъ теоремы Дезарга, геометра XVII в.

Фиг. 39.



Если прямыя (AA′, BB′, CC′), соединяющія попарно вершины двухъ треугольниковъ (ABC и A′B′C′) пересѣкаются въ одной точкѣ (O),

Если точки (a, b, c), въ которыхъ попарно пересѣкаются стороны двухъ треугольниковъ (ABC и A′B′C′) находятся на одной прято точки (a, b, c) пересѣченія противолежащихъ сторонъ находятся на одной прямой (фиг. 39).

мой, то прямыя (AA', BB', CC'), соединяющія противолежащія вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ (O) (фиг. 39).

Пусть D и D' суть точки пересѣченія сторонъ AB и $A'B'$ съ прямой CC'.

Ряды $cBAD$ и $cB'A'D'$ получаются отъ пересѣченія пучка $O,cBAD$ прямыми AB и $A'B'$; поэтому

$$(cBAD)=(cB'A'D')$$

и

$$(C,cBAD)=(C',cB'A'D'),$$

т. е. пучки $C,cBAD$ и $C',cB'A'D'$, въ которыхъ лучъ CC' соотвѣтствуетъ самъ себѣ, проэктивны; поэтому точки (a, b, c) пересѣченія остальныхъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ лучей лежатъ на одной прямой.

Пучки $C,acEb$ и $C',acEb$ получаются отъ соединенія ряда $acEb$ съ точками C и C'; поэтому

$$(C,acEb)=(C',acEb)$$

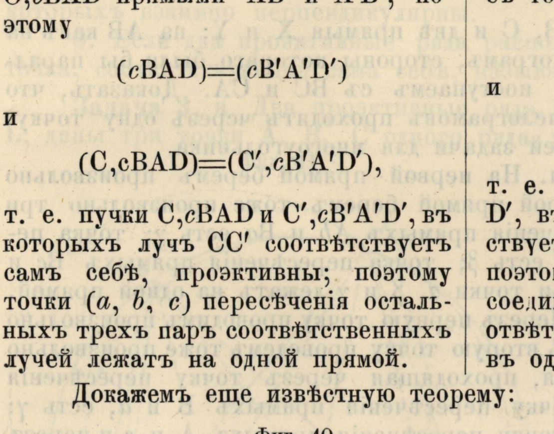
и

$$(cBAD)=(cB'A'D'),$$

т. е. ряды c, B, A, D и c, B', A', D', въ которыхъ точка c соотвѣтствуетъ сама себѣ, проэктивны; поэтому прямыя (AA', BB', CC'), соединяющія попарно остальныя соотвѣтственныя точки, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Докажемъ еще извѣстную теорему:

Фиг. 40.



Средины діагоналей полнаго четыреугольника находятся на одной прямой. (Фиг. 40). Пусть a, b, c суть средины діагоналей AB, CD, EF полнаго четыреугольника $ABCDEF$. При вращеніи стороны AE около вершины D, вершины A и E, перемѣщаясь по сторонамъ AF и CB, образуютъ проэктивные ряды A, A', A''...C, F и E, E', E''..., C,B; діагонали BA и FE составятъ при этомъ проэктивные пучки $B,AA'....CF$ и F, $EE'....CB$, а средины ихъ a, a',..., k, o и c, c',..., l, o— проэктивные ряды, у которыхъ точка o соотвѣтствуетъ сама себѣ. Когда AE приметъ наложеніе $MD \parallel EE'$, средина діагонали BA будетъ въ m, срединѣ BM, а средина діагонали FE, которая приметъ положеніе, параллельное EC, удалится въ безконечность; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, прямая, соединяющая средины діагоналей, параллельна BC и DM и такъ какъ она проходитъ черезъ m, средину BM, то она пройдетъ и чрезъ средину DB, а слѣдовательно и чрезъ средину DC, т. е. точку b.

Точно также убѣдимся, что, когда сторона AE приметъ положенiе DN || AC, прямая, соединяющая средины дiагоналей, тоже пройдетъ черезъ точку b. Такимъ образомъ, двѣ прямыя, соединяющiя соотвѣтственныя точки проэктивныхъ рядовъ a, a',...k, o и c, c',....l, o, у которыхъ точка o соотвѣтствуетъ сама себѣ, пересѣкаются въ точкѣ b; по теор. III, а чрезъ эту точку пройдутъ и другiя прямыя, соединяющiя соотвѣтственныя точки; слѣдовательно, точка b лежитъ на прямой ac.

7. Для желающихъ самостоятельно заняться доказательствомъ и рѣшенiемъ теоремъ и задачъ подобнаго рода помѣщаемъ нѣсколько примѣровъ:

1. Даны три точки A, B, C и двѣ прямыя X и Y; на AB какъ на дiагонали построимъ параллелограмъ, стороны котораго были бы параллельны X и Y; точно также поступаемъ съ BC и CA. Доказать, что другiя дiагонали трехъ параллелограмовъ проходятъ черезъ одну точку.

2. Обобщенiе предыдущей задачи для многоугольника.

3. Имѣемъ двѣ прямыя. На первой прямой беремъ произвольно три точки A, B и C; на второй прямой беремъ тоже произвольно три точки a, b и c. Точка пересѣченiя прямыхъ Ab и Ba есть γ; точка пересѣченiя прямыхъ Ac и Ca есть β; точка пересѣченiя прямыхъ Bc и и Cb есть α; Доказать что три точки α, β и γ лежатъ на одной прямой.

4. Имѣемъ двѣ точки. Черезъ первую точку проводимъ произвольно три прямыя A, B и C; черезъ вторую точку проведемъ тоже произвольно три прямыя a, b и c. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченiя прямыхъ A и b и черезъ точку пересѣченiя прямыхъ B и a, есть γ; прямая, проходящая черезъ точку пересѣченiя прямыхъ A и c и черезъ точку пересѣченiя прямыхъ C и a, есть β; прямая, проходящая черезъ точку пересѣченiя B и c и черезъ точку пересѣченiя прямыхъ C и b, есть α. Доказать, что три прямыя α, β и γ пересѣкаются въ одной точкѣ.

5. Доказать теорему Паскаля.

6. Доказать теорему Брiаншона.

7. Рѣшить задачу Проф. В. П. Ермакова. (Вѣстникъ Оп. Физ. и Эл. Мат. 1887. № 14. задача № 97).

При разборѣ трехъ послѣднихъ примѣровъ необходимо пользоваться тѣмъ, что будетъ сказано въ этой статьѣ о проэктивныхъ пучкахъ и рядахъ въ окружности. При помощи теорiи проэктивныхъ пучковъ и рядовъ теоремы Паскаля и Брiаншона доказываются независимо одна отъ другой.

8. Очевидно, что пучки проэктивны, если углы между соотвѣтственными лучами равны. Изъ этого слѣдуетъ:

1) *Если данныя точки окружности соединить хордами съ произвольными точками той-же окружности, то получатся пучки проэктивные*, ибо углы между соотвѣтственными лучами суть вписанные, опирающiеся на одну дугу.

Ангармоническое отношенiе четырехъ лучей пучка съ вершиной на окружности, называется *ангармоническимъ отношенiемъ четырехъ точекъ* пересѣченiя *окружности* съ лучами.

2) *Если данныя касательныя прямыя къ окружности пересѣчь произвольными касательными къ той-же окружности, то получатся ряды проэктивные*, ибо, построивъ, для каждаго ряда пучокъ съ вершиной въ центрѣ, увидимъ, что углы между соотвѣтственными лучами равны,

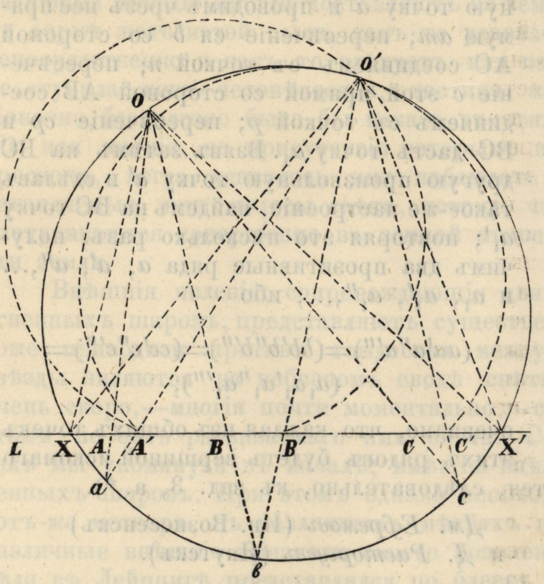
такъ какъ каждый такой уголъ равенъ половинѣ угла между радіусами, проведенными въ точки касанія данныхъ касательныхъ. Ангармоническое отношеніе точекъ пересѣченія четырехъ данныхъ касательныхъ съ произвольной касательной называется *ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ касательныхъ къ окружности*.

3) *Ангармоническое отношеніе четырехъ касательныхъ къ окружности равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ касанія;* ибо, соединивъ центръ съ точками ряда на произвольной касательной и произвольную точку касанія съ данными, получимъ пучки, соотвѣтственные лучи которыхъ взаимно перпендикулярны.

9. Если два проэктивные ряда расположены на одной прямой, то точка, соотвѣтствующая сама себѣ, называется *общею точкою рядовъ*.

Задача 3, а. Два проэктивные ряда расположены на одной прямой L; даны три точки A, B, C одного ряда и три соотвѣтственныя точки A′, B′, C′ другого; найти общія точки этихъ рядовъ. (Фиг. 41). При произвольной точкѣ O строимъ пучокъ O,ABC; на отрѣзкахъ A′B′ и A′C′ описываемъ дуги, вмѣщающія соотвѣтственно углы AOB и AOC; пересѣченіе O′ этихъ дугъ соединяемъ съ точками A′, B′, C′. Пусть *a*, *b*, *c* суть пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей пучковъ O, ABC и O′,A′B′C′. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точки O,O′,*a*; вслѣдствіе равенства угловъ между соотвѣтственными лучами пучковъ, окружность эта пройдетъ и чрезъ точки *b* и *c*. Точки пересѣченія этой окружности съ прямой L суть искомыя общія точки X и X′ данныхъ рядовъ. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ точки X и X′ съ вершинами O и O′, получимъ:

Фиг. 41.



$$(O,ABCX)=(O',A'B'C'X) \text{ и } (O,ABCX')=(O',A'B'C'X');$$

Слѣдовательно

$$(ABCX)=(A'B'C'X) \text{ и } (ABCX')=(A'B'C'X').$$

Можетъ случиться, что данныя точки рядовъ расположены такъ, что окружность O*abc*O′ только коснется прямой L, или вовсе не будетъ имѣть съ ней общихъ точекъ; но болѣе двухъ общихъ точекъ быть не можетъ, такъ какъ эти точки, вслѣдствіе равенства угловъ между соотвѣтственными лучами пучковъ O,ABC и O′,A′B′C′ непремѣнно должны находиться на окружности O*abc*O′. Такимъ образомъ задача имѣетъ два рѣшенія—дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя.

Если два проэктивные пучка имѣютъ общую вершину, то лучъ, соотвѣтственный самому себѣ, называется *общимъ лучомъ пучковъ*.

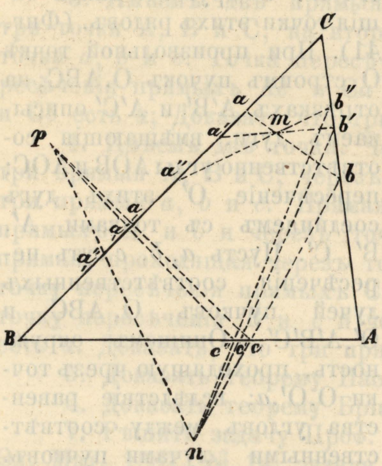
Задача 3, b. Даны три пары соотвѣтственныхъ лучей OA и OA′, OB и OB′, OC и OC′ двухъ проэктивныхъ пучковъ, имѣющихъ общую вершину O; найти общіе лучи этихъ пучковъ.

Проведя произвольную прямую L, въ пересѣченіи ея съ данными пучками, получимъ три пары соотвѣтственныхъ точекъ двухъ проэктивныхъ рядовъ; найдемъ общія точки этихъ рядовъ (Зад 3, a); соединивъ ихъ съ вершиной O, получимъ искомые общіе лучи.

10. Къ отысканію общихъ точекъ и лучей приводятся многія задачи; для примѣра рѣшимъ слѣдующую:

Въ данный треугольникъ (ABC) вписать другой треугольникъ, стороны котораго проходили бы чрезъ три данныя точки m, n, p. (Фиг. 42).

Фиг. 42.



На сторонѣ BC беремъ произвольную точку a и проводимъ чрезъ нее прямую am; пересѣченіе ея b со стороной AC соединяемъ съ точкой n; пересѣченіе c этой прямой со стороной AB соединяемъ съ точкой p; пересѣченіе cp и BC дастъ точку a_1. Взявъ затѣмъ на BC другую произвольную точку a' и сдѣлавъ такое-же настроеніе, найдемъ на BC точку a_1'; повторяя это нѣсколько разъ, получимъ два проэктивные ряда a, a', a'',... и a_1, a_1', a_1'',..., ибо

$$(aa'a''a''')=(bb'b''b''')=(cc'c''c''')=(a_1a_1'a_1''a_1''');$$

очевидно, что каждая изъ общихъ точекъ этихъ рядовъ будетъ вершиной искомаго треугольника. Задача приводится, слѣдовательно, къ зад. 3, a. *).

Дм. Ефремовъ (Ив.-Вознесенскъ)
и *Д. Расторгуевъ* (Якутскъ).

МЕТЕОРИТЫ И ПАДАЮЩІЯ ЗВѢЗДЫ.

(Окончаніе) **).

Послѣ всего изложеннаго относительно падающихъ звѣздъ и кометъ, возвращаясь къ разсмотрѣнію поставленнаго нами въ началѣ вопроса о связи падающихъ звѣздъ съ метеоритами, мы изложимъ тѣ доводы,

---

*) Точно также рѣшается болѣе общая задача о построеніи многоугольника, вершины котораго лежали бы на данныхъ прямыхъ, а стороны проходили черезъ данныя точки. *Примѣчаніе редакціи.*

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физ. и Элем. Математики" № 52.

которые приводятся противъ тождества между этими тѣлами и покажемъ, на сколько можно придавать значенія этимъ доводамъ.

Первое, что обыкновенно приводили противъ упомянутаго тождества, касается того, что падающихъ звѣздъ никто никогда не видалъ упавшими на земную поверхность, между тѣмъ какъ коллекціи метеоритовъ достаточно велики; но послѣ того какъ французскій минералогъ Добре, подвергая стальныя призмы дѣйствію сильно сжатыхъ и нагрѣтыхъ газовъ пороха и динамита, показалъ, что эти призмы разрываются на мелкія части и при этомъ представляютъ внѣшніе признаки, совершенно сходные съ осколками метеоритовъ, предыдущій доводъ противъ тождества падающихъ звѣздъ и метеоритовъ потерялъ свое значеніе: масса падающихъ звѣздъ на столько незначительна, а дѣйствіе газовъ на переднюю ихъ поверхность настолько велико, что онѣ сгорятъ совершенно еще въ очень высокихъ и рѣдкихъ слояхъ атмосферы; при чемъ однако и падающія звѣзды иногда доставляютъ на землю частицы своего вещества въ формѣ желѣзистой пыли, какъ то удавалось неоднократно наблюдать непосредственно и какъ то слѣдуетъ изъ находимыхъ на горахъ, куда не ступала нога человѣческая, частицъ желѣза, никкеля и кобальта. Конечно, безполезно было бы искать въ этихъ частицахъ металловъ натрія или магнія, на присутствіе которыхъ всякій разъ указывалъ спектроскопъ, когда удавалось имъ наблюдать ядро падающихъ звѣздъ или оставляемыя ими полосы свѣта, потому что эти металлы сгораютъ и улетучиваются совершенно въ земной атмосферѣ, не достигая поверхности земли.

Внѣшнія явленія, сопровождающія движеніе падающихъ звѣздъ и огненныхъ шаровъ, представляютъ существенную разницу и потому ихъ тоже приводили противъ тождества между этими тѣлами. Падающія звѣзды являются на небесномъ сводѣ свѣтящимися точками; кончаютъ очень скоро,—многія почти моментально,—свой путь, мало мѣняясь при этомъ по силѣ развиваемаго ими свѣта. Совершенно иной характеръ, какъ мы упомянули въ началѣ, имѣютъ внѣшніе признаки появленія огненныхъ шаровъ. При этомъ однако необходимо замѣтить, что одинъ и тотъ-же метеоръ, въ различныхъ мѣстахъ наблюдаемый, представляетъ различные внѣшніе признаки своего появленія. Метеоръ 1874 г. 10 апрѣля въ Лейпцигѣ представлялся по блеску равнымъ Венерѣ; чѣмъ далѣе подвигался онъ на своемъ пути, тѣмъ грандіознѣе становилось его появленіе въ другихъ мѣстахъ: тамъ, гдѣ наблюдался онъ не задолго до взрыва, блескъ его былъ равенъ почти солнечному, и эхо цѣлую минуту разносило страшный трескъ, сопровождавшій его взрывъ; 30 янв. 1868 г. жители Пултуска и близь лежащихъ мѣстъ были буквально бомбардированы градомъ камней послѣ взрыва метеорита, о которомъ изъ Бреслау писали, что видѣли великолѣпное огненное море; изъ Рагендорда,—что видѣли „необыкновенно блестящій метеоръ", такъ что идя далѣе, ближе къ началу пути этого метеора, мы могли бы убѣдиться, что въ моментъ появленія этотъ огненный шаръ по блеску былъ равенъ звѣздѣ 1-ой величины.

Мы могли бы привести еще нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ путь огненнаго шара проведенъ отъ появленія до взрыва, но эти примѣры ничего новаго не прибавятъ. Такимъ образомъ, въ моментъ по явленія огненные шары представляются тѣми же падающими звѣздами, величины нѣсколько большей противъ обыкновенныхъ; пролетая-же громадныя разстоянія въ слояхъ атмосферы болѣе плотныхъ и будучи подвержены дѣйствію газовъ, сильно сжатыхъ и нагрѣтыхъ, они, естественно, сопровождаются на пути явленіями болѣе грандіозныхъ размѣровъ, чѣмъ обыкновенныя падающія звѣзды, которыя по незначительности своей массы не могутъ дойти до такихъ предѣловъ. Слѣдовательно, отъ телескопическихъ падающихъ звѣздъ до самыхъ громадныхъ огненныхъ шаровъ мы можемъ идти непрерывно, какъ отъ индивидуумовъ одного и того же рода, которые представляютъ для наблюдателя различные признаки своего появленія только потому, что масса однихъ въ громадныхъ размѣрахъ превосходитъ массу другихъ, и потому при движеніи въ одной и той же сопротивляющейся средѣ первые могутъ пролетать громадныя разстоянія, вторыя-же—очень короткій путь. Стало быть внѣшніе признаки, сопровождающіе появленіе падающихъ звѣздъ и метеоритовъ, нисколько не говорятъ за отдѣленіе однихъ отъ другихъ. Идемъ далѣе.

Когда открытъ былъ для падающихъ звѣздъ законъ суточной варіаціи, о которой мы уже упоминали, и законъ годичной варіаціи, состоящій въ томъ, что вообще во вторую половину года (Іюль—Декабрь) падающихъ звѣздъ наблюдается почти вдвое болѣе, чѣмъ въ первую (въ частности maximum падаетъ на Августъ), тождество съ ними метеоритовъ требовало для послѣднихъ такихъ же законовъ, управляющихъ количествомъ ихъ, какъ и для падающихъ звѣздъ. Хотя имѣющіеся матеріалы и указываютъ на несогласіе въ даномъ случаѣ (maximum метеоритовъ падаетъ на 9 час. вечера и на Май мѣсяцъ), но это несогласіе не можетъ считаться основательнымъ доводомъ противъ упомянутаго тождества, потому что для вывода законовъ суточной и годичной варіацій были взяты во вниманіе сотни тысячъ падающихъ звѣздъ, метеоритовъ-же—всего 200—300; очевидно, что при такомъ ничтожномъ, сравнительно, количествѣ матеріала выводить какія либо рѣшительныя слѣдствія по меньшей мѣрѣ безполезно. Остается разсмотрѣть еще одинъ аргументъ, приводимый противъ связи падающихъ звѣздъ съ метеоритами, а именно—скорость движенія метеоритовъ въ пространствѣ. Сколько разъ ни приходилось опредѣлять эту скорость изъ непосредственныхъ наблюденій, каждый разъ оказывалось, что она болѣе параболической, и вѣроятнѣйшая орбита, описываемая огненнымъ шаромъ въ пространствѣ, выражалась гиперболой, (хотя парабола и эллипсъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ являлись орбитами возможными) между тѣмъ какъ для падающихъ звѣздъ мы приняли скорость параболическую. Но такъ какъ мы уже и ранѣе упомянули, что законъ суточной варіаціи и непосредственныя опредѣленія даютъ и для падающихъ звѣздъ скорость болѣе параболической, то и этотъ аргументъ такъ-же, какъ и всѣ предыдущіе, не имѣетъ за собою ничего рѣшающаго,—другими словами—нѣтъ основанія приписывать всѣмъ падающимъ звѣздамъ одинаковую (параболическую) скорость: Леониды, Персеиды, Андромедиды и др., которыя движутся въ пространствѣ по орбитамъ однѣмъ и тѣмъ же съ вышеуказанными періодическими кометами, очевидно, имѣютъ скорость эллиптическаго движенія; другіе потоки вообще обладаютъ скоростью параболическаго движенія, но между ними существуютъ и такіе, скорость движенія которыхъ гиперболическая,—

однимъ словомъ между орбитами падающихъ звѣздъ могутъ встрѣчаться всѣ три рода коническихъ сѣченій: эллипсъ, парабола и гипербола, и нѣтъ пока никакого основанія, по которому бы a priori слѣдовало за единицу скоростей для всѣхъ падающихъ звѣздъ принимать скорость параболическую.

Итакъ мы видимъ, что всѣ приведенные выше аргументы не носятъ такого рѣшительнаго характера, чтобы на основаніи ихъ можно было отвергнуть связь метеоритовъ съ падающими звѣздами; а потому, желая показать, что эта связь дѣйствительно существуетъ, воспользуемся тѣмъ же методомъ, который привелъ къ рѣшенію вопроса о происхожденіи падающихъ звѣздъ и о связи ихъ съ кометами. Въ самомъ дѣлѣ, если мы докажемъ, что на небесной сферѣ существуютъ также радіанты, посылающіе на землю каменныя и желѣзныя массы и убѣдимся, что, въ предѣлахъ ошибокъ наблюденій, эти радіанты совпадаютъ съ извѣстными радіантами потоковъ падающихъ звѣздъ, то мы вопросъ о трактуемой нами связи сведемъ уже на реальную почву и должны будемъ смотрѣть на метеориты, какъ на большіе индивидуумы данной системы потока, разсѣянные по орбитѣ въ весьма незначительномъ числѣ сравнительно съ количествомъ падающихъ звѣздъ, получаемыхъ отъ того же потока, другими словами: метеориты суть тѣ-же падающія звѣзды, но масса ихъ во много разъ превосходитъ массу этихъ послѣднихъ.

На практикѣ рѣшеніе вопроса о существованіи радіантовъ огненныхъ шаровъ встрѣтило огромныя затрудненія, которыя станутъ совершенно ясны, если мы покажемъ, какимъ образомъ опредѣляются эти радіанты.

Такъ какъ нельзя вести систематическихъ наблюденій для метеоритовъ по причинѣ ихъ весьма рѣдкаго сравнительно съ падающими звѣздами появленія, то большинство такихъ наблюденій совершенно случайно, неполно, а иногда и крайне неточно, такъ что съ этими наблюденіями нужно обращаться чрезвычайно осторожно, чтобы не впасть въ грубыя ошибки. Обыкновенно наблюдатели, кромѣ мѣста и времени наблюденія, указываютъ болѣе точно конецъ дуги описываемой метеоритомъ; начало же ея по большей части остается неизвѣстнымъ; затѣмъ указывается направленіе полета, наклонность къ горизонту и число секундъ, въ теченіе которыхъ огненный шаръ описывалъ свой путь. Для опредѣленія радіанта чрезъ начало и конецъ пути, указаннаго различными наблюдателями, проводятся дуги большихъ круговъ, которыя въ пересѣченіи и даютъ видимый радіантъ. Если бы всѣ наблюденія были совершенно точны, то пересѣченіе произошло бы въ одной точкѣ; но такъ какъ этого на практикѣ никогда не бываетъ, то на самомъ дѣлѣ произойдетъ нѣсколько пересѣченій, по которымъ, сообразуясь съ обстоятельствами, и опредѣляютъ вѣроятнѣйшее положеніе радіанта. Затѣмъ по длинѣ дуги и числу секундъ, употребленныхъ метеоритомъ для прохожденія этой дуги, вычисляется скорость его движенія, при чемъ получается обыкновенно еще болѣе несогласія между отдѣльными наблюденіями, чѣмъ при опредѣленіи радіанта. Не смотри однако на всѣ эти трудности и на ничтожное сравнительно количество матеріала для рѣшенія вопроса, мы тѣмъ не менѣе и въ настоящее время уже можемъ привести нѣсколько точно установленныхъ радіантовъ, посылающихъ на землю вмѣстѣ съ падающими звѣздами и огненные шары. Первое мѣсто въ этомъ отношеніи занимаютъ два потока: Тауриды I, дѣйствующіе отъ 21 Окт. до 30 Ноября и Геминиды, дѣйствующіе отъ 23 Нояб. до 26 Дек. Наблюдаемые ежегодно въ это время огненные шары (почти всегда *аэролиты*) по многимъ уже опредѣленіямъ принадлежатъ по своимъ радіантамъ къ системамъ этихъ двухъ потоковъ. Для примѣра приводимъ данныя, послужившія для установленія радіанта Тауридовъ. Наблюдались слѣдующіе огненные шары: $18\frac{17}{XI}48$, $18\frac{5}{XI}49$, $18\frac{15}{XI}59$, $18\frac{1}{XI}60$, $18\frac{12}{XI}61$, $18\frac{11}{XI}64$, $18\frac{13}{XI}65$, $18\frac{21}{XI}65$, $18\frac{6}{XI}69$, $18\frac{28}{XI}72$, $18\frac{8}{XI}76$, $18\frac{23}{XI}77$. Среднее положеніе радіанта ихъ: прямое восхожденіе $\alpha=59^\circ$, склоненіе $\delta=+20^\circ$, а среднее положеніе радіанта потока падающихъ звѣздъ Тауридовъ I: $\alpha=58$, $\delta=+18^\circ.5$. Сравнивая, находимъ совпаденіе на столько близкое, что не можетъ быть сомнѣнія относительно тождества. Точно такимъ же путемъ былъ установленъ и радіантъ Геминидовъ. Приведемъ еще примѣръ, доказывающій существованіе радіантовъ метеоритовъ:

1) 17 іюня 1873 г. наблюдался въ различныхъ мѣстахъ большой огненный шаръ; изъ многочисленныхъ наблюденій положеніе его радіанта: $\alpha=248^\circ,6$, $\delta=-20^\circ.2$.

2) 7 іюня 1878 г. въ Англіи и Франціи наблюдался огненный шаръ; радіантъ его: $\alpha=249^\circ$, $\delta=-21^\circ$.

3) 13 іюля 1879 г. въ Австріи наблюдался большой огненный шаръ; радіантъ его: $\alpha=246^\circ$, $\delta=-19^\circ$.

4) 3 іюня 1883 г. въ промежуткѣ двухъ часовъ наблюдались два большихъ огненныхъ шара, вышедшихъ изъ одного радіанта: $\alpha=249$, $\delta=-20^\circ.2$.

Нѣтъ сомнѣнія, что всѣ эти огненные шары принадлежатъ одному и тому же потоку и описывали въ пространствѣ одну и ту же орбиту. Что касается падающихъ звѣздъ, принадлежащихъ тому-же радіанту, то вслѣдствіе положенія его въ южномъ полушаріи и потому малаго числа наблюденій онъ недостаточно точно опредѣленъ, такъ что совпаденіе не столь рельефно, какъ въ приведенныхъ выше примѣрахъ, а именно: наблюденія Аѳинской обсерваторіи даютъ для потока, дѣйствующаго въ іюлѣ, положеніе радіанта:

$$\alpha=245^\circ,\ \delta=-30.$$

но и при этихъ данныхъ тождество не подлежитъ сомнѣнію. Изъ другихъ подобныхъ радіантовъ упомянемъ еще о радіантѣ потока Канкридовъ, дѣйствующаго въ Дек.—Янв. и связаннаго съ кометнымъ радіантомъ кометы 1680 г., орбита которой пересѣкаетъ земную орбиту въ той точкѣ, гдѣ земля бываетъ ежегодно 26 декабря, а именно: положеніе радіанта:

1) Кометы 1680 г. . . . . $\alpha=132^\circ$, $\delta=21^\circ.5$
2) Потока „Канкриды" . . . . $=132$ 20.

3) Огненныхъ шаровъ *) и аэролитовъ, наблюдавшихся въ январѣ. . . . . $=133$ $19\ (\pm 3^\circ)$.

Очевидно, что вся эта система находится къ тѣсной связи между собою, (даже скорость нѣкоторыхъ изъ огненныхъ шаровъ, принадлежащихъ этому радіанту, не превосходитъ параболической) такъ что и комета 1680 г.; и падающія звѣзды Канкриды, и упомянутые огненные шары, движутся въ пространствѣ по одной и той же орбитѣ, потому что данныя для опредѣленія орбиты (радіантъ и скорость) для всѣхъ ихъ однѣ и тѣ же, и до разложенія кометы составляли одно цѣлое.

Не перечисляя болѣе констатированныхъ въ настоящее время радіантовъ, посылающихъ вмѣстѣ съ падающими звѣздами и большіе метеориты, скажемъ лишь, что съ накопленіемъ матеріала тождество радіантовъ тѣхъ и другихъ небесныхъ тѣлъ выступаетъ все болѣе и болѣе.

Въ заключеніе намъ остается замѣтить, что желательно было бы, чтобы всѣ наблюденія, какія кому удастся сдѣлать надъ огненными шарами, сообщались на астрономическія обсерваторіи, при чемъ необходимы слѣдующія свѣдѣнія: 1) время и географическое положеніе мѣста наблюденія; 2) положеніе начала и конца дуги, описанной огненнымъ шаромъ въ земной атмосферѣ, при чемъ можно руководствоваться созвѣздіями, а также высотой, которой достигаетъ солнце въ извѣстные, хорошо замѣченные наблюдателемъ дни; конецъ же дуги можно опредѣлять разстояніемъ отъ точки заката солнца въ извѣстные дни, если она почему либо хорошо замѣчена; или опредѣлять углы, составляемые съ горизонтомъ линіями, соединяющими глазъ наблюдателя съ началомъ и концомъ упомянутой дуги; 3) направленіе полета, руководствуясь розой вѣтровъ; 4) уголъ, составляемый дугой съ горизонтомъ; 5) число секундъ, въ теченіе которыхъ метеоритъ описывалъ свой путь и 6) внѣшніе признаки, сопровождающіе полетъ метеорита: величина его и сила свѣта по сравненію съ луной и планетами (Венера, Юпитеръ), цвѣтъ, хвостъ и взрывъ, если таковые имѣли мѣсто, и другія особенности.

А. Вилъевъ. (Спб.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Засѣданіе Физическаго Отдѣленія Рус. Физ.-Хим. Общ. въ С.-Пб. 27-го Сентября.

И. И. Боргманъ читаетъ сообщеніе Г-на Де-Меца о тройной радугѣ.

Вмѣсто уѣхавшаго въ Томскъ Проф. Н. А. Гезехуса въ дѣлопроизводители Общества выбранъ Проф. П. П. Фанъ-деръ Флитъ.

Н. Н. Хамантовъ читаетъ отчетъ о печатаніи матеріаловъ, касающихся послѣдняго полнаго солнечнаго затменія. Матеріалы эти, сгруппированные въ отдѣльную брошюру, выйдутъ въ скоромъ времени въ продажу.

О. Д. Хвольсонъ показываетъ Обществу построенный имъ приборъ для опредѣленія теплопроводности металловъ.

---

*) Изъ которыхъ одинъ, наблюдавшійся 28 янв. 1879 г. имѣлъ діаметръ въ 4 раза болѣе луннаго и послѣ взрыва въ земной атмосферѣ разлетѣлся на части,

О. Э. Страусъ сообщаетъ о двухъ видѣнныхъ имъ на югѣ Россіи атмосферическихъ явленіяхъ.

Ѳ. Ѳ. Петрушевскій дѣлаетъ нѣкоторыя прибавленія къ сдѣланному имъ весною сообщенію о высыхающихъ маслахъ и масляныхъ краскахъ.

О. Стр. (Спб.)

Гипотеза Лагранжа о происхожденіи кометъ и аэролитовъ. (C. R., t. CVI, p. 1703).

Въ одномъ изъ лѣтнихъ засѣданій Французской Академіи Наукъ была прочтена замѣтка Фая, въ которой авторъ извлекаетъ изъ забвенія гипотезу Лангранжа о происхожденіи кометъ и аэролитовъ и находитъ ее заслуживающею серьезнаго вниманія по отношенію къ объясненію явленія послѣднихъ.

Эта гипотеза представляетъ попытку, въ разрѣзъ съ наиболѣе принятыми въ настоящее время теоріями происхожденія кометъ и аэролитовъ, установить способъ ихъ происхожденія изъ планетъ. Какъ извѣстно, вслѣдъ за открытіемъ малыхъ планетъ въ области между Марсомъ и Юпитеромъ, Ольберсъ высказалъ предположеніе о большой планетѣ въ этомъ мѣстѣ, которая разорвалась подъ вліяніемъ собственныхъ внутреннихъ силъ, и обломки которой дали начало мелкимъ планетамъ; орбиты этихъ послѣднихъ должны всѣ пересѣкаться въ той точкѣ, гдѣ находилась большая планета во время взрыва. Считая гипотезу Ольберса не лишенной вѣроятія, Лагранжъ допускалъ, что на всѣхъ планетахъ нашей системы могли происходить отъ внутреннихъ силъ частые взрывы, которые не были настолько сильны, чтобы разрушить планету, но были способны выбросить изъ нѣдръ ея огромное количество газовъ, паровъ и мельчайшей пыли, образовывавшихъ комету, и обломки горныхъ породъ и металловъ, которые составляли аэролиты.

Сходство аэролитнаго желѣза съ желѣзомъ извергаемымъ вулканами, и согласіе изложенной гипотезы съ воззрѣніями современныхъ геологовъ, Соссюра и Доломье, подтверждали взгляды Лагранжа, и онъ началъ вычислять силу съ которою тѣло должно быть брошено съ какой нибудь планеты, чтобы описывать вокругъ солнца орбиту кометы. Принимая за единицу скорость пушечнаго ядра, для скорости планеты, радіусъ орбиты которой r, будетъ имѣть $\frac{70}{\sqrt{r}}$, почему взрывъ долженъ сообщить тѣлу скорость не свыше $\frac{70.\sqrt{3}}{\sqrt{r}}$ и $\frac{70.\sqrt{5}}{\sqrt{r}}$, чтобы оно описывало вокругъ солнца эллиптическую или параболическую орбиту въ какой нибудь плоскости *). Эти скорости громадны и далеко превосходятъ скорости нашихъ вулкановъ, но Лагранжъ допускалъ, что въ прежнее врнмя, когда внутренній огонь планетъ былъ сильнѣе, а внѣшняя кора тоньше, онѣ были возможны.

Подтвержденіе гипотезы Лагранжа Фай видитъ въ слѣдующемъ фактѣ. Орбиты всѣхъ планетъ солнечной системы пересѣкаются безчислен-

*) Къ названной скорости нужно прибавить еще нѣкоторую величину для преодолѣнія притяженія планеты.

нымъ множествомъ кометъ, какъ періодическихъ, такъ и непе，ріодическихъ; по отношенію къ землѣ число кометъ увеличивается еще падающими звѣздами и аэролитами, которыхъ, по вычисленію Добрэ, къ намъ ежегодно залетаетъ около 600. Каково же происхожденіе этихъ тѣлъ, бороздящихъ во всѣхъ направленіяхъ небесное пространство? Скорѣе всего оно планетное, такъ какъ одинъ изъ основныхъ астрономическихъ законовъ состоитъ въ томъ, что всякое тѣло, вращающееся вокругъ солнца, непремѣнно должно при каждомъ обращеніи возвратиться въ ту точку, гдѣ оно разъ было, а слѣдовательно пройти черезъ мѣсто своего происхожденія.

Но этотъ самый законъ обнаруживаетъ несостоятельность гипотезы Лагранжа по отношенію къ кометамъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ справедливости гипотезы, всѣ кометы, безъ исключенія, должны относиться къ той, либо другой планетной системѣ; но Фай указываетъ 16 кометъ, орбиты коихъ не приближаются замѣтно къ орбитѣ какой бы то ни было планеты.

Тѣмъ не менѣе въ отношеніи аэролитовъ гипотеза Лагранжа, по мнѣнію Фая, заслуживаетъ серьезнаго вниманія ученыхъ, такъ какъ обломочная форма этихъ тѣлъ, постоянная незначительность ихъ размѣровъ, непозволящая допускать страшныхъ катастрофъ, тождественность ихъ химическаго и минералогическаго характера съ обломками горныхъ породъ, находящихся въ нѣдрахъ земного шара, наконецъ чрезвычайная частота ихъ паденія,—являются совершенно несовмѣстимыми съ происхожденіемъ ихъ помимо нашей планетной системы. Они, вѣроятно, были извергнуты землей или луной; послѣднее обстоятельство пріобрѣтаетъ особый характеръ вѣроятности, если согласиться съ геологами, утверждающими, что лунные цирки обязаны своимъ происхожденіемъ взрывамъ отъ внутреннихъ силъ луны.

Ив. Г—скій.

♦ **Спутники Марса.** (E. Dubois. C. R., t. CVII, p. 437).

Авторъ, замѣчая, что два извѣстные спутника Марса, Phobos и Deimos, были открыты Галлемъ только въ августѣ 1877 г., хотя условія ихъ положенія относительно главной планеты и движенія весьма благопріятствуютъ наблюденіямъ ихъ, задается вопросомъ: какимъ образомъ никто изъ множества ученыхъ, направлявшихъ сильные телескопы на Марсъ, не замѣтилъ до 1877 г. спутниковъ его? На этотъ вопросъ онъ отвѣчаетъ не лишеннымъ интереса предположеніемъ, допуская, что Phobos и Deimos были нѣкогда телескопическими планетами, входившими въ составъ зоны планетъ между Марсомъ и Юпитеромъ, и въ своемъ движеніи настолько приблизились къ первому, что вошли въ сферу его притяженія и сдѣлались его спутниками. Что такой случай возможенъ, видно изъ слѣдующаго примѣра. Телескопическая планета 132 Этра имѣетъ для разстоянія *перигелія* 1,6138, а разстояніе *афелія* Марса равно 1,6658. Такимъ образомъ можетъ случиться, что маленькая планета очутится между солнцемъ и Марсомъ и такъ близко отъ послѣдняго, что вступитъ въ сферу его притяженія, послѣ чего ей останется только сдѣлаться его спутникомъ. *Ив. Г—скій* (Кіевъ).

♦ **Аморфная сурьма.** (C. R., t. CVII, p. 420).—*Hérard'у* (въ лабораторіи Сорбонны) удалось получить прямымъ способомъ аллотропическое видоизмѣненіе сурьмы, описанное Gore'омъ и добываемое путемъ электролиза хлористой, бромистой или іодистой сурьмы. Нагрѣвая сурьму до темно-краснаго каленія въ токѣ азота, онъ замѣтилъ выдѣленіе сѣроватыхъ паровъ, сгущавшихся въ тонкую, сѣрую пыль на стѣнкахъ трубки, которою оканчивался приборъ. Эта пыль подъ микроскопомъ представляла маленькіе шарики, соединенные въ нити, подобно аморфному мышьяку Bettendorf'а; она содержала 98,7 на 100 сурьмы; плотность ея при 0°—6,22; между тѣмъ какъ плотность кристаллической сурьмы содержится между 6,725 и 6,737; плавится аморфная сурьма при 614°, кристаллическая при 440°. Въ виду того, что взгонка сурьмы въ токѣ водорода или въ пустотѣ не приводитъ къ образованію ея аморфнаго видоизмѣненія, авторъ приходитъ къ вопросу: не играетъ ли азотъ въ описанномъ процессѣ активной роли, образуя соединеніе съ сурьмой, которое въ холодныхъ частяхъ прибора разлагается и выдѣляетъ аморфную сурьму? *Ив. Г—скій* (Кіевъ).

КОРРЕСПОНДЕНЦІЯ.

Н. С. Дрентельнъ (Спб.) обращаетъ вниманіе читателей на то обстоятельство, что въ послѣдней (октябрской) книжкѣ журнала „Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht“ *) профессоръ A. Weinhold въ своей статьѣ „Exakter Versuch für das Archimedische Prinzip“ предлагаетъ съ несущественными усложненіями тотъ-же самый пріемъ, который въ прошломъ году былъ данъ авторомъ письма въ № 34 „Вѣстника“ въ небольшой замѣткѣ, озаглавленной *Демонстрація Архимедова закона*. (См. стр. 234 сем. III). Во второй строкѣ ея вмѣсто словъ „любой *величины*“ слѣдуетъ понимать „любой *формы*“.

ЗАДАЧИ.

№ 366. Въ треугольникѣ стороны составляютъ ариѳметическую прогрессію. Показать, что высота, соотвѣтствующая средней сторонѣ, равна радіусу соотвѣтственнаго внѣвписаннаго круга, а также равна утроенному радіусу кругу внутривписаннаго. (Заимств.) *Ш.*

№ 367. Данъ кругъ и прямая внѣ его. Изъ произвольной точки A этой прямой проведена касательная къ кругу AB. Изъ центра круга опущенъ на данную прямую перпендикуляръ OC, изъ основанія этого перпендикуляра C проведена къ кругу вторая касательная CD. Показать, что изъ касательныхъ AB, CD и отрѣзка прямой AC всегда можно построить прямоугольный треугольникъ. *Н. Извольскій* (Тула).

№ 368. Найти центръ тяжести периметра треугольника.
М. Попруженко (Воронежъ).

*) Журналъ этотъ началъ издаваться съ 1-го окт. 1887 г. въ Берлинѣ; выходитъ 6 №№ въ годъ; подписная цѣна 10 м. Издатель—Dr. F. Poske.
Прим. ред.

№ 369. Показать, что всякая плоскость, проходящая черезъ середины двухъ противоположныхъ реберъ тетраэдра, дѣлитъ его на двѣ равномѣрныя части. Выразить объемъ тетраэдра черезъ площадь такого сѣченения S, длину ребра a и уголъ α, образуемой плоскостью сѣченія съ однимъ изъ реберъ. *М. Попруженко* (Воронежъ).

№ 370. Медіана AM треугольника ABC дѣлитъ уголъ A на двѣ части m и n, удовлетворяющія условію:

$$3\operatorname{tg}\left(\frac{m+n}{2}\right)=19\operatorname{tg}\left(\frac{m-n}{2}\right).$$

Найти отношеніе сторонъ AB и AC.

А. Плетневъ (Воронежъ).

№ 371. Даны двѣ пересѣкающіяся окружности O и O_1; черезъ одну изъ точекъ пересѣченія C продолжимъ радіусы OC и O_1C до пересѣченія съ окружностями соотвѣтственно въ точкахъ A и B, проведемъ черезъ ту-же точку C произвольную сѣкущую MN и продолжимъ радіусы MO и NO_1 до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ K. Показать: 1) что точки A, B, O, O_1 и вторая точка пересѣченія окружностей C_1 находятся на одной окружности, и 2) что уголъ MKN имѣетъ постоянную величину ($=\angle OCO_1$).

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 372. Исключить x, y, z и t изъ уравненій:

$$l=\frac{(t+y)(t+z)}{y-z},$$

$$m=\frac{(t+z)(t+x)}{z-x},$$

$$n=\frac{(t+x)(t+y)}{x-y}.$$

Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

Загадки и вопросы.

№ 12. Умножить, значитъ найти число, которое такъ составлено изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы. Найдемъ по этому правилу $\sqrt{3}.\sqrt{2}$. Изъ множимаго $\sqrt{3}$ нужно составить новое число такъ, какъ множитель $\sqrt{2}$ составленъ изъ $+1$, т. е. нужно $\sqrt{3}$ взять слагаемымъ два раза (получится $2\sqrt{3}$) и изъ этой суммы извлечь квадратный корень. Слѣдовательно получаемъ

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2\sqrt{3}}$$

что совершенно неправильно. Разъяснить, въ чемъ здѣсь недоразумѣніе.

В. Макашовъ (Ив.-Возн.)

№ 13. Имѣемъ по биному Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Сдѣлавъ $n=0$, находимъ:

$$(a+b)^0 = a^0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + b^0; \qquad (\alpha)$$

но: $$(a+b)^0 = 1;\ a^0 = 1;\ b^0 = 1,$$

Слѣдовательно изъ (α) получаемъ

$$1=2.$$

Требуется найти ошибку. (Заимств. *Ш.*)

Упражненія для учениковъ.

1. Для всякаго треугольника существуетъ точка равноудаленная отъ его вершинъ; эта точка—которую назовемъ точкою O треугольника—служитъ центромъ окружности описанной около треугольника.—Когда точка O принадлежитъ внутреннему полю треугольника?—Когда принадлежитъ она внѣшнему полю? когда лежитъ она на одной изъ сторонъ треугольника?

2. Чрезъ вершины треугольника ABC проведемъ прямыя, по порядку, параллельныя его сторонамъ; эти прямыя образуютъ треугольникъ $A_1B_1C_1$ описанный около перваго. Доказать, что

a) стороны описаннаго треугольника вдвое больше сторонъ вписаннаго;

b) вершины вписаннаго треугольника служатъ срединами сторонъ описаннаго;

c) что высоты треугольника ABC пересѣкаются въ общей точкѣ.

Назовемъ точку встрѣчи высотъ треугольника точкою H треугольника. Точка H разлагаетъ каждую изъ высотъ треугольника на два отрѣзка: одинъ—верхній, другой нижній.

3. Въ треугольникѣ ABC, точка H соединена съ одной изъ вершинъ, напр., съ вершиной A и изъ точки O опущенъ на противолежащую сторону перпендикуляръ OD. Доказать AH=2.OD.

4. Пусть прямая AD—одна изъ медіанъ треугольника ABC—пересѣкаетъ въ точкѣ G прямую OH. Доказать, что 1) прямая AD отсѣкаетъ отъ OH одну треть ея длины, считая отъ O (GH=2.GO); 2) медіаны треугольника встрѣчаются въ общей точкѣ (точка G треугольника); 3) точка G разлагаетъ каждую медіану на два отрѣзка, изъ которыхъ верхній вдвое больше нижняго.

5. Пусть F средина прямой OH и пусть прямая DF встрѣчаетъ въ точкѣ M верхній отрѣзокъ AH высоты AH_1. Доказать, что 1) M есть средина AH, 2) $FM=FD=\frac{1}{2}.AO\left(=\frac{R}{2}\right)$, 3) $FH_1=FD$ (*смотри* на прямоугольный треугольникъ MH_1D!)

6. Для всякаго треугольника существуетъ окружность, которая одновременно проходитъ чрезъ средины сторонъ треугольника, чрезъ основанія его высотъ и чрезъ средины верхнихъ отрѣзковъ высотъ; центръ этой окружности совпадаетъ съ срединою разстоянія OH, радіусъ ея—вдвое меньше радіуса окружности описанной около взятаго треугольника. Разсмотрѣнная окружность носитъ иногда названіе окружности *девяти точекъ*, а также—окружности Фейербаха.

7. Въ треугольникѣ ABC, вписанномъ въ окружность O, діаметръ BO встрѣчаетъ окружность въ точкѣ B_1. Показать, что фигура CB_1AH есть параллелограмъ.

8. Въ треугольникѣ ABC, вписанномъ въ окружность O, діаметры проведенные изъ вершинъ A, B, C, встрѣчаютъ описанную окружность, по порядку, въ точкахъ A_1, B_1, C_1. Показать, что площадь $AC_1BA_1CB_1A$ вдвое больше площади взятаго треугольника.

9. Всякая прямая, которая исходитъ изъ точки H треугольника и ограничена окружностью O, дѣлится пополамъ окружностью девяти точекъ.

10. Высоты треугольника встрѣчаютъ описанную окружность въ точкахъ: A_1, B_1 C_1. Показать, что точки: H и A_1, H и B_1, H и C_1 симметричны, по порядку, относительно сторонъ взятаго треугольника.

А. Гольденбергъ (Спб.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 240. Изъ двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ одна лежитъ своими концами на противоположныхъ сторонахъ квадрата, другая—на остальныхъ сторонахъ его. Доказать, что эти прямыя равны.

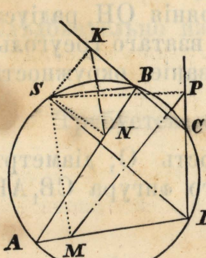
Пусть ABCD данный квадратъ, MN и PQ данныя перпендикулярныя прямыя, лежащія своими концами на AB и CD, и на AD и BC. Проведя перпендикуляры NS и PR, заключаемъ, что треугольники MSN и PQR равны, такъ какъ NS=PR; $\angle SNM=\angle QPR$, какъ углы съ перпендикулярными сторонами, а потому MN=PQ.

I. Абъ (Орелъ), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.), *М. Кузьменко* (сл. Бѣлая), *И. Кукуджановъ* (Кіевъ), *С. Блажко* (Моска). Ученики: Кіев. I г. (8) *В. Б.*, Черн. г. (7) *Д. З.*, Мог. р. уч. (7) *Я. И.*, Курск. г. (6) *В. Х.*, Ворон. к. к. (?) *К.*, (6) *Н. В.* и (7) *А. П.*, Вят. р. уч. (7) *И. П.*, Полоцк. к. к. (7) *Т.*, Короч. г. (8) *Н. Г.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кишинев. р. уч. (7) *Д. Л.*

№ 246. Доказать теорему: произведенiе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки окружности на двѣ противоположныя стороны вписаннаго въ нее четыреугольника, равняется произведенiю перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ той же точки на двѣ другiя его стороны.

Пусть ABCD данный четыреугольникъ (фиг. 43) SM, SN, SP и SK опредѣленные условiемъ перпендикуляры. Такъ какъ

Фиг. 43.



$$\angle SKB + \angle SNB = 2d$$

и

$$\angle SPD + \angle SMD = 2d,$$

то мы заключаемъ, что около четыреугольниковъ SKBN и SMDP можно описать круги. Поэтому

$$\angle SKN = \angle SBA \text{ и } \angle SPM = \angle SDA.$$

Но

$$\angle SBA = \angle SDA,$$

слѣдовательно

$$\angle SKN = \angle SPM \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

Кромѣ того

$$\angle KSN = 180° - \angle KBN$$

и

$$\angle MSP = 180° - \angle ADC.$$

Отсюда

$$\angle KSN = \angle MSP \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(2)$$

потому что

$$180° - \angle KBN = \angle ABC = 180° - \angle ADC.$$

На основанiи (1) и (2) равенствъ, заключаемъ, что треугольники NSK и MSP подобны. Изъ ихъ подобiя имѣемъ

$$SM:SP = SN:SK,$$

или

$$SM.SK = SN.SP.$$

В. Соллертинскiй (Гатчино), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Ворон. к. к. (?) *К.*, Т.-Х.-Ш. р. уч. (7) *С. Х.*, Полоцк. к. к. (7 *В. Ч.*, Елабуж. р. уч. (6) *А. Я.*, Кишин. р. уч. (7) *Д. Л.*

№ 248. Показать, что если $a+b+c=2s$, то

$$a(s-a)^2+b(s-b)^2+c(s-c)^2+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc.$$

Умножимъ обѣ части этого выраженія на 4, тогда

$$a(2s-2a)^2+b(2s-2b)^2+c(2s-2c)^2+(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)=4abc;$$

или, замѣняя вездѣ $2s$ чрезъ $a+b+c$, получимъ

$$a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+c(a+b-c)^2+(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=4abc.$$

Раскроемъ скобки и сдѣлаемъ приведеніе, тогда получимъ въ концѣ концовъ тождество:

$$abc=abc.$$

Ивановскій (Воронежъ). Ученики: Курск. г. (7) *Э. Б.* и *А. В.*, Новг.-Сѣв. г. (8) *В. М.*, Прилук. г. (?) *В. Б.*, Вят. р. уч. (7) *И. П.*, Ектрсл. г. (8) *I. М.*, Ворон. к. к. (7) *А. П.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 249. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}-\sqrt[3]{2x^2-16x-26}=0.$$

Перенесемъ третій радикалъ во вторую часть и затѣмъ возвысимъ обѣ части уравненія въ кубъ. Тогда, послѣ незначительныхъ преобразованій получимъ:

$$\sqrt[3]{(x^2-7x+10)(x^2-9x-36)}\left[\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}\right]=0.$$

Первый множитель даетъ такіе четыре корня для x

$$2,\ 5;\ 12, -3.$$

Второй же множитель даетъ

$$x=4\pm\sqrt{29}.$$

Ивановскій (Воронежъ), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Ворон. к. к. (6) *Н. В.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 256. Дана геометрическая прогрессія:

$$\div \operatorname{Sin}x,\ 2\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}x,\ 4\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}^2x,\ 8\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}^3x\ \ldots.$$

при условіи

$$90^\circ > x > 0;$$

требуется опредѣлить:

1) при какихъ значеніяхъ x прогрессія становится возрастающею и убывающею,

2) общее выраженіе для предѣла суммы членовъ въ случаѣ безконечно убывающей прогрессіи,

3) частное значеніе угла x, при которомъ этотъ предѣлъ равенъ $2\sqrt{2}$.

1) Знаменатель данной прогрессіи $2\mathrm{Cos}x$, слѣдовательно прогрессія будетъ возрастающею, когда $\mathrm{Cos}x > \frac{1}{2}$ и убывающею, если $\mathrm{Cos}x < \frac{1}{2}$. Но уголъ, Cos котораго$=\frac{1}{2}$, равенъ $60°$. Такъ что при $x < 60°$ прогрессія возрастающая, а при $x > 60°$—убывающая.

2) Въ случаѣ безконечно убывающей прогрессіи имѣемъ, по общей формулѣ:

$$S=\frac{\mathrm{Sin}x}{1-2\mathrm{Cos}x}=\frac{1}{\mathrm{Cosec}x-2\mathrm{ctg}x}.$$

3) Чтобы отвѣтить на третій вопросъ, надо рѣшить уравненіе:

$$\frac{1}{\mathrm{Cosec}x-2\mathrm{ctg}x}=2\sqrt{2}.$$

Приведя это уравненіе къ одному знаменателю и возвысивъ обѣ части въ квадратъ, легко получить такое квадратное уравненіе:

$$24\mathrm{ctg}^2x+8\sqrt{2}\ \mathrm{ctg}x-7=0.$$

Отсюда имѣемъ: $\mathrm{ctg}x=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

въ такомъ случаѣ $x=70°31'43,6''$.

Второй корень не удовлетворяетъ условію

$$90° > x.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Курск. г. (8) *П. Г.*, Тифл. р. уч. (7) *П. Н.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ 16 Ноября 1888 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

НОВОЕ ИЗОБРѢТЕНІЕ
ЛИНОВАЛЬНАЯ МАШИНКА
ВИРПШИ.

Серебряная медаль на Екатеринбургской выставкѣ. Линуетъ быстро бумагу различнаго формата, въ различныхъ направленіяхъ: **горизонтально, вертикально,** болѣе или менѣе наклонно, **часто** или **рѣдко**—по желанію.

КОНТОРСКАЯ ЛИНОВАЛЬНАЯ МАШИНКА

съ карандашами и перьями для линованія **различными** цвѣтными **чернилами** различной величины бланокъ, конторскихъ книгъ, нотныхъ графъ и пр. Одной машинки достаточно для цѣлаго учрежденія. Стопа писчей бумаги разлиновывается ею въ $1^1/_2$ часа.

Цѣна 25 р. съ перес. за 40 ф.

ШКОЛЬНАЯ МАШИНКА

для линованія тетрадей (тетрадь разлиновывается въ 3—4) минуты съ карандашами и перьями.

Цѣна 8 р. перес. за 6 фунт.

АДРЕСЪ: **гор. САРАПУЛЬ** (Вятск. губ.) въ Фотографію братьевъ **ВИРПША.**

Машинки высылаются съ наложеннымъ платежемъ по полученіи $^1/_3$ выше означенной суммы денегъ.

Отзывъ Директора Сарапульскаго Реальнаго училища.

Изобрѣтенная г. Валентиномъ Вирпша **линовальная машинка,** удостоенная серебряной медали на Екатеринбургской выставкѣ, по своей практичности, простотѣ устройства и скорости работы представляетъ весьма полезное и необходимое учебное пособіе для сельскихъ и городскихъ училищъ. Машинка эта значительно сокращаетъ время и трудъ, которые обыкновенно тратятся на утомительную разграфку ученическихъ тетрадей при помощи линейки и карандаша; самая разграфка производится въ ней карандашами или особыми перьями съ чернилами, весьма быстро и отчетливо, съ равными разстояніями между линіями, которыя могутъ быть проведены въ какихъ угодно направленіяхъ.

Простота устройства машинки даетъ возможность работать съ нею прямо, безъ особаго навыка и подготовки.

Пріобрѣтенная для Сарапульскаго реальнаго училища линовальная машинка послѣдняго, усовершенствованнаго устройства, при которомъ всѣ перья заразъ погружаются въ общій желобокъ съ чернилами, употребляется для разграфки ученическихъ тетрадей при урокахъ чистописанія. Машинка эта работаетъ очень быстро, отчетливо и вѣрно и по своей практичности заслуживаетъ полнаго одобренія.

Директоръ училища **А. Генкель.**

11-го Октября 1887 года. 1—3.