№ 48.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕМЪ УЧЕН. КОМИТ. МИН. НАРОДН. ПРОСВ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ

для пріобрѣтенія: а) въ фундаментальныя и ученическія библіотеки мужскихъ гимназій, прогимназій и реальныхъ училищъ; б) въ библіотеки учительскихъ институтовъ, семинарій, женскихъ гимназій и городскихъ училищъ.

IV Семестра № 12-й.

ЭКШ

КІЕВЪ.
Типографія И. Н. Кушнерева и К°, Елисаветинская улица, домъ Михельсона.
1888.

СОДЕРЖАНІЕ № 48.

Касательный кругъ. (Окончаніе). Отвѣтъ на предложенную тему. *А. Бобятинскаго.*— Хроника: Засѣданіе Физическаго Отдѣленія Рус. Физ.-Хим. Общ. въ С.-Петербургѣ 10 Мая. *О. Стр.*—Рецензіи: „Къ ученію о простыхъ числахъ". (П. Порѣцкаго) Пр. *В. Ермакова.*— Поправка къ рецензіи г. Савельева о книгѣ: „Матеріалы къ изученію метеорологіи" (Б. Голицына). - Задачи №№ 326—330.—Рѣшенія задачъ №№ 214, 215, 217, 219, 236, 244, 257, 268 и 284.—Запоздалыя рѣшенія. Отъ Редакціи.

Заглавный листъ и Содержаніе IV-го семестра.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 48.

IV Сем. 15 Мая 1888 г. № 12.

Касательный кругъ.

(Отвѣтъ на тему, предложенную въ № 23 „Вѣстника“).

Статья вторая *).

Теоремы, изложенныя нами съ достаточною подробностью въ первой части этого отвѣта (см. стр. 74 сем. III), позволяютъ намъ приступить теперь къ рѣшенію общей задачи Аполлонія Пергамскаго о построеніи круга, касательнаго къ тремъ даннымъ кругамъ, составляющей предметъ настоящаго изслѣдованія.

Повторяемъ здѣсь вкратцѣ ранѣе доказанныя теоремы.

Теорема 1. Геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ равныя степени относительно двухъ данныхъ круговъ, есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ, носящая названіе *радикальной оси* этихъ круговъ.

(Если черезъ нѣкоторую точку A проведемъ сѣкующую, пересѣкающую кругъ O въ точкахъ B и C, то степенью точки A относительно этого круга называется произведеніе отрѣзковъ AB.AC).

Теорема 2. Радикальныя оси трехъ окружностей пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой *радикальнымъ центромъ*.

---

*) Мы не могли, къ сожалѣнію, помѣстить окончанія статьи г. Бобятинскаго въ одномъ изъ №№ третьяго семестра. Въ виду этого приводимъ теперь для удобства читателей въ началѣ этой 2-ой статьи краткое резюме содержанія 1-ой, вошедшей въ № 28 „Вѣстника“.

Прим. редакціи.

Радикальный центръ лежитъ на безконечности, если центры трехъ данныхъ круговъ лежатъ на одной прямой.

Двѣ точки, дѣлящія внѣшне и внутренне разстояніе между центрами двухъ круговъ въ отношеніи ихъ радіусовъ, называются *центрами подобія* этихъ круговъ.

Лучемъ подобія называется всякая сѣкущая, проходящая черезъ центръ подобія.

Теорема 3. Разстоянія луча подобія отъ центровъ двухъ данныхъ круговъ пропорціональны ихъ радіусамъ.

И обратно: если разстоянія нѣкоторой прямой отъ центровъ двухъ круговъ пропорціональны ихъ радіусамъ, то прямая проходитъ черезъ одинъ изъ центровъ подобія круговъ.

Соотвѣтственными точками всякаго луча подобія называются тѣ двѣ точки его пересѣченія съ данными окружностями, которыя лежатъ на параллельныхъ радіусахъ. Въ зависимости отъ этого отрѣзки луча подобія, хорды и касательныя двухъ данныхъ круговъ бываютъ соотвѣтственными и несоотвѣтственными.

Теорема 4. Соотвѣтственные отрѣзки одного и того-же луча подобія пропорціональны радіусамъ.

Теорема 5. Произведеніе несоотвѣтственныхъ отрѣзковъ сохраняетъ постоянную величину.

Теорема 6. Соотвѣтственныя хорды и соотвѣтственныя касательныя параллельны.

Теорема 7. Двѣ точки одной окружности и двѣ несоотвѣтственныя имъ точки другой окружности находятся на одной окружности.

Теорема 8. Точка пересѣченія несоотвѣтственыхъ хордъ находится на радикальной оси.

Слѣдствіе. Точка пересѣченія двухъ несоотвѣтственныхъ касательныхъ тоже лежитъ на радикальной оси.

Теорема 9. Прямая, соединяющая два центра подобія трехъ данныхъ круговъ, проходитъ черезъ третій центръ подобія.

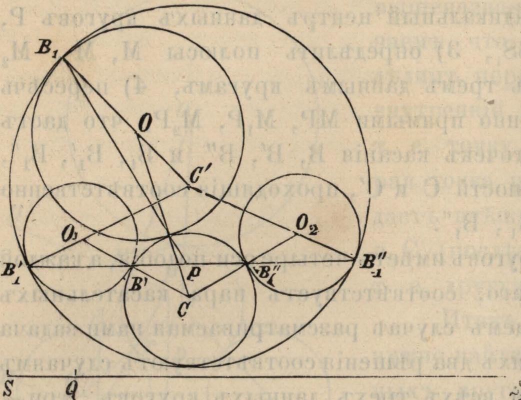
Шесть центровъ подобія трехъ круговъ распредѣляются на четырехъ прямыхъ, которыя называются *осями подобія.*

Слѣдствіе. Если нѣкоторый кругъ C касается двухъ данныхъ круговъ O и O_1, то прямая, соединяющая точки касанія, проходитъ черезъ одинъ изъ центровъ подобія этихъ круговъ.

Теорема 10. Если одна пара круговъ касается одинаковымъ или противоположнымъ образомъ другой пары круговъ, то радикальная ось одной пары проходитъ черезъ центръ подобія другой пары круговъ.

§ 5. На основанiи этихъ теоремъ можемъ приступить къ рѣшенiю общей задачи Аполлонiя Пергамскаго.

Фиг. 55.



Пусть къ тремъ даннымъ кругамъ O, O_1, O_2 (фиг. 55) требуется провесть касательную окружность. Допустимъ, что задача рѣшена, и двѣ окружности C и C′ касаются одинаковымъ образомъ данныхъ круговъ, первая внѣшне въ точкахъ B, B′, B″, а вторая внутренне въ точкахъ B_1, B'_1, B_1''. Такъ какъ кругъ O касается круговъ C и C′ противоположнымъ образомъ, то прямая BB_1 должна пройти черезъ внутреннiй центръ подобiя круговъ C и C′ (Слѣдствiе Теор. 9). То же относится и къ остальнымъ кругамъ O_1 и O_2, и слѣдовательно всѣ три прямыя BB_1, B'_1B', $B''B_1''$ должны пересѣчься въ одной точкѣ P, которая представляетъ внутреннiй центръ подобiя искомыхъ круговъ C и C′.

Съ другой стороны пара круговъ O и O_1 касается пары круговъ C и C′, а потому (на основанiи теор. 10) заключаемъ, что радикальная ось круговъ O и O_1 должна проходить черезъ внутреннiй центръ подобiя P круговъ C и C′ и наоборотъ, радикальная ось круговъ C и C′, должна проходить черезъ внѣшнiй центръ подобiя S круговъ O и O_1. То-же относится и къ касанiю паръ круговъ O и O_2 съ C и C′ и круговъ O_1 и O_2 съ C и C′. Отсюда заключаемъ, что точка P есть пересѣченiе трехъ радикальныхъ осей данныхъ круговъ, т. е. представляетъ собою ихъ радикальный центръ, а радикальная ось SS_1 искомыхъ круговъ проходитъ черезъ три центра подобiя данныхъ круговъ, т. е. составляетъ одну изъ ихъ осей подобiя.

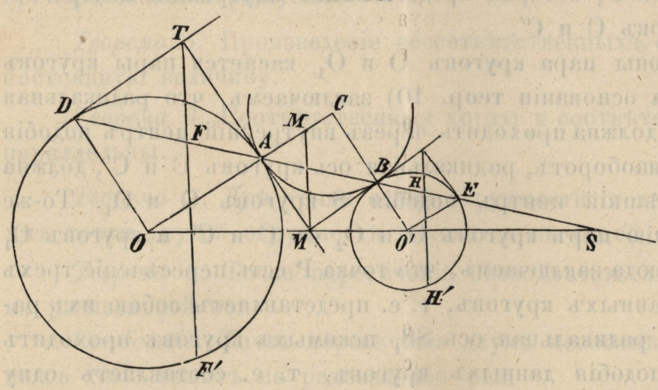
Точки касанiя каждаго изъ данныхъ круговъ съ искомыми, напр. круга O_1 точки B′ и B_1', лежатъ на лучѣ подобiя $B_1'B'P$ и представляютъ собою (по отношенiю къ кругамъ C и C′) точки несоотвѣтственныя; а потому касательныя, проведенныя въ этихъ точкахъ должны пересѣкаться на радикальной оси SS_1 круговъ C и C′ (слѣдствiе теор. 8). Такъ напр. касательныя въ точкахъ B′ и B_1' (на чертежѣ онѣ не проведены) пересѣкаются въ точкѣ Q, лежащей на радикальной оси SS_1; иными словами: полюсъ прямой $B'B_1'$ лежитъ на радикальной оси SS_1, а слѣдовательно и обратно: полюсъ прямой SS_1 долженъ лежать на прямой $B'B'_1$. То-же самое относится и къ остальнымъ кругамъ O и O_2, и полюсы радикальной оси SS_1 относительно этихъ круговъ должны лежать соотвѣтственно на хордахъ BB_1 и $B''B'''$.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что для общаго рѣшенія предложенной задачи нужно: 1) найти радикальный центръ данныхъ круговъ P, 2) провесть ихъ ось подобія SS_1, 3) опредѣлить полюсы M, M_1, M_2 этой прямой по отношенію къ тремъ даннымъ кругамъ, 4) пересѣчь данныя окружности соотвѣтственно прямыми MP, M_1P, M_2P, что дастъ намъ вообще шесть искомыхъ точекъ касанія B, B', B'' и B_1, B_1', B_1'', и наконецъ 5) построить окружности C и C', проходящія соотвѣтственно черезъ точки B, B', B'' и B_1, B_1', B_1''.

Такъ какъ система трехъ круговъ имѣетъ четыре оси подобія, а каждой оси, какъ видно изъ предыдущаго, соотвѣтствуетъ пара касательныхъ окружностей, то въ самомъ общемъ случаѣ разсматриваемая нами задача имѣетъ восемь рѣшеній. Изъ нихъ два рѣшенія соотвѣтствуютъ случаямъ внѣшняго и внутренняго касанія всѣхъ трехъ данныхъ круговъ, три—случаямъ внѣшняго касанія двухъ круговъ и внутренняго касанія одного круга, и три—случаямъ внѣшняго касанія одного круга и внутренняго двухъ.

§ 6. Покажемъ теперь второй способъ рѣшенія той-же задачи.

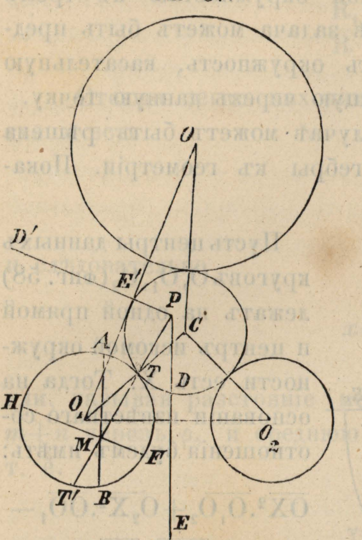
Фиг. 56.



Пусть кругъ C касается въ точкахъ A и B двухъ данныхъ круговъ O и O′ (фиг. 56). На основаніи слѣдствія теоремы 9-ой линія AB должна проходить черезъ центръ подобія S. Точки D и B, а слѣдовательно и касательныя DT и BN будутъ соотвѣтственныя; точки A и E и касательныя въ нихъ будутъ тоже соотвѣтственныя. Проведя линіи TF′, MN, HH′, перпендикулярныя къ линіи центровъ, получимъ: TF′—поляру центра подобія S относительно круга O, HH′—поляру того-же центра относительно круга O′ и радикальную ось MN круговъ O и O′, которая будетъ общею соотвѣтственною этихъ поляръ.

Разсмотримъ теперь окружность C, которая касается извнѣ трехъ данныхъ круговъ O, O_1, O_2 (фиг. 57). Радикальная ось DE круговъ O_1, O_2 будетъ соотвѣтственной линіей поляры AB внѣшняго центра подобія относительно O_1; точно также радикальная ось D′E′ будетъ соотвѣтственной прямой для поляры HF центра подобія (круговъ O, O_1) относительно того-же круга O_1. Слѣдовательно точка пересѣченія этихъ радикальныхъ осей P (т. е. радикальный центръ трехъ данныхъ круговъ) будетъ

Фиг 57.



соотвѣтственной точкой пересѣченія M двухъ вышеназванныхъ полярь. Отсюда заключаемъ, что, соединивъ точки P и M, опредѣлимъ пересѣченіемъ MP съ кругомъ O_1 внутренній центръ подобія круговъ O_1 и C, т. е. точку T ихъ взаимнаго касанія. Вторая точка пересѣченія MP съ кругомъ O_1 дастъ внѣшній центръ подобія круговъ O_1 и C′ (послѣдній на чертежѣ не проведенъ), т. е. другую искомую точку касанія T′.

Итакъ, для опредѣленія точекъ касанія нужно найти радикальный центръ трехъ данныхъ круговъ, потомъ построить поляры центровъ подобія и пересѣчанія ихъ соединить прямыми съ радикальнымъ центромъ. Пересѣченія этихъ прямыхъ съ соотвѣтственными данными окружностями опредѣлятъ искомыя точки касанія.—Комбинируя пересѣченіе поляръ, получимъ четыре пары касательныхъ круговъ, т. е. восемь рѣшеній въ общемъ случаѣ.

§ 7. Замѣтимъ еще, что прямыя, соединяющія точки касанія искомыхъ касательныхъ круговъ, проходятъ черезъ центры подобія данныхъ круговъ; слѣдовательно задачу о проведеніи окружности къ тремъ даннымъ можно свести на слѣдующую:

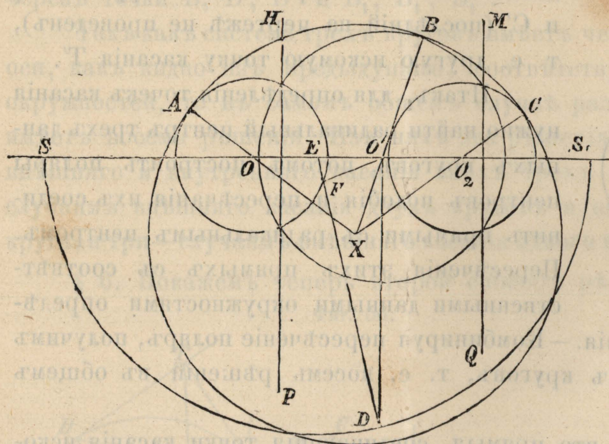
Построить треугольникъ, вершины котораго лежатъ на трехъ данныхъ окружностяхъ, а стороны проходятъ черезъ три данныя точки.

Но рѣшеніе этой задачи методомъ обратныхъ фигуръ на столько сложно, что мы не будемъ здѣсь его разсматривать.

§ 8. Изложенный нами методъ общаго рѣшенія задачи не примѣнимъ въ томъ случаѣ, когда центры трехъ данныхъ круговъ находятся на одной прямой, ибо тогда радикальный центръ ихъ лежитъ на безконечности. Но не трудно видѣть, что въ этомъ случаѣ можно по обыкновенному методу свести задачу на непосредственно ей предшествующую (см. списокъ послѣдовательныхъ 10 задачъ Аполлонія Пергамскаго въ первой части настоящей статьи, стр. 75 сем. III), къ рѣшенію которой можно точно также примѣнить методъ Новой Геометріи, что мы ниже и покажемъ. Дѣйствительно, если радіусы данныхъ круговъ O, O_1, O_2, центры которыхъ лежатъ на одной прямой, будутъ R, R_1, R_2, и если $R > R_1 > R_2$, то, описавъ изъ точекъ O и O_1 концентрическія даннымъ окружности радіусами $R \pm R_2$ и $R_1 \pm R_2$, видимъ, что окружность, касающаяся этихъ концентрическихъ окружностей и проходящая черезъ точку O_2, будетъ концентрична съ искомой касательной окружностью къ тремъ даннымъ. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ задача можетъ быть предварительно сведена къ слѣдующей: построить окружность, касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ и проходящую черезъ данную точку.

Впрочемъ задача въ этомъ частномъ случаѣ можетъ быть рѣшена и непосредственно по методу приложенія алгебры къ геометріи. Покажемъ это.

Фиг. 58.



Пусть центры данныхъ круговъ O, O_1, O_2 (фиг. 58) лежатъ на одной прямой и центръ искомой окружности есть X. Тогда на основаніи извѣстнаго соотношенія будемъ имѣть:

$$\overline{OX}^2 . \overline{O_1O_2} + \overline{O_2X}^2 . \overline{OO_1} - \\ - \overline{O_1X}^2 . \overline{OO_2} = \\ = \overline{OO_1} . \overline{O_1O_2} . \overline{OO_2}.$$

Называя радіусъ искомой касательной окружности AX черезъ x, радіусы данныхъ черезъ R, R_1, R_2 и разстоянія между центрами OO_1 черезъ a и O_1O_2 черезъ b, находимъ для x выраженіе

$$x = \frac{a(R_1{}^2 - R_2{}^2) + b(R_1{}^2 - R^2) + ab(a+b)}{2\left[a(R_1 - R_2) + b(R_1 - R)\right]}$$

или, все равно,

$$x = \frac{\dfrac{a}{2} + \dfrac{R_1{}^2 - R^2}{2a} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{R_1{}^2 - R_2{}^2}{2b}}{\dfrac{R_1 - R}{a} + \dfrac{R_1 - R_2}{b}} \qquad (\alpha)$$

Проведемъ теперь радикальныя оси HP и MQ, и пусть разстояніе первой отъ O_1 есть m, а второй—n. Тогда, (какъ было сказано въ § 2).

$$m = \frac{a}{2} + \frac{R_1{}^2 - R^2}{2a}; \qquad n = \frac{b}{2} + \frac{R_1{}^2 - R_2{}^2}{2b};$$

слѣдовательно

$$x = \frac{m+n}{\dfrac{R_1 - R}{a} + \dfrac{R_1 - R_2}{b}}$$

Если S и S_1 суть центры подобія круговъ O, O_1 и O_1, O_2, то какъ извѣстно (§ 3).

$$\frac{R_1}{R}=\frac{SO_1}{SO}, \quad \frac{R_1}{R_2}=\frac{S_1O_1}{S_1O_2}.$$

Отсюда легко находимъ, что знаменатель послѣдняго выраженія для x есть

$$\frac{R_1 . SS_1}{SO_1 . S_1O_1}$$

и слѣдовательно

$$x=\frac{(m+n)SO_1 . S_1O_1}{R_1 . SS_1}$$

или, называя разстояніе между радикальными осями HP и MQ т. е. $m+n$ черезъ ρ, и среднюю гармоническую между SO_1 и S_1O_1 черезъ γ, т. е.

$$\gamma=\frac{SO_1 . S_1O_1}{1/_2(SO_1+S_1O_1)},$$

будемъ имѣть окончательно

$$x=\frac{\rho}{R_1} \cdot \frac{\gamma}{2},$$

что легко построить. (Для построенія γ опишемъ полуокружность на діаметрѣ SS_1 изъ центра E; тогда O_1D представитъ среднюю геометрическую отрѣзковъ SO_1 и S_1O_1, ED—ихъ среднюю ариѳметическую, а DF—гдѣ F есть основаніе перпендикуляра изъ O_1 на ED—среднюю гармоническую γ тѣхъ-же отрѣзковъ SO_1 и S_1O_1).

Опредѣливъ такимъ образомъ радіусъ искомой окружности x, найдемъ и ея центръ X, очертивъ изъ O и O_2 дуги до взаимнаго пересѣченія радіусами $x—R$ и $x—R_2$.

Если бы искомая касательная окружность касалась напр. круговъ O и O_2 внутренне, а круга O—внѣшне, то слѣдовало бы брать для круговъ O и O_1 внутренній центръ подобія, и тогда въ знаменателѣ выраженія (α) для x первый членъ былъ бы $\frac{R_1+R}{a}$. Вообще въ зависимости отъ знаковъ обоихъ членовъ этого знаменателя можетъ быть получено четыре рѣшенія, а такъ какъ вся фигура при расположеніи центровъ данныхъ круговъ на одной прямой симметрична относительно этой прямой, то каждая изъ найденныхъ окружностей X имѣетъ симметричную ей касательную окружность X′.

§ 9. Такъ какъ при $R=0$ окружность обращается въ точку, а при $R=\infty$—въ прямую линію, то изложенный нами методъ рѣшенія задачи о проведеніи касательной окружности можетъ быть примѣнимъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣкоторые изъ данныхъ круговъ замѣнены въ условіяхъ точками или прямыми. Соотвѣтственно этому должны, конечно, измѣняться въ этихъ частныхъ случаяхъ наши понятія о радикальной оси, центрѣ подобія и пр.

Итакъ: 1) Если изъ двухъ данныхъ круговъ O и O_1 одинъ, напримѣръ второй, обращается въ точку ($R_1=0$), то разстояніе радикальной оси отъ центра O, которое вообще, какъ мы видѣли, выражается формулою

$$m=\frac{d}{2}+\frac{R^2-R_1^{\,2}}{2d},$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами, будетъ теперь

$$m=\frac{d}{2}+\frac{R^2}{2d},$$

при чемъ радикальная ось, сохраняя свое свойство, будетъ дѣлить пополамъ касательныя, проведенныя изъ точки O_1 къ кругу O. Пользуясь этимъ, мы можемъ, стало быть, находить построеніемъ радикальную ось даннаго круга и данной точки.

Мы видѣли (§ 3), что разстоянія отъ O центровъ подобія S и S_1 двухъ круговъ O и O_1 и выражаются формулами:

$$SO=d\frac{R}{R-R_1}; \qquad S_1O=d\frac{R}{R+R_1};$$

отсюда видимъ, что при $R_1=0$ оба центра подобія окружности O и точки O_1 сливаются съ этою точкою.

2) Если оба данные круга O и O_1 превращаются въ точки ($R=R_1=0$), имѣемъ

$$m=\frac{d}{2}; \quad SO=\infty; \quad S_1O=\frac{d}{2};$$

т. е. радикальная ось двухъ данныхъ точекъ есть перпендикуляръ изъ средины разстоянія между ними, внѣшній центръ подобія двухъ точекъ лежитъ на безконечности, а внутренній дѣлитъ разстояніе между ними пополамъ.

3) Если изъ двухъ данныхъ окружностей O и O_1 одна, напр. вторая, превращается въ прямую линію ($R_1=\infty$), тогда разстояніе m радикальной оси отъ центра O найдется по формулѣ

$$m=\frac{a+R_1}{2}+\frac{R^2-R_1^{\,2}}{2(a+R_1)},$$

гдѣ черезъ a мы обозначили конечную величину $d-R_1$. Приводя къ одному знаменателю, дѣля на R_1 и полагая затѣмъ $R_1=\infty$, находимъ $m=a$, т. е. приходимъ къ заключенію, что радикальная ось данной окружности и прямой сливается съ этою прямою.

Изъ формулъ для разстояній центровъ подобія точно также получаемъ величины $-R$ и $+R$, т. е. центры подобія окружности и прямой лежатъ на окружности, внѣшній въ самой отдаленной, а внутренній—въ самой близкой ея точкѣ къ прямой.

4) Если обѣ данныя окружности превращаются въ прямыя линіи, не трудно видѣть, что радикальная ось превращается въ биссекторъ угла, ими образуемаго.

5) Радикальная ось точки и прямой есть сама прямая. Центры подобія совпадаютъ въ этомъ случаѣ съ самой точкой.

Замѣтимъ, наконецъ, что полюсъ прямой относительно точки совпадаетъ съ этой точкой.

На основаніи такихъ соображеній не трудно примѣнить вышеизложенный методъ рѣшенія къ построенію вообще касательныхъ окружностей. Разсмотримъ для примѣра ту задачу, на которую обыкновенно сводится рѣшеніе задачи о построеніи окружности касательной къ тремъ даннымъ, а именно: *построить окружность касательную къ двумъ даннымъ кругамъ O и O_1 и проходящую черезъ данную точку A.*

Примѣняя общій методъ, въ томъ видѣ, какъ онъ изложенъ нами въ § 6, мы должны помнить, что вмѣсто третьей данной окружности O_2 имѣемъ теперь точку A. Проведя касательныя изъ A къ кругамъ O и O_1 и раздѣливъ каждую пару пополамъ, найдемъ двѣ радикальныя оси для точки A и круговъ O и O_1; пересѣченіе ихъ съ третьею радикальною осью (круговъ O и O_1) дастъ намъ радикальный центръ P нашей системы. Такъ какъ въ точкѣ A сливаются 4 центра подобія (системы O, A и O_1, A) то намъ остается найти еще 2 центра подобія S (внѣшній) и S_1 (внутр.) системы O, O_1 и построить въ кругахъ O и O_1 поляры точекъ A, S и S_1; пересѣченіе ихъ дастъ намъ двѣ точки M и M' въ кругѣ O и двѣ точки N и N' въ кругѣ O_1. Соединяя наконецъ точки M и N съ точкою P, получимъ въ пересѣченіи прямыхъ MP и NP съ данными окружностями четыре искомыя точки касанія, по которымъ постромъ двѣ касательныя окружности проходящія черезъ точку A, а соединивъ еще точки M' и N' съ P, получимъ въ пересѣченіи съ дннными окружностями еще четыре точки касанія, которыя опредѣлятъ положеніе еще двухъ искомыхъ касательныхъ окружностей. Слѣдовательно въ общемъ случаѣ задача должна имѣть 4 рѣшенія.

Для примѣра рѣшимъ по этому способу еще одну задачу: *построить* *окружность касательную къ данной окружности* O *и двумъ даннымъ прямымъ* L *и* L_1.

Радикальною осью системы O,L будетъ прямая L, для системы O,L_1—прямая L и для системы L,L_1—биссекторъ ихъ угла; слѣдовательно радикальнымъ центромъ будетъ вершина угла P, образуемаго данными прямыми. Ближайшая и отдаленнѣйшая отъ L точки данной окружности S_1 и S будутъ центрами подобія системы O,L; точно также такія-же двѣ точки T_1 и T будутъ центрами подобія системы O,L_1. Пересѣченіе касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ S и S_1, дастъ полюсъ p линіи SS_1; точно также найдемъ полюсъ q хорды TT_1. Соединивъ наконецъ полюсы p и q съ точкою P, получимъ въ пересѣченіи прямыхъ Pp и Pq съ данною окружностью четыре искомыя точки касанія, по которымъ легко уже находятся всѣ четыре рѣшенія задачи.

§ 10. Итакъ, замѣтимъ въ заключеніе, для рѣшенія задачи Аполлонія Пергамскаго можно придерживаться одного изъ четырехъ методовъ, а именно:

1) Метода геометрическихъ мѣстъ, примѣнимаго во всѣхъ случаяхъ, но сложнаго по той причинѣ, что при его примѣненіи рѣшеніе сводится на рѣшеніе всѣхъ предыдущихъ задачъ, въ порядкѣ указаномъ нами ранѣе (см. § 1, стр. 75, 76 сем. III).

2) Метода новой геометріи, основаннаго на отысканіи радикальнаго центра и полюсовъ осей подобія (§ 5).

3) Метода новой геометріи, основаннаго на отысканіи радикальнаго центра и пересѣченій поляръ центровъ подобія (§ 6).

и 4) Метода обратныхъ фигуръ, котораго мы здѣсь не разсматривали, такъ какъ въ примѣненіи къ общей задачѣ онъ очень сложенъ, хотя и можетъ быть употребляемъ съ удобствомъ при рѣшеніи предварительныхъ задачъ.

А. Бобятинскій (Ег. зол. пром.)

Научная хроника.

Физика.

Засѣданіе Физическаго Отдѣленія Рус. Физ.-Хим. Общ. въ С.-Пб. 10 Мая.

Предсѣдатель Общ. Θ. Θ. Петрушевскій читаетъ предложеніе Филаделфійскаго Общ. принять участіе въ конгрессѣ съ цѣлью выработать интернаціональный научный языкъ; читается отвѣтное письмо вдовы путешественника Миклухи-Маклай и ассигнуется сумма для изданія отчета по наблюденіямъ солнечнаго затменія 7 Августа 1887 г.

В. В. Николаевъ дѣлаетъ сообщенiе по теорiи единицъ.

Θ. Θ. Петрушевскiй сообщаетъ о высыхающихъ маслахъ и о масляныхъ краскахъ. Физическихъ изслѣдованiй матерiаловъ, употребляемыхъ художниками для письма картинъ, очень мало. Всевозможныя масла въ связи съ краской образуютъ внѣшнюю оболочку картины и слѣдовало бы озаботиться о долговѣчности этой оболочки; а между тѣмъ фабриканты красокъ заботятся болѣе о красотѣ и яркости колеровъ, чѣмъ о ихъ прочности. Поэтому Θ Θ. Петрушевскiй и занялся изслѣдованiемъ физическихъ свойствъ маселъ. Докладчикъ производилъ опыты надъ различными сортами маселъ, большинство которыхъ были приготовлены въ физич. каб. Спб. Университета. Масла наносились на стекляныя пластинки и взвѣшивались (въ продолженiи 2 лѣтъ) ежедневно. Вслѣдствiе поглощенiя масломъ кислорода воздуха вѣсъ пластинки сначала увеличивается, а потомъ медленно уменьшается и достигаетъ своей первоначальной величины. Льняное же и конопляное масло не достигаютъ своего первоначальнаго вѣса и черезъ два года; эти масла поэтому для живописи мало пригодны. Удѣльный вѣсъ льняного масла=0,932 можетъ измѣниться черезъ 17 лѣтъ въ 1,0007; въ видѣ пленки=1,117.—Бѣлила съ содержанiемъ воды для живописи не годятся, ибо вода въ первый моментъ испаряется и краска пузырится —Краски, приготовленныя на эфирномъ маслѣ быстро уменьшаются въ вѣсѣ, слѣдовательно быстро сохнутъ.—Различнаго сорта краски также наносились на стекляныя пластинки и ежедневно опредѣлялся вѣсъ и плотность каждой краски; эти данныя дали возможность вычислить измѣненiе объема краски со временемъ. Оказалось, что въ нѣкоторыхъ сортахъ красокъ уменьшенiе объема достигаетъ $26^{0}/_{0}$; картина, писанная такою краской, должна со временемъ потрескаться. Въ этихъ многочисленныхъ опытахъ Θ. Θ. Петрушевскому помогали Г. А. Любославскiй, Н. Н. Хамантовъ и студентъ Смирновъ.

А. Н. Крыловъ показалъ и объяснилъ устройство магнитнаго дефлектора Коллонга.

В. К. Цераскiй сообщаетъ устройство астрономическаго окуляра, предназначеннаго для изслѣдованiя солнечнаго диска. Въ астрономической трубѣ вывинчиваютъ окуляръ и вмѣсто него помѣщаютъ на нѣкоторомъ разстоянiи двояко выпуклое стекло. Стекло это ставится до схожденiя лучей, такъ что получается труба Галлилея. Между трубой и окуляромъ ставится металлическiй конусъ съ малымъ отверстiемъ и плоское тонко высеребренное стеклышко; это послѣднее ослабляетъ силу свѣта. При употребленiи вышеописаннаго окуляра устраняется нагрѣванiе скеколъ ибо, во первыхъ, металлическiй конусъ разсѣиваетъ отраженiемъ всѣ лучи за исключенiемъ центральныхъ, во вторыхъ—въ этой системѣ нѣтъ глазной точки, лучи не пересѣкаются и изображенiе получается мнимое.

Н. Г. Егоровъ читаетъ выводы, сдѣланные коммисiей по наблюденiю надъ солнечнымъ затменiемъ изъ всего матерiала, присланнаго коммиссiи. Вотъ главнѣйшiе изъ нихъ: солнечная корона имѣла свой обычный видъ при минимумѣ пятенъ т. е. перистая у полюсовъ и растянутая по экватору; корона не есть оптическое явленiе, а нѣчто реальное, ибо всѣ фотографiи, присланныя изъ различныхъ мѣстъ, почти тождественны; яркость короны того же порядка какъ луны въ полнолуніе; спектръ короны непрерывный съ сильными темными линіями; во время полной фазы атмосферное давленіе и температура немного понижались, вѣтеръ ослабѣвалъ, а облачность увеличивалась. *О. Стр.* (Спб.)

Библіографическіе отчеты, рецензіи и пр.

„Къ ученію о простыхъ числахъ.“ Изслѣдованіе астронома-наблюдателя, приватъ-доцента Математической Логики, доктора Астрономіи *П. Порѣцкаго*. Казань. 1888 г. (89 стр. in 8°; цѣна не обозначена).

Авторъ прежде всего занимается вопросомъ о формѣ чиселъ взаимно простыхъ съ даннымъ числомъ m. Въ теоріи чиселъ принято обозначать черезъ $\varphi(m)$ число чиселъ, меньщихъ m и взаимно-простыхъ съ нимъ. Авторъ вводитъ новый символъ $\Psi(m)$, подъ которымъ подразумѣвается всякое число меньшее m и взаимно-простое съ нимъ; иными словами, $\Psi(m)$ должна быть такою многозначною функціею, имѣющею $\varphi(m)$ значеній, которая служила бы къ нахожденію всѣхъ чиселъ меньшихъ m и взаимно-простыхъ съ нимъ. Ознакомивъ читателя съ формулами Дюпре (1859 г.) и Дормуа (1866 г.), опредѣляющими видъ функцій $\Psi(m)$ въ нѣкоторыхъ лишь частныхъ случаяхъ, авторъ излагаетъ на 30 стр. свойства этого новаго символа. Приводимъ здѣсь главнѣйшія изъ нихъ.

1) Если m есть простое число, которое мы обозначимъ черезъ p, то $\Psi(p)$ означаетъ произвольное цѣлое число меньшее p.

2) Если m есть степень простого числа, т. е. если $m=p^\alpha$, то

$$\Psi(p^\alpha)=\Psi(p)+hp,$$

гдѣ h есть произвольное цѣлое число, не превосходящее $p^{\alpha-1}$.

3) Если m есть произведеніе простыхъ чиселъ, т. е. если $m=$ $=p_1 p_2 p_3 \ldots$, то

$$\Psi(p_1 p_2 p_3 \ldots)=p_1 p_2 p_3 \ldots \left[\frac{\Psi(p_1)}{p_1}+\frac{\Psi(p_2)}{p_2}+\frac{\Psi(p_3)}{p_3}+\ldots-k\right]$$

гдѣ цѣлое число k должно быть выбрано такимъ образомъ, чтобы выраженіе въ скобкахъ было положительно и меньше единицы.

4) Вообще, если m разбивается на произведеніе нѣсколькихъ взаимно-простыхъ множителей, $m=abc\ldots$, то

$$\frac{\Psi(m)}{m}=\frac{\Psi(a)}{a}+\frac{\Psi(b)}{b}+\frac{\Psi(c)}{c}+\ldots$$

Напримѣръ:

$$\frac{\Psi(120)}{120}=\frac{\Psi(8)}{8}+\frac{\Psi(15)}{15}.$$

Впрочемъ это равенство при данномъ выше опредѣленіи символа $\Psi(m)$ не имѣетъ мѣста, такъ какъ вторая часть можетъ превосходить первую на нѣкоторое цѣлое число. Если же мы дадимъ другое опредѣленіе

$\Psi(m)$, а именно, если будемъ подразумѣвать подъ этимъ символомъ не только какое нибудь одно число m' меньшее m и взаимно-простое съ нимъ, но цѣлый классъ чиселъ, сравниваемыхъ съ m' по модулю m, то при такомъ болѣе общемъ опредѣленіи послѣднее равенство имѣетъ мѣсто.

Далѣе авторъ разсматриваетъ нѣкоторые другіе вопросы, относящіеся къ теоріи простыхъ чиселъ, къ ихъ выдѣленію и проч. и относительно ихъ рѣшенія даетъ полезныя указанія и замѣчанія. Въ концѣ книжки помѣщенъ списокъ сочиненій и мемуаровъ, относящихся къ теоріи простыхъ чиселъ и служившихъ для автора источниками *).

Пр. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

Поправка.

Въ № 46 „Вѣстника" (стр. 231) въ рецензіи г. Савельева о книгѣ: „Матеріалы къ изученію метеорологіи" составитель книги (по лекціямъ М. А. Рыкачева въ Николаевской Морской Академіи) названъ по ошибкѣ *В. Голицынымъ*. Въ дѣйствительности книга эта составлена *Б. Голицынымъ*, проживающимъ въ настоящее время въ Страсбургѣ.—Та-же самая опечатка вошла и въ объявленіе о вышеназванной книгѣ на оберткѣ № 37 нашего журнала.

Задачи.

№ 326. Найти общій видъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3, на 5 и на 7 даютъ соотвѣтственно остатки 2, 4 и 6. (Заимств.) *Ш*.

№ 337. Показать, что при $a+b+c=0$, выраженія

$$a^3b+b^3c+c^3a$$

и

$$a^3c+b^3a+c^3b$$

тождественны и, умноженныя на—1, даютъ каждое полный квадратъ. (Заимств.) *Ш*.

№ 328. Правильный многоугольникъ нечетнаго числа сторонъ вписанъ въ окружность; пусть вершины его, считая въ одномъ направленіи, будутъ послѣдовательно: A_1, A_2, A_3, . . . A_{2n+1}. Доказать, что сумма хордъ, соединяющихъ произвольную точку окружности M съ нечетными вершинами A_1, A_3, A_5, . . . A_{2n+1}, равна суммѣ хордъ, соединяющихъ ту-же точку M съ остальными четными вершинами A_2, A_4, A_6, . . . A_{2n}. (Заимств.) *Ш*.

№ 329. Опредѣлить объемъ косого параллелепипеда, ребра котораго (сходящіяся въ одной вершинѣ) a, b, c образуютъ между собою углы въ 45°. *П. Маевскій* (Кіевъ)

---

*) Въ настоящее время (въ Казани) готовится къ печати изслѣдованіе того-же автора о распознаваніи простыхъ чиселъ. *Прим. редакціи*

№ 330. На сторонахъ треугольника AC и AB взяты соотвѣтственно точки B_1 и C_1 такъ, что

$$AB_1 = AB \text{ и } AC_1 = AC.$$

На отрѣзкахъ AB_1 и AC_1 построенъ параллелограмъ, діагональ котораго AP_a пересѣкаетъ сторону BC въ точкѣ α. Доказать, что:

1) $$B\alpha : \alpha C = c^2 : b^2;$$

2) $$A\alpha = \frac{2bc}{b^2 + c^2} m,$$

гдѣ m есть длина медіаны, соединяющей вершину A съ срединой M стороны BC;

3) $$\frac{m + A\alpha}{m - A\alpha} = \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2};$$

4) уголъ между діагональю AP_a и стороною AC равенъ углу между медіаной AM и стороною AB, и

5)—если сдѣлаемъ подобное же построеніе относительно другихъ двухъ вершинъ треугольника B и C и обозначимъ діагонали соотвѣтствующихъ имъ параллелограмовъ черезъ BP_b и CP_c, —три прямыя AP_a, BP_b, CP_c пересѣкутся въ одной точкѣ.

А. Гольденбергъ (Спб.)

Рѣшенія задачъ.

№ 214. Найти треугольникъ, три стороны котораго и площадь выражались бы четырьмя послѣдовательными цѣлыми числами. Сколько можетъ быть такихъ треугольниковъ?

Если обозначимъ стороны треугольника чрезъ $x-1$, x, $x+1$ а площадь чрезъ $x+2$, то, опредѣляя площадь по периметру, имѣемъ

$$\sqrt{3x(x+2)(x-2)x} = 4(x+2).$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, находимъ, по приведеніи и сокращеніи:

$$3x^3 - 6x^2 - 16x - 32 = 0.$$

Тѣмъ или другимъ способомъ разлагаемъ это уравненіе на два множителя:

$$(x-4)(3x^2 + 6x + 8) = 0.$$

Отсюда: $$x = 4;\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{3}.$$

Условію вопроса удовлетворяетъ только первый корень, слѣдовательно стороны треугольника суть

3, 4 и 5.

А. Колтановскій (Нем.), *П. Никульцевъ* (См), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.), *Н. Артемьевъ* (Спб.) *Я. Тепляковъ* (К.), *В. Вознесенскій* (Ворон). Ученики: Курск. г. (6) *Т. Ш.* (8) *І. Ч.*, Т. X Ш. р. уч. (7) *С. Х.*, Тифл. р. уч. (6) *Н. П.*, Смол. г, (?) *С. Б.* Ворон. к. к. (8) *А. П.*, Астр. г. (8) *И. К.*

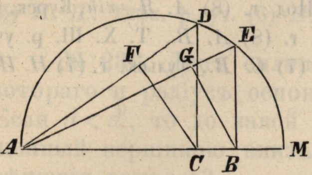
№ 215. Найти построеніемъ длины x и y, удовлетворяющія условію

$$x^2:y^2=a^3:b^3$$

гдѣ a и b данныя прямыя.

На произвольной прямой AM откладываемъ отъ A отрѣзки $AB=a$ и $AC=b$, потомъ описываемъ полуокружность ADEM произвольнаго радіуса, но чтобы $AM>a$. Изъ C и B возставляемъ перпендикуляры CD и BE. Соединивъ D и E съ A, изъ точекъ C и B опускаемъ перпендикуляры на AD и AE, тогда отрѣзки AF и AG и будутъ искомыми, т. е.

Фиг. 59.



$$AG^2:AF^2=a^3:b^3.$$

Доказат. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABE и ACD имѣемъ

$$\begin{aligned} a^2&=AE.AG. \\ b^2&=AD.AF. \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Кромѣ того:

$$\begin{aligned} AE^2&=a.AM. \\ AD^2&=b.AM. \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Возвысимъ обѣ части каждаго изъ равенствъ (1) въ квадратъ, и затѣмъ подставимъ вм. AE^2 и AD^2 ихъ величины изъ (2), тогда получимъ:

$$a^3=AM.AG^2$$

$$b^3=AM.AF^2,$$

Откуда: $AG^2:AF^2=a^3:b^3.$

А. Веприцкій (Карсъ), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.), *Н. Артемьевъ* (Спб.) Ученики: Курск. г. (5) *В. Х.* и (8) *П. А.*, Астр. г. (8) *И. К*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Вят. р. уч. (6) *И. П.*

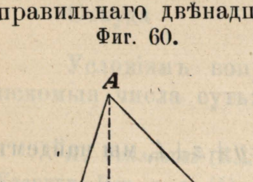
№ 217. Не вводя тригонометрическихъ величинъ, вычислить площадь треугольника по двумъ даннымъ сторонамъ a, b, если уголъ, заключенный между ними, равенъ 75°.

Пусть ABC данный треугольникъ, при чемъ

$$AB=b,\ BC=a \text{ и } \angle ABC=75°$$

Если примемъ BC за основаніе, то перпендикуляръ AK будетъ высотою треугольника относительно этого основанія, и тогда, очевидно, $\angle BAK=15°$. Слѣд. BK можно разсматривать какъ половину стороны правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса b.

Фиг. 60.



Итакъ

$$BK=\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Потомъ изъ треугольника AKB имѣемъ:

$$AK=\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Слѣдовательно искомая площадь

$$S=\frac{ab}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

П. Поповъ (Москва), *Н. Артемьевъ* (Спб), *А. Веприцкій* (Карсъ), *Я. Тепляковъ* (К.) Ученики: Никол. г. (8) *Р. Д.* и *А. В.*, Кіевск. I г. (7) *В. Б.*, Екатериносл. г. (8) *А. В.*, Елатом. г. (8) *Т. А.* и *М. К*, Черн. г. (6) *Р. М.*, Кам.-Под. г. (8) *А. Я—кій*, Курск. г. (8) *I. Ч.*, Короч. г. (?) *М. Ч.*, Астр. г. (8) *И. К.*, Лубн. г. (8) *А. В.*, Т. Х. Ш. р. уч. (7) *С. Х.*, Рост. (на Дону) р. уч. (7) *И. Д.*, Нов.-Сѣв. г. (7) *С. В.*, Тульск. г. (7) *Н. И.*, Вят. р. уч. (6) *И. П.*, Ворон. к. к. (7) *А. П.*

№ 219. Рѣшить уравненія:

$$xy+zt=a,$$
$$xz+yt=b,$$
$$xt+yz=c,$$
$$x+y+z+t=d.$$

Сложивъ первое со вторымъ, потомъ первое съ третьимъ, и наконецъ, второе съ третьимъ, получимъ

$$(x+t)(y+z)=a+b,$$
$$(x+z)(y+t)=a+c,$$
$$(x+y)(z+t)=b+c.$$

Но изъ четвертаго уравненія имѣемъ:

$$y+z=d-(x+t),$$
$$y+t=d-(x+z),$$
$$z+t=d-(x+y).$$

Слѣдовательно вышенаписанныя уравненія могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$(x+t)^2-d(x+t)+a+b=0,$$
$$(x+z)^2-d(x+z)+a+c=0,$$
$$(x+y)^2-d(x+y)+b+c=0.$$

Отсюда опредѣлимъ:

$$(x+t),\ (x+z) \text{ и } (x+y).$$

Сложивъ же эти послѣднія, и помня что $d-x=y+z+t$, мы найдемъ, что

$$x=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4(a+b)}\pm\sqrt{d^2-4(a+c)}\pm\sqrt{d^2-4(b+c)}}{4}$$

Зная же x, нетрудно уже опредѣлить изъ суммъ

$$(x+t),\ (x+z) \text{ и } (x+y)$$

и остальныя неизвѣстныя.

А. Веприцкій (Карсъ), *П. Никульцевъ* (См.), *Я. Тепляковъ* и *В. Якубовскій* (Кіевъ), *Е. Предтеченскій* (Самара) Ученики: Черниг. г. (6) *Р. М.*, Никол. г. (8) *А. В.*, Курск. г. (5) *В. Х.*, Кіев. I г. (7) *В. Б.*, Лубен. г. (8) *К. К.*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Вятск. р. уч. (6) *И. П.*, Тифл. р. уч. (6) *Н. П.*, Кам.-Под. г. (6) *Ш. Л.*, Воронеж. к. к. (6) *А. П.*

№ 236. Данъ сплошной конусъ изъ вещества плотности d, высота котораго и радіусъ основанія суть h и r, и дана жидкость плотности d'. Если $d<d'$, то до какой глубины погружается конусъ въ жидкость, опущенный вершиною внизъ? Какая изъ заданныхъ величинъ лишняя для рѣшенія вопроса?

Такъ какъ $d<d'$, то погружается въ жидкость часть конуса, которая представитъ конусъ подобный данному, и высоту котораго означимъ черезъ h'; вѣсъ даннаго конуса равенъ вѣсу вытѣсненной жидкости, а такъ какъ объемы при одинаковомъ вѣсѣ обратно пропорціональны плотностямъ, и объемы даннаго конуса и части его относятся какъ кубы высотъ, то

$$h^3 : h'^3 = d' : d,$$

отсюда

$$h' = h\sqrt[3]{\frac{d}{d'}}.$$

Слѣд. давать r, радіусъ основанія, было совершенно лишнимъ.

Я. Тепляковъ (К.) Ученики: Кіев. I г. (7) *В. Б.*, Могил. р. уч. (6) *Я. И.*, Вят. р. уч. (6) *И. П.*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Ворон. к. к. (7) *А. П.*, Тифлиск. р. уч. (6) *Н. П.*, Астр. г. (8) *И. К.*, Екатериносл. г. (8) *А. В.*

№ 244. Найти четыре цѣлыя послѣдовательныя числа, при условіи, что кубъ наибольшаго равенъ суммѣ кубовъ трехъ остальныхъ.

Означая наименьшее изъ четырехъ искомыхъ чиселъ черезъ x, будемъ имѣть, по условію,

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3.$$

Перенесемъ всѣ члены въ одну сторону и сдѣлаемъ приведеніе, тогда найдемъ, что

$$(x-3)(x^2+3x+3)=0.$$

Откуда

$$x=3,\ x=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Условіямъ вопроса удовлетворяетъ только первый корень, слѣд. искомыя числа суть:

$$3,\ 4,\ 5 \text{ и } 6.$$

Я. Тепляковъ (К.), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *Ивановскій* (Ворон.), *Е. Ходуновъ* (Курскъ.) Ученики: Вор. к. к. (5) *Н. В.*, (6) *А. П.* и (?) *И. К.*, и *П.*, Мог. р. уч. (6) *Я. И.* Курск. г. (7) *А. В.* и *Э. Б.*, (8) *І. Ч.*, Тул. г. (7) *Н. И.*, Измаилов. прог. (6) *Т. Х.*, Вят. р уч. (6) *И. П*, Екатеринсл. г. (7) *І. М.*, Т. Х. Ш. р. уч. (7) *С Х.*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Тифл. р. уч. (6) *Н. П.*

№ 257. (Изъ Сборника Геометрическихъ задачъ В. Минина. См. стр. 41, задача № 223, 1879 г. изд 2-ое). „Стороны треугольника содержатъ: одна 30, другая 24 и третья 20 метровъ. Опредѣлить длину прямой линіи, которая, проходя параллельно большей сторонѣ, дѣлитъ треугольникъ пополамъ." Какія изъ заданныхъ здѣсь условій лишнія?

Обозначая искомую длину чрезъ x, по извѣстной теоремѣ имѣемъ:

$$1:\frac{1}{2}=30^2:x^2.$$

Отсюда

$$x=15\sqrt{2}.$$

Слѣд. лишнее было давать численныя величины двухъ другихъ сторонъ треугольника.

Я. Тепляковъ (К.) *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). Ученики: Вороп. к. к. (5) *Н. В.* и (6) *А. П.*. Могил. р. уч. (6) *Я. И*, Курск. г. (7) *А. В.*, Екатериносл. г. (7) *І. М.* 10-й Петерб. г. (8) *О. Д.*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Короч. г. (7) *М. Б.*, Прилук. г. (?) *Б.*, Кам.-Под. г. (6) *А. Р.*, Тифл. р. уч. (6) *Н. П.*

№ 268. Фунтъ желѣза, нагрѣтый до температуры 76°R., брошенъ въ литръ воды, находящейся при температурѣ 4°С. При какой приблизительно температурѣ наступитъ тепловое равновѣсіе, если теплоемкость желѣза$=\frac{1}{9}$ и если не обращать вниманія на потерю тепла лучеиспусканіемъ и проводимостью?

Прежде всего замѣтимъ, что 76°R$=$95°С., 1 ф.$=$0,4 килогр., 1 литръ воды вѣситъ одинъ килограммъ. Тепловое равновѣсіе воды и желѣза наступитъ въ то время, когда оба тѣла будутъ имѣть одинаковую температуру; обозначимъ ее черезъ x. Если примемъ за единицу теплоты количество тепла необходимое для повышенія температуры 1 килогр. воды на 1°С, то на основаніи заданныхъ условій легко составить такое уравненіе:

$$\frac{(95^\circ-x)0{,}4}{9}=x-4.$$

Откуда имѣемъ приблизительно

$$x=7^\circ{,}8C=6^\circ{,}3R.$$

Ученицы (6) кл. Петрозаводской Маріинской гимназіи: *О. Пименова*, *Б. Кучевская* и *А. Фершукова*. Ученики: Смол. г. (?) *С. Б.*, Вятск. р. уч. (6) *И П.*, Екатериносл. г. (8) *А. Е.*, Троицкой г (?) *В. С.*

№ 284. Показать, что избытокъ куба какого нибудь цѣлаго числа надъ самымъ числомъ всегда дѣлится на три.

Обозначимъ какое нибудь цѣлое число чрезъ n, тогда имѣемъ:

$$n^3-n=(n-1)n(n+1),$$

а въ числѣ трехъ послѣдовательныхъ чиселъ одно непремѣнно дѣлится на три.

Я. Тепляковъ (Кіевъ), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *П. Преображенскій* (Варнав.), *А. Павловъ* (Екатеринбургъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). Ученики: Плоц. г. (6) *И. В.*, Черниг. г. (5) *С. Т.*, Вор. к. к. (6) *А. П.*, Одеск. III г. (7) *П. С.*, Екатериносл. г. (5) *М. Д.*, Смол. г. (?) *С. Б.*, Петерб. Екат. цер. уч. (5) *В. М.*, Курск. г. (5) *В. Х.* и (6) *Т. Ш.*, Донск. к. к. (5) *А. Е.* и *Ѳ. А.*, Владим. Дух. Сем. (4) *А. К.*

Запоздалыя рѣшенія:

Ивановскій (Ворон.) № 222. *Писаржевскій* (Овручъ.) № 194. Тифл. р. уч. (6) *Н. П.* №№ 114, 115, 119, 208 и 210. Оренбург. г. (7) *Ан. П.* № 222. Астр. г. (8) *И. К.* № 210. Екат. Петерб. уч. (5) *В. М.* № 210. Курск. г. (8) *І. Ч.* № 199. Камышин р. уч. (7) *П. С.* №№ 192, 199 и 222. Ворон. к. к. (6) *А. П.* № 210.

Отъ редакціи. По недостатку мѣста не были до сихъ поръ напечатаны рѣшенія слѣдующихъ задачъ;

№№ 26, 53, 82, 101, 125, 127, 128, 133, 137, 142, 143, 148, 149, 150, 152, 155, 156, 160, 171, 174, 178, 179, 180, 181, 182, 184, 186, 188, 189, 190, 191, 196, 198, 200, 201, 202, 203, 209, 213, 216, 218, 221, 223, 225, 226, 227, 228, 230, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 240, 241, 245, 246, 247, 248, 249, 250 и всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ (№ 251—№ 330) за исключеніемъ №№ 257, 268 и 284.

Вовсе не прислано рѣшеній на слѣдующіе вопросы и задачи: №№ 54, 61, 67, 75, 76, 83, 88, 90, 98, 106, 107, 120, 122, 126, 140, 141, 146, 147, 151, 153, 154, 157, 158, 170, 173, 204, 205, 206, 211, 220, 229, 239, 242, 243, 252, 266, 289, 302, 305.

Отъ Редакціи.

Четвертый семестръ изданія „Вѣстника" заканчивается настоящимъ № 48-ымъ. Послѣ каникулярной паузы № 1-ый пятаго семестра (№ 49) выйдетъ 20-го августа.

Подписка на V-ый семестръ и на весь 188⁸/₉ учебный годъ (V-ый и VI-ой сем.) считается открытой.

Условія подписки остаются безъ измѣненія, а именно: 6 рублей въ годъ и 3 р. въ полугодіе, а для *льготныхъ* подписчиковъ, которыми могутъ быть *только учащіеся и учителя начальныхъ училищъ*,—4 р. въ годъ и 2 р; въ полугодіе. Сброшюрованные комплекты №№ за каждое изъ четырехъ истекшихъ полугодій продаются по 2 р. 50 к. (съ пересылкою), а льготнымъ подписчикамъ—по 2 р.

Лица, желающія воспользоваться вышеуказанными льготными условіями, благоволятъ обращаться *непосредственно* въ контору редакціи, ибо передача подписки черезъ книжные магазины исключаетъ право льготы.

Учебныя заведенія, желающія получать выходящіе №№ журнала своевременно и безъ перерывовъ, приглашаются или слѣдить за своими сроками подписки и заблаговременно заявлять объ ея продолженіи, или-же (какъ это и сдѣлано уже многими заведеніями) прислать одинъ разъ на всегда заявленіе о внесеніи ихъ въ списокъ *постоянныхъ подписчиковъ* на опредѣленное число экземпляровъ. Такимъ подписчикамъ журналъ высылается безостановочно и въ соотвѣтственные сроки посылаются годичные счета.

Въ общемъ программа журнала остается безъ измѣненія; тѣмъ не менѣе съ будущаго учебнаго года предполагаются нами слѣдующія нововведенія:

1) Съ № 49-го открывается постоянная рубрика „*Содержаніе специальныхъ періодическихъ изданій*", въ которой безъ пропусковъ будемъ давать содержаніе (а иногда и краткое извлеченіе) русскихъ и нѣкоторыхъ иностранныхъ физико-математическихъ журналовъ, чтобы читатели наши имѣли возможность знать о появленіи главнѣйшихъ по крайней мѣрѣ въ этой области работъ.

2) Каждый № „Вѣстника" будетъ снабженъ второю (внутреннею) оберткою; на одной изъ ея страницъ будутъ печататься различныя *справочныя таблицы, собранія формулъ* и пр. Каждая изъ такихъ таблицъ будетъ помѣщена не болѣе трехъ разъ.

3) Въ видѣ опыта предполагаемъ еще открыть рубрику *русской физико-математической терминологіи* въ предположеніи, что намъ удастся привлечь къ этому полезному отдѣлу людей компетентныхъ и авторитетныхъ, которые помогутъ намъ установить *одно* научное названіе въ тѣхъ сомнительныхъ случаяхъ, когда никто хорошо не знаетъ какого термина предпочтительнѣе держаться.

4) Для удобства новыхъ подписчиковъ всѣ задачи (съ краткими ихъ рѣшеніями), предложенныя въ журналѣ въ теченіе 4-хъ лѣтъ (считая отъ основанія пр. В. П. Ермаковымъ „Журнала Элементарной Математики") будутъ изданы въ будущемъ учебномъ году отдѣльнымъ сборникомъ.

5) Отдавая по прежнему главное мѣсто въ журналѣ отдѣламъ спеціально-научному, педагогическому и учебному, будемъ стараться еще создать отдѣлъ популярныхъ бесѣдъ, доступныхъ болѣе обширному кругу читателей. Сюда войдетъ все то, что предназначается, такъ сказать, для болѣе легкаго чтенія, рядъ такихъ общедоступныхъ статей, сообщеній, замѣтокъ и пр., которыя не будутъ требовать столь напряженнаго со стороны читателя вниманія, какъ статьи спеціальныя, и которыя—съ другой стороны—позволятъ ихъ авторамъ высказаться подчасъ болѣе субъективно, не однимъ лишь языкомъ математическихъ формулъ.

6) Въ виду всѣхъ этихъ предполагаемыхъ расширеній программы, объемъ журнала будетъ увеличенъ по мѣрѣ нашей возможности.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 9 Іюня 1888 года.
Типографія И. Н. Кушнерева и К°, Елисаветинская улица, домъ Михельсона.

Въ книжномъ складѣ редакціи продаются:

	ЦѢНА СЪ ПЕРЕС.
1. Сочиненія проф. **В. П. Ермакова:**	
Теорія вѣроятностей 1879 г.	1 р. 65 к.
Диф. уравн. съ частн. произв. 1-го пор. съ 3-мя перем. 1880.	— „ 30 „
Диф. уравн. 2-го пор. 1880.	— „ 30 „
Теорія двойно-періодическихъ функцій. 1881	— „ 30 „
Нелин. диф. уравн. съ частн. произв. 1-го пор. со многими перем. и каноническія уравненія. 1884.	1 „ 40 „
Диф. уравн. 1-го пор. съ двумя перем. 1887.	1 „ 40 „
Способъ наименьшихъ квадратовъ. 1887.	— „ 25 „
Теорія векторовъ на плоскости. 1887.	— „ 90 „
2. Сочиненія проф. **М. Хандрикова:**	
Описательная астрон., общедоступно изложенная. 1886.	3 „ 30 „
Курсъ Анализа: 1. Дифференціальное исчисленіе, 2. Интегральное исчисленіе, 3 Интегрированіе диф. уравненій. 1887	6 „ 60 „
3. Сочиненія проф. **О. Хвольсона:**	
Попул. лекціи объ основныхъ гипотезахъ физики. 1887.	— „ 70 „
Объ абсолютныхъ единицахъ, въ особенности магнитныхъ и электрическихъ. 1887.	1 „ 40 „
4. Основной курсъ Аналитической Геометріи. Часть I. Геометрія на плоскости. Проф. **К. А. Андреева.** 1887 г.	2 „ 20 „
5. Краткій курсъ высшей алгебры. Проф. **М. Тихомандрицкаго** 1887 года	2 „ 75 „
6. Электричество въ элементарной обработкѣ К. Максуэля. Перев. подъ ред. проф. **М. Авенаріуса.** 1886	1 „ 65 „
7. Физическія изслѣдованія **А. Надеждина.** (посмер. изд.) 1887.	1 „ 65 „
8. Химикъ Ш. А. Вюрцъ. Перев. проф. **П. Алексѣева.** 1887.	— „ 55 „
9. Двухсотлѣтіе памяти Ньютона. 1888.	— „ 55 „
10. Начала начертательной геометріи съ приложеніемъ черченія кривыхъ. **А. Н. Пальшау** 2-ое изд. 1886.	1 „ 50 „
11. Сочиненія **Э. К. Шпачинскаго:**	
Электрическіе аккумуляторы. 1886.	— „ 55 „
О землетрясеніяхъ. 1887.	— „ 50 „
12. Сочиненія **И. Александрова:**	
Методы рѣш. геом. зад. на постр. 3-е изд. 1887.	1 „ 20 „
Методы рѣш. ариѳм. задачъ. 2-ое изд. 1887.	— „ 35 „
13. Сочиненія **Н. А. Конопацкаго:**	
Рѣчь Споттисвуда „О связи математики съ другими науками. 1885.	— „ 35 „
Систематическій курсъ ариѳметики. 1888.	— „ 45 „
14. Переводы **И. Н. Красовскаго:**	
Основы ариѳметики. Е. Коссака. 1885	— „ 55 „
Рѣчь Клаузіуса „Связь между великими дѣятелями природы“. 1885.	— „ 25 „
Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ, рѣшаемые посредствомъ уравн. 2-ой ст. Бріо. 1885.	— „ 45 „
15. Курсъ ариѳметики. **П. К. Алтунджи.** 1887.	— „ 75 „

и пр. и пр.

Адресъ редакціи: КІЕВЪ, Нижне-Владимірская, № 19.